CHUỖI FOURIER

TS. Lê Xuân Đại

Trường Đại học Bách Khoa TP HCM
Khoa Khoa học ứng dụng, bộ môn Toán ứng dụng

cuu duong than cong . com



cuu duong than cong . com

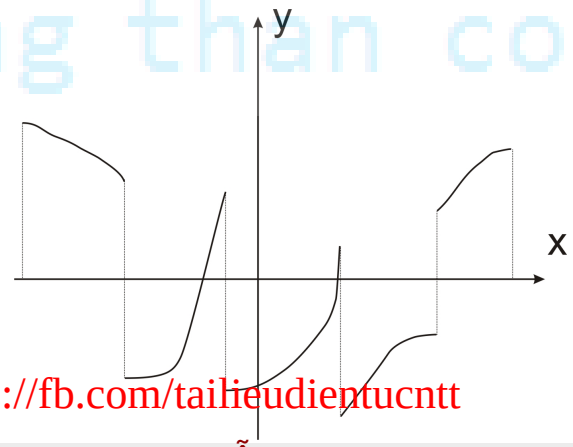
TP. HCM — 2015.

ng.com https://fb.com/tailieudientucntt

Định nghĩa

Hàm số $f(x)$ *được gọi là hàm liên tục từng khúc trên đoạn* $[a, b]$ *nếu như tồn tại những điểm* $a = x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ *sao cho hàm số* f *liên tục trên khoảng* (x_i, x_{i+1}) *và tồn tại hữu hạn giới hạn từ 1 phía* $f(x_i+)$ *và* $f(x_{i+1}-), \forall i = 1, 2, \ldots, n-1.$

cuu duong than cong . com



ng.com https://fb.com/tailieudientucntt

Tính chất

Ví dụ

Hàm $\frac{1}{x}$ *và* $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ *không là hàm liên tục từng khúc trên* $[0,1]$, *vì không tồn tại giới hạn* $f(0+)$

1. Hàm liên tục từng khúc trên $[a,b]$ thì bị chặn và khả tích trên $[a,b]$
2. Tích của hai hàm liên tục từng khúc là hàm liên tục từng khúc.

cuu duong than cong . com
cuu duong than cong . com
ng.com https://fb.com/tailieudientucntt

Định nghĩa

Nếu hàm $f(x)$ *liên tục từng khúc trên* $[a, b]$ *và có thêm điều kiện, đạo hàm cấp một* $f'(x)$ *liên tục trên từng khoảng* $x_i < x < x_{i+1}$, *và giới hạn* $f'(x_i+), f'(x_i-)$ *tồn tại, thì hàm* $f(x)$ *được gọi là hàm trơn từng khúc. Nếu có thêm điều kiện, đạo hàm cấp hai* $f''(x)$ *liên tục trên từng khoảng* $x_i < x < x_{i+1}$, *và giới hạn* $f''(x_i+), f''(x_i-)$ *tồn tại, thì hàm* $f(x)$ *được gọi là hàm rất trơn từng khúc.*

cuu duong than cong . com
cuu duong than cong . com

ng.com https://fb.com/tailieudientucntt

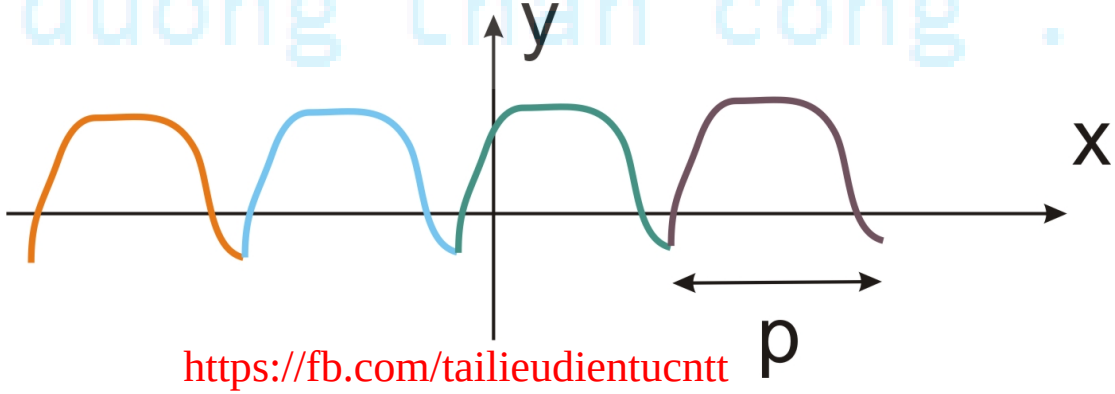
Định nghĩa

Hàm liên tục từng khúc $f(x)$ *trên đoạn* $[a, b]$ *được gọi là hàm tuần hoàn nếu tồn tại số thực dương* p *sao cho*

$$f(x+p) = f(x), \forall x.$$

Lúc này, p *được gọi là chu kỳ của* f*, còn số nhỏ nhất trong những số* p *được gọi là chu kỳ cơ bản*

cuu duong than cong . com



ng.com https://fb.com/tailieudientucntt

Tính chất

1. Nếu $f(x)$ là hàm tuần hoàn với chu kỳ p thì $f(x+np) = f(x), \forall n \in \mathbb{N}$.
2. Nếu $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_k(x)$ là những hàm tuần hoàn với chu kỳ p và $c_k \in \mathbb{R}$, thì $f(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \ldots + c_k f_k(x)$ là hàm tuần hoàn với chu kỳ p.

cuu duong than cong . com

Ví dụ

Hàm $a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \ldots + b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \ldots$ *là hàm tuần hoàn với chu kỳ* 2π.

ng.com https://fb.com/tailieudientucntt

Định nghĩa

Dãy những hàm $\{\varphi_n(x)\}$ *được gọi là hệ trực giao theo hàm trọng* $q(x)$ *trên đoạn* $[a, b]$ *nếu như*

$$\int_a^b \varphi_m(x).\varphi_n(x).q(x)dx = 0, m \neq n.$$

cuu duong than cong . com

Định nghĩa

cuu duong than cong . com

Nếu $m = n$ *thì ta có* $||\varphi_n(x)|| = \sqrt{\int_a^b \varphi_n^2(x)q(x)dx}$

được gọi là chuẩn của $\varphi_n(x)$.

ng.com https://fb.com/tailieudientucntt

Ví dụ

Dãy những hàm $\{\sin mx\}, m = 1, 2, \ldots$ *là hệ trực giao trên đoạn* $[-\pi, \pi]$ *vì*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx . \sin nx dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi, & m = n \end{cases}$$

Ở đây hàm trọng $q(x) \equiv 1$. *Chuẩn*

$$||\sin mx|| = \sqrt{\pi}.$$

cuu duong than cong . com

ng.com https://fb.com/tailieudientucntt

Định nghĩa

Dãy những hàm trực giao $\{\psi_n(x)\}$ *được gọi là hệ trực chuẩn theo hàm trọng* $q(x)$ *trên đoạn* $[a, b]$ *nếu như*

$$\int_a^b \psi_m(x).\psi_n(x).q(x)dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ 1, & m = n \end{cases}$$

cuu duong than cong . com

Chú ý. Hệ trực chuẩn có thể thu được từ hệ trực giao bằng cách chia mỗi hàm số của hệ cho chuẩn của nó.

cuu duong than cong . com

ng.com https://fb.com/tailieudientucntt

Ví dụ

Dãy những hàm $1, \cos x, \sin x, \ldots, \cos nx, \sin nx$ *là hệ trực giao trên* $[-\pi, \pi]$ *vì*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx . \sin nx dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi, & m = n \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx . \cos nx dx = 0, \forall m, n.$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx . \cos nx dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi, & m = n \end{cases}$$

Để thu được hệ trực chuẩn, ta chia mỗi hàm cho chuẩn của nó

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \ldots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}.$$

cuu duong than cong . com
cuu duong than cong . com
ng.com https://fb.com/tailieudientucntt

Định lý

Mọi hàm liên tục từng khúc, tuần hoàn với chu kỳ 2π, có thể được xấp xỉ bởi chuỗi lượng giác

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

Chứng minh.

Vì $f(x)$ là hàm liên tục từng khúc nên khả tích theo Riemann trên $[-\pi, \pi]$. Xét tổng riêng

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

ng.com https://fb.com/tailieudientucntt

Ta sẽ xác định những hệ số a_0, a_k, b_k sao cho $s_n(x)$ xấp xỉ tốt nhất hàm $f(x)$ theo nghĩa bình phương cực tiểu, có nghĩa là cực tiểu tích phân

cuu duong than cong . com

$$I(a_0, a_k, b_k) = \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - s_n(x)]^2 dx$$

cuu duong than cong . com

ng.com https://fb.com/tailieudientucntt

Điều kiện cần để I đạt cực tiểu là

$$\frac{\partial I}{\partial a_0} = -\int_{-\pi}^{\pi} \left[f(x) - \frac{a_0}{2} - \sum_{j=1}^{n} (a_j \cos jx + b_j \sin jx) \right] dx = 0$$

$$\frac{\partial I}{\partial a_k} = -2\int_{-\pi}^{\pi} \left[f(x) - \frac{a_0}{2} - \sum_{j=1}^{n} (a_j \cos jx + b_j \sin jx) \right] \cos kx dx = 0$$

$$\frac{\partial I}{\partial b_k} = -2\int_{-\pi}^{\pi} \left[f(x) - \frac{a_0}{2} - \sum_{j=1}^{n} (a_j \cos jx + b_j \sin jx) \right] \sin kx dx = 0$$

cuu duong than cong . com
cuu duong than cong . com

ng.com https://fb.com/tailieudientucntt

Do tính trực giao của dãy $1, \cos x, \sin x, \ldots, \cos nx, \sin nx$ và $\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx dx = 0$ nên

$$\frac{\partial I}{\partial a_0} = \pi a_0 - \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 0$$

$$\frac{\partial I}{\partial a_k} = 2\pi a_k - 2\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx = 0$$

$$\frac{\partial I}{\partial b_k} = 2\pi b_k - 2\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx = 0$$

cuu duong than cong . com
cuu duong than cong . com
ng.com https://fb.com/tailieudientucntt

Vậy

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx,$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx,$$

cuu duong than cong . com

Vì $\frac{\partial^2 I}{\partial a_0^2} = \pi, \frac{\partial^2 I}{\partial a_k^2} = \frac{\partial^2 I}{\partial b_k^2} = 2\pi, \frac{\partial^2 I}{\partial a_k b_k} = 0$ nên $d^2 I > 0$, có nghĩa là I có giá trị cực tiểu.

ng.com https://fb.com/tailieudientucntt

Chú ý

Một hàm số $f(x)$ có thể biểu diễn xấp xỉ bởi chuỗi Fourier của nó. Tuy nhiên, một chuỗi Fourier có thể không hội tụ về hàm $f(x)$.

Chúng ta sẽ nghiên cứu 3 loại hội tụ của chuỗi Fourier: hội tụ theo điểm, hội tụ đều, hội tụ theo giá trị trung bình bình phương

cuu duong than cong . com
cuu duong than cong . com

ng.com https://fb.com/tailieudientucntt

Định nghĩa

Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *được gọi là hội tụ theo điểm trên khoảng* $a < x < b$ *đến hàm* $f(x)$ *nếu nó hội tụ đến* $f(x)$ *với mỗi* $x \in (a, b)$. *Có nghĩa là* $\forall x \in (a, b)$ *luôn có*

$$|f(x) - s_n(x)| \to 0, n \to \infty,$$

trong đó $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$.

cuu duong than cong . com

ng.com https://fb.com/tailieudientucntt

Định nghĩa

Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *được gọi là hội tụ đều trên đoạn* $a \leqslant x \leqslant b$ *đến hàm* $f(x)$ *nếu*

$$\max_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x) - s_n(x)| \to 0, n \to \infty,$$

trong đó $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$.

cuu duong than cong . com

Chú ý. Từ sự hội tụ đều suy ra hội tụ theo điểm, nhưng chiều ngược lại không đúng.

ng.com https://fb.com/tailieudientucntt

Định nghĩa

Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *được gọi là hội tụ theo giá trị trung bình bình phương (hội tụ trong không gian* L_2*) đến hàm* $f(x)$ *trên đoạn* $a \leqslant x \leqslant b$ *nếu*

$$\int_a^b |f(x) - s_n(x)|^2 dx \to 0, n \to \infty,$$

trong đó $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$.

cuu duong than cong . com

ng.com https://fb.com/tailieudientucntt

Vấn đề cơ bản: Chuỗi Fourier của hàm tuần hoàn $f(x)$ có hội tụ về hàm $f(x)$ không?

Trả lời. Chưa chắc chắn. Ví dụ, nếu hàm $f(x)$ liên tục, tuần hoàn với chu kỳ 2π thì chuỗi Fourier của nó có thể hội tụ theo điểm đến $f(x)$ với $x \in [-\pi, \pi]$ cho trước, nhưng không đúng với mọi $\forall x \in [-\pi, \pi]$. Đó là vấn đề hội tụ địa phương và hội tụ toàn cục.

ng.com https://fb.com/tailieudientucntt

Định lý

Nếu $f(x)$ *khả tích trên* $(-\pi, \pi)$ *thì chuỗi Fourier của nó hội tụ theo giá trị trung bình bình phương đến hàm* $f(x)$ *trên* $(-\pi, \pi)$, *có nghĩa là*

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - s_n(x)|^2 dx \to 0, n \to \infty.$$

cuu duong than cong . com

Định lý này không giải quyết được vấn đề hội tụ theo điểm hay bảo đảm sự hội tụ của chuỗi Fourier với mọi $x \in (-\pi, \pi)$. Tuy nhiên, nếu $f(x)$ là hàm tuần hoàn với chu kỳ 2π và trơn từng khúc trên $\mathbb{R}$ thì chuỗi Fourier của nó sẽ hội tụ về $f(x)$ với mọi $\forall x \in [-\pi, \pi]$.

ng.com https://fb.com/tailieudientucntt

Bất đẳng thức Bessel

Định lý

Cho $f(x)$ là hàm liên tục từng khúc và tuần hoàn với chu kỳ 2π. Khi đó

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2) \leqslant \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx$$

cuu duong than cong . com

Chứng minh. Ta có

$$\int_{-\pi}^{\pi}[f(x) - s_n(x)]^2 dx \geqslant 0$$

ng.com https://fb.com/tailieudientucntt

$$\Leftrightarrow \int_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^2 dx - 2\int_{-\pi}^{\pi} f(x)s_n(x)dx + \int_{-\pi}^{\pi} [s_n(x)]^2 dx \geqslant 0$$

cuu duong than cong . com

Ta có $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)s_n(x)dx =$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\left[\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)\right] dx =$$

$$= \frac{\pi a_0^2}{2} + \pi \sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2)$$

ng.com https://fb.com/tailieudientucntt

$$\int_{-\pi}^{\pi} s_n^2(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)\right]^2 dx$$

$$= \frac{\pi a_0^2}{2} + \pi \sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2)$$

Vậy $\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - s_n(x)]^2 dx =$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx - \left[\frac{\pi a_0^2}{2} + \pi \sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2)\right] \geqslant 0$$

$$\Rightarrow \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2) \leqslant \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx$$

Lấy giới hạn 2 vế khi $n \to \infty$ ta được

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2) \leqslant \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx$$

cuu duong than cong . com
cuu duong than cong . com
ng.com https://fb.com/tailieudientucntt

Điều này có được vì tổng riêng $\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2)$

là dãy tăng và bị chặn trên nên $\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2)$

hội tụ.

$\Rightarrow$ Điều kiện cần để chuỗi $\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2)$ hội

tụ là $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$ và $\lim\limits_{k\to\infty} b_k = 0$

cuu duong than cong . com

ng.com https://fb.com/tailieudientucntt

Định nghĩa

Chuỗi Fourier được gọi là hội tụ theo giá trị trung bình đến $f(x)$ khi

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\left[f(x)-\left(\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)\right)\right]^2dx=0$$

cuu duong than cong . com

Hệ thức Parseval

cuu duong than cong . com

Nếu chuỗi Fourier hội tụ theo giá trị trung bình đến $f(x)$ thì $\dfrac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)=\dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx$

ng.com https://fb.com/tailieudientucntt

Định nghĩa

Nếu chuỗi Fourier hội tụ theo giá trị trung bình thì hệ những hàm $1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots$ *được gọi là hệ đầy đủ.*

cuu duong than cong . com

Như vậy, nếu hệ những hàm

$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots$ là hệ đầy đủ thì

cuu duong than cong . com

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

ng.com https://fb.com/tailieudientucntt

Ví dụ

Tìm chuỗi Fourier của hàm số

$f(x) = x + x^2, -\pi < x < \pi$

cuu duong than cong . com

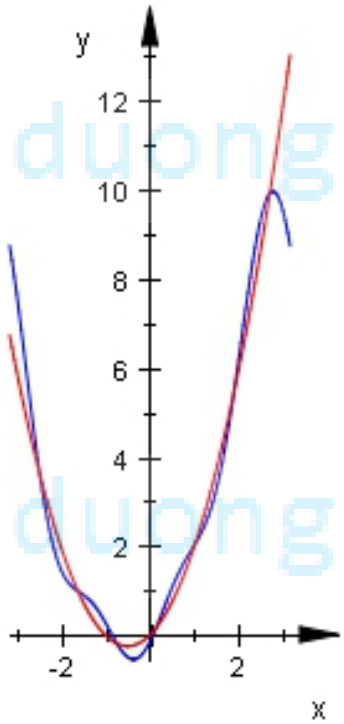
Đáp số. $f(x) =$

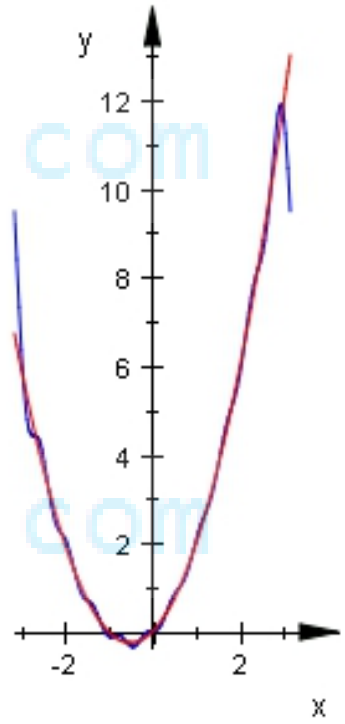
$$\frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{4}{k^2}(-1)^k \cos kx - \frac{2}{k}(-1)^k \sin kx \right]$$

cuu duong than cong . com

ng.com https://fb.com/tailieudientucntt

Hình: sum(1->3), sum(1->10)





cuu duong than cong . com
cuu duong than cong . com

ng.com https://fb.com/tailieudientucntt

Ví dụ

Tìm chuỗi Fourier của hàm số

$$f(x) = \begin{cases} -\pi, & -\pi < x < 0 \\ x, & 0 < x < \pi \end{cases}$$

cuu duong than cong . com

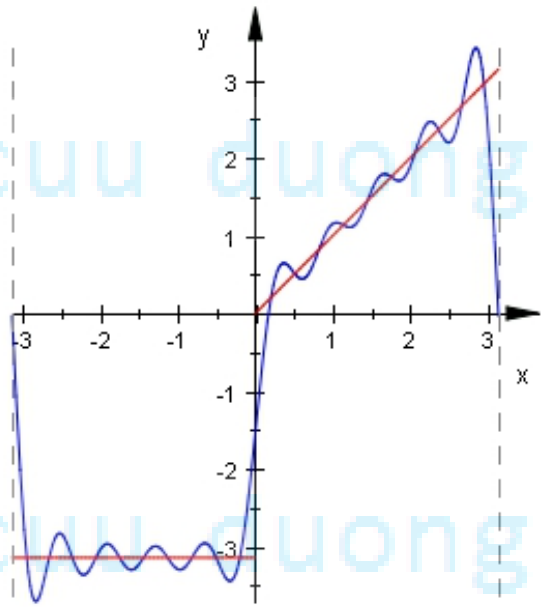
Đáp số.

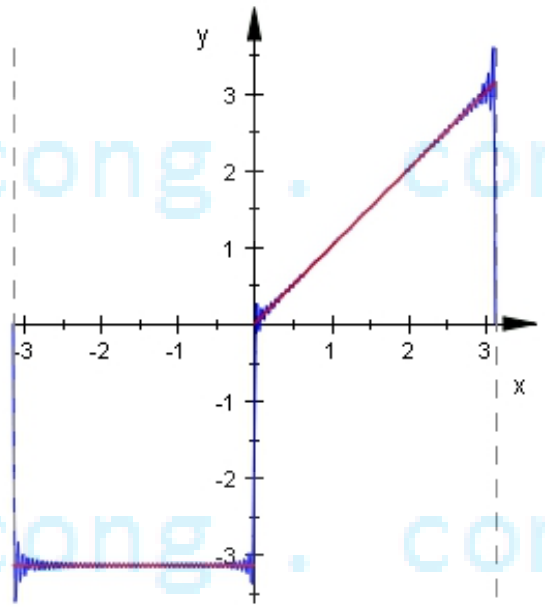
$$f(x) = -\frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{k^2\pi}\left[(-1)^k - 1\right]\cos kx + \frac{1}{k}\left[1 - 2(-1)^k\right]\sin kx \right\}$$

cuu duong than cong . com

ng.com https://fb.com/tailieudientucntt

Hình: sum(1->10), sum(1->100)





cuu duong than cong . com
cuu duong than cong . com

ng.com https://fb.com/tailieudientucntt

Ví dụ

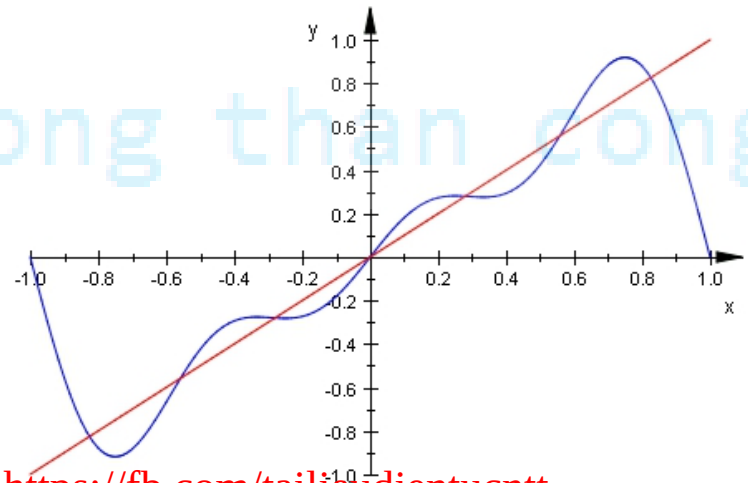
Tìm chuỗi Fourier của hàm số

$f(x) = x, -\pi < x < \pi$

Đáp số. $f(x) = 2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{\sin kx}{k}$

cuu duong than cong . com

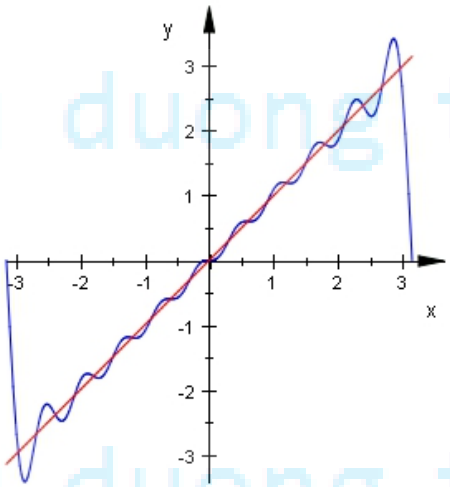
Hình: sum(1->3)

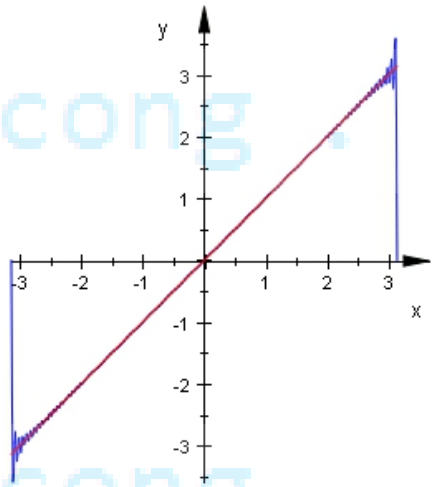


cuu duong than cong . com

ng.com https://fb.com/tailieudientucntt

Hình: sum(1->10), sum(1->100)





cuu duong than cong . com
cuu duong than cong . com

ng.com https://fb.com/tailieudientucntt

Cho $f(x)$ là hàm chẵn trên đoạn $[-\pi, \pi]$. Khi đó $f(x)\cos kx$ là hàm chẵn còn $f(x)\sin kx$ là hàm lẻ. Vì vậy, những hệ số Fourier của hàm $f(x)$ là

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos kx dx$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx = 0$$

Chuỗi Fourier của hàm chẵn là

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx$$

cuu duong than cong . com
cuu duong than cong . com
ng.com https://fb.com/tailieudientucntt

Cho $f(x)$ là hàm lẻ trên đoạn $[-\pi, \pi]$. Khi đó $f(x)\cos kx$ là hàm lẻ còn $f(x)\sin kx$ là hàm chẵn. Vì vậy, những hệ số Fourier của hàm $f(x)$ là

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx = 0$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin kx dx$$

Chuỗi Fourier của hàm lẻ là

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx$$

cuu duong than cong . com
cuu duong than cong . com
ng.com https://fb.com/tailieudientucntt

Ví dụ

Tìm chuỗi Fourier của hàm

$$f(x) = sgnx = \begin{cases} -1, & -\pi < x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ +1, & 0 < x < \pi \end{cases}$$

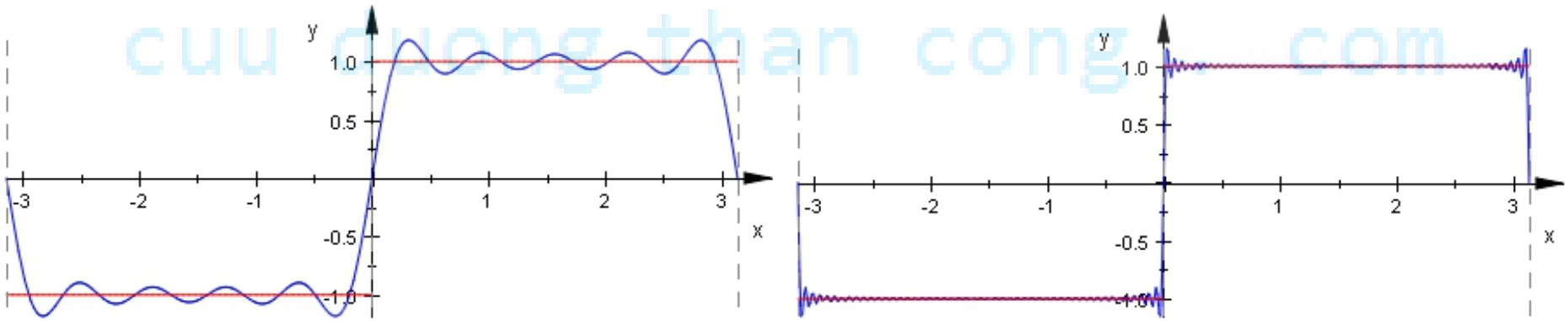
cuu duong than cong . com

Đáp số. $f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}$

cuu duong than cong . com

ng.com https://fb.com/tailieudientucntt

Hình: sum(1->10), sum(1->100)



cuu duong than cong . com
cuu duong than cong . com

ng.com https://fb.com/tailieudientucntt

Ví dụ

Tìm chuỗi Fourier của hàm $f(x) = |\sin x|$

cuu duong than cong . com

Đáp số. $f(x) = \dfrac{2}{\pi} + \dfrac{4}{\pi} \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{\cos(2kx)}{1-4k^2}$

cuu duong than cong . com

ng.com https://fb.com/tailieudientucntt

Hình: sum(1->3), sum(1->10)



cuu duong than cong . com
cuu duong than cong . com

ng.com https://fb.com/tailieudientucntt

Ví dụ

Tìm chuỗi Fourier của hàm

$$f(x) = |x| = \begin{cases} -x, & -\pi \leqslant x \leqslant 0 \\ x, & 0 \leqslant x \leqslant \pi \end{cases}$$

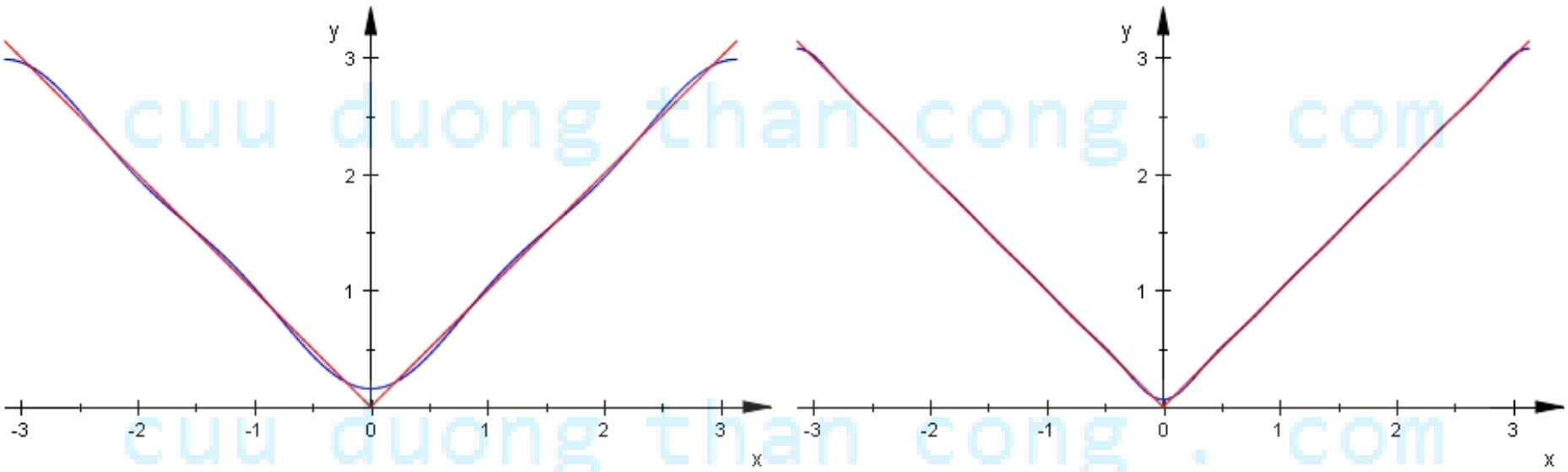
Đáp số.

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots\right)$$

cuu duong than cong . com

ng.com https://fb.com/tailieudientucntt

Hình: sum(1->3), sum(1->10)



cuu duong than cong . com
cuu duong than cong . com

ng.com https://fb.com/tailieudientucntt

Ví dụ

Tìm chuỗi Fourier của hàm

$f(x) = x^2, -\pi \leqslant x \leqslant \pi$

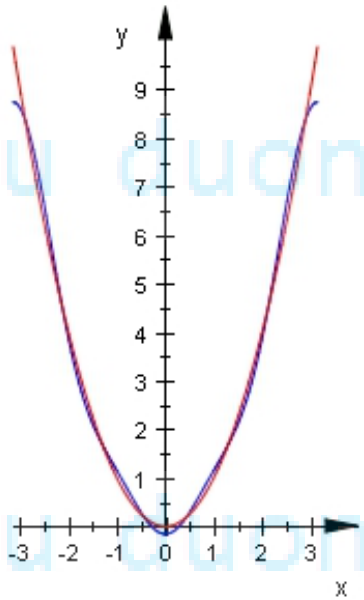
cuu duong than cong . com

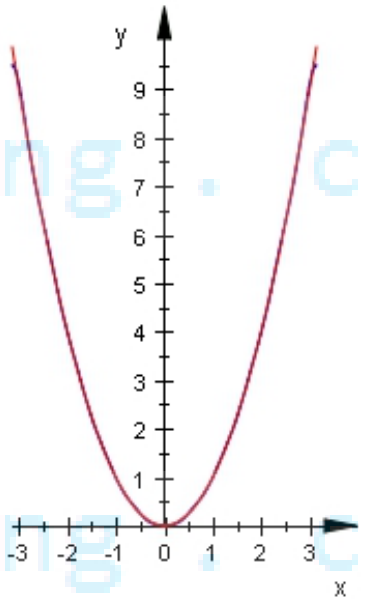
Đáp số. $f(x) = \dfrac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^2}(-1)^k \cos kx$

cuu duong than cong . com

ng.com https://fb.com/tailieudientucntt

Hình: sum(1->3), sum(1->10)





cuu duong than cong . com
cuu duong than cong . com

ng.com https://fb.com/tailieudientucntt

Chuỗi Fourier của hàm số $f(x)$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

Sử dụng công thức Euler

cuu duong than cong . com

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i},$$

ta có

cuu duong than cong . com

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k\left(\frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2}\right) + b_k\left(\frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i}\right)\right]$$

ng.com https://fb.com/tailieudientucntt

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(\frac{a_k - ib_k}{2} \right) e^{ikx} + \left(\frac{a_k + ib_k}{2} \right) e^{-ikx} \right] =$$

cuu duong than cong . com

$$= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (c_k e^{ikx} + c_{-k} e^{-ikx}),$$

ở đây

cuu duong than cong . com

$$c_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$

ng.com https://fb.com/tailieudientucntt

$$c_k = \frac{a_k - ib_k}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos kx - i\sin kx)dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx$$

cuu duong than cong . com

$$c_{-k} = \frac{a_k + ib_k}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos kx + i\sin kx)dx =$$

cuu duong than cong . com

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{ikx}dx$$

Vậy $f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$, ở đây $c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx$

ng.com https://fb.com/tailieudientucntt

Công thức Parseval

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2$$

cuu duong than cong . com

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} f(x).\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} dx =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k.\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{ikx}dx = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k.c_{-k} =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k.\overline{c_k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2.$$

ng.com https://fb.com/tailieudientucntt

Ví dụ

Tìm chuỗi Fourier phức của hàm số

$f(x) = e^x, -\pi < x < \pi$

cuu duong than cong . com

Đáp số. $f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(1+ik)(-1)^k}{\pi(1+k^2)} \sinh(\pi) e^{ikx}$

cuu duong than cong . com

ng.com https://fb.com/tailieudientucntt

Đặt vấn đề

Tìm chuỗi Fourier của hàm $f(x)$ trên đoạn $[a, b]$ bất kỳ. Khi đó ta dùng phép đổi biến

$$x = \frac{1}{2}(a+b) + \frac{(b-a)t}{2\pi} \Rightarrow t = \frac{(2x-b-a)\pi}{b-a}$$

Khi đó $f(x) = f\left(\frac{1}{2}(a+b) + \frac{(b-a)t}{2\pi}\right) = F(t)$.

Chuỗi Fourier của $F(t)$ là

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kt + b_k \sin kt),$$

cuu duong than cong . com
ng.com https://fb.com/tailieudientucntt

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(t)\cos ktdt,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(t)\sin ktdt,$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k \cos\frac{k(2x-b-a)\pi}{b-a} + b_k \sin\frac{k(2x-b-a)\pi}{b-a}\right],$$

ở đây

$$a_k = \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\cos\left[\frac{k(2x-b-a)\pi}{b-a}\right]dx$$

$$b_k = \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\sin\left[\frac{k(2x-b-a)\pi}{b-a}\right]dx$$

cuu duong than cong . com

ng.com https://fb.com/tailieudientucntt

Ví dụ

Tìm chuỗi Fourier của $f(x) = x, -2 < x < 2$

cuu duong than cong . com

Đáp số. $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k\pi}(-1)^{k+1} \sin\left(\frac{k\pi x}{2}\right)$

cuu duong than cong . com

ng.com https://fb.com/tailieudientucntt

Ví dụ

Tìm chuỗi Fourier của $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < \frac{1}{2} \\ 0, & \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases}$

cuu duong than cong . com

Đáp số.

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{(2k-1)\pi}(-1)^{k-1}\cos(2k-1)\pi x.$$

cuu duong than cong . com

ng.com https://fb.com/tailieudientucntt

Bổ đề Riemann-Lebesgue

Định lý

Nếu $g(x)$ *là hàm liên tục từng khúc trên đoạn* $[a, b]$ *thì*

$$\lim_{\lambda \to \infty} \int_a^b g(x) \sin \lambda x dx = 0$$

cuu duong than cong . com

ng.com https://fb.com/tailieudientucntt

Định lý về sự hội tụ theo điểm

Định lý

Nếu $f(x)$ *là hàm trơn từng khúc và tuần hoàn với chu kỳ* 2π *trên* $[-\pi, \pi]$ *thì với mọi* $\forall x$ *ta có*

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx+b_k \sin kx) = \frac{1}{2}[f(x+)+f(x-)],$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos ktdt,\ b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin ktdt,$$

cuu duong than cong . com
cuu duong than cong . com
ng.com https://fb.com/tailieudientucntt

Định lý về sự hội tụ đều và hội tụ tuyệt đối

Định lý

Cho $f(x)$ *là hàm liên tục, tuần hoàn với chu kỳ* 2π *và cho* $f'(x)$ *là hàm liên tục từng khúc trên đoạn* $[-\pi, \pi]$. *Nếu thêm điều kiện* $f(-\pi) = f(\pi)$ *thì chuỗi Fourier của* $f(x)$ *sẽ hội tụ đều và hội tụ tuyệt đối.*

cuu duong than cong . com

ng.com https://fb.com/tailieudientucntt

Đạo hàm

Định lý

Cho $f(x)$ *là hàm liên tục trên đoạn* $[-\pi, \pi]$, *và* $f(-\pi) = f(\pi)$. *Cho* $f'(x)$ *là hàm trơn từng khúc trên đoạn* $[-\pi, \pi]$. *Khi đó chuỗi Fourier của hàm* $f'(x)$ *thu được bằng cách lấy đạo hàm từng phần tử của chuỗi Fourier của hàm* $f(x)$. *Chuỗi Fourier của hàm* $f'(x)$ *sẽ hội tụ theo điểm tại những điểm liên tục và hội tụ đến* $\frac{1}{2}[f'(x+) + f'(x-)]$ *tại những điểm gián đoạn.*

cuu duong than cong . com
cuu duong than cong . com
ng.com https://fb.com/tailieudientucntt

Tích phân

Định lý

Cho $f(x)$ *là hàm liên tục từng khúc trên* $[-\pi, \pi]$, *tuần hoàn với chu kỳ* 2π. *Khi đó*

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} dx + \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)dx$$

cuu duong than cong . com

ng.com https://fb.com/tailieudientucntt

Định lý

Nếu $f(x)$ *là hàm trơn từng khúc trên đoạn* $[0, b]$ *thì với* $b > 0$ *ta có*

$$\lim_{\lambda \to \infty} \int_0^b f(x) \frac{\sin \lambda x}{x} dx = \frac{\pi}{2} f(0+)$$

Định lý

Nếu $f(x)$ *là hàm trơn từng khúc trên mọi đoạn hữu hạn, và khả tích tuyệt đối trên* $(-\infty, +\infty)$ *thì*

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left[\int_{-\infty}^\infty f(t) \cos k(t-x) dt \right] dk = \frac{1}{2}[f(x+) + f(x-)]$$

cuu duong than cong . com
ng.com https://fb.com/tailieudientucntt

Nếu hàm $f(x)$ liên tục tại điểm x thì $f(x+) = f(x-) = f(x)$. Khi đó sự biểu diễn tích phân Fourier cho $f(x)$ là

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos k(t-x)dt\right]dk$$

Thay

$$\cos k(t-x) = \cos k(x-t) = \frac{1}{2}\left[e^{ik(x-t)} + e^{-ik(x-t)}\right]$$

ta được

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{ik(x-t)}dtdk + \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ik(x-t)}dtdk$$

cuu duong than cong . com
cuu duong than cong . com
ng.com https://fb.com/tailieudientucntt

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{ik(x-t)}dtdk - \frac{1}{2\pi}\int_0^{-\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{ik(x-t)}dtdk$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{ik(x-t)}dtdk + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{ik(x-t)}dtdk$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{ik(x-t)}dtdk$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}dk\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikt}f(t)dt\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(k)e^{ikx}dk$$

cuu duong than cong . com

ở đây

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ikt}dt$$

ng.com https://fb.com/tailieudientucntt

THANK YOU FOR ATTENTION

cuu duong than cong . com

cuu duong than cong . com

ng.com https://fb.com/tailieudientucntt