PHƯƠNG TRÌNH TOÁN LÝ

TS. Lê Xuân Đại

Trường Đại học Bách Khoa TP HCM
Khoa Khoa học ứng dụng, bộ môn Toán ứng dụng

TP. HCM — 2015.

Nội dung môn học

1. Môn học trang bị cho sinh viên các kiến thức cơ bản của phương trình toán lý.

Nội dung môn học

1. Môn học trang bị cho sinh viên các kiến thức cơ bản của phương trình toán lý.
2. Môn học giúp sinh viên hiểu được vai trò và ứng dụng của phương trình toán lý trong các ngành khoa học cũng như trong cuộc sống.

Nội dung môn học

1. Môn học trang bị cho sinh viên các kiến thức cơ bản của phương trình toán lý.
2. Môn học giúp sinh viên hiểu được vai trò và ứng dụng của phương trình toán lý trong các ngành khoa học cũng như trong cuộc sống.
3. Kết thúc môn học sinh viên biết ứng dụng các mô hình phương trình toán lý đơn giản cho các bài toán trong chuyên ngành.

Nội dung bao gồm các chương sau:

Nội dung bao gồm các chương sau:

1. Phân loại phương trình tuyến tính cấp hai

Nội dung bao gồm các chương sau:

1. Phân loại phương trình tuyến tính cấp hai
2. Bài toán Cauchy và phương trình sóng

Nội dung bao gồm các chương sau:

1. Phân loại phương trình tuyến tính cấp hai
2. Bài toán Cauchy và phương trình sóng
3. Chuỗi Fourier và ứng dụng

Nội dung bao gồm các chương sau:

1. Phân loại phương trình tuyến tính cấp hai
2. Bài toán Cauchy và phương trình sóng
3. Chuỗi Fourier và ứng dụng
4. Phương pháp tách biến

Nội dung bao gồm các chương sau:

1. Phân loại phương trình tuyến tính cấp hai
2. Bài toán Cauchy và phương trình sóng
3. Chuỗi Fourier và ứng dụng
4. Phương pháp tách biến
5. Bài toán biên và ứng dụng

Nội dung bao gồm các chương sau:

1. Phân loại phương trình tuyến tính cấp hai
2. Bài toán Cauchy và phương trình sóng
3. Chuỗi Fourier và ứng dụng
4. Phương pháp tách biến
5. Bài toán biên và ứng dụng
6. Bài toán biên cấp cao

Nội dung bao gồm các chương sau:

1. Phân loại phương trình tuyến tính cấp hai
2. Bài toán Cauchy và phương trình sóng
3. Chuỗi Fourier và ứng dụng
4. Phương pháp tách biến
5. Bài toán biên và ứng dụng
6. Bài toán biên cấp cao
7. Hàm Green và bài toán biên

Nội dung bao gồm các chương sau:

1. Phân loại phương trình tuyến tính cấp hai
2. Bài toán Cauchy và phương trình sóng
3. Chuỗi Fourier và ứng dụng
4. Phương pháp tách biến
5. Bài toán biên và ứng dụng
6. Bài toán biên cấp cao
7. Hàm Green và bài toán biên
8. Phương pháp giải số và xấp xỉ

Nhiệm vụ của sinh viên

Nhiệm vụ của sinh viên

- Đi học đầy đủ (nếu vắng quá phân nửa số buổi học trong học kỳ, giáo viên có quyền đề nghị cấm thi).

Nhiệm vụ của sinh viên

- Đi học đầy đủ (nếu vắng quá phân nửa số buổi học trong học kỳ, giáo viên có quyền đề nghị cấm thi).
- Tham dự giờ giảng trên lớp và làm tất cả các bài tập.

Nhiệm vụ của sinh viên

- Đi học đầy đủ (nếu vắng quá phân nửa số buổi học trong học kỳ, giáo viên có quyền đề nghị cấm thi).
- Tham dự giờ giảng trên lớp và làm tất cả các bài tập.
- Đọc bài mới trước khi đến lớp.

Nhiệm vụ của sinh viên

- Đi học đầy đủ (nếu vắng quá phân nửa số buổi học trong học kỳ, giáo viên có quyền đề nghị cấm thi).
- Tham dự giờ giảng trên lớp và làm tất cả các bài tập.
- Đọc bài mới trước khi đến lớp.
- Nghiên cứu phần mềm tính toán MatLab để tính toán mô phỏng.

Phương pháp đánh giá

Phương pháp đánh giá

1. Thi giữa kỳ tự luận - 40%.

Phương pháp đánh giá

1. Thi giữa kỳ tự luận - 40%.
2. Thi viết tự luận cuối kỳ (90 phút) - 60%

TÀI LIỆU THAM KHẢO

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- **Phan Huy Thiện.** *Phương trình toán lý*. NXB GIÁO DỤC VIỆT NAM (2010)

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- **Phan Huy Thiện.** *Phương trình toán lý*. NXB GIÁO DỤC VIỆT NAM (2010)
- **Nguyễn Văn Hùng, Lê Văn Trực.** *Phương pháp toán cho vật lý*, tập 1. NXB ĐHQG HÀ NỘI (2007)
- **Lê Văn Trực, Nguyễn Văn Thỏa.** *Phương pháp toán cho vật lý*, tập 2. NXB ĐHQG HÀ NỘI (2008)

TÀI LIỆU THAM KHẢO

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Tyn Myint-U, Lokenath Debnath. *Linear Partial Differential Equations for Scientists and Engineers.* Birkhauser, Boston, Basel, Berlin (2007).

Định nghĩa

Phương trình đạo hàm riêng là phương trình có dạng

$$F(x, y, \ldots, u, u_x, u_y, \ldots, u_{xx}, u_{xy}, \ldots) = 0, \quad (1)$$

$F-$*là hàm nhiều biến với biến số là* $x, y, \ldots, u, u_x, u_y, \ldots, u_{xx}, u_{xy}, \ldots$.

Ta phải tìm hàm số $u(x, y, \ldots)$ sao cho phương trình (1) là đồng nhất thức theo những biến này, khi ta thay $u(x, y, \ldots)$ và những đạo hàm riêng của nó vào phương trình trên

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u_y = \frac{\partial u}{\partial y}, \ldots$$

$$u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

Lúc này hàm số $u(x, y, \ldots)$ được gọi là *nghiệm của phương trình đạo hàm riêng* (1).

Chúng ta không chỉ tìm nghiệm riêng lẻ mà còn nghiên cứu mọi tập hợp nghiệm, và trong trường hợp riêng chọn ra những nghiệm riêng với những điều kiện bổ sung vào phương trình (1).
Phương trình đạo hàm riêng (1) sẽ trở thành phương trình vi phân thông thường, nếu chỉ có 1 biến số.

Chúng ta không chỉ tìm nghiệm riêng lẻ mà còn nghiên cứu mọi tập hợp nghiệm, và trong trường hợp riêng chọn ra những nghiệm riêng với những điều kiện bổ sung vào phương trình (1).
Phương trình đạo hàm riêng (1) sẽ trở thành phương trình vi phân thông thường, nếu chỉ có 1 biến số.
Cấp của đạo hàm cao nhất trong phương trình vi phân, được gọi là cấp của phương trình vi phân này.

Ví dụ 1. $3x\dfrac{\partial u}{\partial y} + xy^2\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$ – PTĐHR cấp 1.

Ví dụ 1. $3x\dfrac{\partial u}{\partial y} + xy^2\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$– PTĐHR cấp 1.

Ví dụ 2. $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 3\sin x\dfrac{\partial u}{\partial y} + u - 1 = 0$–
PTĐHR cấp 1.

Ví dụ 1. $3x\dfrac{\partial u}{\partial y} + xy^2\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$– PTĐHR cấp 1.

Ví dụ 2. $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 3\sin x\dfrac{\partial u}{\partial y} + u - 1 = 0$– PTĐHR cấp 1.

Ví dụ 3. $\dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$– PTĐHR cấp 2.

Ví dụ 1. $3x\frac{\partial u}{\partial y} + xy^2\frac{\partial u}{\partial x} = 0$– PTĐHR cấp 1.

Ví dụ 2. $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 3\sin x\frac{\partial u}{\partial y} + u - 1 = 0$– PTĐHR cấp 1.

Ví dụ 3. $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$– PTĐHR cấp 2.

Ví dụ 4. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$– PTĐHR cấp 2.

Ví dụ 1. $3x\dfrac{\partial u}{\partial y} + xy^2\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$– PTĐHR cấp 1.

Ví dụ 2. $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 3\sin x\dfrac{\partial u}{\partial y} + u - 1 = 0$– PTĐHR cấp 1.

Ví dụ 3. $\dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$– PTĐHR cấp 2.

Ví dụ 4. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$– PTĐHR cấp 2.

Định nghĩa

Phương trình vi phân được gọi là tuyến tính, nếu hàm số F *tuyến tính theo biến* $u, u_x, u_y, \ldots, u_{xx}, u_{xy}, \ldots$ *và những hệ số chỉ phụ thuộc vào biến số* $x, y, \ldots$.

Phần lớn ta sẽ nghiên cứu những phương trình tuyến tính; những phương trình có dạng tổng quát hơn thường sẽ được biến đổi về những phương trình tuyến tính.

Ví dụ 1. Phương trình tuyến tính cấp 1 hai biến

$$A\frac{\partial u}{\partial x} + B\frac{\partial u}{\partial y} + Cu = f,$$

trong đó A, B, C, f là hàm hai biến phụ thuộc vào x, y.

Ví dụ 1. Phương trình tuyến tính cấp 1 hai biến

$$A\frac{\partial u}{\partial x} + B\frac{\partial u}{\partial y} + Cu = f,$$

trong đó A, B, C, f là hàm hai biến phụ thuộc vào x, y.

Ví dụ 2. Phương trình tuyến tính cấp 2 hai biến

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + Fu = g,$$

trong đó A, B, C, D, E, F, g là hàm hai biến phụ thuộc vào x, y.

PTVPĐHR tuyến tính cấp 2 được gọi là

- Eliptic nếu $B^2 - AC < 0$
- Parabolic nếu $B^2 - AC = 0$
- Hyperbolic nếu $B^2 - AC > 0$
- thuần nhất nếu $g = 0$, không thuần nhất nếu $g \neq 0$.

1. Phương trình Laplace $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ là phương trình eliptic.
2. Phương trình truyền nhiệt $\dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ là phương trình parabolic.
3. Phương trình sóng $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ là phương trình hyperbolic.
4. Phương trình Tricomi $y\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ là PT eliptic ở $y > 0$ và là PT hyperbolic ở $y < 0$.

Tìm các miền trong đó các phương trình sau đây là hyperbolic, parabolic, elliptic

1. $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$
2. $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2x\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u + 1.$$

Cho phương trình tuyến tính cấp 2 hai biến

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + Fu = g,$$

trong đó A, B, C, D, E, F, g là hàm hai biến phụ thuộc vào x, y.

Cho phương trình tuyến tính cấp 2 hai biến

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + Fu = g,$$

trong đó A, B, C, D, E, F, g là hàm hai biến phụ thuộc vào x, y.

Bài toán. Bằng cách đổi biến $\xi = \varphi(x, y), \eta = \psi(x, y)$ và giả sử tồn tại phép biến đổi ngược, ta sẽ nhận được phương trình mới có dạng đơn giản nhất tương đương với phương trình ban đầu. Vấn đề chọn biến mới như thế nào?

$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x$, $u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y$.

$u_{xx} = u_{\xi\xi}(\xi_x)^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + u_{\eta\eta}(\eta_x)^2 + u_\xi \xi_{xx} + u_\eta \eta_{xx}$

$u_{xy} =$

$u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + u_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + u_\xi \xi_{xy} + u_\eta \eta_{xy}$

$u_{yy} = u_{\xi\xi}(\xi_y)^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + u_{\eta\eta}(\eta_y)^2 + u_\eta \xi_{yy} + u_\eta . \eta_{yy}$

Thay vào phương trình ban đầu ta được

$a_{11}u_{\xi\xi} + 2a_{12}u_{\xi\eta} + a_{22}u_{\eta\eta} + G = 0$, trong đó

$a_{11} = A(\xi_x)^2 + 2B\xi_x\xi_y + C(\xi_y)^2$,

$a_{12} = A\xi_x\eta_x + B(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + C\xi_y\eta_y$,

$a_{22} = A(\eta_x)^2 + 2B\eta_x\eta_y + C(\eta_y)^2$.

Định nghĩa

Đường $\varphi(x, y) = C = \mathbf{const}$ *được gọi là* *đường cong tích phân đặc trưng*, *nếu nó là nghiệm của phương trình*

$$A\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial\varphi}{\partial x}.\frac{\partial\varphi}{\partial y} + C\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 = 0.$$

Định nghĩa

Đường $\varphi(x,y) = C = \mathbf{const}$ *được gọi là* *đường cong tích phân đặc trưng*, *nếu nó là nghiệm của phương trình*

$$A\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial\varphi}{\partial x}.\frac{\partial\varphi}{\partial y} + C\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 = 0.$$

Vì $\varphi(x,y) = C$ nên

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy = 0.$$

Phương trình đặc trưng

$$A(dy)^2 - 2B.dxdy + C(dx)^2 = 0$$

1. Nếu $B^2 - AC > 0$ thì PTĐHR có 2 họ đặc trưng $Ady - (B + \sqrt{B^2 - AC})dx = 0$ và $Ady + (B + \sqrt{B^2 - AC})dx = 0$
2. Nếu $B^2 - AC = 0$ thì PTĐHR có 1 họ đặc trưng $Ady - Bdx = 0$
3. Nếu $B^2 - AC < 0$ thì PTĐHR có 2 họ đặc trưng $Ady - (B + i\sqrt{|B^2 - AC|})dx = 0$ và $Ady + (B - i\sqrt{|B^2 - AC|})dx = 0$

Đối với phương trình Hyperbolic thì $B^2 - AC > 0$ nên ta có 2 đường cong tích phân $\xi(x, y)$ và $\eta(x, y)$ do đó $a_{11} = 0$ và $a_{22} = 0$. Lúc này phương trình thu được có dạng $u_{\xi\eta} = \Phi(\xi, \eta, u_\xi, u_\eta)$. Đây là dạng chính tắc thứ nhất của phương trình loại Hyperbolic.

Đối với phương trình Hyperbolic thì $B^2 - AC > 0$ nên ta có 2 đường cong tích phân $\xi(x, y)$ và $\eta(x, y)$ do đó $a_{11} = 0$ và $a_{22} = 0$. Lúc này phương trình thu được có dạng $u_{\xi\eta} = \Phi(\xi, \eta, u_\xi, u_\eta)$. Đây là dạng chính tắc thứ nhất của phương trình loại Hyperbolic. Nếu đổi biến thêm 1 lần nữa $\alpha = \dfrac{\xi + \eta}{2}$, $\beta = \dfrac{\xi - \eta}{2}$, ta được $u_\xi = \dfrac{1}{2}(u_\alpha + u_\beta)$, $u_\eta = \dfrac{1}{2}(u_\alpha - u_\beta)$, $u_{\xi\eta} = \dfrac{1}{4}(u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta})$. Vậy $u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} = 4\Phi_1$. Đây là dạng chính tắc thứ hai của phương trình loại Hyperbolic.

Đối với phương trình Parabolic thì $B^2 - AC = 0$ nên ta có 1 đường cong tích phân $\xi(x, y)$ do đó $a_{11} = A(\xi_x)^2 + 2B\xi_x\xi_y + C(\xi_y)^2 = (\sqrt{A}\xi_x + \sqrt{C}\xi_y)^2 = 0$. Từ đó suy ra $a_{12} = A\xi_x\eta_x + B(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + C\xi_y\eta_y = (\sqrt{A}\xi_x + \sqrt{C}\xi_y)(\sqrt{A}\eta_x + \sqrt{C}\eta_y) = 0$. Lúc này phương trình thu được có dạng $u_{\eta\eta} = \Phi(\xi, \eta, u_\xi, u_\eta)$. Đây là dạng chính tắc của phương trình loại Parabolic.

Đối với phương trình Elliptic thì $B^2 - AC < 0$ nên ta có 2 đường cong tích phân phức $\xi(x, y) = \varphi(x, y)$ và $\eta(x, y) = \overline{\varphi(x, y)}$ do đó $a_{11} = 0$ và $a_{22} = 0$. Lúc này phương trình thu được có dạng $u_{\xi\eta} = \Phi(\xi, \eta, u_\xi, u_\eta)$ giống như phương trình loại Hyperbolic.

Đối với phương trình Elliptic thì $B^2 - AC < 0$ nên ta có 2 đường cong tích phân phức $\xi(x, y) = \varphi(x, y)$ và $\eta(x, y) = \overline{\varphi(x, y)}$ do đó $a_{11} = 0$ và $a_{22} = 0$. Lúc này phương trình thu được có dạng $u_{\xi\eta} = \Phi(\xi, \eta, u_\xi, u_\eta)$ giống như phương trình loại Hyperbolic. Để không gặp biến phức, ta đổi biến thêm 1 lần nữa $\alpha = \dfrac{\xi + \eta}{2}$, $\beta = \dfrac{\xi - \eta}{2i}$, ta được $u_{\xi\eta} = \dfrac{1}{4}(u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta})$. Vậy $u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} = 4\Phi_1$. Đây là dạng chính tắc của phương trình loại Elliptic.

Ví dụ 1.

Đưa phương trình sau về dạng chính tắc

$$x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} = 0$$

Ví dụ 1.

Đưa phương trình sau về dạng chính tắc

$$x^2u_{xx} - y^2u_{yy} = 0$$

$A = x^2, B = 0, C = -y^2$. $B^2 - AC = x^2y^2 > 0$.

Đây là phương trình thuộc dạng Hyperbolic.

Phương trình đặc trưng $x^2(dy)^2 - y^2(dx)^2 = 0 \Rightarrow$

$$\left[\begin{array}{l} xdy + ydx = 0 \\ xdy - ydx = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} xy = C_1 \\ \dfrac{y}{x} = C_2 \end{array}\right.$$

Thực hiện phép đổi biến $\xi = xy, \eta = \dfrac{y}{x}$. Khi đó ta có $u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = u_\xi y - u_\eta \dfrac{y}{x^2}$,

$u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y = u_\xi x + u_\eta \dfrac{1}{x}$.

$u_{xx} = (u_x)'_x =$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} y^2 - 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}.\frac{y^2}{x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}.\frac{y^2}{x^4} + 2\frac{\partial u}{\partial \eta}.\frac{y}{x^3}$$

$$u_{yy} = (u_y)'_y = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} x^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}.\frac{1}{x^2}.$$

Thay các giá trị đạo hàm riêng vào phương trình ban đầu, ta được

$$x^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}y^2 - 2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}.\frac{y^2}{x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}.\frac{y^2}{x^4} + 2\frac{\partial u}{\partial\eta}.\frac{y}{x^3}\right) -$$

$$y^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}x^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}.\frac{1}{x^2}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$-4\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}y^2 + 2\frac{\partial u}{\partial\eta}.\frac{y}{x} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} - \frac{1}{2\xi}\frac{\partial u}{\partial\eta} = 0.$$

Ví dụ 2.

Đưa phương trình sau về dạng chính tắc

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\sin^2 x - 2y\sin x\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Ví dụ 2.

Đưa phương trình sau về dạng chính tắc

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\sin^2 x - 2y\sin x\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Phương trình đặc trưng

$\sin^2 x(dy)^2 + 2y\sin x dxdy + y^2(dx)^2 = 0 \Rightarrow$

$y\tan\dfrac{x}{2} = C$ là đường cong tích phân đặc trưng.

Thực hiện phép đổi biến $\xi = y\tan\dfrac{x}{2}, \eta = y$ (hàm tùy ý), ta được $y\dfrac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = \dfrac{\partial u}{\partial \xi}\sin x.$

Vì $\sin x = \dfrac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$ và $\tan\dfrac{x}{2} = \dfrac{\xi}{\eta}$ nên $\sin x = \dfrac{2\xi\eta}{\xi^2+\eta^2}$. Vậy phương trình ở dạng chính tắc là

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = \frac{2\xi}{\xi^2+\eta^2}.\frac{\partial u}{\partial \xi}$$

Ví dụ 3.

Đưa phương trình sau về dạng chính tắc

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Ví dụ 3.

Đưa phương trình sau về dạng chính tắc
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Phương trình đặc trưng
$(dy)^2 + 2dxdy + 2(dx)^2 = 0 \Rightarrow dy = (-1 \pm i)dx \Rightarrow y + x - ix = C_1, y + x + ix = C_2$
là những đường cong tích phân đặc trưng. Thực hiện phép đổi biến $\xi = y + x, \eta = x$, ta được
$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 \xi} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0.$$

Định nghĩa

Nghiệm của PTVPĐHR trong miền D của không gian các biến độc lập là một hàm số có tất cả các đạo hàm riêng chứa trong phương trình và thỏa mãn phương trình tại mọi điểm của D

Nói chung, PTVPĐHR có tập nghiệm rất rộng. Đối với phương trình tuyến tính thuần nhất nếu u_1, u_2 là nghiệm thì $c_1u_1 + c_2u_2, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ cũng là nghiệm.

Ví dụ 1. Phương trình $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 1$ với hàm chưa biết $u(x, y)$ có nghiệm $u(x, y) = x + \varphi(y)$ với $\varphi(y)$ là 1 hàm bất kỳ.

Ví dụ 1. Phương trình $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 1$ với hàm chưa biết $u(x, y)$ có nghiệm $u(x, y) = x + \varphi(y)$ với $\varphi(y)$ là 1 hàm bất kỳ.

Ví dụ 2. Các hàm $u = x^2 - y^2$ và $u = e^x \cos y$ đều là nghiệm của phương trình Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Trong tập các nghiệm của PTĐHR, để xác định 1 nghiệm duy nhất cần phải đưa thêm điều kiện. Giả sử hàm cần tìm là $u(x, t)$ với t là thời gian. Khi ấy điều kiện

$$u(x, 0) = f(x)$$

với $f(x)$ là 1 hàm cho trước được gọi là điều kiện đầu.

Giả sử hàm cần tìm là $u(x,y)$ và cho biết một số dữ kiện trên biên γ của miền D ví dụ

$$u(x,y)\,|_{\gamma} = f(x,y),$$

có nghĩa là $u(x,y) = f(x,y), \forall (x,y) \in \gamma,$

thì điều kiện này được gọi là điều kiện biên Dirichlet.

Còn nếu trên biên γ biết đạo hàm theo hướng véc tơ pháp tuyến $\overrightarrow{n}$ của biên γ

$$\frac{\partial u}{\partial \overrightarrow{n}}|_{\gamma} = g(x, y)$$

có nghĩa là nếu $\overrightarrow{n} = n_1 \overrightarrow{i} + n_2 \overrightarrow{j}$ thì $\frac{\partial u}{\partial \overrightarrow{n}} = u'_x.n_1 + u'_y.n_2 = g(x, y), \forall (x, y) \in \gamma$. Lúc này điều kiện này được gọi là điều kiện biên Neuman.

Nếu trên biên γ

$$\frac{\partial u}{\partial \overrightarrow{n}} + u(x,y)\,|_{\gamma} = g(x,y)$$

thì điều kiện này được gọi là điều kiện biên hỗn hợp hay điều kiện biên Robin.

Giả sử x, y, z là tọa độ Đề-các của 1 điểm nào đó, còn x_1, x_2, x_3 là tọa độ của điểm này trong hệ tọa độ cong trực giao. Khi đó

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = h_1^2 dx_1^2 + h_2^2 dx_2^2 + h_3^2 dx_3^2,$$

trong đó

$$h_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x_1}\right)^2}$$

$$h_2 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x_2}\right)^2}$$

$$h_3 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial x_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x_3}\right)^2}$$

là các hệ số Mê-tríc hay hệ số Lame.

Cho $u = u(x_1, x_2, x_3)$, $\overrightarrow{F} = (F_1, F_2, F_3)$

$$\text{grad } u = \frac{1}{h_1}\frac{\partial u}{\partial x_1}\overrightarrow{i} + \frac{1}{h_2}\frac{\partial u}{\partial x_2}\overrightarrow{j} + \frac{1}{h_3}\frac{\partial u}{\partial x_3}\overrightarrow{k}.$$

$$\text{div } \overrightarrow{F} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}(h_2 h_3 F_1) + \frac{\partial}{\partial x_2}(h_3 h_1 F_2) + \frac{\partial}{\partial x_3}(h_1 h_2 F_3)\right)$$

$$\text{rot } \overrightarrow{F} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\begin{vmatrix} h_1\overrightarrow{i} & h_2\overrightarrow{j} & h_3\overrightarrow{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} \\ h_1 F_1 & h_2 F_2 & h_3 F_3 \end{vmatrix}$$

$$\Delta u = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{h_2 h_3}{h_1}\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{h_3 h_1}{h_2}\frac{\partial u}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{h_1 h_2}{h_3}\frac{\partial u}{\partial x_3}\right)\right]$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x \\ x_2 &= y \\ x_3 &= z \end{aligned}\right\} \Rightarrow h_1 = 1, h_2 = 1, h_3 = 1$$

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x}\overrightarrow{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\overrightarrow{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\overrightarrow{k}.$$

$$\text{div } \overrightarrow{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

$$\text{rot } \overrightarrow{F} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$\begin{cases} x_1 = r \\ x_2 = \varphi \\ x_3 = z \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$$

$$\Rightarrow h_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2} = 1$$

$$\Rightarrow h_2 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2} = r$$

$$\Rightarrow h_3 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial z}\right)^2} = 1$$

$$\operatorname{grad}\ u = \frac{\partial u}{\partial r}\overrightarrow{i} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\overrightarrow{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\overrightarrow{k}.$$

$$\operatorname{div}\ \overrightarrow{F} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rF_1) + \frac{1}{r}\frac{\partial F_2}{\partial \varphi} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

$$\operatorname{rot}\ \overrightarrow{F} = \frac{1}{r}\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & r\overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & rF_2 & F_3 \end{vmatrix}$$

$$\Delta u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$\begin{cases} x_1 = r \\ x_2 = \theta \\ x_3 = \varphi \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow h_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2} = 1$$

$$\Rightarrow h_2 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2} = r$$

$$\Rightarrow h_3 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2} = r\sin\theta$$

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial r}\overrightarrow{i} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\overrightarrow{j} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\overrightarrow{k}.$$

$$\text{div } \overrightarrow{F} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 F_1) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta F_2) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial F_3}{\partial \varphi}$$

$$\text{rot } \overrightarrow{F} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & r\overrightarrow{j} & r\sin\theta\,\overrightarrow{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial \theta} & \dfrac{\partial}{\partial \varphi} \\ F_1 & rF_2 & r\sin\theta F_3 \end{vmatrix}$$

$$\Delta u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}$$

THANK YOU FOR ATTENTION