MK.PUB

GS. NGUYỄN HỮU ANH, PH. D

# TOÁN RỜI RẠC

NHÀ XUẤT BẢN LAO ĐỘNG XÃ HỘI

# Lời nói đầu

*Toán rời rạc được đưa chính thức vào chương trình giảng dạy của Khoa Toán, Trường Đại học Tổng hợp TP. Hồ Chí Minh từ năm học 1992 - 1993. Ngay từ đầu, tác giả đã biên soạn chương trình và trực tiếp giảng dạy môn Toán rời rạc. Sinh viên các chuyên ngành Toán và Tin học thường ghi tên học trong năm thứ hai, sau khi đã học Đại số Đại cương, Đại số tuyến tính, Vi tích phân. Do đó các phần Cơ sở logic (Chương 1), Tập hợp và Ánh xạ (Chương 2) chỉ được trình bày sơ lược. Nội dung chủ yếu tập trung vào Phép tính mệnh đề, Lý thuyết Dàn, Đại số Bool và hàm Bool. Ngoài ra có một chương dành cho Lý thuyết mã phát hiện và sửa sai. Từ năm học 1994-1995, với sự hình thành của khối kiến thức Giáo dục Đại cương, môn Toán rời rạc là môn bắt buộc cho ngành Công nghệ Thông tin ở Giai đoạn 2 và là môn chọn lựa đối với ngành Toán-Tin học. Đến năm học 1997-1998, nội dung môn này được nâng cao và trở thành bắt buộc đối với ngành Toán-Tin học, cũng như đối với hệ Cao đẳng Công nghệ Thông tin. Cuối cùng trong năm học 1998-1999, khi không còn mô hình đào tạo 2 Giai đoạn, môn Toán rời rạc trở thành môn bắt buộc cho các ngành Toán-Tin học, Công nghệ Thông tin cũng như hệ Cao đẳng, sinh viên được sắp xếp học ngay từ học kỳ đầu ở đại học. Do đó các chương về Cơ sở logic, Nguyên lý đếm trong đó có phần Tập hợp và Ánh xạ được dạy kỹ hơn, để giúp cho sinh viên tiếp thu các môn học khác như Vi tích phân, Đại số tuyến tính, Xác suất Thống kê được dễ dàng hơn. Các kiến thức về Số học như Quan hệ đồng dư, USCLN và BSCNN, Thuật chia Euclide được trình bày rải rác trong Chương 3 như các ví dụ về Quan hệ tương đương, thứ tự, dàn. Mặt khác với thời lượng 3 Tín chỉ và do sinh viên chưa học Đại số Tuyến tính, Chương Lý thuyết Mã được đưa vào sau, trong khối kiến thức chuyên ngành qua môn* *học Tổ hợp và Thuật toán mà chúng tôi nghĩ các sinh viên về Toán-Tin học, Công nghệ Thông tin cần và nên chọn học. Cũng xin nói thêm, trong vài năm gần đây, nội dung chủ yếu của bài thi cơ sở trong kỳ thi tuyển sinh Cao học và Nghiên cứu sinh ngành Công nghệ Thông tin được dựa vào môn Toán rời rạc. Do đó quyển sách có thể dùng làm tài liệu tham khảo cho các thí sinh trong kỳ thi nói trên. Ngoài ra, với nội dung tương đối độc lập với các kiến thức đại học khác, quyển sách Toán rời rạc có thể được sử dụng để giảng dạy, nâng cao khả năng lý luận về Giải tích tổ hợp và Lý thuyết tập hợp cho học sinh phổ thông.*

*Quyển sách giáo khoa Toán rời rạc trong lần tái bản này, ngoài phần in chữ lớn thông thường còn có một số ít chỗ in chữ nhỏ. Phần chữ lớn là nội dung giảng dạy bất buộc cho cả hệ Đại học và Cao đẳng. Phần chữ nhỏ là những kiến thức và thường là chứng minh khó, có thể bỏ qua khi dạy cho hệ Cao đẳng. Các bài tập cuối mỗi chương được sưu tầm bao gồm các nội dung rộng rãi: từ những bài tập áp dụng trực tiếp các công thức, khái niệm đến các bài tập cần suy luận sâu hơn.*

*Cuối cùng, tác giả xin cảm ơn các đồng nghiệp thuộc Bộ môn Đại số, Khoa Toán-Tin học của Trường Đại học Khoa học Tự nhiên TP. Hồ Chí Minh đã tham gia giảng dạy nhiều lớp Toán rời rạc theo chương trình nêu trên và đóng góp nhiều ý kiến quý báu. Tác giả cũng xin cảm ơn anh Dương Tấn Tài và PTS Trịnh Anh Ngọc đã rất nhiệt tình trong việc sử dụng Latex để mang lại cho quyển sách một phong cách trình bày rất đặc biệt.*

Tác giả

**GS Nguyễn Hữu Anh, Ph.D.**

# MỤC LỤC

# Chương 1

# CƠ SỞ LOGIC

## §1 Phép tính mệnh đề

Trong toán học ta quan tâm đến những khẳng định có giá trị chân lý xác định (đúng hoặc sai nhưng không thể vừa đúng vừa sai). Các khẳng định như vậy được gọi là *mệnh đề*. Các mệnh đề đúng được nói là có *giá trị chân lý đúng* (hay *chân trị đúng*), các mệnh đề sai được nói là có *chân trị sai*.

**Ví dụ:**

1. Các khẳng định sau là mệnh đề
   - Môn Toán rời rạc là môn bắt buộc cho ngành Tin học.
   - $1 + 1 = 2$.
   - 4 là số nguyên tố.

   Hai mệnh đề đầu có chân trị 1 và mệnh đề thứ ba có chân trị 0.
2. Các khẳng định dưới dạng tán thán hoặc mệnh lệnh không phải là mệnh đề vì nó không có chân trị nhất định.
3. Khẳng định "$n$ là số nguyên tố" không phải là mệnh đề. Tuy nhiên nếu thay $n$ bởi một số nguyên cố định nào đó thì ta sẽ được một mệnh đề: chẳng hạn với $n = 3$ ta được một mệnh đề đúng, trong khi với $n = 4$ ta được một mệnh đề sai. Khẳng định này được gọi là một *vị từ* và cũng là đối tượng khảo sát của logic.

Ta thường ký hiệu các mệnh đề bởi các chữ $P, Q, R, \ldots$ và chân trị đúng (sai) được ký hiệu bởi 1 (0). Đôi khi ta còn dùng các ký hiệu $T, V$ để chỉ chân trị đúng và $F$ để chỉ chân trị sai.

Phân tích kỹ các ví dụ, ta thấy các mệnh đề được chia ra làm 2 loại:

* Các mệnh đề được xây dựng từ các mệnh đề khác nhờ liên kết chúng lại bằng các liên từ (và, hay, nếu... thì...) hoặc trạng từ "không". Ta nói các mệnh đề này là mệnh đề phức hợp.

**Ví dụ:** "*Nếu* trời đẹp *thì* tôi đi dạo" là một mệnh đề phức hợp.

Chú ý rằng mệnh đề "4 không phải là số nguyên tố" là một mệnh đề phức hợp. Nó được xây dựng từ mệnh đề "4 là số nguyên tố" nhờ phép phủ định (trạng từ *không*).

* Các mệnh đề không thể xây dựng từ các mệnh đề khác nhờ các liên từ hoặc trạng từ không. Ta nói các mệnh đề này là mệnh đề *nguyên thủy* hay *sơ cấp*.

**Ví dụ: "Hôm nay trời đẹp", "3 là số nguyên tố" là các mệnh đề nguyên thủy.**

**Mục đích của phép tính mệnh đề là nghiên cứu chân trị của một mệnh đề phức hợp từ chân trị của các mệnh đề đơn giản hơn và các phép nối những mệnh đề này thể hiện qua liên từ hoặc trạng từ "không".**

Các phép nối.

**Phép phủ định**: *phủ định* của mệnh đề $P$ được ký hiệu bởi $\neg P$ (đọc là không $P$). Chân trị của $\neg P$ là 0 nếu chân trị của $P$ là 1 và ngược lại.

Ta có bảng sau gọi là *Bảng chân trị* của phép phủ định

| $P$ | $\neg P$ |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 0 |

**Phép nối liền:*** mệnh đề *nối liền* của hai mệnh đề $P,Q$ được ký hiệu bởi $P \wedge Q$ (đọc là $P$ và $Q$). Chân trị của $P \wedge Q$ là 1 nếu cả $P$ lẫn $Q$ đều có chân trị 1. Trong các trường hợp khác, $P \wedge Q$ có chân trị 0.

***Trong một số tài liệu, phép nối liền và phép nối rời cũng được gọi là phép hội và phép tuyển.**

Nói cách khác phép nối liền được xác định bởi bảng chân trị sau:

| $P$ | $Q$ | $P \wedge Q$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

**Ví dụ**: mệnh đề "hôm nay trời đẹp và trận bóng đá sẽ hấp dẫn" được xem như là 1 mệnh đề đúng nếu cả 2 điều kiện "trời đẹp" và "trận bóng đá hấp dẫn" đều xảy ra. Ngược lại nếu chỉ có một trong hai điều kiện trên đúng, hoặc cả hai đều sai thì mệnh đề là một mệnh đề sai.

**Phép nối rời**:[†] mệnh đề *nối rời* của hai mệnh đề $P, Q$ là mệnh đề ký hiệu bởi $P \vee Q$ (đọc là $P$ hay $Q$). Chân trị của $P \vee Q$ là 0 nếu cả hai $P, Q$ cùng có chân trị 0. Trong các trường hợp khác, $P \vee Q$ có chân trị 1. Nói cách khác phép nối rời được xác định bởi bảng chân trị sau

| $P$ | $Q$ | $P \vee Q$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

**Ví dụ:** "Ba đang đọc báo hay xem tivi" là một mệnh đề đúng nếu lúc này Ba đọc báo, xem tivi hay vừa đọc báo vừa xem tivi (!). Ngược lại nếu cả 2 việc trên đều không xảy ra, ví dụ như Ba đang làm việc, thì mệnh đề là mệnh đề sai. Chú ý rằng trong mệnh đề $P \vee Q$, từ "hay" được dùng theo nghĩa bao gồm, nghĩa là $P$ và $Q$ có thể đồng thời đúng. Tuy nhiên, trong ngôn ngữ hàng ngày ta thường hiểu "$P$ hay $Q$" theo nghĩa loại trừ, nghĩa là $P$ đúng hay $Q$ đúng nhưng không thể đồng thời đúng. Để phân biệt rõ ràng, trong trường hợp loại trừ

[†]Trong một số tài liệu, phép nối liền và phép nối rời cũng được gọi là **phép** hội và phép tuyển

ta sẽ sử dụng từ "hoặc": "$P$ hoặc $Q$" và ký hiệu phép nối tương ứng bởi $P \underline{\vee} Q$ ($P$ hay $Q$ nhưng không đồng thời cả hai). Bảng chân trị của $P \underline{\vee} Q$ là:

| $P$ | $Q$ | $P \underline{\vee} Q$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |

**Phép kéo theo**: mệnh đề nếu $P$ thì $Q$ được ký hiệu là $P \longrightarrow Q$ (cũng đọc là $P$ kéo theo $Q$, hay $P$ là điều kiện đủ của $Q$, hay $Q$ là điều kiện cần của $P$). Để xác định chân trị cho $P \longrightarrow Q$ ta hãy xem ví dụ mệnh đề "nếu trời đẹp thì tôi đi dạo". Ta có các trường hợp sau:

- *trời đẹp và tác giả của khẳng định đang đi dạo*: khi ấy hiển nhiên mệnh đề là đúng.

- *trời đẹp và tác giả ngồi nhà*: mệnh đề rõ ràng là sai.

- *trời xấu và tác giả đi dạo*: mệnh đề vẫn đúng.

- *trời xấu và tác giả ngồi nhà*: mặc dù ngồi nhà, nhưng tác giả không vi phạm khẳng định của mình nên mệnh đề vẫn phải được xem là đúng.

Từ đó ta có bảng chân trị của phép kéo theo như sau

| $P$ | $Q$ | $P \longrightarrow Q$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

**Chú ý**:

1. Với qui ước về chân trị như trên, ta sẽ có những khẳng định đúng rất ngộ nghĩnh như: "nếu $2 = 1$ thì Quang Trung và Trần Hưng Đạo là một người"

2. Cần phân biệt mệnh đề $P \longrightarrow Q$ với lệnh *If* $P$ *then* $Q$ trong một số ngôn ngữ lập trình ví dụ như Pascal, Basic. Trong $P \longrightarrow Q$

thì cả $P$ lẫn $Q$ là mệnh đề còn trong lệnh *If P then Q* thì $P$ là 1 mệnh đề còn $Q$ là một dãy liên tiếp dòng lệnh sẽ được thực hiện nếu mệnh đề $P$ có chân trị 1 và sẽ được bỏ qua nếu $P$ có chân trị 0. Nhắc lại rằng các dòng lệnh là những mệnh lệnh mà máy phải thực hiện nên không phải là một mệnh đề theo nghĩa ta xét. Dù sao cũng có một sự tương tự của 2 đối tượng "$P \longrightarrow Q$" và "*If P then Q*". Hơn nữa có thể lợi dụng các tương đương logic để thực hiện lệnh "*If P then Q*" có hiệu quả.

3. Trong ngôn ngữ hàng ngày, người ta thường lầm lẫn phép kéo theo với phép kéo theo hai chiều, chẳng hạn như phát biểu "giảng viên khoa Toán dạy nghiêm túc" mà viết theo phép nối là "nếu anh là giảng viên khoa Toán thì anh dạy nghiêm túc" thường bị phản ứng từ giảng viên các khoa khác vì họ cho rằng người nói đã ám chỉ "nếu là giảng viên khoa khác thì dạy không nghiêm túc". Thật ra khi phát biểu, người nói có khi cũng muốn ám chỉ "nếu dạy nghiêm túc thì anh là giảng viên khoa Toán".Ở đây nếu viết phát biểu ban đầu dưới dạng $P \longrightarrow Q$ thì 2 phát biểu hiểu ngầm sẽ có dạng $(\neg P) \longrightarrow (\neg Q)$ và $Q \longrightarrow P$. Tuy nhiên, nếu bao gồm thêm một trong hai phát biểu sau, thì phát biểu $P \longrightarrow Q$ trở thành phép kéo theo hai chiều theo nghĩa dưới đây.

**Phép kéo theo hai chiều**: mệnh đề nếu $P$ thì $Q$ và ngược lại được ký hiệu bởi $P \longleftrightarrow Q$ (cũng đọc là $P$ khi và chỉ khi $Q$, $P$ nếu và chỉ nếu $Q$, $P$ là điều kiện cần và đủ để có $Q$). Theo trên, cả 2 chiều kéo theo $P \longrightarrow Q$ và $Q \longrightarrow P$ đều đúng nên nếu $P$ đúng thì $Q$ cũng phải đúng và ngược lại. Do đó ta có bảng chân trị sau

| $P$ | $Q$ | $P \longleftrightarrow Q$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

## §2 Dạng mệnh đề

Trong Đại số ta có các biểu thức đại số được xây dựng từ:

- các số nguyên, hữu tỉ, thực ... mà ta gọi là *hằng số*.

- các biến $x, y, \ldots$ có thể lấy giá trị là các hằng số.

- các phép toán thao tác trên các hằng số và các biến theo một thứ tự nhất định.

Khi thay thế các biến trong 1 biểu thức đại số bởi các hằng số thì kết quả thực hiện các phép toán trong biểu thức sẽ là một hằng số nào đó. Trong phép tính mệnh đề ta cũng có các "biểu thức logic" tương tự mà ta gọi là các *dạng mệnh đề* được xây dựng từ:

- các mệnh đề (hằng mệnh đề).

- các biến mệnh đề $p, q, \ldots$ có thể lấy giá trị là các mệnh đề nào đó.

- các phép nối thao tác trên các hằng mệnh đề và biến mệnh đề theo một thứ tự nhất định. Ở đây thứ tự được xác định bởi các dấu ngoặc "()" để chỉ rõ phép nối thực hiện trên cặp mệnh đề nào, đúng ra là trên các *biểu thức* con nào. Ví dụ như:

$$E(p, q, r) = (p \wedge q) \vee ((\neg r) \longrightarrow P)$$

là một dạng mệnh đề trong đó $p, q, r$ là các biến mệnh đề còn $P$ là một hằng mệnh đề.

Giả sử $E, F$ là 2 dạng mệnh đề, khi ấy $\neg E$, $E \wedge F$, $E \longrightarrow F$, $E \longleftrightarrow F$ là các dạng mệnh đề. Bằng cách này ta có thể xây dựng được các dạng mệnh đề càng ngày càng phức tạp.

Mặt khác, điều ta quan tâm đối với một dạng mệnh đề $E(p, q, r, \ldots)$ là chân trị của mệnh đề có được $E(P, Q, R, \ldots)$ khi thay các biến mệnh đề $p, q, r, \ldots$ bởi các mệnh đề $P, Q, R, \ldots$ có chân trị xác định, nghĩa là sự phụ thuộc của chân trị của $E(p, q, r, \ldots)$ theo các chân trị của $p, q, r, \ldots$ chứ không phải theo các thể hiện cụ thể $p, q, r, \ldots$ qua các mệnh đề cụ thể $P, Q, R, \ldots$ Nói cách khác, mỗi dạng mệnh đề $E(p, q, r, \ldots)$ có một bảng chân trị xác định trong đó mỗi dòng cho biết chân trị của $E(p,q,r,...)$ theo các chân trị cụ thể của $p,q,r,\ldots$.

**Ví dụ:** 1. Ta hãy xây dựng bảng chân trị của hai dạng mệnh đề $p \vee (q \wedge r)$ và $(p \vee q) \wedge r$ theo các biến mệnh đề $p,q,r$.

| $p$ | $q$ | $r$ | $q \wedge r$ | $p \vee (q \wedge r)$ | $p \vee q$ | $(p \vee q) \wedge r$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Ta thấy hai dạng mệnh đề $p \vee (q \wedge r)$ , $(p \vee q) \wedge r$ có bảng chân trị khác nhau. Điều này cho thấy thứ tự thực hiện các phép nối là quan trọng và sự cần thiết của các dấu "()". Tuy nhiên ta sẽ qui ước rằng nếu phép nối $\neg$ đi cùng với một phép nối khác mà không có dấu "()" thì phép nối $\neg$ sẽ được ưu tiên thực hiện trước. Ví dụ như $\neg p \vee q$ có nghĩa là thực hiện $\neg p$ trước rồi mới thực hiện $\vee$, nói cách khác biểu thức $\neg p \vee q$ và $(\neg p) \vee q$ là một. Trong trường hợp muốn thực hiện $\neg$ sau ta phải đặt dấu ngoặc: $\neg(p \vee q)$.

2. Ta hãy xây dựng bảng chân trị của hai dạng mệnh đề $p \longrightarrow q$ và $\neg p \vee q$

| $p$ | $q$ | $\neg p$ | $p \longrightarrow q$ | $\neg p \vee q$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |

Như vậy hai dạng mệnh đề $p \longrightarrow q$ và $\neg p \vee q$ có cùng bảng chân trị. Ta nói chúng tương đương logic theo nghĩa sau

**Định nghĩa 1.2.1**: hai dạng mệnh đề $E$ và $F$ được nói là tương đương logic nếu chúng có cùng bảng chân trị. Khi ấy ta viết $E \Longleftrightarrow F$.

Chú ý rằng nếu $E$ và $F$ tương đương logic thì dạng mệnh đề $E \longleftrightarrow F$ luôn luôn lấy giá trị 1 dù các biến có lấy giá trị nào đi nữa.

**Định nghĩa 1.2.2**:

i) Một dạng mệnh đề được gọi là một *hằng đúng* nếu nó luôn luôn lấy chân trị 1.

ii) Một dạng mệnh đề được gọi là một *hằng sai* hay *mâu thuẫn* nếu nó luôn luôn lấy chân trị 0.

Từ nhận xét trên ta luôn luôn có

**Mệnh đề 1.2.1**: hai dạng mệnh đề $E$ và $F$ tương đương logic khi và chỉ khi $E \longleftrightarrow F$ là một hằng đúng.

Nếu chỉ để ý đến phép kéo theo một chiều ta có.

**Định nghĩa 1.2.3**: dạng mệnh đề $F$ được nói là *hệ quả logic* của dạng mệnh đề $E$ nếu $E \longrightarrow F$ là một hằng đúng. Khi ấy ta viết $E \Longrightarrow F$. Ta cũng nói $E$ có hệ quả logic là $F$.

Như thế nói rằng $E$ tương đương logic với $F$ có nghĩa là $F$ là hệ quả logic của $E$ và $E$ là hệ quả logic của $F$.

Trong phép tính mệnh đề, ta thường không phân biệt các dạng mệnh đề tương đương logic. Ta có

**Qui tắc thay thế thứ nhất**: trong dạng mệnh đề $E$, nếu ta thay thế *biểu thức con* $F$ bởi một dạng mệnh đề tương đương logic thì dạng mệnh đề thu được vẫn còn tương đương logic với $E$.

**Chú ý**: ta đã sử dụng khái niệm biểu thức con theo một nghĩa hết sức tự nhiên: dạng mệng đề $F$ "xuất hiện" trong $E$, hay nói cách khác $E$ có thể xây dựng từ $F$ và một số dạng mệnh đề khác qua các phép nối.

**Ví dụ**: $p \longrightarrow (q \longrightarrow r)$ tương đương logic với $p \longrightarrow (\neg q \vee r)$ vì trong đó biểu thức con $q \longrightarrow r$ đã được thay thế bởi dạng mệnh đề tương đương logic là $\neg q \vee r$.

Với qui tắc thay thế trên, ta có thể "rút gọn" một dạng mệnh đề bằng cách thay một biểu thức con bởi một dạng mệnh đề tương đương nhưng đơn giản hơn hoặc giúp cho bước rút gọn tiếp theo dễ dàng hơn. Ngoài ra, cũng cần nhận biết một số hằng đúng. Thường các hằng đúng này có thể được suy từ một số hằng đúng đơn giản nhờ:

<u>Qui tắc thay thế thứ hai</u>: giả sử dạng mệnh đề $E(p, q, r, ...)$ là một hằng đúng. Nếu ta thay thế những nơi $p$ xuất hiện trong $E$ bởi một dạng mệnh đề tùy ý $F(p', q', r', ...)$ thì dạng mệnh đề nhận được theo các biến $q, r, ..., p', q', r', ...$ vẫn còn là một hằng đúng.

Ngoài hai qui tắc thay thế trên, ta còn sử dụng 10 qui luật logic được phát biểu dưới dạng các tương đương logic để rút gọn một dạng mệnh đề cho trước. Ta có

**<u>Định lý 1.2.2</u>** (Qui luật logic): *với $p, q, r$ là các biến mệnh đề,* **1** *là một hằng đúng và* 0 *là một mâu thuẫn (hằng sai), ta có các tương đương logic:*

i) *Phủ định của phủ định:*

$$\neg\neg p \Longleftrightarrow p$$

ii) *Qui tắc De Morgan:*

$$\neg(p \wedge q) \Longleftrightarrow \neg p \vee \neg q$$

và

$$\neg(p \vee q) \Longleftrightarrow \neg p \wedge \neg q$$

iii) *Luật giao hoán:*

$$p \wedge q \Longleftrightarrow q \wedge p$$

và

$$p \vee q \Longleftrightarrow q \vee p$$

iv) *Luật kết hợp:*

$$p \wedge (q \wedge r) \Longleftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$$

và

$$p \vee (q \vee r) \Longleftrightarrow (p \vee q) \vee r$$

v) *Luật phân bố:*

$$p \wedge (q \vee r) \Longleftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

và

$$p \vee (q \wedge r) \Longleftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

vi) *Luật lũy đẳng:*

$$p \wedge p \Longleftrightarrow p$$

và

$$p \vee p \Longleftrightarrow p$$

vii) *Luật trung hoà:*

$$p \wedge \mathbf{1} \Longleftrightarrow p$$

và

$$p \vee 0 \Longleftrightarrow p$$

viii) *Luật về phần tử bù:*

$$p \wedge \neg p \iff 0$$

và $$p \vee \neg p \iff 1.$$

ix) *Luật thống trị:*

$$p \wedge 0 \iff 0$$

và $$p \vee 1 \iff 1$$

x) *Luật hấp thụ:*

$$p \wedge (p \vee q) \iff p$$

*và* $$p \vee (p \wedge q) \iff p$$

<u>**Chứng minh**</u>: đọc giả có thể kiểm tra dễ dàng 10 qui luật logic trên bằng cách lập bảng chân trị của 2 vế của tương đương logic.

• **đpcm**

**Ví dụ:**

1. Từ qui tắc De Morgan ta được hằng đúng

$$\neg(p \vee q) \longleftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$$

Thay thế $p$ bởi $r \wedge s$ ta được một hằng đúng mới

$$\neg[(r \wedge s) \vee q] \longleftrightarrow [\neg(r \wedge s) \wedge \neg q]$$

2. Hãy chứng minh dạng mệnh đề sau là hằng đúng

$$[(r \longrightarrow s) \wedge [(r \longrightarrow s) \longrightarrow (\neg t \vee u)]] \longrightarrow (\neg t \vee u) \qquad (1.2.1)$$

Muốn vậy ta thay thế $r \longrightarrow s$ bởi $p$ và $\neg t \vee u$ bởi $q$ và đưa về chứng minh dạng mệnh đề sau là hằng đúng:

$$[p \wedge (p \longrightarrow q)] \longrightarrow q$$

Ta sử dụng liên tiếp qui tắc thay thế thứ nhất và được các tương đương logic sau:

$$\begin{array}{lcll}
[p \wedge (p \longrightarrow q)] \longrightarrow q & \iff & [p \wedge (\neg p \vee q)] \longrightarrow q & \iff \\
[(p \wedge \neg p) \vee (p \wedge q)] \longrightarrow q & \iff & [0 \vee (p \wedge q)] \longrightarrow q & \iff \\
(p \wedge q) \longrightarrow q & \iff & \neg p \vee \neg q \vee q & \iff \\
\neg p \vee 1 & \iff & 1 &
\end{array}$$

Do đó (1.2.1) là một hằng đúng.

3. Tương tự như trên ta có:

$$\begin{aligned}(p \wedge q) \longrightarrow r \quad &\Longleftrightarrow \quad \neg p \vee \neg q \vee r \quad \Longleftrightarrow \\ \neg p \vee (\neg q \vee r) \quad &\Longleftrightarrow \quad \neg p \vee (q \longrightarrow r)\end{aligned}$$

Suy ra

$$(p \wedge q) \longrightarrow r \Longleftrightarrow p \longrightarrow (q \longrightarrow r) \tag{1.2.2}$$

Nếu ta liên kết với dạng mệnh đề $p \longrightarrow q$ lệnh If $p$ then $q$ trong một số ngôn ngữ lập trình cấp cao như Pascal, Basic thì dạng mệnh đề $(p \wedge q \longrightarrow r)$ sẽ được liên kết với lệnh *If* $(p \wedge q)$ *then* $r$ còn dạng mệnh đề $p \longrightarrow (q \longrightarrow r)$ sẽ được liên kết với lệnh *If* $p$ *then If* $q$ *then* $r$. Bây giờ ta hãy xét một ví dụ liên quan đến hai lệnh trên trong các đoạn chương trình viết bằng Pascal:

a)
```
z := 3;
For i := 1 to 10 do
 Begin
    x := z - i;
    y := z + 2 * i;
    If (x > 0) AND (y > 0) Then
       writeln ('giá trị của x + y =', x + y)
 End;
```

b)
```
z := 3;
For i := 1 to 10 do
 Begin
    x := z - i;
    y := z + 2 * i;
    If x > 0 Then
       If y > 0 Then writeln ('giá trị của x + y =', x + y)
 End;
```

Rõ ràng cả hai đoạn chương trình trên đều có cùng Output là hai dòng:

$$\begin{aligned}\text{giá trị của } x + y &= 7\\ \text{giá trị của } x + y &= 8\end{aligned}$$

Tuy nhiên trong chương trình a) ta cần 20 lần so sánh (10 lần so sánh $x > 0$ và 10 lần so sánh $y > 0$), trong khi trong chương trình b) ta chỉ cần 12 lần so sánh (10 lần so sánh $x > 0$ và 2 lần so sánh $y > 0$ ứng với $i = 1, 2$). Như thế chương trình b) chạy có hiệu quả hơn.

Ví dụ trên đây cho thấy một mặt cần phân biệt $p \longrightarrow q$ và lệnh If $p$ then $q$, mặt khác ta cần nắm rõ các dạng tương đương của dạng mệnh đề để thực hiện lệnh If $p$ then $q$ có hiệu quả hơn. Chẳng hạn nhiều chương trình biên dịch lợi dụng tương đương logic (1.2.2) để thay lệnh If $(p \wedge q)$ then $r$ bằng lệnh cho cùng kết quả nhưng chạy có hiệu quả là If $p$ then (If $q$ then $r$). Ở đây lại xảy ra nghịch lý là lệnh If $(q \wedge p)$ then $r$ lại được thay bằng lệnh If $q$ then (If $p$ then $r$) mà trong ví dụ trên ta cần đến 20 lần so sánh. Như thế phải cẩn thận khi sử dụng tương đương logic hiển nhiên (luật giao hoán) giữa $p \wedge q$ và $q \wedge p$.

## §3 Qui tắc suy diễn

Trong một chứng minh toán học, xuất phát từ một số khẳng định đúng $p_1, p_2, ..., p_n$ gọi là *tiền đề*, ta áp dụng các *qui tắc suy diễn* để suy ra chân lý của một khẳng định $q$ mà ta gọi là *kết luận*. Nói cách khác, các qui tắc suy diễn được áp dụng để suy ra $q$ là hệ quả logic của $p_1 \wedge p_2 \wedge ... \wedge p_n$, hay nói cách khác dạng mệnh đề

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge ... \wedge p_n) \longrightarrow q$$

là một hằng đúng, trong đó $p_1, p_2, ..., p_n, q$ là các dạng mệnh đề theo một số biến logic nào đó. Thường thì các biến logic không xuất hiện một cách tường minh mà được trừu tượng hóa (bỏ đi phần nội dung cụ thể) từ các mệnh đề nguyên thủy như ví dụ sau đây cho thấy.

Giả sử ta có các tiền đề:

$p_1$: nếu An học chăm thì An đạt môn Toán rời rạc.

$p_2$: nếu An không đi chơi thì An học chăm.

$p_3$: An trượt môn Toán rời rạc.

Ta muốn dùng các qui tắc suy diễn để suy ra kết luận sau là đúng:

$q$: An hay đi chơi.

Muốn vậy ta trừu tượng hóa các mệnh đề nguyên thủy "An học chăm", "An hay đi chơi", "An đạt môn Toán rời rạc" thành các biến mệnh đề $p, q, r$. Như vậy các tiền đề bây giờ trở thành các dạng mệnh đề

$p_1 = p \longrightarrow r$
$p_2 = \neg q \longrightarrow p$
$p_3 = \neg r$

Ta phải chứng minh dạng mệnh đề sau là một hằng đúng:

$$[(p \longrightarrow r) \wedge (\neg q \longrightarrow p) \wedge \neg r] \longrightarrow q.$$

Ta có thể kiểm tra dễ dàng dạng mệnh đề trên là một hằng đúng bằng cách lập ra bảng chân trị của nó. Tuy nhiên, đây không phải là phương pháp tốt nếu số biến mệnh đề lớn. Một phương pháp khác là sử dụng các qui tắc suy diễn để chia bài toán thành ra các bước nhỏ, nghĩa là từ các tiền đề suy ra một số kết luận trung gian trước khi tiếp tục áp dụng các qui tắc suy diễn để suy ra kết luận. Để tiện ta mô hình hoá phép suy diễn thành sơ đồ sau:

$$\begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \\ \hline \therefore q \end{array}$$

Dưới đây là một số qui tắc suy diễn thường dùng mà chân lý có thể được kiểm tra dễ dàng bằng cách lập bảng chân trị.

**Qui tắc Modus Ponens (Phương pháp khẳng định)**

Qui tắc này được thể hiện bởi hằng đúng

$$[(p \longrightarrow q) \wedge p] \longrightarrow q \qquad (1.3.1)$$

hoặc dưới dạng sơ đồ

$$\begin{array}{c} p \longrightarrow q \\ p \\ \hline \therefore q \end{array}$$

**Ví dụ:**

Nếu Minh học chăm thì Minh đạt Toán rời rạc

mà Minh học chăm

Suy ra Minh đạt Toán rời rạc.

Thật ra trong qui tắc Modus Ponens, mệnh đề $p \longrightarrow q$ thường có dạng tổng quát hơn "với bất kỳ sinh viên X nào, nếu X học chăm thì X đạt Toán rời rạc" và ta đã đặc biệt hóa nó cho trường hợp X = sinh viên Minh. Các phép đặc biệt hóa sẽ được xem xét trong phần vị từ và lượng từ. Một ví dụ cổ điển khác của Qui tắc Modus Ponens là:

Mọi người đều chết

mà Socrate là người

vậy Socrate sẽ chết.

Thường thì Qui tắc Modus Ponens được áp dụng cùng với Qui tắc thay thế để đơn giản hóa các bước suy luận. Chẳng hạn ta có phép suy diễn

$$\begin{array}{l} r \vee s \\ (r \vee s) \longrightarrow (\neg t \wedge u) \\ \hline \therefore \neg t \wedge u \end{array}$$

Ở đây Qui tắc Modus Ponens (dạng mệnh đề 1.3.1) được áp dụng cùng với phép thay thế $p$ bởi $r \vee s$ và $q$ bởi $\neg t \wedge u$.

**Tam đoạn luận (Syllogism)** được thể hiện bởi hằng đúng

$$[(p \longrightarrow q) \wedge (q \longrightarrow r)] \longrightarrow (p \longrightarrow r)$$

hay dưới dạng mô hình

$$\begin{array}{l} p \longrightarrow q \\ q \longrightarrow r \\ \hline \therefore p \longrightarrow r \end{array}$$

**Ví dụ:**

1. * Hai tam giác vuông có cạnh huyền bằng nhau và một góc nhọn bằng nhau thì chúng có một cạnh bằng nhau kèm giữa hai góc bằng nhau.

* hai tam giác có một cạnh bằng nhau kèm giữa hai góc bằng nhau thì chúng bằng nhau.

* Suy ra hai tam giác vuông có cạnh huyền bằng nhau và một góc nhọn bằng nhau thì chúng bằng nhau.

2. Xét tam đoạn luận

Một con ngựa rẻ thì hiếm

Cái gì hiếm thì đắt

Suy ra một con ngựa rẻ thì đắt

Tam đoạn luận trên hoàn toàn hợp logic. Tuy nhiên kết luận mâu thuẫn là do dựa trên một tiền đề sai (!).

3. Ta hãy xét một ví dụ trong đó sử dụng cả hai qui tắc trên

Bình đi chơi thì Bình không học Toán rời rạc

Bình không học Toán rời rạc thì Bình trượt Toán rời rạc

Mà Bình thích đi chơi

Vậy Bình trượt Toán rời rạc.

Nếu trừu tượng hoá các mệnh đề nguyên thủy thành các biến mệnh đề $p, q, r$ thì lý luận trên có dạng

$$\begin{array}{l} p \longrightarrow \neg q \\ \neg q \longrightarrow r \\ p \\ \hline \therefore r \end{array}$$

Ta có thể suy luận như sau:

$p \longrightarrow \neg q$

$\neg q \longrightarrow r$

$\therefore p \longrightarrow r$ (Tam đoạn luận)

mà

$p$

$\therefore r$ (Modus Ponens)

hoặc là

$$\begin{array}{l} p \longrightarrow \neg q \\ p \\ \therefore \neg q \text{ (Modus Ponens)} \end{array}$$

mà

$$\neg q \longrightarrow r$$
$$\therefore r \text{ (Modus Ponens)}$$

**Qui tắc Modus Tollens (Phương pháp phủ định)**

Phương pháp này được thể hiện bởi hằng đúng

$$[(p \longrightarrow q) \wedge \neg q] \longrightarrow \neg p$$

hay dưới dạng mô hình

$$\begin{array}{l} p \longrightarrow q \\ \neg q \\ \hline \therefore \neg p \end{array}$$

**Ví dụ:** xét chứng minh

$$\begin{array}{l} p \longrightarrow r \\ r \longrightarrow s \\ t \vee \neg s \\ \neg t \vee u \\ \neg u \\ \hline \therefore \neg p \end{array}$$

Ta có thể suy luận như sau: ta thay các tiền đề $t \vee \neg s$ và $\neg t \vee u$ bởi các dạng mệnh đề tương đương $s \longrightarrow t$ và $t \longrightarrow u$. Khi ấy

$p \longrightarrow r$
$r \longrightarrow s$
$s \longrightarrow t$
$t \longrightarrow u$
$\therefore p \longrightarrow u$ (tam đoạn luận lặp lại nhiều lần)
mà $\neg u$
$\therefore \neg p$ (Phương pháp phủ định)

**Tam đoạn luận rời**: được thể hiện bởi hằng đúng

$$[(p \vee q) \wedge \neg p] \longrightarrow q$$

Ý nghĩa của qui tắc này là khi chỉ có đúng hai trường hợp có thể xảy ra và một trong hai trường hợp đã được khẳng định là sai thì trường hợp còn lại là đúng.

**Qui tắc mâu thuẫn (Chứng minh bằng phản chứng)** Ta có tương đương logic

$$[(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n) \longrightarrow q] \Longleftrightarrow [(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n \wedge \neg q) \longrightarrow \mathbf{0}]$$

Do đó nếu chứng minh được dạng mệnh đề ở bên phải là một hằng đúng thì dạng mệnh đề ở bên trái cũng là một hằng đúng. Nói cách khác nếu thêm giả thiết phụ $\neg q$ vào các tiền đề cho trước mà dẫn đến một mâu thuẫn thì $q$ là hệ quả logic của các tiền đề cho trước.

**Ví dụ:** hãy sử dụng phương pháp Phản chứng cho chứng minh sau:

$$\begin{array}{l} p \longrightarrow r \\ \neg p \longrightarrow q \\ q \longrightarrow s \\ \hline \therefore \neg r \longrightarrow s \end{array}$$

Phủ định của kết luận sẽ tương đương với:

$$\neg(\neg r \longrightarrow s) \Longleftrightarrow \neg(r \vee s) \Longleftrightarrow \neg r \wedge \neg s$$

Như thế ta thêm vào các tiền đề hai giả thiết phụ $\neg r$ và $\neg s$ và tìm cách chứng minh suy luận sau là đúng:

$$\begin{array}{l} p \longrightarrow r \\ \neg p \longrightarrow q \\ q \longrightarrow s \\ \neg r \\ \neg s \\ \hline \therefore \mathbf{0} \end{array}$$

Ta có các bước sau đây

$$\begin{array}{ll}
 & \neg p \longrightarrow q \\
 & q \longrightarrow s \\
 & \therefore \neg p \longrightarrow s \text{ (Tam đoạn luận)} \\
\text{mà} & \neg s \\
 & \therefore \neg(\neg p) \text{ (Phương pháp phủ định)} \\
\text{hay tương đương} & p \\
\text{mà} & p \longrightarrow r \\
 & \therefore r \text{ (Phương pháp khẳng định)}
\end{array}$$

Kết luận $r$ cùng với giả thiết phụ $\neg r$ cho ta:

$$r \wedge \neg r \Longleftrightarrow 0$$

Do đó theo phương pháp phản chứng, chứng minh ban đầu là đúng.

**Qui tắc chứng minh theo trường hợp**

Qui tắc này được thể hiện bởi hằng đúng sau:

$$[(p \longrightarrow r) \wedge (q \longrightarrow r)] \longrightarrow [(p \vee q) \longrightarrow r]$$

Ý nghĩa của qui tắc này là nếu một giả thiết có thể tách thành 2 trường hợp $p$ đúng hay $q$ đúng, và ta đã chứng minh được riêng rẽ cho từng trường hợp là kết luận $r$ đúng, khi ấy $r$ cũng đúng trong cả hai trường hợp.

**Ví dụ**: để chứng minh rằng $f(n) = n^3 + 2n$ luôn luôn chia hết cho 3 ta viết $f(n) = n(n^2 + 2)$ và lấy $n$ là một số nguyên tùy ý. Khi ấy có hai trường hợp xảy ra:

* $n$ chia hết cho 3: khi ấy rõ ràng $f(n)$ cũng chia hết cho 3.

* $n$ không chia hết cho 3, khi ấy ta có thể viết $n = 3k \pm 1$ với một số nguyên $k$ nào đó.

Ta có

$$\begin{aligned}
n^2 + 2 &= (3k \pm 1)^2 + 2 \\
&= 9k^2 \pm 6k + 3 \\
&= 3(3k^2 \pm 2k + 1)
\end{aligned}$$

Suy ra $f(n) = n(n^2 + 2)$ cũng chia hết cho 3. Như vậy trong mọi trường hợp $f(n)$ chia hết cho 3.

Ta hãy xem một ví dụ trong đó sử dụng nhiều qui tắc:

*Nếu nghệ sĩ Văn Ba không trình diễn hay số vé bán ra ít hơn 50 vé thì đêm diễn sẽ bị hủy bỏ và ông Bầu rất buồn.*

*Nếu đêm diễn bị hủy bỏ thì phải trả tiền vé lại cho người xem.*

*Nhưng tiền vé đã không được trả lại cho người xem.*

*Vậy nghệ sĩ Văn Ba đã trình diễn.*

Ta thay các mệnh đề nguyên thủy bằng các biến mệnh đề

$p$: "nghệ sĩ Văn Ba đã trình diễn"

$q$: "số vé bán ra ít hơn 50 vé"

$r$: "đêm diễn bị hủy bỏ"

$s$: "ông Bầu rất buồn"

$t$: "trả tiền vé lại cho người xem"

Khi ấy lý luận cần chứng minh là

$$\begin{array}{ccc} (\neg p \vee q) & \longrightarrow & (r \wedge s) \\ r & \longrightarrow & t \\ \neg t & & \\ \hline \therefore & p & \end{array}$$

Suy luận trên có thể được thực hiện theo các bước sau:

| | | |
|---|---|---|
| | $\neg p \vee q \longrightarrow r \wedge s$ | (Tiền đề) |
| | $r \wedge s \longrightarrow r$ | (hằng đúng gọi là phép đơn giản nối liền) |
| | $r \longrightarrow t$ | (Tiền đề) |
| | $\therefore \neg p \vee q \longrightarrow t$ | (Tam đoạn luận mở rộng) |
| mà | $\neg t$ | (Tiền đề) |
| | $\therefore \neg(\neg p \vee q)$ | (Phương pháp phủ định) |
| hay | $p \wedge \neg q$ | (Qui tắc De Morgan và phủ định của phủ định) |
| mà | $p \wedge \neg q \longrightarrow p$ | (Phép đơn giản nối liền) |
| | $\therefore p$ | (Phương pháp khẳng định) |

## Phản ví dụ

Bây giờ ta hãy xem một bài toán ngược: khi nào một chứng minh (suy luận) là sai, nghĩa là phải kiểm tra $(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n) \longrightarrow q$ không phải là một hằng đúng. Nói cách khác tìm các chân trị của biến mệnh đề làm cho các tiền đề đều đúng trong khi kết luận $q$ là sai. Ta nói ví dụ dẫn đến các giá trị của biến mệnh đề như trên là một *phản ví dụ* của Định lý cần chứng minh.

**Ví dụ**: hãy tìm phản ví dụ cho suy luận dưới đây

Ông Minh đã khẳng định rằng nếu không được tăng lương thì ông ta sẽ xin nghỉ việc. Mặt khác nếu ông ta nghỉ việc mà vợ ông ta bị mất việc thì phải bán xe. Biết rằng nếu vợ ông Minh hay đi làm trễ thì sẽ mất việc và cuối cùng ông Minh đã được tăng lương. Suy ra nếu ông Minh không bán xe thì vợ ông ta không đi làm trễ.

Ta đặt các biến mệnh đề như sau:

$p$: Ông Minh được tăng lương

$q$: Ông minh xin nghỉ việc

$r$: Vợ ông Minh bị mất việc

$s$: Ông Minh phải bán xe

$t$: Vợ ông Minh đi làm trễ.

Mô hình suy luận sẽ là

$$
\begin{array}{rcl}
p & & \\
\neg p & \longrightarrow & q \\
(q \wedge r) & \longrightarrow & s \\
t & \longrightarrow & r \\
\hline
\therefore \neg s & \longrightarrow & \neg t
\end{array}
$$

Để tìm phản ví dụ ta cần tìm các giá trị của các biến mệnh đề sao cho các tiền đề là đúng trong khi kết luận là sai.

Trước hết để kết luận sai ta cần có $\neg s$ đúng và $\neg t$ sai, nghĩa là $s$ sai và $t$ đúng. Khi ấy để cho tiền đề thứ tư đúng $r$ cũng phải đúng. Để tiền đề thứ ba đúng ta cần có $q$ sai. Khi ấy $p$ phải đúng để 2 tiền đề đầu là đúng. Tóm lại phản ví dụ ứng với các chân trị của biến là $p = 1$, $q = 0$, $r = 1$, $s = 0$ và $t = 1$. Đó là trường hợp: Ông Minh được tăng lương ($p = 1$) và ông Minh không nghỉ việc ($q = 0$), vợ ông

Minh bị mất việc ($r = 1$), ông Minh không bán xe ($s = 0$) và vợ ông Minh hay đi làm trễ ($t = 1$).

## §4 Vị từ và lượng từ

**Định nghĩa 1.4.1**: một *vị từ* là một khẳng định $p(x, y, ...)$ trong đó có chứa một số biến $x, y, ...$ lấy giá trị trong những tập hợp cho trước $A, B, ...$ sao cho:

i) bản thân $p(x, y, ...)$ không phải là mệnh đề

ii) nếu thay $x, y, ...$ bằng những phần tử cố định nhưng tùy ý $a \in A$, $b \in B$, ... ta sẽ được một mệnh đề $p(a, b, ...)$, nghĩa là chân trị của nó hoàn toàn xác định. Các biến $x, y, ...$ được nói là biến tự do của vị từ.

**Ví dụ:**

1. $p(n) =$ "$n$ là một số nguyên tố" là một vị từ theo một biến tự do $n \in \mathbf{N}$: với $n = 1, 2, 11$ ta được các mệnh đề đúng $p(1), p(2), p(11)$, còn với $n = 4, 6, 15$ ta được các mệnh đề sai $p(4), p(6), p(15)$.

2. $q(x, y) =$ "$y + 2, x - y, x + 2y$ là số chẵn" là 1 vị từ với 2 biến tự do $x, y \in \mathbf{Z}$: chẳng hạn $q(4, 2)$ là một mệnh đề đúng trong khi $q(5, 2)$, $q(4, 7)$ là những mệnh đề sai.

**Định nghĩa 1.4.2**: cho trước các vị từ $p(x)$, $q(x)$ theo một biến $x \in A$. Khi ấy:

i) Phủ định của $p$, ký hiệu là $\neg p$ là vị từ mà khi thay $x$ bởi một phần tử $a$ cố định của $A$ thì ta được mệnh đề $\neg(p(a))$

ii) Phép nối liền (tương ứng nối rời, kéo theo...) của $p$ và $q$, ký hiệu bởi $p \wedge q$ (tương ứng $p \vee q$, $p \longrightarrow q$,...) là vị từ theo biến $x$ mà khi thay $x$ bởi phần tử cố định $a \in A$ ta được mệnh đề $p(a) \wedge q(a)$ (tương ứng $p(a) \vee q(a), p(a) \longrightarrow q(a),...$)

Giả sử $p(x)$ là một vị từ theo biến $x \in A$. Khi ấy có 3 trường hợp có thể xảy ra:

**Trường hợp 1**: khi thay $x$ bởi một phần tử $a$ tùy ý trong $A$, ta được mệnh đề đúng $p(a)$.

**Trường hợp 2**: với một số giá trị $a \in A$ thì $p(a)$ là mệnh đề đúng, một số giá trị $b \in A$ thì $p(b)$ là mệnh đề sai.

Trường hợp 3: khi thay $x$ bởi phần tử $a$ tùy ý trong $A$, ta được mệnh đề sai $p(a)$.

Nếu Trường hợp 1 xảy ra thì mệnh đề "với mọi $x \in A$, $p(x)$" là một mệnh đề đúng. Mệnh đề này được ký hiệu bởi "$\forall x \in A$, $p(x)$". Như thế mệnh đề này sai nếu Trường hợp 2 hay Trường hợp 3 xảy ra.

Mặt khác nếu Trường hợp 1 hay Trường hợp 2 xảy ra thì mệnh đề "tồn tại $x \in A$, $p(x)$" là một mệnh đề đúng. Mệnh đề này được ký hiệu bởi "$\exists x \in A$, $p(x)$". Như thế mệnh đề này sẽ sai nếu Trường hợp 3 xảy ra.

**Định nghĩa 1.4.3**: các mệnh đề "$\forall x \in A, p(x)$" và "$\exists x \in A, p(x)$" được gọi là *lượng từ hoá* của vị từ $p(x)$ bởi *lượng từ phổ dụng* ($\forall$) và *lượng từ tồn tại* ($\exists$)

**Chú ý**:

1. Trong các mệnh đề lượng từ hoá, biến $x$ không còn là tự do nữa. Ta nói nó đã bị buộc bởi các lượng từ $\forall$ hay $\exists$.

2. Theo nhận xét trên, phủ định của mệnh đề "$\forall x \in A$, $p(x)$" là đúng nếu Trường hợp 2 hay Trường hợp 3 xảy ra. Trường hợp 3 có thể viết lại: khi thay $x$ bởi $a \in A$ tùy ý thì $\neg p(a)$ đúng. Như thế nếu Trường hợp 2 hay Trường hợp 3 xảy ra thì mệnh đề "$\exists x \in A$, $\neg p(x)$" là mệnh đề đúng. Nói cách khác, phủ định của mệnh đề "$\forall x \in A, p(x)$" là mệnh đề "$\exists x \in A, \neg p(x)$". Cũng thế phủ định của mệnh đề "$\exists x \in A$, $p(x)$" là mệnh đề "$\forall x \in A$, $\neg p(x)$" vì cả hai cùng đúng nếu Trường hợp 3 xảy ra và cùng sai nếu Trường hợp 1 hay Trường hợp 2 xảy ra.

Bây giờ ta xem một vị từ theo 2 biến $p(x, y)$ với $x \in A$, $y \in B$. Khi ấy nếu thay $x$ bằng một phần tử cố định nhưng tùy ý $a \in A$ thì $p(a, y)$ trở thành vị từ theo biến $y \in B$ nên ta có thể lượng từ hóa nó theo biến $y$ và được hai mệnh đề "$\forall y \in B. p(a, y)$" và "$\exists y \in B, p(a, y)$". Bằng cách này ta được hai vị từ theo một biến $x \in A$: "$\forall y \in B, p(x, y)$" và

"$\exists y \in B, p(x,y)$". Nếu lượng từ hoá chúng ta sẽ được 4 mệnh đề:

$$\begin{array}{ll} \forall x \in A, \forall y \in B, & p(x,y) \\ \exists x \in A, \forall y \in B, & p(x,y) \\ \forall x \in A, \exists y \in B, & p(x,y) \\ \exists x \in A, \exists y \in B, & p(x,y) \end{array}$$

Đương nhiên ta có thể lượng từ hoá theo biến $x$ trước rồi theo biến $y$ sau để được 4 mệnh đề nữa. Hãy xét một trong các mệnh đề đó: "$\forall y \in B, \forall x \in A, p(x,y)$". Giả sử mệnh đề này đúng. Khi ấy nếu thay $y$ bởi $b \in B$ tùy ý và $x$ bởi $a \in A$ tùy ý ta sẽ được một mệnh đề đúng $p(a,b)$ cho nên mệnh đề $\forall y \in B, p(a,y)$ cũng đúng. Suy ra mệnh đề "$\forall x \in A, \forall y \in B, p(x,y)$" đúng. Rõ ràng điều ngược lại cũng đúng nên ta có mệnh đề đúng

$$[\forall x \in A, \forall y \in B, p(x,y)] \leftrightarrow [\forall y \in B, \forall x \in A, p(x,y)]$$

Tương tự mệnh đề sau cũng đúng:

$$[\exists x \in A, \exists y \in B, p(x,y)] \leftrightarrow [\exists y \in B, \exists x \in A, p(x,y)]$$

Hơn nữa ta có

**Định lý 1.4.1**: *nếu $p(x,y)$ là một vị từ theo 2 biến $x, y$ thì các mệnh đề sau là đúng*

$$\begin{array}{lll} i) & [\forall x \in A, \forall y \in B, p(x,y)] & \leftrightarrow [\forall y \in B, \forall x \in A, p(x,y)] \\ \text{và} & [\exists x \in A, \exists y \in B, p(x,y)] & \leftrightarrow [\exists y \in B, \exists x \in A, p(x,y)] \\ ii) & [\exists x \in A, \forall y \in B, p(x,y)] & \rightarrow [\forall y \in B, \exists x \in A, p(x,y)] \end{array}$$

**Chứng minh**: ta chỉ cần chứng minh ii)

Giả sử "$\exists x \in A, \forall y \in B, p(x,y)$" đúng. Khi ấy sẽ tồn tại $a \in A$ sao cho mệnh đề "$\forall y \in b, p(a,y)$" đúng, nghĩa là nếu thay $y = b \in B$ tùy ý thì $p(a,b)$ đúng. Như vậy với $y = b \in B$ tùy ý ta có thể chọn $x = a$ để khẳng định rằng "$\exists x \in A, p(x,b)$" là đúng.

Do đó "$\forall y \in B, \exists x \in A, p(x,y)$" là một mệnh đề đúng.

• **đpcm**

**Chú ý**: mệnh đề đảo của ii) không nhất thiết đúng trong trường hợp tổng quát. Thật vậy ta hãy xem một ví dụ

Gọi $p(x, y)$ là vị từ theo 2 biến thực:

$$"x + y = 1"$$

Ta nhận xét rằng nếu thay $y = b$ là 1 số thực tùy ý thì ta có thể chọn $x = 1 - b$ để cho $x + b = 1$ nên mệnh đề "$\exists x \in \mathbf{R},\ x + b = 1$" là đúng. Điều này chứng tỏ mệnh đề "$\forall y \in \mathbf{R},\ \exists x \in \mathbf{R},\ x + y = 1$" đúng. Ngược lại nếu thay $x = a$ tùy ý, ta có thể chọn $y = -a$ để cho $a + y = 0 \neq 1$ nên mệnh đề "$\forall y \in \mathbf{R},\ a + y = 1$" là sai. Điều này chứng tỏ mệnh đề "$\exists x \in \mathbf{R},\ \forall y \in \mathbf{R},\ x + y = 1$" là sai. Do đó phép kéo theo sau là sai:

$$(\forall y \in R, \exists x \in \mathbf{R}, x + y = 1) \longrightarrow (\exists x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{R}, x + y = 1)$$

Các kết quả trên đây có thể được mở rộng dễ dàng cho các vị từ theo nhiều biến tự do. Đặc biệt ta có:

**Mệnh đề 1.4.2**: *trong một mệnh đề lượng từ hóa từ một vị từ theo nhiều biến độc lập nếu ta hoán vị hai lượng từ đứng cạnh nhau thì*

*i) mệnh đề mới vẫn còn tương đương logic với mệnh đề cũ nếu hai lượng từ này cùng loại*

*ii) mệnh đề mới sẽ là một hệ quả logic của mệnh đề cũ nếu hai lượng từ trước khi hoán vị có dạng $\exists\forall$.*

**Ví dụ**: một hàm thực liên tục đều trên một khoảng $I \subset \mathbf{R}$ được định nghĩa bởi mệnh đề:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I, \forall x' \in I, (|x - x'| < \delta) \to (|f(x) - f(x')| < \varepsilon)$$

Theo mệnh đề 1.4.2 thì mệnh đề trên có hệ quả logic là

$$\forall \varepsilon > 0, \forall x \in I, \exists \delta > 0, \forall x' \in I, (|x - x'| < \delta) \to (|f(x) - f(x')| < \varepsilon)$$

hay tương đương

$$\forall x \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x' \in I, (|x - x'| < \delta) \to (|f(x) - f(x')| < \varepsilon)$$

Nói cách khác một hàm liên tục đều trên $I$ thì liên tục.

Để lấy phủ định một mệnh đề lượng từ hóa, chú ý 2 của Định nghĩa 1.4.3 có thể được mở rộng thành

**Định lý 1.4.3**: *phủ định của một mệnh đề lượng từ hóa từ vị từ $p(x, y, \ldots)$ có được bằng cách thay lượng từ $\forall$ bởi lượng từ $\exists$ và lượng từ $\exists$ bởi lượng từ $\forall$, và vị từ $p(x, y, \ldots)$ bởi phủ định $\neg p(x, y, \ldots)$.*

**Ví dụ**: một hàm thực liên tục tại $x_0 \in \mathbf{R}$ được định nghĩa bởi:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I\!R, (|x - x_0| < \delta) \rightarrow (|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$$

Do đó lấy phủ định theo Định lý 1.4.3 ta sẽ được định nghĩa của hàm không liên tục tại $x_0$:

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x \in I\!R, (|x - x_0| \leq \delta) \wedge (|f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon)$$

Thông thường, các Định lý trong Toán học được phát biểu liên quan đến các mệnh đề lượng từ hóa trong đó có lượng từ phổ dụng. Do đó ngoài các nguyên tắc suy diễn ta còn sử dụng *Qui tắc đặc biệt hóa phổ dụng* và *Qui tắc tổng quát hóa phổ dụng*.

**Qui tắc đặc biệt hóa phổ dụng**: nếu một mệnh đề đúng có dạng lượng từ hóa trong đó một biến $x \in A$ bị buộc bởi lượng từ phổ dụng $\forall$, khi ấy nếu thay thế $x$ bởi $a \in A$ ta sẽ được một mệnh đề đúng.

**Ví dụ:**

1. Khi ta phát biểu "mọi người đều chết", thực chất là ta đã sử dụng mệnh đề lượng từ hóa:

$\forall x$, ($x$ là người) $\longrightarrow$ ($x$ sẽ chết).

Để áp dụng được Phương pháp khẳng định, ta dùng Qui tắc Đặc biệt hóa phổ dụng với $x =$ Socrate:

(Socrate là người) $\longrightarrow$ (Socrate sẽ chết).

Do đó kết hợp với tiền đề "Socrate là người", Phương pháp khẳng định cho phép kết luận "Socrate sẽ chết".

2. Trong các Định lý Toán học, ví dụ như trường hợp bằng nhau của 2 tam giác, khẳng định là một mệnh đề lượng từ hóa phổ dụng cho một cặp tam giác bất kỳ. Khi áp dụng ta sẽ đặc biệt hóa cho một cặp tam giác cụ thể nào đó.

Do đó "$\forall n, S(n)$" đúng. Đặc biệt khi ta gọi gọi đoạn chương trình trên với các biến lấy giá trị $x, y, n$ thì khi ra khỏi chương trình biến $x$ sẽ có giá trị $x * y^n$ như mong muốn.

# Bài tập

1. Trong các khẳng định sau, cho biết khẳng định nào là mệnh đề:

a) Trần Hưng Đạo là một vị tướng tài. ✓

b) $x + 1$ là một số nguyên dương. ✗

c) 9 là một số chẵn. ✓

d) Hôm nay trời đẹp làm sao! ✗

e) Hãy học Toán rời rạc đi. ✗

f) Nếu bạn đến trễ thì tôi sẽ đi xem đá bóng trước. ✓ $p \to q$

2. Gọi $P$ và $Q$ là các mệnh đề:

$P$: "Minh giỏi Toán"

$Q$: "Minh yếu Anh văn"

Hãy viết lại các mệnh đề sau dưới dạng hình thức trong đó sử dụng các phép nối.

a) Minh giỏi Toán nhưng yếu Anh văn $p \wedge q$

b) Minh yếu cả Toán lẫn Anh văn $\bar{p} \wedge q$

c) Minh giỏi Toán hay Minh vừa giỏi Anh văn vừa yếu Toán

d) Nếu Minh giỏi Toán thì Minh giỏi Anh văn

e) Minh giỏi Toán và Anh văn hay Minh yếu Toán nhưng giỏi Anh văn

3. Gọi $P$, $Q$, $R$ là các mệnh đề:

$P$: "Bình đang học Toán"

$Q$: "Bình đang học Tin học"

$R$: "Bình đang học Anh văn"

Hãy viết lại các mệnh đề dưới đây dưới dạng hình thức trong đó sử dụng các phép nối.

a) Bình đang học Toán và Anh văn nhưng không học Tin học

b) Bình đang học Toán và Tin học nhưng không học cùng một lúc Tin học và Anh văn

c) Không đúng là Bình đang học Anh văn mà không học Toán

d) Không đúng là Bình đang học Anh văn hay Tin học mà không học Toán

e) Bình không học Tin học lẫn Anh văn nhưng đang học Toán

4. Hãy lấy phủ định của các mệnh đề sau:

a) Ngày mai nếu trời mưa hay trời lạnh thì tôi sẽ không ra ngoài

b) 15 chia hết cho 3 nhưng không chia hết cho 4

c) hình tứ giác này không phải là hình chữ nhật mà cũng không phải là hình thoi

d) nếu An không đi làm ngày mai thì sẽ bị đuổi việc

e) mọi tam giác đều có các góc bằng $60^0$

5. Cho biết chân trị của các mệnh đề sau:

a) $\pi = 2$ và tổng các góc của một tam giác bằng $180^0$

b) $\pi = 3,1416$ kéo theo tổng các góc của một tam giác bằng $170^0$

c) $\pi = 3$ kéo theo tổng các góc của một tam giác bằng $170^0$

d) nếu $2 > 3$ thì nước sôi ở $100^0$ C

e) nếu $3 < 4$ thì $4 < 3$

f) nếu $4 < 3$ thì $3 < 4$

6. Ta định nghĩa một phép nối mới ký hiệu là $P \downarrow Q$ để chỉ mệnh đề: không $P$ mà cũng không $Q$. Hãy lập bảng chân trị của phép nối trên.

7. Giả sử $P$ và $Q$ là hai mệnh đề nguyên thủy sao cho $P \to Q$ sai. Hãy xác định chân trị của các mệnh đề sau:

a) $P \wedge Q$ b) $\neg P \vee Q$ c) $Q \to P$.

8. Gọi $P$, $Q$, $R$ là các mệnh đề sau:

$P$: $ABC$ là một tam giác cân

$Q$: $ABC$ là một tam giác đều

$R$: tam giác $ABC$ có 3 góc bằng nhau

Hãy viết lại các mệnh đề sau theo ngôn ngữ thông thường:

a) $Q \to P$ b) $\neg P \to Q$

c) $P \wedge \neg Q$ d) $R \to P$

9. Xác định chân trị của các mệnh đề sau:

a) nếu $3 + 4 = 12$ thì $3 + 2 = 6$

b) nếu $1 + 1 = 2$ thì $1 + 2 = 3$

c) nếu $1+1=2$ thì $1+2=4$

**10.** Có bao nhiêu cách đặt dấu "()" khác nhau vào dạng mệnh đề $\neg p \vee q \vee r$. Lập bảng chân trị cho từng trường hợp.

**11.** Lập bảng chân trị cho các dạng mệnh đề sau:

a) $\neg p \to (p \vee q)$ b) $\neg p \to (\neg q \vee r)$

c) $(p \wedge q) \to \neg q$ d) $(p \vee r) \to (r \vee \neg p)$

e) $(p \to q) \vee (q \to p)$ f) $(p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q)$

g) $(p \to \neg q) \vee (q \to \neg p)$ h) $\neg(\neg p \wedge \neg q)$

**12.** Hãy chỉ ra các hằng đúng trong các dạng mệnh đề sau:

a) $(p \vee q) \to (p \wedge q)$ b) $(p \wedge q) \to (p \vee q)$

c) $p \to (\neg q \to p)$ d) $p \to (p \to q)$

e) $p \to (p \to p)$ f) $(p \to q) \to [(q \to r) \to (p \to r)]$

**13.** Trong các khẳng định sau, hãy chỉ ra các khẳng định đúng:

a) $q \Rightarrow p \to q$

b) $\neg(p \to q) \Rightarrow p$

c) $(p \wedge q) \vee r \Rightarrow p \wedge (q \vee r)$

d) $(p \to q) \wedge (q \to r) \Rightarrow p \to (q \to r)$

e) $p \to (q \to r) \Rightarrow p \to r$

f) $p \to (q \wedge r) \Rightarrow p \to q$

g) $(p \wedge q) \to r \Rightarrow (p \to r) \wedge (q \to r)$

h) $p \to (q \vee r) \Rightarrow (p \to q) \vee (p \to r)$

i) $(\neg p \to q) \vee (p \to \neg q) \Rightarrow p \wedge q$

**14.** a) Giả sử biến mệnh đề $p$ có chân trị 1, hãy xác định tất cả các chân trị của các biến mệnh đề $q$, $r$, $s$ để cho dạng mệnh đề sau lấy chân trị 1:

$$(p \to [(\neg q \vee r) \wedge \neg s]) \wedge [\neg s \to (\neg r \wedge p)]$$

b) Câu hỏi tương tự cho trường hợp $p$ có chân trị 0.

**15.** Có thể nói gì về một dạng mệnh đề:

a) có hệ quả logic là một mâu thuẫn?

b) có hệ quả logic là một hằng đúng?

c) là hệ quả logic của một mâu thuẫn?

d) là hệ quả logic của một hằng đúng?

**16.** Hãy chỉ ra các khẳng định đúng trong số các khẳng định sau:

a) $p \wedge (p \to q) \Leftrightarrow p \wedge q$

b) $p \to q \Leftrightarrow \neg p \vee (p \wedge q)$

c) $p \to q \Leftrightarrow \neg p \to \neg q$

d) $\neg p \Leftrightarrow \neg(p \vee q) \vee (\neg p \wedge q)$

e) $[(p \leftrightarrow q) \wedge (q \leftrightarrow r) \wedge (r \leftrightarrow p)] \Leftrightarrow [(p \to q) \wedge (q \to r) \wedge (r \to p)]$

f) $(p \wedge q) \vee (q \wedge r) \vee (r \wedge p) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (q \vee r) \wedge (r \vee p)$

**17.** Dùng qui tắc thay thế để kiểm tra các dạng mệnh đề sau là hằng đúng:

a) $[(p \vee q) \to r] \leftrightarrow [\neg r \to \neg(p \vee q)]$

b) $[[(p \vee q) \to r] \vee (s \wedge t)]$
$\leftrightarrow [[[(p \vee q) \to r] \vee s] \wedge [[(p \vee q) \to r] \vee t]]$

**18.** Đơn giản dạng mệnh đề sau:

$$[[[(p \wedge q) \wedge r] \vee [(p \wedge r) \wedge \neg r]] \vee \neg q] \to s$$

**19.** Lấy phủ định rồi đơn giản các dạng mệnh đề sau:

a) $p \wedge (q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r)$

b) $(p \wedge q) \to r$

c) $p \to (\neg q \wedge r)$

d) $p \vee q \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r)$

**20.** Cho biết qui luật logic nào đã được áp dụng trong mỗi bước tương đương sau:

| Biểu thức | Qui luật logic |
|---|---|
| a) $[(p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)] \vee q$ | |
| $\Leftrightarrow [p \vee (q \wedge \neg q)] \vee q$ | |
| $\Leftrightarrow (p \vee 0) \vee q$ | |
| $\Leftrightarrow p \vee q$ | |
| b) $\neg(p \vee q) \vee [(\neg p \wedge q) \vee \neg q]$ | |
| $\Leftrightarrow \neg(p \vee q) \vee [\neg q \vee (\neg p \wedge q)]$ | |
| $\Leftrightarrow \neg(p \vee q) \vee [(\neg q \vee \neg p) \wedge (\neg q \vee q)]$ | |
| $\Leftrightarrow \neg(p \vee q) \vee [(\neg q \vee \neg p) \wedge 1]$ | |
| $\Leftrightarrow \neg(p \vee q) \vee (\neg q \vee \neg p)$ | |
| $\Leftrightarrow \neg(p \vee q) \vee \neg(q \wedge p)$ | |

$\Leftrightarrow \neg[(p \vee q) \wedge (q \wedge p)]$

$\Leftrightarrow \neg[(q \wedge p) \wedge (p \vee q)]$

$\Leftrightarrow \neg[q \wedge [p \wedge (p \vee q)]$

$\Leftrightarrow \neg(q \wedge p)$

c) $(p \to q) \wedge [\neg q \wedge (r \vee \neg q)]$

$\Leftrightarrow (p \to q) \wedge \neg q$

$\Leftrightarrow (\neg p \vee q) \wedge \neg q$

$\Leftrightarrow \neg q \wedge (\neg p \vee q)$

$\Leftrightarrow (\neg q \wedge \neg p) \vee (\neg q \wedge q)$

$\Leftrightarrow (\neg q \wedge \neg p) \vee \mathbf{0}$

$\Leftrightarrow \neg q \wedge \neg p$

$\Leftrightarrow \neg(q \vee p)$

**21.** Hãy điền mệnh đề thích hợp vào chỗ trống để cho các suy luận sau đây theo Phương pháp khẳng định và phủ định là đúng:

a) Nếu xe của Minh không khởi động được thì anh phải kiểm tra bugi

Mà xe của Minh không khởi động được

Suy ra ..................................

b) Nếu Hà làm bài đúng thì cô được điểm cao

Mà Hà không được điểm cao

Suy ra ..................................

c) Nếu đây là vòng lặp REPEAT-UNTIL thì phần thân của vòng lặp phải được thực hiện ít nhất một lần

Mà ..................................

Vậy phần thân của vòng lặp được thực hiện ít nhất một lần

d) Nếu chiều nay Minh đá bóng thì Minh không được xem Tivi buổi tối

Mà ..................................

Vậy Minh không đá bóng chiều nay

**22.** Cho biết suy luận nào trong các suy luận dưới đây là đúng và Qui tắc suy diễn nào đã được sử dụng?

a) Điều kiện đủ để CSG thắng trận là đối thủ đừng gỡ lại vào phút cuối

Mà CSG đã thắng trận

Vậy đối thủ của CSG không gỡ lại vào phút cuối

b) Nếu Minh giải được bài toán thứ tư thì em đã nộp bài trước giờ qui định

Mà Minh đã không nộp bài trước giờ qui định

Vậy Minh không giải được bài toán thứ tư

c) Nếu lãi suất giảm thì số người gửi tiết kiệm sẽ giảm

Mà lãi suất đã không giảm

Vậy số người gửi tiết kiệm không giảm

d) Nếu được thưởng cuối năm Hà sẽ đi Đà lạt

Nếu đi Đà lạt Hà sẽ thăm Suối vàng

Do đó nếu được thưởng cuối năm Hà sẽ thăm Suối vàng

**23.** a) Dùng các qui tắc suy diễn để suy ra khẳng định sau là đúng:

$$(q \land r) \Rightarrow (q \lor r)$$

b) Xét các dạng mệnh đề:

$$E = [p \land (q \land r)] \lor \neg[p \lor (q \land r)]$$
$$F = [p \land (q \lor r)] \lor \neg[p \lor (q \lor r)]$$

Khẳng định $E \Rightarrow F$ đúng hay sai?

**24.** Xét suy diễn:

$$[p \land (p \to q) \land (s \lor r) \land (r \to \neg q)] \to (s \lor t)$$

Cho biết các bước suy diễn sau đã sử dụng các qui tắc nào?

| | Bước | Qui tắc suy diễn |
|---|---|---|
| | $p$ | |
| | $p \to q$ | |
| | $\therefore q$ | |
| hay | $\neg\neg q$ | |
| mà | $r \to \neg q$ | |
| | $\therefore \neg r$ | |

mà $s \vee r$

hay $\neg r \to s$

$\therefore s$

$\therefore s \vee t$

25. Xét suy diễn sau:

$$\begin{array}{l} (\neg p \vee q) \to r \\ r \to (s \vee t) \\ \neg s \wedge \neg u \\ \neg u \to \neg t \\ \hline \therefore p \end{array}$$

Cho biết các qui tắc nào đã được sử dụng trong các bước sau:

| Bước | | Qui tắc suy diễn |
|---|---|---|
| | $\neg s \wedge \neg u$ | |
| | $\therefore \neg u$ | |
| mà | $\neg u \to \neg t$ | |
| | $\therefore \neg t$ | |
| mà | $\neg s$ | |
| nên | $\neg s \wedge \neg t$ | |
| hay | $\neg(s \vee t)$ | |
| mà | $r \to s \vee t$ | |
| | $\therefore \neg r$ | |
| mà | $(\neg p \vee q) \to r$ | |
| | $\therefore \neg(\neg p \vee q)$ | |
| hay | $p \wedge \neg q$ | |
| | $\therefore p$ | |

26. Giải thích các bước của suy luận sau:

$$[(p \to q) \wedge (\neg r \vee s) \wedge (p \vee r)] \to (\neg q \to s)$$

| Bước | | Qui tắc suy diễn |
|---|---|---|
| Giả sử | $\neg(\neg q \to s)$ | |
| hay | $\neg(q \vee s)$ | |

hay $\neg q \wedge \neg s$

$\therefore \neg q$

và $\neg s$

mà $\neg r \vee s$

hay $r \to s$

$\therefore \neg r$

Mặt khác $p \to q$

và $\neg q$

$\therefore \neg p$

Do đó $\neg r \wedge \neg p$

hay $\neg(r \vee p)$

mà $p \vee r$

$\therefore 0$

Vậy suy luận là đúng.

27. Hãy kiểm tra lại các suy luận sau:

a) $[(p \wedge \neg q) \wedge r] \to [(p \wedge r) \vee q]$

b) $[p \wedge (p \to q) \wedge (\neg q \vee r)] \to r$

28. Hãy kiểm tra các suy luận sau:

a)
$$\begin{array}{l} p \to q \\ \neg q \\ \neg r \\ \hline \therefore \neg(p \vee r) \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{l} p \to q \\ r \to \neg q \\ r \\ \hline \therefore \neg p \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{l} p \to (q \to r) \\ \neg q \to \neg p \\ p \\ \hline \therefore r \end{array}$$

d)
$$\begin{array}{l} p \wedge q \\ p \to (r \wedge q) \\ r \to (s \vee t) \\ \neg s \\ \hline \therefore t \end{array}$$

e)
$$\begin{array}{l} p \to (q \to r) \\ p \vee s \\ t \to q \\ \neg s \\ \hline \therefore \neg r \to \neg t \end{array}$$

f)
$$\begin{array}{l} p \vee q \\ \neg p \vee r \\ \neg r \\ \hline \therefore q \end{array}$$

29. Tìm phản ví dụ cho các suy luận sau:

a)
$$\begin{array}{l} p \leftrightarrow q \\ q \to r \\ r \vee \neg s \\ \neg s \to q \\ \hline \therefore s \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{l} p \\ p \to r \\ p \to (q \vee \neg r) \\ \neg q \vee \neg s \\ \hline \therefore s \end{array}$$

30. Hãy kiểm tra xem các suy luận sau có đúng không?

a) Nếu An được lên chức và làm việc nhiều thì An sẽ được tăng lương

Nếu được tăng lương An sẽ mua xe mới

Mà An không mua xe mới

Vậy An không được lên chức hay An không làm việc nhiều

b) Nếu muốn dự họp sáng Thứ Ba thì Minh phải dậy sớm

Nếu Minh đi nghe nhạc tối Thứ Hai thì Minh sẽ về trễ

Nếu về trễ và thức dậy sớm thì Minh phải đi họp mà chỉ ngủ dưới 7 giờ

Nhưng Minh không thể đi họp nếu ngủ dưới 7 giờ

Do đó hoặc là Minh không đi nghe nhạc tối Thứ Hai hoặc là Minh phải bỏ họp sáng Thứ Ba

c) Nếu Bình đi làm về muộn thì vợ anh ta sẽ rất giận dữ

Nếu An thường xuyên vắng nhà thì vợ anh ta sẽ rất giận dữ

Nếu vợ Bình hay vợ An giận dữ thì cô Hà bạn họ sẽ nhận được lời than phiền

Mà Hà đã không nhận được lời than phiền

Vậy Bình đi làm về sớm và An ít khi vắng nhà

31. Xét các vị từ:

$p(x)$: "$x \leq 5$"

$q(x)$: "$x + 3$ chẵn"

trong đó $x$ là một biến nguyên. Tìm chân trị của các mệnh đề sau:

a) $p(1)$ b) $q(1)$ c) $\neg p(2)$

d) $q(3)$ e) $p(6) \vee q(6)$ f) $\neg(p(-1) \vee q(-1))$

32. Với $p(x)$, $q(x)$ như trên. Xét thêm vị từ:

$$r(x): \quad "x > 0"$$

Tìm chân trị của các mệnh đề sau:

a) $p(2) \vee [q(2) \vee r(2)]$ b) $p(2) \wedge [\neg q(2) \vee \neg r(2)]$

c) $p(3) \to [q(3) \to r(3)]$ d) $[p(3) \wedge q(3)] \to r(3)$

e) $p(1) \to [q(1) \leftrightarrow r(1)]$ f) $[p(1) \to q(1)] \leftrightarrow r(1)$

**33.** Với $p, q, r$ như trên

a) Tìm tất cả $x$ để cho $p(x) \wedge q(x) \wedge r(x)$ đúng

b) Tìm giá trị $x$ nhỏ nhất để $p(x) \rightarrow [\neg q(x) \wedge r(x)]$ đúng

**34.** Xét vị từ $p(x)$: "$x^2 - 3x + 2 = 0$". Cho biết chân trị của các mệnh đề sau:

a) $p(0)$ b) $p(1)$ c) $p(2)$

d) $\exists x, p(x)$ e) $\forall x, p(x)$

**35.** Lớp Phân tích Thuật toán có 110 sinh viên ghi tên học trong đó có:

- 15 sinh viên Toán - Tin học năm Thứ 3
- 5 sinh viên Toán năm Thứ 3
- 25 sinh viên Toán - Tin học năm Thứ 4
- 5 sinh viên Toán năm Thứ 4
- 50 sinh viên Công nghệ Thông tin năm Thứ 4
- 5 sinh viên Toán - Tin học Cao học
- 5 sinh viên Công nghệ Thông tin Cao học

Xét các vị từ:

$l(x)$: sinh viên $x$ ghi tên học môn Phân tích Thuật toán

$b(x)$: $x$ là sinh viên năm Thứ 3

$c(x)$: $x$ là sinh viên năm Thứ 4

$d(x)$: $x$ là sinh viên Cao học

$r(x)$: $x$ là sinh viên Công nghệ Thông tin

$s(x)$: $x$ là sinh viên Toán - Tin học

$t(x)$: $x$ là sinh viên Toán

Hãy viết lại các mệnh đề dưới đây theo dạng lượng từ hóa

a) có sinh viên Toán năm Thứ 3 trong lớp PTTT

b) có sinh viên trong lớp không phải là sinh viên Công nghệ Thông tin

c) mọi sinh viên trong lớp là sinh viên Toán - Tin học hay Công nghệ Thông tin

d) không có sinh viên Cao học Toán trong lớp PTTT

e) mọi sinh viên năm Thứ 3 trong lớp thuộc ngành Toán hay Toán - Tin học

f) có sinh viên ở Trường không thuộc ngành Toán - Tin học và cũng không thuộc ngành Công nghệ Thông tin

**36.** Xét các vị từ:

$p(x, y)$: "$x^2 \geq y$"

$q(x, y)$: "$x + 1 < y$"

trong đó $x, y$ là các biến thực. Cho biết chân trị của các mệnh đề sau:

a) $p(2, 4)$ b) $q(2, \pi)$

c) $p(-3, 7) \wedge q(1, 2)$ d) $p(-2, 1) \vee \neg q(-1, -1)$

e) $p(1, 1) \rightarrow q(1, 1)$ f) $p(2, 5) \leftrightarrow \neg q(2, 5)$

**37.** Xét các vị từ theo biến thực $x$:

$p(x)$: $x^2 - 5x + 6 = 0$

$q(x)$: $x^2 - 4x - 5 = 0$

$r(x)$: $x > 0$

Hãy xác định chân trị của các mệnh đề sau:

a) $\forall x, p(x) \rightarrow r(x)$ b) $\forall x, q(x) \rightarrow \neg r(x)$

c) $\exists x, q(x) \rightarrow r(x)$ d) $\exists x, p(x) \rightarrow \neg r(x)$

**38.** Xét vị từ theo 2 biến nguyên tự nhiên: $>0$

$p(x, y)$: "$x$ là ước của $y$"

Hãy xác định chân trị của các mệnh đề sau:

a) $p(2, 3)$ b) $p(2, 6)$ c) $\forall y, p(1, y)$

d) $\forall x, p(x, x)$ e) $\forall y, \exists x, p(x, y)$ f) $\exists y \forall x, p(x, y)$

g) $\forall x \forall y, (p(x, y) \wedge p(y, x)) \rightarrow (x = y)$

h) $\forall x \forall y \forall z, (p(x, y) \wedge p(y, z)) \rightarrow p(x, z)$

**39.** Với mỗi mệnh đề dưới đây, cho biết chân trị. **Phủ định kèm** theo có đúng không? Nếu không hãy thay bằng phủ định đúng.

a) Với mọi số thực $x, y$, nếu $x^2 > y^2$ thì $x > y$

*Phủ định*: tồn tại số thực $x, y$ sao cho $x^2 > y^2$ nhưng $x \leq y$

b) Với mọi số thực $x$, nếu $x \neq 0$ thì $x$ có nghịch đảo

*Phủ định*: tồn tại số thực khác 0 mà không có nghịch đảo

c) Tồn tại hai số nguyên lẻ có tích là số lẻ

*Phủ định*: tích của hai số lẻ bất kỳ là số lẻ

d) Bình phương của mọi số hữu tỉ là số hữu tỉ

*Phủ định*: tồn tại số thực $x$ sao cho nếu $x$ vô tỉ thì $x^2$ vô tỉ.

**40.** Lấy phủ định của các mệnh đề sau:

a) Với mọi số nguyên $n$, nếu $n$ không chia hết cho 2 thì $n$ là số lẻ

b) Nếu bình phương của một số nguyên là lẻ thì số nguyên ấy là lẻ

c) Nếu $k, m, n$ là số nguyên sao cho $k - m$ và $m - n$ là số lẻ thì $k - n$ là số chẵn.

d) Nếu $x$ là một số thực sao cho $x^2 > 16$ thì $x < -4$ hay $x > 4$

e) Với mọi số thực $x$, nếu $|x - 3| < 7$ thì $-4 < x < 10$

**41.** Gọi $p(x)$ và $q(x)$ là hai vị từ theo một biến, hãy lấy phủ định và đơn giản các mệnh đề sau:

a) $\exists x, p(x) \vee q(x)$ b) $\forall x, p(x) \wedge \neg q(x)$

c) $\forall x, p(x) \to q(x)$ d) $\exists x, [p(x) \vee q(x)] \to p(x)$

**42.** Cho biết chân trị của các mệnh đề sau trong đó $x, y$ là các biến thực:

a) $\exists x \exists y, xy = 1$

b) $\exists x \forall y, xy = 1$

c) $\forall x \exists y, xy = 1$

d) $\forall x \forall y, \sin^2 x + \cos^2 x = \sin^2 y + \cos^2 y$

e) $\exists x \exists y, (2x + y = 5) \wedge (x - 3y = -8)$

f) $\exists x \exists y, (3x - y = 7) \wedge (2x + 4y = 3)$

**43.** a) Sự tồn tại của phần tử 0 trong **R** được cho bởi:

$$\exists a\ \forall x,\ x + a = x$$

Hãy viết mệnh đề chỉ sự tồn tại của phần tử đơn vị trong **R**

b) $x'$ được nói là phần tử đối của $x$ nếu $x + x' = 0$

Hãy viết mệnh đề cho biết tồn tại phần tử đối

c) $x'$ được nói là nghịch đảo của $x$ nếu $xx' = 1$

Hãy viết mệnh đề cho biết mọi số thực khác 0 đều có nghịch đảo.

d) Nếu thu hẹp vào tập hợp **Z** các số nguyên thì các mệnh đề trong b) và c) phải được điều chỉnh như thế nào để vẫn còn đúng.

**44.** Giả sử $p(x)$ là vị từ theo một biến $x \in A$. Khi ấy mệnh đề lượng từ hóa $\exists! x, p(x)$ được định nghĩa như là:

$$(\exists x, p(x)) \wedge [\forall x \forall y, (p(x) \wedge p(y)) \rightarrow x = y]$$

Nói cách khác, tồn tại phần tử $a$ sao cho $p(a)$ đúng và $a$ là phần tử duy nhất của $A$ để cho $p(a)$ đúng.

Hãy viết lại các mệnh đề dưới đây dưới dạng hình thức trong đó sử dụng lượng từ $\exists!$

a) Mọi số thực khác 0 có nghịch đảo duy nhất

b) Với mọi $x, y \in I\!R$, tổng $x + y$ là duy nhất

c) Với mọi $x$, tồn tại $y$ duy nhất sao cho $y = 3x + 7$

**45.** Giả sử $p(x, y)$ là vị từ $y = -2x$ trong đó $x, y$ là các biến nguyên. Hãy cho biết chân trị của mệnh đề sau:

a) $[\forall x \exists! y, p(x, y)] \quad \rightarrow \quad [\exists! y \forall x, p(x, y)]$

b) $[\exists! y \forall x, p(x, y)] \quad \rightarrow \quad [\forall x \exists! y, (x, y)]$

**46.** Với vị từ $p(x, y)$: "$x + y$ là số chẵn". Hãy cho biết các mệnh đề trong (45) có đúng không?

**47.** Xét mệnh đề "$\exists! x, x > 1$". Hãy tìm tập hợp vũ trụ để cho mệnh đề trên là đúng (tương ứng sai)

**48.** Hãy điền vào hàng trống để cho các suy luận sau là đúng:

a) Mọi số nguyên là số hữu tỉ

Số thực $\pi$ không phải là số hữu tỉ

$\therefore$ ..............................

b) Mọi sinh viên Tin học đều học Toán Rời rạc

..............................

$\therefore$ Minh học Toán Rời rạc

c) ..............................

Bình là một Giám đốc điều hành

$\therefore$ Bình biết cách ủy quyền cho cấp dưới.

d) Mọi hình chữ nhật có bốn góc bằng nhau

..............................

.. tứ giác $MNPQ$ không phải là hình chữ nhật

e) Mọi người quan tâm đến Cholesterol đều tránh ăn gan

Minh là một người quan tâm đến Cholesterol

$\therefore$ ..............................

**49.** Xác định các suy luận đúng trong số các suy luận dưới đây. Cho biết qui tắc suy diễn đã được áp dụng

a) Mọi người đưa thư đều mang theo túi thư

An là một người đưa thư

Vậy An mang theo túi thư

b) Mọi công dân tốt đều đóng thuế

Ông Bình đã đóng thuế

Vậy ông Bình là một công dân tốt

c) Mọi người quan tâm đến môi trường đều để riêng các túi nhựa bỏ đi

Hà không quan tâm đến môi trường

Suy ra Hà không để riêng các túi nhựa bỏ đi

d) Mọi sinh viên nghiêm túc đều không nộp bài chưa làm xong

Minh không nộp bài chưa làm xong

Vậy Minh là sinh viên nghiêm túc

**50.** $p(x)$ và $q(x)$ là hai vị từ theo một biến.

hãy chứng minh các khẳng định dưới đây:

a) $[\exists x, p(x) \vee q(x)] \Leftrightarrow [(\exists x, p(x)) \vee (\exists x, q(x))]$

b) $[\forall x, p(x) \wedge q(x)] \Leftrightarrow [(\forall x, p(x)) \wedge (\forall x, q(x))]$

c) $[(\forall x, p(x)) \vee (\forall x, q(x))] \Rightarrow [\forall x, p(x) \vee q(x)]$

d) Hãy tìm phản ví dụ cho phần đảo của c)

**51.** Xét suy luận:

$$\begin{array}{l} \forall x, p(x) \to (q(x) \wedge r(x)) \\ \forall x, p(x) \wedge s(x) \\ \hline \therefore \forall x, r(x) \wedge s(x) \end{array}$$

Hãy cho biết Qui tắc suy diễn áp dụng cho mỗi bước dưới đây:

| Bước | | Qui tắc áp dụng |
|---|---|---|
| | $\forall x, p(x) \wedge s(x)$ | |
| | $p(a) \wedge s(a)$ | |
| | $\therefore p(a)$ | |
| và | $s(a)$ | |
| | $\forall x, p(x) \to (q(x) \wedge r(x))$ | |
| | $p(a) \to (q(a) \wedge r(a))$ | |
| | $\therefore q(a) \wedge r(a)$ | |
| vậy | $r(a)$ | |
| | $\therefore r(a) \wedge s(a)$ | |
| như thế | $\forall x, r(x) \wedge s(x)$ | |

52. Xét suy luận:

$$
\begin{array}{l}
\forall x, p(x) \vee q(x) \\
\exists x, \neg p(x) \\
\forall x, \neg q(x) \vee r(x) \\
\forall x, s(x) \to \neg r(x) \\
\hline
\therefore \exists x, \neg s(x)
\end{array}
$$

Hãy cho biết các Qui tắc suy diễn áp dụng trong các bước sau:

| Bước | | Qui tắc áp dụng |
|---|---|---|
| | $\exists x, \neg p(x)$ | tồn tại $a$ sao cho $\neg p(a)$ đúng |
| | $\neg p(a)$ | |
| | $\forall x, p(x) \vee q(x)$ | |
| | $p(a) \vee q(a)$ | |
| hay | $\neg p(a) \to q(a)$ | |
| | $\therefore q(a)$ | |
| | $\forall x, \neg q(x) \vee r(x)$ | |
| | $\neg q(a) \vee r(a)$ | |
| hay | $q(a) \to r(a)$ | |
| | $\therefore r(a)$ | |
| | $\forall x, s(x) \to \neg r(x)$ | |
| | $s(a) \to \neg r(a)$ | |
| | $\therefore \neg s(a)$ | |
| nghĩa là | $\exists x, \neg s(x)$ | |

**53.** Hãy chứng minh các công thức sau:

a) $0^2 + 1^2 + ... + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

b) $0^3 + 1^3 + ... + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

c) $1.2.3 + 2.3.4 + ... + n(n+1)(n+2) = \dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

d) $1.1! + 2.2! + ... + n.n! = (n+1)! - 1$

e) $\dfrac{1}{2!} + \dfrac{2}{3!} + ... + \dfrac{n}{(n+1)!} = 1 - \dfrac{1}{(n+1)!}$

f) $\dfrac{1}{1.2.3} + \dfrac{1}{2.3.4} + ... + \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)} = \dfrac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$

**54.** Xét vị từ:

$p(n)$: $n$ vật bất kỳ thì đồng nhất với nhau trong đó $n$ là một biến nguyên, $n \geq 1$.

*Khẳng định*: $\forall n \geq 1, p(n)$

Chứng minh:

$p(1)$: hiển nhiên

Giả sử $p(n-1)$ đúng. Xét $n$ vật $x_1, x_2, ..., x_n$

Do $p(n-1)$ đúng nên $x_1, x_2, ..., x_{n-1}$ đồng nhất và đồng thời $x_2, x_3, ..., x_n$ đồng nhất.

Suy ra $x_1, x_2, ..., x_n$ đồng nhất. Nghĩa là $p(n)$ đúng.

Do đó theo nguyên lý qui nạp $\forall n \geq 1, p(n)$ là một mệnh đề đúng!

Suy luận trên sai do đâu?

**55.** Đặt các số $1, 2, ..., 25$ trên 1 vòng tròn theo một thứ tự tùy ý. Chứng minh rằng luôn luôn có 3 số liên tiếp có tổng $\geq 39$

**56.** Chứng minh các bất đẳng thức sau với $n \in N$

a) Nếu $n > 3$ thì $2^n < n!$

b) Nếu $n > 4$ thì $n^2 < 2^n$.

c) Nếu $n > 9$ thì $n^3 < 2^n$

**57.** Xét vị từ $S(n)$:

$$1 + 2 + ... + n = \frac{(n + \frac{1}{2})^2}{2}$$

Chứng minh rằng nếu $S(k)$ đúng thì $S(k+1)$ đúng với mọi $k \geq 1$. Từ đó có suy ra được $S(n)$ đúng với mọi $n \geq 1$ không?

58. Xét các phương trình

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \\ 2+3+4 &= 1+8 \\ 5+6+7+8+9 &= 8+27 \\ 10+11+12+13+14+15+16 &= 27+64 \end{aligned}$$

Từ đó suy ra một công thức tổng quát dưới dạng vị từ theo một biến nguyên và chứng minh công thức này.

59. Xét đoạn chương trình viết bằng Pascal

```
While n <> 0 do
   Begin
      x := x + y;
      n := n - 1
   End;
Ketqua := x;
```

Chứng minh rằng khi gọi đoạn chương trình trên với các biến $x, y$ lấy giá trị thực và biến $n$ lấy giá trị nguyên tự nhiên thì khi ra khỏi đoạn chương trình, biến Ketqua được gán giá trị $x + ny$

60. Xét đoạn chương trình viết bằng Pascal

```
While n <> 0 do
   Begin
      x := x × y;
      n := n - 1
   End;
Ketqua := x;
```

Giả sử ta gọi đoạn chương trình trên với các biến $x, y$ lấy giá trị thực và $n$ lấy giá trị nguyên dương. Khi ra khỏi đoạn chương trình biến Ketqua sẽ được gán giá trị nào? Hãy chứng minh khẳng định đó.

## Chương 2

# PHƯƠNG PHÁP ĐẾM

Từ Chương 2 trở đi, ta sẽ sử dụng các ký hiệu logic quen thuộc $\Longrightarrow$, $\Longleftrightarrow$ để chỉ các quan hệ "có hệ quả logic", "tương đương logic" giữa các mệnh đề mà ta xem như dạng mệnh đề hằng. Ngoài ra ta cũng dùng các ký hiệu này để chỉ phép kéo theo và phép kéo theo hai chiều. Các ký hiệu $\longrightarrow$, $\longleftrightarrow$ được dành cho các ánh xạ.

### §1 Tập hợp

Trong chương trước ta đã sử dụng khái niệm tập hợp trong một số ví dụ, đặc biệt trong định nghĩa của các lượng từ. Trong chương này ta tiếp tục sử dụng khái niệm tập hợp theo nghĩa trực quan: đó là những đối tượng được nhóm lại theo một tính chất nào đó. Nếu $a$ là một phần tử của tập hợp $A$, ta viết $a \in A$. Trong trường hợp ngược lại, ta viết $a \notin A$.

Ở đây khái niệm "tính chất" được hiểu theo một nghĩa hết sức rộng rãi. Thường thì nó biểu hiện bởi một vị từ $p(x)$ theo một biến $x \in \mathcal{U}$. Khi ấy tập hợp tất cả các phần tử $x \in \mathcal{U}$ sao cho $p(x)$ đúng được ký hiệu bởi:

$$A = \{x \in \mathcal{U} / p(x)\}$$

$\mathcal{U}$ được gọi là tập hợp vũ trụ. Nếu $\mathcal{U}$ hiểu ngầm thì $A$ có thể viết:

$$A = \{x / p(x)\}$$

Ví dụ:

1. $A = \{x \in \mathbf{N} / x$ là số nguyên tố$\}$
2. $A = \{x \in \mathbf{Z} / x^2 < 5\}$

Trong ví dụ 2, ta có thể chỉ ra tất cả các phần tử của $A$: $-2, -1, 0, 1, 2$. Ta viết

$$A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$$

Ta nói $A$ được mô tả bằng cách liệt kê ra tất cả các phần tử. Cũng thế $B = \{x \in \mathbf{N} / x \leq n\}$ có thể được mô tả bằng cách liệt kê các phần tử

$$B = \{0, 1, ..., n\}$$

Với phương pháp mô tả bằng cách liệt kê các phần tử, một tập hợp có thể là:

$$A = \{1, 2, 97, 100\}$$

Khi này không nhất thiết các phần tử được nhóm lại theo một tính chất cụ thể nào.

Chú ý rằng tập hợp $\{x \in \mathbf{N} / x^2 < 0\}$ không có phần tử nào cả. Ta nói nó là *tập hợp rỗng* và ký hiệu bởi $\emptyset$.

Giả sử $A, B$ là 2 tập hợp con của tập hợp vũ trụ $\mathcal{U}$, ta nói $A$ là *tập hợp con* của $B$ (hay $A$ được bao hàm trong $B$ hay $B$ bao hàm $A$) nếu:

$$\forall x \in \mathcal{U}, (x \in A) \Longrightarrow (x \in B)$$

Khi ấy ta viết $A \subset B$. Chú ý rằng, bản thân $A$ và $\emptyset$ là tập hợp con của $A$.

Cho hai tập hợp $A$ và $B$. Nếu $A \subset B$ và $B \subset A$ ta nói $A$ bằng $B$ và viết $A = B$. Rõ ràng là $A = B$ khi và chỉ khi;

$$\forall x \in \mathcal{U}, (x \in A) \Longleftrightarrow (x \in B)$$

Sử dụng các phép nối trên mệnh đề và vị từ, ta có thể định nghĩa các phép toán hợp ($\cup$), giao ($\cap$) và phần bù trên tập hợp.

**Định nghĩa 2.1.1**: Giả sử $A$, $B$ là 2 tập hợp con của tập hợp vũ trụ $\mathcal{U}$. Khi ấy

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{x \in \mathcal{U} / (x \in A) \vee (x \in B)\} \\ A \cap B &= \{x \in \mathcal{U} / (x \in A) \wedge (x \in B)\} \\ \overline{A} = \mathcal{U} \setminus A &= \{x \in \mathcal{U} / x \notin A\} \end{aligned}$$

$\overline{A}$ được gọi là *phần bù* của $A$ (trong $\mathcal{U}$).

**Định lý 2.11**: *$A, B, C$ là các tập con tùy ý của $\mathcal{U}$, ta có:*

*i)Tính giao hoán:*

$$\begin{aligned} A \cup B &= B \cup A \\ A \cap B &= B \cap A \end{aligned}$$

*ii)Tính kết hợp:*

$$\begin{aligned} A \cup (B \cup C) &= (A \cup B) \cup C \\ A \cap (B \cap C) &= (A \cap B) \cap C \end{aligned}$$

*iii)Luật De Morgan:*

$$\begin{aligned} \overline{A \cup B} &= \overline{A} \cap \overline{B} \\ \overline{A \cap B} &= \overline{A} \cup \overline{B} \end{aligned}$$

*iv)Tính phân bố:*

$$\begin{aligned} A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C) \\ A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{aligned}$$

*v)Phần tử trung hòa:*

$$\begin{aligned} A \cup \emptyset &= A \\ A \cap \mathcal{U} &= A \end{aligned}$$

*vi)Phần bù:*

$$\begin{aligned} A \cup \overline{A} &= \mathcal{U} \\ A \cap \overline{A} &= \emptyset \end{aligned}$$

*vii)Tính thống trị:*

$$\begin{aligned} A \cup \mathcal{U} &= \mathcal{U} \\ A \cap \emptyset &= \emptyset \end{aligned}$$

**Chứng minh**: các tính chất trên suy từ định nghĩa và các qui luật logic (Định lý 1.2.2) mà ta có thể mở rộng dễ dàng cho các vị từ.

• **đpcm**.

Do tính kết hợp ta có thể dùng $A \cup B \cup C$ để chỉ $A \cup (B \cup C)$ hay $(A \cup B) \cup C$. Cũng thế, cho trước $n$ tập hợp $A_1, A_2, \ldots, A_n$, thì hợp $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ không phụ thuộc vào thứ tự đặt dấu ngoặc.

Ta cũng viết

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$$

Tương tự

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$$

## §2 Ánh xạ

**Định nghĩa 2.2.1**:

i) một *ánh xạ* $f$ từ tập hợp $A$ vào tập hợp $B$ là phép tương ứng liên kết với mỗi phần tử $x$ của $A$ một phần tử duy nhất $y$ của $B$ mà ta ký hiệu là $f(x)$ và gọi là *ảnh của* $x$ bởi $f$. Ta viết

$$\begin{array}{cccc} f: & A & \longrightarrow & B \\ & x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

ii) hai ánh xạ $f, g$ từ $A$ vào $B$ được nói là bằng nhau nếu:

$$\forall x \in A, f(x) = g(x)$$

**Định nghĩa 2.2.2**:

i) nếu $E$ là một tập hợp con của $A$ thì *ảnh của* $E$ bởi $f$ là tập hợp:

$$f(E) = \{y \in B / \exists x \in E, y = f(x)\}$$

Ta cũng viết:

$$f(E) = \{f(x)/x \in E\}$$

ii) nếu $F$ là một tập hợp con của $B$ thì *ảnh ngược (tạo ảnh)* của $F$ là tập hợp

$$f^{-1}(F) = \{x \in A/f(x) \in F\}$$

**Chú ý**:

1. Nếu $y \in B$ ta viết $f^{-1}(\{y\}) = f^{-1}(y)$.
2. Nếu $f^{-1}(y) = \emptyset$ thì $y$ không nằm trong ảnh $f(A)$ của $A$.
3. Nếu $f^{-1}(y) = \{x\}$, thì $x$ là phần tử duy nhất có ảnh là $y$.

**Định nghĩa 2.2.3**: Gọi $f$ là 1 ánh xạ từ tập hợp $A$ vào tập hợp $B$. Khi ấy ta nói

i) $f$ là toàn ánh nếu $f(A) = B$

ii) $f$ là đơn ánh nếu hai phần tử khác nhau bất kỳ của $A$ có ảnh khác nhau:

$$\forall x, x' \in A, x \neq x' \Longrightarrow f(x) \neq f(x')$$

iii) $f$ là song ánh nếu nó đồng thời là đơn ánh và toàn ánh.

**Chú ý**: nếu $f$ là một song ánh từ $A$ lên $B$, ta viết:

$$f: A \longleftrightarrow B$$

Khi ấy với $y \in B$ tùy ý, có phần tử duy nhất $x \in A$ sao cho $f(x) = y$. Như thế tương ứng $y \longmapsto x$ là 1 ánh xạ từ $B$ vào $A$ mà ta ký hiệu là $f^{-1}$:

$$\begin{array}{rrcl} f^{-1}: & B & \longrightarrow & A \\ & y & \longmapsto & f^{-1}(y) = x \\ \text{với} & f(x) & = & y \end{array}$$

Ta có

$$f(f^{-1}(y)) = y \qquad \forall y \in B \qquad (2.2.1)$$

$$f^{-1}(f(x)) = x \qquad \forall x \in A \qquad (2.2.2)$$

**Ví dụ:**

1. $f:\ \mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{Q}$ sao cho $f(x) = \dfrac{x}{2}$ với $x \in \mathbf{Z}$ tùy ý là đơn ánh nhưng không phải là toàn ánh vì $\dfrac{1}{3}$ chẳng hạn không là ảnh của phần tử nào của $\mathbf{Z}$.

2. Giả sử $a$, $b$ là 2 số thực sao cho $a \neq 0$. Khi ấy $f(x) = ax + b$ xác định một song ánh giữa $R$ và $R$. Ánh xạ ngược của nó là

$$\begin{array}{llll} f^{-1}: & R & \longrightarrow & R \\ & y & \longmapsto & a^{-1}y - a^{-1}b \end{array}$$

**Định nghĩa 2.2.4**: cho hai ánh xạ

$$f:\ A \longrightarrow B \text{ và } g:\ B \longrightarrow C$$

Ánh xạ hợp $h$ là ánh xạ từ $A$ vào $C$ xác định bởi:

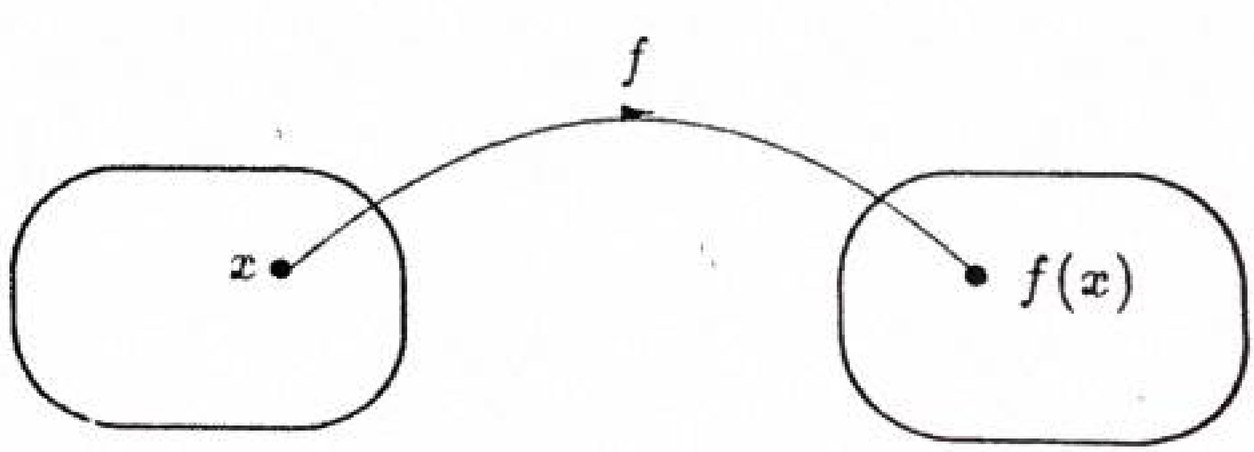
$$\begin{array}{llll} h: & A & \longrightarrow & C \\ & x & \longmapsto & h(x) = g(f(x)) \end{array}$$

Ta viết:

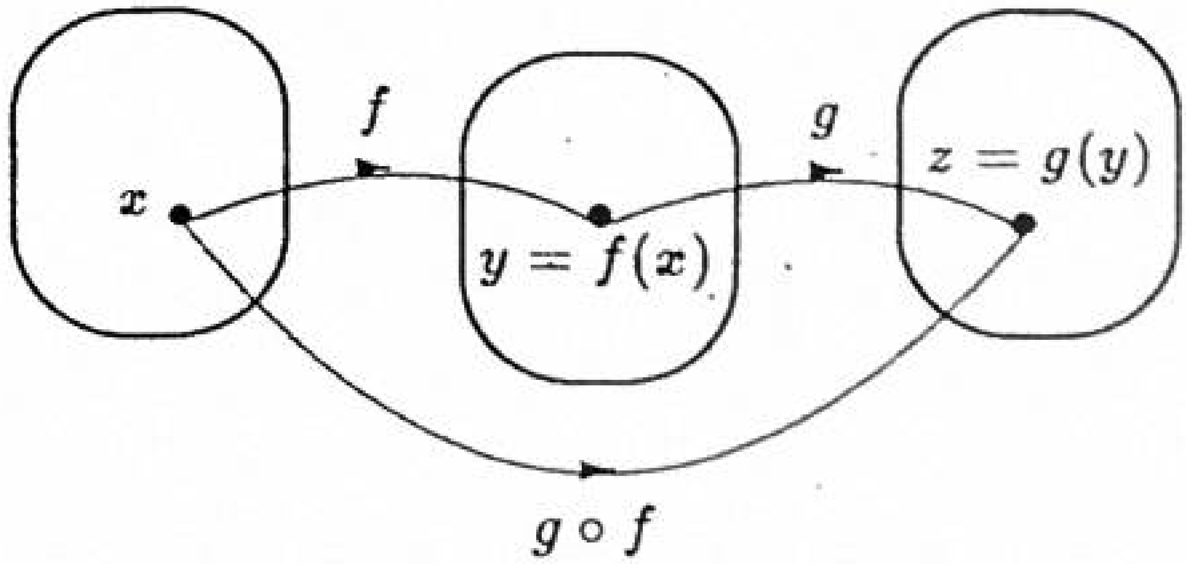
$$\begin{array}{llllll} h = g \circ f: & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C \\ & x & \longmapsto & f(x) & \longmapsto & h(x) = g(f(x)) \end{array}$$

**Chú ý**:

1. Ta thường biểu diễn một ánh xạ bởi sơ đồ



Khi ấy ánh xạ hợp được biểu diễn bởi sơ đồ




2. Ký hiệu $id_A$ là ánh xạ $A \longrightarrow A$ sao cho

$$id_A(x) = x \quad \forall x \in A$$

Ta nói $id_A$ là ánh xạ đồng nhất của $A$. Tương tự gọi $id_B$ là ánh x
đồng nhất của $B$. Khi ấy (2.2.1) và (2.2.2) trở thành

$$\begin{aligned} f \circ f^{-1} &= id_B \\ \text{và} \quad f^{-1} \circ f &= id_A \end{aligned}$$

**Định lý 2.2.1**: *Giả sử $f$ là một ánh xạ từ $A$ vào $B$, $E_1$ và $E_2$ hai tập con tùy ý của $A$, $F_1$ và $F_2$ là hai tập con tùy ý của $B$. T có:*

*i)* $f(E_1 \cup E_2) = f(E_1) \cup f(E_2)$

*ii)* $f(E_1 \cap E_2) \subset f(E_1) \cap f(E_2)$

*iii)* $f^{-1}(F_1 \cup F_2) = f^{-1}(F_1) \cup f(F_2)$

*iv)* $f^{-1}(F_1 \cap F_2) = f^{-1}(F_1) \cap f^{-1}(F_2)$

**Chứng minh**: Ta chỉ chứng minh i), các phần còn lại được lý luậ
tương tự. Ta có:

$$\begin{aligned} y \in f(E_1 \cup E_2) &\iff \exists x \in E_1 \cup E_2, y = f(x) \\ &\iff (y \in f(E_1)) \vee (y \in f(E_2)) \\ &\iff y \in f(E_1) \cup f(E_2) \end{aligned}$$

• đpcm

Chú ý: bao hàm trong ii) có thể là ngặt như ví dụ sau cho thấy. Xét $f: \mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{Z}$ xác định bởi:

$$f(x) = |x|, \quad \forall x \in \mathbf{Z}$$

Lấy $E_1 = \mathbf{Z}^+$, $E_2 = \mathbf{Z}^-$. Ta có: $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ nên $f(E_1 \cap E_2) = f(\emptyset) = \emptyset$. Trong khi đó $f(E_1) = f(E_2) = \mathbf{Z}^+$ nên $f(E_1) \cap f(E_2) \neq \emptyset$.

## §3 Phép đếm

Trước hết ta nhận xét rằng phép đếm các phần tử của một tập hợp $A$ là một thủ tục gồm có nhiều bước:

Bước 0: nếu $A = \emptyset$ ta nói số phần tử của $A$ bằng 0. Nếu không ($A \neq \emptyset$) ta qua Bước 1

Bước 1: chọn tùy ý một phần tử $a \in A$ rồi gán $a$ tương ứng với phần tử $1 \in \mathbf{N}$. Nếu $A = \{a\}$ ta nói $A$ có *một* phần tử. Nếu không ta qua Bước 2

Bước 2: do $A \neq \{a\}$, tồn tại một phần tử $b \in A$ và $b \neq a$. Ta gán $b$ tương ứng với phần tử $2 \in \mathbf{N}$. Nói cách khác ta có một song ánh

$$\{a, b\} \longleftrightarrow \{1, 2\}$$

Nếu $A = \{a, b\}$ ta nói $A$ có *hai* phần tử. Nếu không, ta qua Bước 3.

Cứ tiếp tục thủ tục như trên. Hai trường hợp có thể xảy ra

Trường hợp 1: thủ tục dừng ở một Bước $n$ nào đó, nghĩa là tồn tại một song ánh giữa $A$ và $\{1, 2, ..., n\} \subset \mathbf{N}$. Ta nói rằng $A$ có $n$ phần tử.

Trường hợp 2: thủ tục không bao giờ dừng. Ta nói $A$ có *vô số phần tử* hay $A$ là một *tập hợp vô hạn*.

Từ nhận xét trên ta có

**Định nghĩa 2.3.1:**

i) Một tập hợp $A$ được nói là *hữu hạn* và *có $n$ phần tử* nếu tồn tại một song ánh giữa $A$ và tập hợp con $\{1, 2, ..., n\}$ của N. Ta viết $|A| = n$.

ii) Nếu $A$ không hữu hạn, ta nói $A$ *vô hạn*

**Chú ý:**

1. Do nhận xét trên, phép đếm chỉ ra cho ta một thuật toán cụ thể để xây dựng một song ánh giữa $A$ và $\{1, 2, ..., n\}$ nếu $A$ hữu hạn trong khi Định nghĩa 2.3.1 chỉ đòi hỏi tồn tại một song ánh như vậy.

2. Hai tập hợp hữu hạn $A, B$ có cùng số phần tử sẽ tương ứng $1 - 1$ với nhau, nghĩa là tồn tại một song ánh $A \longleftrightarrow B$. Ta cũng nói $A$ và $B$ có cùng lực lượng. Tổng quát hơn ta có

**Định nghĩa 2.3.2:**

i) một tập hợp $A$ được nói là có lực lượng bé hơn lực lượng của $B$ nếu tồn tại một đơn ánh từ $A$ vào $B$.

ii) Hai tập hợp $A$ và $B$ được nói là đồng lực lượng nếu có một song ánh $A \longleftrightarrow B$.

**Chú ý:** Giả sử tồn tại một đơn ánh $f$ từ $A$ vào $B$. Đặt $C = f(A)$ và $\overline{C}$ là phần bù của $C$ trong $B$. Chọn một phần tử $a \in A$ tùy ý. Ta sẽ định nghĩa một ánh xạ $g: B \longrightarrow A$ như sau:

+ Nếu $y \in C$ thì tồn tại duy nhất $x \in A$ sao cho $y = f(x)$. Ta đặt $g(y) = x$
+ Nếu $y \in \overline{C}$, ta đặt $g(y) = a$

Khi ấy rõ ràng $g$ là một ánh xạ từ $B$ vào $A$ sao cho $g(C) = A$. Suy ra $g$ là toàn ánh.

Ngược lại giả sử tồn tại một toàn ánh $g: B \longrightarrow A$. Khi ấy với $x \in A$ tùy ý, $g^{-1}(x)$ là 1 tập con khác $\emptyset$ nên ta có thể chọn một phần tử nhất định $y \in g^{-1}(x)$. Đặt $f(x) = y$, ta sẽ được một ánh xạ $f$ từ $A$ vào $B$. Do cách xây dựng, với $x \neq x'$ thì $g^{-1}(x) \cap g^{-1}(x') = \emptyset$ nên $f(x) \neq f(x')$, nghĩa là $f$ là đơn ánh. Ở đây ta sử dụng khái niệm chọn $y \in g^{-1}(x)$ một cách trực quan. Theo lý thuyết tập hợp tiên đề thì việc chọn như vậy không hiển nhiên mà được dựa trên Tiên đề chọn. Đương nhiên đối với các tập hợp hữu hạn Tiên đề chọn là không cần thiết. Tóm lại ta đã chứng minh được.

**Mệnh đề 2.3.1:** lực lượng của $A$ nhỏ hơn lực lượng của $B$ khi và chỉ khi tồn tại một toàn ánh từ $B$ lên $A$.

Một vấn đề thứ hai là nếu lực lượng của $A$ nhỏ hơn lực lượng của $B$ và lực lượng của $B$ nhỏ hơn lực lượng của $A$ thì liệu $A$ và $B$ có đồng lực lượng không. Khẳng định này có thể được chứng minh trong trường hợp tổng quát, nhưng chứng minh này ra khỏi khuôn khổ của giáo trình Toán Rời rạc.

Tuy nhiên nếu $A$ và $B$ hữu hạn ta có

**Định lý 2.3.2**: *Giả sử A và B là 2 tập hợp hữu hạn. Nếu tồn tại một đơn ánh từ A vào B và một đơn ánh từ B vào A thì A và B có cùng số phần tử. Hơn nữa mọi đơn ánh (tương ứng toàn ánh) từ A vào (tương ứng lên) B là một song ánh.*

**Chứng minh**: Gọi $f$ là một đơn ánh tùy ý từ $A$ vào $B$.

Đặt $C = f(A)$ và $\overline{C}$ là phần bù của $C$ trong $B$ thì Mệnh đề 2.3.3 dưới đây cho:

$$|B| = |C| + |\overline{C}|$$

Do $f$ rõ ràng xác định một song ánh giữa $A$ và $C$ nên ta có

$$|B| = |A| + |\overline{C}| \geq |A|$$

Tương tự nếu tồn tại một đơn ánh từ $B$ vào $A$ ta sẽ có

$$|A| \geq |B|$$

Suy ra

$$|A| = |B|$$

Đặc biệt

$$|\overline{C}| = 0$$

nghĩa là $B = f(A)$ và do đó $f$ là một song ánh giữa $A$ và $B$.

Cuối cùng giả sử $g$ là một toàn ánh từ $B$ lên $A$. Trên đây ta đã xây dựng được một đơn ánh $f$ từ $A$ vào $B$ sao cho $f(x) \in g^{-1}(x)$ với mọi $x \in A$. Theo chứng minh trên $f$ là song ánh nên rõ ràng $g$ cũng là song ánh.

**Mệnh đề 2.3.3** (Nguyên lý cộng):

Giả sử $B$ là một tập hợp con của tập hợp hữu hạn $A$. Gọi $\overline{B}$ là phần bù của $B$ trong $A$. Khi ấy ta có:

$$|A| = |B| + |\overline{B}|$$

**Chứng minh**: Gọi $m, n$ là số phần tử của $B$ và $\overline{B}$ tương ứng. Khi ấy tồn tại một song ánh $f$ từ $B$ lên $\{1, 2, ..., m\}$ và một song ánh $g$ từ $\overline{B}$ lên $\{1, 2, ..., n\}$. Ta định nghĩa ánh xạ $h$ từ $A$ vào $\{1, 2, ..., m+n\}$ như sau:

+ nếu $x \in B$ ta đặt $h(x) = f(x)$
+ nếu $x \in \overline{B}$ ta đặt $h(x) = g(x) + m$

Rõ ràng $h$ là một song ánh nên
$|A| = m + n$ • đpcm

**Ví dụ**: để chuẩn bị vào giai đoạn 2, có 150 sinh viên chương trình 1 đã ghi tên học môn Toán rời rạc và 120 sinh viên ghi tên học Vi tích phân 3 ở học kỳ này. Hỏi có bao nhiêu sinh viên ghi tên học một trong hai môn biết rằng không có sinh viên nào học cả hai môn.

Gọi $A$ là tập hợp các sinh viên ghi tên học môn Toán rời rạc và $B$ là tập hợp các sinh viên ghi tên học Vi tích phân 3. Khi ấy tập hợp các sinh viên ghi tên học một trong hai môn là $A \cup B$ và $B$ chính là phần bù của $A$ trong $A \cup B$ nên ta có

$$|A \cup B| = |A| + |B| = 150 + 120 = 270$$

Qua ví dụ trên, ta thấy quá trình đếm các sinh viên học một trong hai môn có thể được thực hiện bằng hai cách: đếm các sinh viên học Toán rời rạc và đếm các sinh viên học Vi tích phân 3. Hai cách này là loại trừ lẫn nhau theo nghĩa chúng không thể đồng thời xảy ra. Khi ấy ta cũng có thể phát biểu lại Mệnh đề 2.3.3 dưới dạng:

**Nguyên lý cộng**: Nếu một quá trình có thể được thực hiện bằng một trong hai cách loại trừ lẫn nhau: cách thứ nhất cho $m$ kết quả và cách thứ hai cho $n$ kết quả. Khi ấy việc thực hiện quá trình cho $m + n$ kết quả.

**Chú ý**:

1. Trong ví dụ trên nếu có một số sinh viên ghi tên học cả hai môn, chẳng hạn như 50 thì tập hợp $A \cap B \neq \emptyset$ và có 50 phần tử. Trong trường hợp này $|A| + |B|$ không phải là số phần tử của $|A \cup B|$ vì $|A \cap B|$ được tính hai lần trong $|A|$ và $|B|$. Do đó ta có dạng mới

rộng của nguyên lý cộng là:

$$\begin{aligned} |A \cup B| &= |A| + |B| - |A \cap B| \\ &= 150 + 120 - 50 = 220 \end{aligned} \qquad (2.3.1)$$

2. Mệnh đề 2.3.3 cũng có thể được mở rộng theo hướng có nhiều hơn hai tập hợp. Giả sử có $n$ tập hợp, $C_1, C_2, ..., C_n$. Ta nói các tập hợp này đôi một rời nhau nếu $C_i \cap C_j = \emptyset$ nếu $i \neq j$. Ta có

**Mệnh đề 2.3.4** (Nguyên lý cộng mở rộng): nếu tập hợp hữu hạn $C$ có thể viết như là hợp của các tập hợp $C_1, C_2, ..., C_n$ đôi một rời nhau thì

$$|C| = |C_1| + |C_2| + ... + |C_n|$$

**Chứng minh**: sử dụng Mệnh đề 2.3.3 và Nguyên lý qui nạp trên $n$

**•đpcm**

Ngoài nguyên lý cộng, một công cụ đếm hữu hiệu là:

**Nguyên lý nhân**: nếu một quá trình có thể thực hiện theo hai giai đoạn liên tiếp độc lập với nhau sao cho có $m$ cách khác nhau để thực hiện giai đoạn 1 và với mỗi cách lựa chọn trong giai đoạn 1 đều có $n$ cách khác nhau để thực hiện giai đoạn 2. Khi ấy có $mn$ cách khác nhau để thực hiện toàn bộ quá trình.

**Chú ý**: nói rằng hai giai đoạn được thực hiện độc lập với nhau có nghĩa là hai cách thực hiện $(a, b)$ và $(c, d)$ sẽ cho hai kết quả khác nhau nếu một trong hai trường hợp sau xảy ra:

- hai cách thực hiện giai đoạn 1 khác nhau $a \neq c$
- $a = c$ và hai cách thực hiện giai đoạn 2 khác nhau $b \neq d$.

**Ví dụ**: để chuẩn bị mở một văn phòng đại diện ở nước ngoài, Giám đốc của Công ty X cần nghe lời cố vấn về luật pháp từ một luật sư chọn trong số năm luật sư và cố vấn về địa ốc từ một chuyên viên địa ốc chọn trong số ba chuyên viên địa ốc. Do đó theo Nguyên lý nhân có tất cả $5 \times 3 = 15$ phương án để Giám đốc Công ty X tiếp xúc với hai chuyên viên trong hai lĩnh vực trên.

Trong ví dụ trên, gọi $A$ là tập hợp các luật sư và $B$ là tập hợp các chuyên viên địa ốc cần tham khảo. Khi ấy một phương án tham khảo cố vấn là một cặp có thứ tự $(a, b)$ với $a \in A$, $b \in B$. Tập hợp các phương án tham khảo cố vấn chính là *tích Descartes* $A \times B$ theo định nghĩa dưới đây

**Định nghĩa 2.3.3**: *Tích Descartes* của 2 tập hợp $A, B$ ký hiệu bởi $A \times B$ là tập hợp tất cả các cặp thứ tự $(a, b)$ với $a \in A$ và $b \in B$, trong đó 2 cặp $(a, b)$ và $(a', b')$ được nói là bằng nhau khi và chỉ khi $a = a'$, $b = b'$.

**Định lý 2.3.5**: *nếu $A$ và $B$ là hai tập hợp hữu hạn thì $A \times B$ cũng là một tập hợp hữu hạn và ta có:*

$$|A \times B| = |A|\ |B|$$

**Chứng minh**: Quá trình đếm các phần tử của $A \times B$ được thực hiện theo 2 giai đoạn: có $|A|$ cách khác nhau để chọn 1 phần tử tùy ý của $A$ và với mỗi cách chọn phần tử $a \in A$, có $|B|$ cách chọn 1 phần tử tùy ý $b \in B$ để tạo thành các cặp khác nhau $(a, b)$. Do đó theo Nguyên lý nhân có $|A|\ |B|$ cách chọn các cặp $(a, b)$ khác nhau. Nói cách khác

$$|A \times B| = |A||B|$$

Để xây dựng một song ánh cụ thể từ $A \times B$ lên $\{1, 2, \ldots, mn\}$, trong đó $m = |A|$, $n = |B|$ ta làm như sau:

Xét các song ánh:

$$f: \quad A \quad \longleftrightarrow \quad \{1, 2, ..., m\}$$

$$\text{và} \quad g: \quad B \quad \longleftrightarrow \quad \{1, 2, ..., n\}$$

Ta định nghĩa ánh xạ $h: \ A \times B \longrightarrow \{1, 2, ..., mn\}$ như sau:

$$h(a, b) = (g(b) - 1) \times m + f(a)$$

Giả sử

$$h(a, b) = h(a', b')$$

Khi ấy

$$(g(b) - 1)m + f(a) = (g(b') - 1)m + f(a') \tag{2.3.2}$$

ta có thể giả sử $f(a') \leq f(a)$. Do (2.3.2) ta có:

$$f(a) - f(a') = (g(b') - g(b))m$$

Nhưng $0 \leq f(a) - f(a') < m$
và $(g(b') - g(b))m \geq m$ nếu $g(b') - g(b) > 0$.
Suy ra $f(a) = f(a')$ và $g(b) = g(b')$.
Do đó $(a, b) = (a', b')$ vì $f$ và $g$ là song ánh.
Sau cùng giả sử $k$ là một số nguyên bất kỳ sao cho
$1 \leq k \leq mn$. Gọi $i$ là số nguyên tự nhiên lớn nhất sao cho $mi < k$.
Khi ấy

$$mi < k \leq m(i+1)$$

nên $\quad 1 \leq j = k - mi \leq m$

và $\quad 0 \leq i < \dfrac{mn}{m} = n$

Đặt $a = f^{-1}(j)$ và $b = g^{-1}(i+1)$

Rõ ràng

$$\begin{aligned} h(a,b) &= (gg^{-1}(i+1) - 1)m + ff^{-1}(j) \\ &= im + j = k \end{aligned}$$

Tóm lại $h$ là một song ánh • **đpcm**

<u>**Chú ý**</u>: $f^{-1}$ và $g^{-1}$ cho phép viết $A$ và $B$ dưới dạng
$A = \{a_1, a_2, ..., a_m\}$ và $B = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$.

Ta nói các phần tử của $A$ (tương ứng $B$) đã được đánh chỉ số bởi $f^{-1}$ (tương ứng $g^{-1}$). Khi ấy ánh xạ $h$ có thể viết:

$$h(a_i, b_j) = (j-1)m + i$$

Nói cách khác ta đã "đếm" các phần tử của $A \times B$ theo $n$ mảng đặt kế tiếp nhau:

$$\{(a_1, b_1), (a_2, b_1), ..., (a_m, b_1)\}, \{(a_1, b_2), (a_2, b_2), ..., (a_m, b_2)\}$$
$$..., \{(a_1, b_n), (a_2, b_n), ..., (a_m, b_n)\}$$

Gọi các mảng này lần lượt là $C_1, C_2, ..., C_n$ thì chúng đều tương ứng $1-1$ với $A$ nên có cùng số phần tử là $m$. Hơn nữa các tập hợp này đôi một rời nhau nên ảnh của $h$ có $m \times n$ phần tử và do đó $h$ là song ánh.

Nguyên lý nhân có thể được mở rộng cho quá trình nhiều hơn hai giai đoạn. Tương tự Định nghiã 2.3.3 và Định lý 2.3.5 có thể được mở rộng cho tích Descartes của nhiều hơn hai tập hợp.

**Định nghĩa 2.3.4**: cho $n$ tập hợp không rỗng $A_1, A_2, ...A_n$.

i) một bộ $n$ phần tử là một họ phần tử có dạng $(a_1, a_2, ..., a_n)$, với $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$,..., $a_n \in A_n$.

ii) hai bộ $n$ $(a_1, a_2, ..., a_n)$, $(a'_1, a'_2, ..., a'_n)$ được nói là bằng nhau nếu $a_1 = a'_1$, $a_2 = a'_2$, ..., $a_n = a'_n$.

iii) tập hợp tất cả các bộ $n$ phần tử được gọi là tích Descartes của $A_1, A_2, ..., A_n$ và ký hiệu bởi $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$

$$A_1 \times A_2 \times ... \times A_n = \{(a_1, a_2, ..., a_n)/a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, ..., a_n \in A_n\}$$

**Chú ý**: ta cũng ký hiệu tích Descartes bởi $\prod_{i=1}^{n} A_i$.

**Định lý 2.3.6**: *nếu $A_1, A_2, ..., A_n$ hữu hạn thì $\prod_{i=1}^{n} A_i$ cũng hữu hạn và ta có*

$$\left|\prod_{i=1}^{n} A_i\right| = |A_1||A_2|...|A_n| = \prod_{i=1}^{n} |A_i|$$

**Chứng minh**: dùng Định lý 2.3.5 và nguyên lý qui nạp

**•đpcm**

**Ví dụ**: sinh viên Giai đoạn 1 thuộc Chương trình 1 của Trường Đại học Khoa học Tự nhiên cử ra một Ban Đại diện gồm một sinh viên Toán-Tin, một sinh viên Công nghệ thông tin, một sinh viên Vật lý, một sinh viên Hóa học. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra Ban Đại diện biết rằng có 300 sinh viên Toán-Tin, 400 sinh viên Công nghệ thông tin, 200 sinh viên Vật lý và 300 sinh viên Hóa?

Gọi $A_1, A_2, A_3, A_4$ lần lượt là tập hợp các sinh viên Giai đoạn 1 của các ngành Toán-Tin, Công nghệ thông tin, Lý, Hóa. Khi ấy một Ban Đại diện chính là một bộ 4:

$$(a_1, a_2, a_3, a_4), a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, a_3 \in A_3, a_4 \in A_4$$

Do đó theo Định lý 2.3.6 số cách chọn Ban Đại diện là:

$$\begin{aligned} \left|\prod_{i=1}^{4} A_i\right| = \prod_{i=1}^{4} |A_i| &= 300 \times 400 \times 200 \times 300 = \\ &= 7.200.000.000 \end{aligned}$$

## §4 Giải tích tổ hợp

Cho trước hai tập hợp $A$ và $B$, tập hợp tất cả các ánh xạ từ $A$ vào $B$ được ký hiệu bởi $B^A$. Giả sử $|A| = m$, ta có

$$A = \{a_1, a_2, ..., a_m\}$$

Rõ ràng một ánh xạ $f$ từ $A$ vào $B$ được hoàn toàn xác định bằng cách chọn ra $m$ phần tử

$$b_1 = f(a_1), b_2 = f(a_2), ..., b_m = f(a_m)$$

Nói cách khác $f$ được xác định bởi bộ $m$:

$$(f(a_1), f(a_2), ..., f(a_m)) \in B^m$$

Như vậy ta được một ánh xạ:

$$\varphi : \; B^A \longrightarrow B^m$$

với

$$\varphi(f) = (f(a_1), f(a_2), ..., f(a_m)) \quad (2.4.1)$$

Ngược lại cho trước $(b_1, b_2, ..., b_m) \in B^m$ thì ta định nghĩa được một ánh xạ duy nhất $f \in B^A$ bởi:

$$f(a_1) = b_1, f(a_2) = b_2, ..., f(a_m) = b_m$$

Như thế ta đã chứng minh:

**Mệnh đề 2.4.1**: Giả sử $|A| = m$ với $A = \{a_1, a_2, ..., a_m\}$ thì (2.4.1) xác định một song ánh giữa $B^A$ và $B^m$. Đặc biệt nếu $B$ hữu hạn thì $B^A$ cũng hữu hạn và ta có:

$$|B^A| = |B|^{|A|}$$

**Chú ý**: trong phép tương ứng (2.4.1), $f$ là một đơn ánh khi và chỉ khi các phần tử $f(a_1)$, $f(a_2), ..., f(a_m)$ là đôi một khác nhau. Từ đó ta có một quá trình $m$ bước để đếm các đơn ánh từ $A$ vào $B$:

**Bước 1**: chọn tùy ý một phần tử $b_1 \in B$. Ở bước này có $n$ cách chọn $b_1$.

**Bước 2**: chọn tùy ý một phần tử $b_2 \in B$ khác với $b_1$, nghĩa là một phần tử $b_2 \in B \setminus \{b_1\}$.Ở đây $B \setminus \{b_1\}$ chỉ phần bù của $\{b_1\}$ trong B. Ta có $n - 1$ cách chọn $b_2$

..............................................

**Bước $m$**: chọn tùy ý một phần tử $b_m \in B \setminus \{b_1, b_2, ..., b_{m-1}\}$ Do $n - (m - 1) = n - m + 1$, nên có $n - m + 1$ cách chọn $b_m$.

Chú ý rằng để có thể tiến hành đến Bước thứ $m$ ta cần có $n - m + 1 \geq 1$, hay $n \geq m$. Do đó áp dụng nguyên lý nhân ta được

**Mệnh đề 2.4.2**: Giả sử $m \leq n$. Khi ấy số đơn ánh từ $A$ vào $B$ là:

$$n(n-1)...(n-m+1)$$

Nếu $|A| = |B| = n$ thì ta có

**Hệ quả 1**: số song ánh từ $A$ lên $B$ là:

$$n(n-1)...1 = n!$$

**Chứng minh**: nếu $|A| = |B|$ thì mọi đơn ánh từ $|A|$ vào $|B|$ cũng là một song ánh.

**•đpcm**

Trong trường hợp $A = B$ thì một song ánh từ $A$ lên chính nó còn được gọi là một phép *hoán vị* của $A$. Do đó Hệ quả 1 có thể được phát biểu lại:

**Hệ quả 2**: số các phép hoán vị của một tập hợp có $n$ phần tử là $n!$

**Định nghĩa 2.4.1**: Đặt $B = \{1, 2, ..., n\}$.

i) Một *chỉnh hợp của n phần tử chọn m* là một phép chọn ra $m$ phần tử phân biệt trong $B$ theo một thứ tự nào đó

ii) Một *tổ hợp của n phần tử chọn m* là một phép chọn ra $m$ phần tử của $B$ không kể thứ tự.

**Định lý 2.4.1**:

*i) Số các chỉnh hợp của n phần tử chọn m là:*

$$A_n^m = n(n-1)...(n-m+1)$$

*ii) Số các tổ hợp của n phần tử chọn m là:*

$$C_n^m = \frac{n(n-1)...(n-m+1)}{m!}$$

**Chứng minh**:

i) Với $B = \{1, 2, ..., n\}$ thì một chỉnh hợp của $n$ phần thử chọn $m$ không gì khác hơn là một bộ $(b_1, b_2, ..., b_m) \in B^m$ đôi một khác nhau. Do đó số chỉnh hợp được cho bởi Mệnh đề 2.4.2.

ii) Ta sẽ tính số tổ hợp bằng cách đếm lại số chỉnh hợp theo một quá trình hai bước:

**Bước 1**: chọn tùy ý một tổ hợp của $n$ phần tử chọn $m$, nói cách khác chọn ra một tập hợp con $B'$ có $m$ phần tử của $B$. Số cách chọn khác nhau chính là số tổ hợp $C_n^m$.

**Bước 2**: với một tập hợp con $B'$, ta có thể chọn ra $m$ phần tử phân biệt của $B'$ theo một thứ tự nhất định: $(b_1, b_2, ..., b_m)$. Số cách chọn chính là số phép hoán vị của $B'$ nên bằng $m!$

Bằng hai bước trên ta đã đếm được tất cả các chỉnh hợp của $n$ phần tử chọn $m$ nên:

$$A_n^m = C_n^m \times m!$$

Suy ra $C_n^m = \dfrac{n(n-1)..(n-m+1)}{m!}$

•đpcm

**Chú ý**: Ta thường ký hiệu số tổ hợp bởi $\begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix}$ và gọi là *hệ số nhị thức*. Hệ số nhị thức có thể đặt dưới dạng đối xứng:

$$\begin{aligned} C_n^m = \begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix} &= \frac{n(n-1)...(n-m+1) \times (n-m)!}{m!(n-m)!} \\ &= \frac{n!}{m!(n-m)!} \end{aligned}$$

Dưới dạng trên ta thấy ngay:

$$\begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ n - m \end{pmatrix}$$

**Định lý 2.4.4**: với $m \leq n$ ta có

$$\begin{pmatrix} n+1 \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ m-1 \end{pmatrix} \quad (2.4.2)$$

**Chứng minh**: Ta sẽ chọn ra các tổ hợp của $n+1$ phần tử chọn $m$ bằng một trong hai cách loại trừ lẫn nhau:

**Cách 1**: chọn ra một tập hợp con $B'$ có $m$ phần tử phân biệt trong $\{1, 2, ..., n+1\}$ *không chứa* $n+1$. Rõ ràng $B'$ cũng là một tập hợp con $m$ phần tử của $\{1, 2, ..., n\}$ nên có $\begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix}$ cách chọn.

**Cách 2**: chọn ra một tập hợp con $B$" có $m$ phần tử phân biệt trong $\{1, 2, ..., n+1\}$ *chứa* $n+1$. Rõ ràng $B$"$\setminus\{n+1\}$ là một tập hợp con $m-1$ phần tử phân biệt của $\{1, 2, ..., n\}$ nên có $\begin{pmatrix} n \\ m-1 \end{pmatrix}$ cách chọn.

Do đó theo nguyên lý cộng, số tổ hợp của $n+1$ phần tử chọn $m$ thỏa (2.4.2)

**•đpcm**

Để hiểu rõ tại sao số tổ hợp còn được gọi là hệ số nhị thức, ta hãy chứng minh công thức dưới đây gọi là *Công thức nhị thức Newton*

**Định lý 2.4.5**: $x, y$ là hai biến thực ta có

$$\begin{aligned}(x+y)^n &= x^n + \binom{n}{1} x^{n-1}y + \ldots + \binom{n}{n} y^n \\ &= \sum_{n=0}^{n} \binom{n}{m} x^{n-m} y^m \qquad (2.4.3)\end{aligned}$$

**Chứng minh**: ta hãy khai triển

$$(x+y)^n = (x+y)(x+y)\ldots(x+y)$$

thành tổng của các số hạng có dạng $a_1 a_2 \ldots a_n$ trong đó $a_i = x$ hay $a_i = y$, $1 \le i \le n$. Với $0 \le m \le n$ ta gộp tất cả các số hạng trong đó có đúng $m$ thừa số bằng $y$. Các số hạng này đều có dạng $x^{n-m}y^m$. Hơn nữa số các số hạng như vậy chính là số cách chọn $m$ phần tử phân biệt của $\{1, 2, \ldots, n\}$: đó chính là số tổ hợp $\binom{n}{m}$ nên (2.4.3) được chứng minh.

**•đpcm**

**Hệ quả**: Ta có

$$\begin{aligned} &\text{i) } 2^n = 1 + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{m} + \ldots + \binom{n}{n} \qquad (2.4.4) \\ &\text{ii) } 0 = 1 - \binom{n}{1} + \ldots + (-1)^m \binom{n}{m} + \ldots + (-1)^n \binom{n}{n} \end{aligned}$$

**Chú ý**: Theo nguyên lý cộng, vế phải của (2.4.4) chính là số các tập hợp con của $\{1, 2, \ldots, n\}$ nên ta đếm được số các tập hợp con của $\{1, 2, \ldots, n\}$ chính là $2^n$. Thật ra ta có thể đếm gián tiếp số các tập hợp con của một tập hợp $B$ có $n$ phần tử như sau:

Gọi $A$ là một tập hợp con bất kỳ của $B$, ta sẽ định nghĩa *hàm đặc trưng* của $A$ bởi:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 \text{ nếu } x \in A \\ 0 \text{ nếu } x \notin A \end{cases}$$

Rõ ràng $\chi_A \in \{0,1\}^B$. Ngược lại, cho trước $f \in \{0,1\}^B$. Đặt $A = f^{-1}(1)$. Khi ấy rõ ràng $f = \chi_A$. Bằng cách này ta được một song ánh giữa tập hợp $\mathcal{P}(B)$ gồm tất cả các tập hợp con của $B$ và $\{0,1\}^B$. Suy ra

$$|\mathcal{P}(B)| = |\{0,1\}|^{|B|} = 2^n$$

Hai tập hợp $\mathcal{P}(B)$ và $\{0,1\}^B$ (ký hiệu là $2^B$) là các đại số Bool sẽ được xét trong chương 4.

Bây giờ ta hãy mở rộng khái niệm tổ hợp trong đó cho phép lặp lại. Trước hết ta hãy xét một ví dụ: một học sinh đến cửa hàng mua 4 cây bút chọn trong 3 màu khác nhau là xanh, đỏ và vàng. Có bao nhiêu cách khác nhau để chọn mua hàng?

Trước hết ta hãy liệt kê các trường hợp khác nhau:

- 4 bút cùng màu: có 3 trường hợp
- 3 bút cùng màu và bút thứ tư chọn tùy ý trong 2 màu còn lại: có $3 \times 2 = 6$ trường hợp (Nguyên lý nhân!)
- 2 bút cùng màu và 2 bút kia chọn trong 2 màu còn lại: 3 trường hợp
- 2 cặp bút cùng màu: có $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 3$ trường hợp.

Như vậy tổng cộng có 15 cách mua hàng khác nhau.

Tuy nhiên nếu liệt kê như vậy rất khó mở rộng cho trường hợp có nhiều bút và nhiều màu để chọn. Thay vì như vậy, ta sẽ biểu diễn mỗi trường hợp bởi 4 dấu "+" và 2 dấu "-" đặt liên tiếp trên một đường thẳng: số dấu + bên trái dấu - đầu tiên chỉ số bút xanh, số dấu + nằm giữa 2 dấu - chỉ số bút đỏ và số dấu + nằm bên phải dấu - cuối cùng chỉ số bút màu vàng. Như vậy trường hợp mua 4 bút xanh được biểu diễn bởi

$$++++--$$

Cũng thế trường hợp mua 1 bút xanh và 3 bút vàng được biểu diễn bởi

$$+--+++$$

Như thế mỗi trường hợp tương ứng với việc lựa chọn vị trí của 2 dấu - trong số 6 ký hiệu, nói cách khác ứng với 1 tập hợp con 2 phần tử của tập hợp $\{1,2,\ldots,6\}$

Từ đó suy ra số cách mua hàng khác nhau chính là

$$\binom{6}{2} = \frac{6 \times 5}{2} = 15$$

Bằng cách này ta có thể tổng quát hóa việc chọn ra $r$ vật trong số $n$ loại vật khác nhau trong đó mỗi loại vật có thể được chọn lại nhiều lần. Như trên mỗi trường hợp lựa chọn có thể được biểu diễn bằng cách chèn $(n-1)$ dấu - vào trong số $r$ dấu + để chia đoạn thẳng thành $n$ đoạn tương ứng với số vật mỗi loại. Do đó số cách chọn lựa khác nhau mà ta gọi là *số tổ hợp có lặp lại* của $n$ vật chọn $r$ chính là:

$$\binom{n+r-1}{n-1} = \binom{n+r-1}{r}$$

**Áp dụng:**

1. Có $r$ vật đồng nhất nhau, hỏi có bao nhiêu cách chia chúng vào $n$ hộp phân biệt nhau?

Ở đây mỗi cách chia cũng chính là một tổ hợp của $n$ vật chọn $r$ nên số cách chia khác nhau chính là $\binom{n+r-1}{r}$

2. Xét phương trình:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = r \tag{2.4.5}$$

trong đó $n$ và $r$ là các số nguyên không âm cho trước và $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là các ẩn lấy giá trị nguyên không âm. Ta hãy tìm xem phương trình trên có bao nhiêu lời giải. Mỗi lời giải là một bộ $n$ $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ thỏa (2.4.5). Như vậy ta có thể liên kết một lời giải với một cách chia $r$ vật đồng nhất nhau vào $n$ hộp phân biệt: $x_i$ chính là số vật chứa trong hộp thứ $i$.

Do đó số lời giải chính là số tổ hợp có lặp của $n$ vật chọn $r$: $\binom{n+r-1}{r}$

## §5 Nguyên lý chuồng Bồ câu

Trong Mệnh đề 2.4.1, ta đã giả sử $|A| = m \leq |B| = n$ để có thể chọn ra được một họ $m$ phần tử phân biệt có thứ tự của $B$; nói cách khác để chọn ra được một đơn ánh từ $A$ vào $B$. Trong trường hợp $m > n$ thì không tồn tại đơn ánh từ $A$ vào $B$ theo nguyên lý chuồng Bồ câu sau đây

Nguyên lý chuồng Bồ câu: nếu chuồng bồ câu có ít cửa (pigeon hole) hơn số bồ câu thì có ít nhất hai chim bồ câu ở chung trong một cửa.

**Ví dụ:**

1. Trong ví dụ trên, $A$ là số bồ câu và $B$ là số cửa. Một ánh xạ $f: A \longrightarrow B$ chính là một cách xếp chim bồ câu vào các cửa. Nói rằng có 2 chim bồ câu ở chung một cửa có nghĩa là có 2 phần tử phân biệt của $A$ có chung ảnh nên $f$ không đơn ánh.

2. Trong một nhóm có 367 người sẽ có ít nhất hai người có cùng ngày tháng sinh. Ở đây số các ngày tháng sinh khác nhau (366 ngày, kể cả ngày 29 tháng 02) chính là số cửa của chuồng bồ câu.

3. Xét một cơ sở dữ liệu có 500.000 bản tin (record). Hỏi có thể sử dụng một vùng (thuộc tính) với nhiều nhất 4 ký tự là các mẫu tự làm khóa chính hay không? Ở đây một vùng được nói là một khóa chính nếu giá trị của nó xác định bản tin một cách duy nhất. Để giải đáp bài toán trên, ta sẽ sử dụng số các từ gồm nhiều nhất 4 mẫu tự làm số cửa của chuồng bồ câu. Số cửa này được cho bởi Nguyên lý cộng và Nguyên lý nhân:

$$26^4 + 26^3 + 26^2 + 26^1 = 475.254$$

Vì có đến 500.000 bồ câu nên có ít nhất 2 bản tin có cùng giá trị của thuộc tính: không thể dùng thuộc tính này làm khóa chính được!

4. Ta hãy dùng Nguyên lý chuồng bồ câu để chứng minh rằng mọi tập hợp con $A$ có ít nhất 6 phần tử của $B = \{1, 2, ..., 9\}$ sẽ có hai trong số các phần tử có tổng bằng 10.

Thật vậy, ở đây các cửa của chuồng bồ câu được chọn là các tập hợp con $\{1, 9\}$, $\{2, 8\}$, $\{3, 7\}$, $\{4, 6\}$, $\{5\}$. Do chỉ có 5 cửa trong khi số chim bồ câu $\geq 6$ nên có ít nhất 2 phần tử phân biệt của $A$ thuộc về cùng một tập hợp con trên, hay chính xác hơn thuộc về cùng một trong bốn tập hợp con đầu tiên. Đó là những cặp có tổng bằng 10.

**Chú ý**: nghệ thuật đếm khi sử dụng Nguyên lý chuồng Bồ câu là xác định đúng đâu là số bồ câu và đâu là số cửa như ví dụ sau cho thấy.

Giả sử $A$ là một tập hợp con có 6 phần tử của $\{1, 2, ..., 14\}$. Hãy chứng minh rằng trong số các tập hợp con khác $\emptyset$ của $A$, có ít nhất hai tập hợp con mà tổng của các phần tử là như nhau.

Giả sử $B$ là một tập hợp con khác rỗng bất kỳ của $A$. Gọi $S_B$ là tổng của các phần tử của $B$. Khi ấy ta có

$$1 \leq S_B \leq 9 + 10 + ... + 14 = 69$$

Nếu chọn các số từ 1 đến 69 là số cửa của chuồng bồ câu và số tập hợp con khác rỗng của $A$ là số bồ câu thì số bồ câu là: $2^6 - 1 = 63$. Do số bồ câu ít hơn số cửa, ta không thể áp dụng Nguyên lý chuồng bồ câu được. Tuy nhiên nếu ta hạn chế chỉ xét các tập hợp con $B$ có tối đa 5 phần tử thì

$$1 \leq S_B \leq 10 + 11 + ... + 14 = 60$$

trong khi số bồ câu bây giờ là $63 - 1 = 62$ (trừ 1 tập hợp con 6 phần tử). Do đó theo Nguyên lý chuồng bồ câu sẽ có 2 tập hợp con $B$, $B'$ có tối đa 5 phần tử của $A$ sao cho $S_B = S_{B'}$

# Bài tập

1. Trong số các tập hợp dưới đây, hãy chỉ ra các tập hợp bằng nhau:

a) $\{a, b, c\}$ b) $\{a, b, c, a\}$
c) $\{a, c, b, a\}$ d) $\{a, b, b, c\}$

2. Giả sử $A = \{1, \{1\}, \{2\}\}$. Hãy chỉ ra các khẳng định đúng trong số các khẳng định dưới đây:

a) $1 \in A$ b) $\{1\} \in A$ c) $\{1\} \subset A$
d) $\{\{1\}\} \subset A$ e) $\{\{2\}\} \in A$ f) $\{2\} \subset A$

3. Trong số các khẳng định dưới đây, hãy chỉ ra khẳng định đúng:

a) $\emptyset \in \emptyset$ b) $\emptyset \subset \emptyset$
c) $\emptyset \in \{\emptyset\}$ d) $\emptyset \subset \{\emptyset\}$

4. Hãy liệt kê ra các phần tử của các tập hợp dưới đây:

a) $\{1 + (-1)^n / n \in \mathbf{N}\}$
b) $\{n + \dfrac{1}{n} / n \in \{1, 2, 3, 5, 7\}\}$
c) $\{1/(n^2 + n) / n \in \mathbf{N}, n$ là số lẻ và $n \leq 11\}$

5. Xét các tập hợp con của $\mathbf{Z}$:

$A = \{2m + 1 / m \in \mathbf{Z}\}$, $B = \{2n + 3 / n \in \mathbf{Z}\}$
$C = \{2p - 3 / p \in \mathbf{Z}\}$, $D = \{3r + 1 / r \in \mathbf{Z}\}$
$E = \{3s + 2 / s \in \mathbf{Z}\}$, $F = \{3t - 2 / t \in \mathbf{Z}\}$

Hãy xác định các khẳng định đúng trong số các khẳng định dưới đây:

a) $A = B$ b) $A = C$ c) $B = C$
d) $D = E$ e) $D = F$ f) $E = F$

6. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Hãy liệt kê ra:

a) các tập hợp con của $A$
b) các tập hợp con khác $\emptyset$ của $A$
c) các tập hợp con của $A$ chứa 3 phần tử
d) các tập hợp con của $A$ chứa 1, 2
e) các tập hợp con của $A$ chứa 5 phần tử trong đó có 1, 2

f) các tập hợp con của $A$ gồm một số chẵn phần tử

g) các tập hợp con của $A$ gồm một số lẻ phần tử

**7.** Trong số các tập hợp dưới đây, tập hợp nào khác $\emptyset$?

a) $\{x \in \mathbf{N} / 2x + 7 = 3\}$ b) $\{x \in \mathbf{Z} / 3x + 5 = 9\}$

c) $\{x \in \mathbf{Q} / x^2 + 4 = 6\}$ d) $\{x \in \mathbf{R} / x^2 + 4 = 6\}$

e) $\{x \in \mathbf{R} / x^2 + 5 = 4\}$ f) $\{x \in \mathbf{R} / x^2 + 3x + 3 = 0\}$

**8.** Xét 4 tập hợp con của tập hợp vũ trụ $\mathcal{U} = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$:

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{1, 2, 4, 8\}$

$C = \{1, 2, 3, 5, 7\}$, $D = \{2, 4, 6, 8\}$

Hãy xác định các tập hợp dưới đây:

a) $(A \cup B) \cap C$ b) $A \cup (B \cap C)$ c) $\bar{C} \cup \bar{D}$

d) $\overline{C \cap D}$ e) $(A \cup B) \cap \bar{C}$ f) $A \cup (B \cap \bar{C})$

g) $(B \cap \bar{C}) \cap \bar{D}$ h) $B \cap \overline{C \cap \bar{D}}$ i) $(A \cup B) \cap \overline{C \cap D}$

**9.** Xét các tập hợp con của $\mathbf{Z}$:

$A = \{2n / n \in \mathbf{Z}\}$, $B = \{3n / n \in \mathbf{Z}\}$

$C = \{4n / n \in \mathbf{Z}\}$, $D = \{6n / n \in \mathbf{Z}\}$

$E = \{8n / n \in \mathbf{Z}\}$

Hãy chỉ ra các khẳng định đúng trong số các khẳng định dưới đây:

a) $E \subset C \subset A$ b) $A \subset C \subset E$

c) $D \subset B$ d) $D \subset A$

e) $B \subset D$ f) $\bar{D} \subset \bar{A}$

**10.** Với các tập hợp $A, B, C, D, E$ như trong bài tập 9. Hãy xác định các tập hợp dưới đây:

a) $C \cap E$ b) $B \cup D$ c) $A \cap B$

d) $B \cap D$ e) $\bar{A}$ f) $A \cap E$

**11.** Xét các tập hợp con tùy ý $A, B, C, D$ của tập hợp vũ trụ $\mathcal{U}$. Hãy chứng minh các khẳng định dưới đây:

a) Nếu $A \subset B$ và $C \subset D$ thì $A \cap C \subset B \cap D$ và $A \cup C \subset B \cup D$

b) Nếu $A \subset C$ và $B \subset C$ thì $A \cap B \subset C$ và $A \cup B \subset C$

c) $A \subset B$ khi và chỉ khi $A \cap \bar{B} = \emptyset$

d) $A \subset B$ khi và chỉ khi $\bar{A} \cup B = \mathcal{U}$

**12.** Trong số các khẳng định dưới đây, cho biết khẳng định nào đúng:

a) $\forall A, B, C \in \mathcal{P}(\mathcal{U}), (A \cap C = B \cap C) \Rightarrow (A = B)$

b) $\forall A, B, C \in \mathcal{P}(\mathcal{U}), (A \cup C = B \cup C) \Rightarrow (A = B)$

c) $\forall A, B, C \in \mathcal{P}(\mathcal{U}), [(A \cap C = B \cap C) \wedge (A \cup C = B \cup C)] \Rightarrow (A = B)$

**13.** Cho biết khẳng định nào dưới đây là đúng:

a) $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$

b) $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$

**14.** Xét các tập hợp con $A, B, C, D$ của tập hợp vũ trụ $\mathcal{U}$, hãy cho biết qui luật nào của Lý thuyết tập hợp (Định lý 2.1.1) được sử dụng trong các bước đơn giản tập hợp dưới đây:

| Bước | Qui luật |
|---|---|
| $(A \cap B) \cup [B \cap ((C \cap D) \cup (C \cap \bar{D}))]$ | |
| $= (A \cap B) \cup [B \cap (C \cap (D \cup \bar{D}))]$ | |
| $= (A \cap B) \cup [B \cap (C \cap \mathcal{U})]$ | |
| $= (A \cap B) \cup (B \cap C)$ | |
| $= (B \cap A) \cup (B \cap C)$ | |
| $= B \cap (A \cup C)$ | |

**15.** Dùng các qui luật của Lý thuyết tập hợp để đơn giản các biểu thức dưới đây:

a) $A \cap (B \cap \bar{A})$

b) $(A \cap B) \cup (A \cap B \cap \bar{C} \cap D) \cup (\bar{A} \cap B)$

c) $\bar{A} \cup \bar{B} \cup (A \cap B \cap \bar{C})$

d) $\bar{A} \cup (A \cap \bar{B}) \cup (A \cap B \cap \bar{C}) \cup (A \cap B \cap C \cap \bar{D})$

**16.** Đối với mỗi ánh xạ dưới đây hãy xác định xem nó có là đơn ánh không? Tìm ảnh của miền xác định của ánh xạ trên.

a) $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}, f(x) = 2x + 1$

b) $f : \mathbf{Q} \to \mathbf{Q}, f(x) = 2x + 1$

c) $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}, f(x) = x^3 - x$

d) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = e^x$

e) $f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbf{R}, f(x) = \sin x$

f) $f : [0, \pi] \to \mathbf{R}, f(x) = \sin x$

Z: số nguyên
Q: số hữu tỉ
R: số thực

**17.** Xét ánh xạ $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ xác định bởi $f(x) = x^2$. Hãy tìm $f(A)$

đối với mỗi tập hợp $A$ dưới đây:

a) $A = \{2, 3\}$ b) $A = \{-3, -2, 2, 3\}$

c) $A = (-3, 3)$ d) $A = (-3, 2]$

e) $A = [-7, 2]$ f) $A = (-4, -3] \cup [5, 6]$

**18.** Với mỗi ánh xạ $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ dưới đây, hãy xác định xem nó có là đơn ánh hay toàn ánh không? Tìm $f(\mathbf{Z})$

a) $f(x) = x + 7$ b) $f(x) = 2x - 3$ c) $f(x) = -x + 5$

d) $f(x) = x^2$ e) $f(x) = x^2 + x$ f) $f(x) = x^3$

**19.** Các câu hỏi tương tự như trong bài tập 18 nhưng $f$ bây giờ là một ánh xạ $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$

**20.** Xét 3 ánh xạ $f : A \to B$, $g : B \to C$, $h : C \to D$. Hãy chứng minh rằng $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$

**21.** Xét 3 ánh xạ $f, g, h$ từ $\mathbf{Z}$ vào $\mathbf{Z}$ xác định bởi:

$f(x) = x - 1$, $g(x) = 3x$ và $h(x) = \begin{cases} 0 \text{ nếu } x \text{ chẵn} \\ 1 \text{ nếu } x \text{ lẻ} \end{cases}$

a) Tìm $f \circ g$, $g \circ f$, $g \circ h$, $h \circ g$, $f \circ g \circ h$

b) Với $n$ là số nguyên dương, $f^n$ được định nghĩa bằng qui nạp như sau:

$f^1 = f, f^2 = f \circ f, \dots f^n = f \circ f^{n-1}$. Tương tự cho $g^n$, $h^n$. Hãy xác định $f^2, f^3, g^2, g^3, h^2, h^3, h^{100}$

**22.** Cho trước 2 tập hợp con cố định $S, T$ của $\mathcal{U}$. Ta định nghĩa một ánh xạ $f : \mathcal{P}(\mathcal{U}) \to \mathcal{P}(\mathcal{U})$ như sau:

$f(A) = T \cap (S \cup A)$ với $A$ là 1 tập hợp con bất kỳ của $\mathcal{U}$. Chứng minh rằng $f^2 = f$

**23.** Với mỗi ánh xạ $f : A \to B$ dưới đây, cho biết nó có là đơn ánh, toàn ánh hoặc song ánh không? Trong trường hợp nó là song ánh, hãy tìm ánh xạ ngược.

a) $A = B = \mathbf{R}, f(x) = x + 7$

b) $A = B = \mathbf{R}, f(x) = x^2 + 2x - 3$

c) $A = [4, 9], B = [21, 96], f(x) = x^2 + 2x - 3$

d) $A = B = \mathbf{R}, f(x) = 3x - 2|x|$

e) $A = \mathbf{R}, B = (0, +\infty), f(x) = e^{x+1}$

f) $A = B = \mathbf{N}, f(x) = x(x+1)$

**24.** Đặt $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Xét 2 ánh xạ $f : A \to \mathbf{N}$ và $g : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ được xác định bởi $g(x) = 2x$ và $f(1) = 2$, $f(2) = 3$, $f(3) = 5$, $f(4) = 7$. Hãy tìm $g \circ f$.

**25.** Xét hai ánh xạ $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ xác định bởi: $f(x) = ax + b$ và $g(x) = 1 - x + x^2$. Giả sử $(g \circ f)(x) = 9x^2 - 9x + 3, \forall x \in \mathbf{R}$. Hãy xác định $a, b$.

**26.** Xét hai ánh xạ $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ xác định bởi: $f(x) = ax + b$ và $g(x) = cx + d$ với $x \in \mathbf{R}$ tùy ý, trong đó $a, b, c, d$ là các hằng số thực. Hãy tìm các hệ thức giữa $a, b, c, d$ để cho $f \circ g = g \circ f$.

**27.** Xét ánh xạ $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ định nghĩa bởi:

$$f(x) = \begin{cases} x + 7 & \text{nếu} \quad x \le 0 \\ -2x + 5 & \quad\quad\; 0 < x < 3 \\ x - 1 & \quad\quad\; 3 \le x \end{cases}$$

a) Tìm $f^{-1}(-10)$, $f^{-1}(0)$, $f^{-1}(2)$, $f^{-1}(6)$

b) Tìm nghịch ảnh của các khoảng $[-5, -1]$, $[-2, 4]$

**28.** Xét ánh xạ $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{N}$ xác định bởi:

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{nếu} \quad x > 0 \\ -2x & \quad\quad\; x \le 0 \end{cases}$$

a) Chứng minh rằng $f$ là một song ánh.

b) Tìm $f^{-1}$

**29.** Xét hai ánh xạ $f : A \to B$, $g : B \to C$

a) Chứng minh rằng nếu $g \circ f$ đơn ánh thì $f$ đơn ánh.

b) Chứng minh rằng nếu $g \circ f$ toàn ánh thì $g$ toàn ánh.

c) Chứng minh rằng nếu $f$ và $g$ là song ánh thì $g \circ f$ là song ánh. Hãy tìm $(g \circ f)^{-1}$.

d) Cho ví dụ để $g \circ f$ là song ánh nhưng $f$ và $g$ không phải là song ánh.

**30.** Xét ánh xạ $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ xác định bởi: $f(n) : n + (-1)^n$

a) Chứng minh rằng $n$ và $f(n)$ khác tính chẵn lẻ (một số chẵn và số kia lẻ).

b) Chứng minh rằng $f$ là một đơn ánh.

c) Tìm $f^2$. Suy ra biểu thức đơn giản của $f^{-1}$.

d) Giải phương trình $365 = n + (-1)^n$, $n$ nguyên.

**31.** Xét ánh xạ $f : \mathbf{N} \times \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ định nghĩa bởi:

$$f(m,n) = n + \frac{(m+n)(m+n+1)}{2}$$

Chứng minh rằng $f$ là một song ánh

(Hướng dẫn: sử dụng Nguyên lý Quy nạp để chứng minh $f$ toàn ánh)

**32.** Hãy đếm số các tập hợp trong mỗi câu hỏi a) - g) của Bài tập 6 mà không sử dụng kết quả liệt kê.

**33.** Xét $S = \{1, 2, \ldots, 10\}$. Có bao nhiêu tập hợp con $A$ của $S$ thỏa:

a) $|A| = 5$?

b) $|A| = 5$ và phần tử bé nhất của $A$ là 3?

c) $|A| = 5$ và phần tử bé nhất của $A$ bé hơn hay bằng 3?

**34.** a) Có bao nhiêu tập hợp con của $\{1, 2, \ldots, 11\}$ chứa ít nhất một số chẵn?

b) Có bao nhiêu tập hợp con của $\{1, 2, \ldots, 12\}$ chứa ít nhất một số chẵn?

c) Tổng quát hóa các kết quả trong a) và b).

**35.** Giả sử chỉ có một phần tư số tập hợp con năm phần tử của $\{1, 2, \ldots, n\}$ chứa số 7. Hãy tìm $n$.

**36.** Hãy sử dụng các nguyên lý đếm để chứng minh rằng

$$\binom{n+2}{r} = \binom{n}{r} + 2\binom{n}{r-1} + \binom{n}{r-2}$$

trong đó $n \geq r \geq 2$

**37.** Hãy trình bày một thuật toán và viết chương trình máy tính liệt kê tất cả những tập hợp con 5 phần tử của $\{1, 2, \ldots, 40\}$.

**38.** Giả sử $A, B, C$ là 3 tập hợp hữu hạn. Hãy chứng minh rằng:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

**39.** Để chọn máy tính trang bị cho phòng LAB, Khoa Toán - Tin học đã xem xét 15 nhãn hiệu máy tính khác nhau dựa theo các tính năng sau:

($A$) Có CPU nhanh

($B$) Có ổ điã cứng tốt

($C$) Có màn hình với độ phân giải cao.

Gọi $A, B, C$ lần lượt là các tập hợp những nhãn hiệu thỏa các tính năng ($A$), ($B$) hay ($C$). Giả sử $|A| = |B| = |C| = 6$, $|A \cap B| = |B \cap C| = 1, |A \cap C| = 2, |A \cap B \cap C| = 0$

a) Có bao nhiêu nhãn hiệu thỏa đúng một tính năng?

b) Có bao nhiêu nhãn hiệu không thỏa tính năng nào cả?

**40.** a) Trong một lớp học có 7 sinh viên, có bao nhiêu cách chia họ thành hai đội? Nếu yêu cầu mỗi đội có ít nhất 2 sinh viên thì có bao nhiêu cách chia.

b) Trả lời các câu hỏi trong a) khi số sinh viên của lớp là 1 số nguyên tùy ý $n \geq 4$.

**41.** Gọi $n_1, n_2, \ldots, n_r$ là các số nguyên dương có tổng là $n$. Có bao nhiêu cách chia $n$ sinh viên thành $r$ nhóm với số sinh viên của các nhóm là $n_1, n_2, \ldots, n_r$.

**42.** Hãy cho biết các khẳng định dưới đây là đúng hay sai

a) Nếu $A, B$ là 2 tập hợp vô hạn thì $A \cap B$ cũng vô hạn

b) Nếu $B$ vô hạn và $A \subset B$ thì $A$ vô hạn

c) Nếu $B$ hữu hạn và $A \subset B$ thì $A$ hữu hạn

d) Nếu $A$ hữu hạn và $A \subset B$ thì $B$ hữu hạn.

**43.** Xét $A = \{1, 2, \ldots, 15\}$

a) Có bao nhiêu tập hợp con của $A$ chỉ chứa số lẻ

b) Có bao nhiêu tập hợp con của $A$ chứa đúng 3 số lẻ

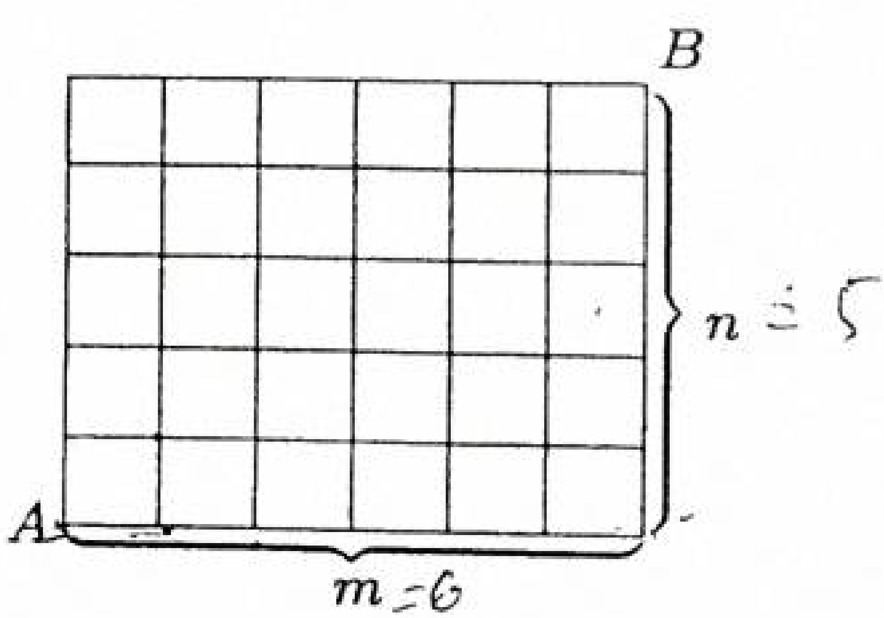
c) Có bao nhiêu tập hợp con 8 phần tử của $A$ chứa đúng 3 số lẻ

d) Hãy trình bày một thuật toán và viết chương trình máy tính để liệt kê tất cả các tập hợp con 8 phần tử của $A$ chứa đúng 3 số lẻ.

**44.** Lớp thực tập Vật lý có 21 sinh viên phải thực hiện 3 thí nghiệm. Biết rằng tất cả các sinh viên đều làm được ít nhất một thí nghiệm, 5 sinh viên không làm thí nghiệm thứ nhất, 7 sinh viên không làm thí nghiệm thứ 2 và 6 sinh viên không làm thí nghiệm thứ ba. Ngoài ra có 9 sinh viên làm cả 3 thí nghiệm. Hỏi có bao nhiêu sinh viên chỉ làm một thí nghiệm?

**45.** Trong một mạng lưới hình chữ nhật gồm $m$ mắt lưới theo chiều rộng và $n$ mắt lưới theo chiều ngang, một con kiến di chuyển từ $A$ đến $B$ dọc theo các cạnh của những mắt lưới theo qui tắc sau đây: trên 1 cạnh ngang nó chỉ đi từ trái qua phải và trên một cạnh đứng nó chỉ đi từ dưới lên trên. Tìm số các đường đi khác nhau khi kiến muốn di chuyển từ $A$ đến $B$.

(Hướng dẫn: chia mỗi đường đi theo các bước nhỏ, trong đó mỗi bước là di chuyển theo cạnh ngang hoặc cạnh đứng của 1 mắt lưới).




**46.** Có 4 ngăn tiền chứa 4 loại giấy bạc: 1.000đ, 2.000đ, 5.000đ và 10.000đ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn 10 tờ giấy bạc từ các ngăn tiền trên?

**47.** Tìm số cách chia 10 hòn bi cho 5 đứa trẻ trong các trường hợp sau:

a) không có hạn chế nào cả.

b) đứa trẻ lớn nhất được ít nhất 2 hòn bi

c) mỗi đứa trẻ được ít nhất một hòn bi.

**48.** a) Tìm số cách chia $r$ vật đồng nhất vào $n$ hộp phân biệt nếu yêu cầu thêm là không có hộp nào để trống.

b) Suy ra số nghiệm của phương trình (2.4.5) nếu ta giả thiết thêm các ẩn $x_i$ lấy giá trị nguyên dương.

**49.** Tìm số nghiệm nguyên của phương trình

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 32$$

trong các trường hợp sau:

a) $x_1, x_2 \geq 5$, $x_3, x_4 \geq 7$

b) $x_i \geq 8$, $1 \leq i \leq 4$

c) $x_1, x_2, x_3 > 0$, $0 < x_4 \leq 25$

**50.** a) Tìm hệ số của $xy^2z^3t$ trong phép khai triển của $(x + 2y + 3z + t + v)^7$

b) Có bao nhiêu số hạng khác nhau trong phép khai triển trên?

**51.** Tính $\binom{5}{2}$ và kiểm tra lại kết quả bằng cách liệt kê tất cả các tổ hợp chọn 2 của $\{1, 2, \ldots, 5\}$.

**52.** Một Tiểu ban gồm 12 người được chọn trong số 10 đại biểu nữ và 10 đại biểu nam. Có bao nhiêu cách chọn? Biết rằng:

a) không có hạn chế nào cả

b) phải có 6 nam và 6 nữ

c) số nữ phải là số chẵn

d) phải có nhiều nữ hơn nam

e) phải có ít nhất 8 nam.

**53.** Có bao nhiêu byte khác nhau:

a) chứa đúng 2 bit 1

b) chứa đúng 4 bit 1

c) chứa đúng 6 bit 1

d) chứa ít nhất 6 bít 1

**54.** Có thể chia 12 quyển sách khác nhau cho 4 đứa trẻ theo bao nhiêu cách? Biết rằng:

a) mỗi đứa trẻ được 3 quyển sách

b) hai đứa lớn nhất được 4 quyển sách mỗi đứa và hai đứa bé nhất được 2 quyển sách mỗi đứa.

**55.** a) Cho trước 15 điểm trong mặt phẳng sao cho 3 điểm bất kỳ trong số đó không cùng nằm trên 1 đường thẳng. Có bao nhiêu đường thẳng đi qua 2 điểm trong số đó?

b) Cho trước 25 điểm trong không gian sao cho 4 điểm bất kỳ trong số đó không cùng nằm trong 1 mặt phẳng. Có bao nhiêu tam giác nối 3 điểm bất kỳ trong số đó? Có bao nhiêu mặt phẳng tạo được từ các tam giác? Có bao nhiêu tứ diện nối 4 điểm bất kỳ trong số đó?

**56.** Cho trước 1 đa giác đều $n$ cạnh. Có bao nhiêu tam giác:

a) tạo được từ các đỉnh của đa giác đều

b) trong số các tam giác trong a) không có chung cạnh với đa giác đều.

**57.** Tìm hệ số của $x^9y^3$ trong:

a) $(x+y)^{12}$ b) $(x+2y)^{12}$ c) $(2x-3y)^{12}$

**58.** Xác định các hệ số của:

a) $xyz^2$ trong $(x+y+z)^4$

b) $xyz^2$ trong $(x+y+z+t)^4$

c) $xyz^2$ trong $(2x-y-z)^4$

**59.** Cho trước số nguyên dương $n$ và số thực $x$, hãy tính các tổng sau:

a) $\binom{n}{0} + 2\binom{n}{1} + \ldots + 2^m\binom{n}{m} + \ldots + 2^n\binom{n}{n}$

b) $(1+x)^n - \binom{n}{1} x(1+x)^{n-1} + \binom{n}{2} x^2(1+x)^{n-2} + \ldots$

$(-1)^n \binom{n}{n} x^n$

c) $\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!(n-i)!}$

d) $\sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!(n-i)!}$

**60.** Chứng minh rằng nếu có $m$ bồ câu và $n$ cửa thì ít nhất có $\left\lceil \frac{m}{n} \right\rceil$ bồ câu ở chung trong một cửa nào đó. Trong đó $\left\lceil \frac{m}{n} \right\rceil$ chỉ số nguyên bé nhất $\geq \frac{m}{n}$.

**61.** Cần phải tung một con xúc sắc bao nhiêu lần để có một mặt xuất hiện ít nhất:

a) 2 lần

b) 3 lần

c) $n$ lần với $n \geq 4$

**62.** Chứng minh rằng trong 14 phần tử khác nhau tùy ý của $S = \{1, 2, \ldots, 25\}$, có ít nhất 2 phần tử có tổng là 26.

**63.** a) Chứng minh rằng trong 11 phần tử khác nhau tùy ý của $\{1, 2, \ldots, 100\}$, có ít nhất 2 phần tử $x, y$ sao cho $0 < |\sqrt{x} - \sqrt{y}| < 1$

b) Hãy tổng quát hóa kết quả trên.

**64.** Chứng minh rằng trong số 10 điểm khác nhau tùy ý bên trong 1 hình tam giác đều có cạnh bằng 1, có ít nhất 2 điểm mà khoảng cách bé hơn $\frac{1}{3}$.

# Chương 3

# QUAN HỆ

## §1 Quan hệ

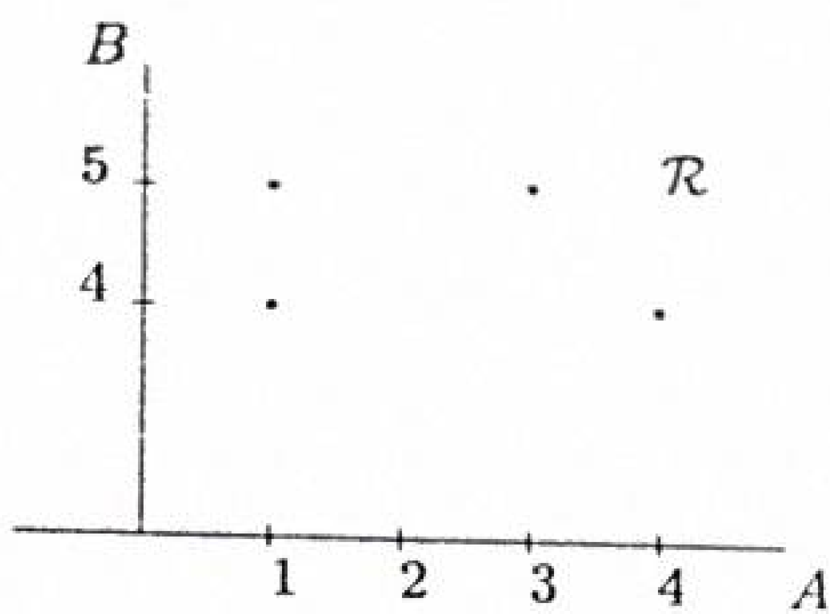
**Định nghĩa 3.1.1**: một *quan hệ giữa* tập hợp $A$ và tập hợp $B$ là một tập hợp con $\mathcal{R}$ của $A \times B$. Nếu $(a,b) \in \mathcal{R}$, ta viết $a\mathcal{R}b$. Một quan hệ giữa $A$ và $A$ được gọi là một quan hệ *trên* $A$

**Ví dụ:**

1. $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{4,5\}$

$$\mathcal{R} = \{(1,4),(1,5),(3,5),(4,4)\}$$

là một quan hệ giữa $A$ và $B$. Ta thường biểu diễn quan hệ $\mathcal{R}$ bởi sơ đồ sau:



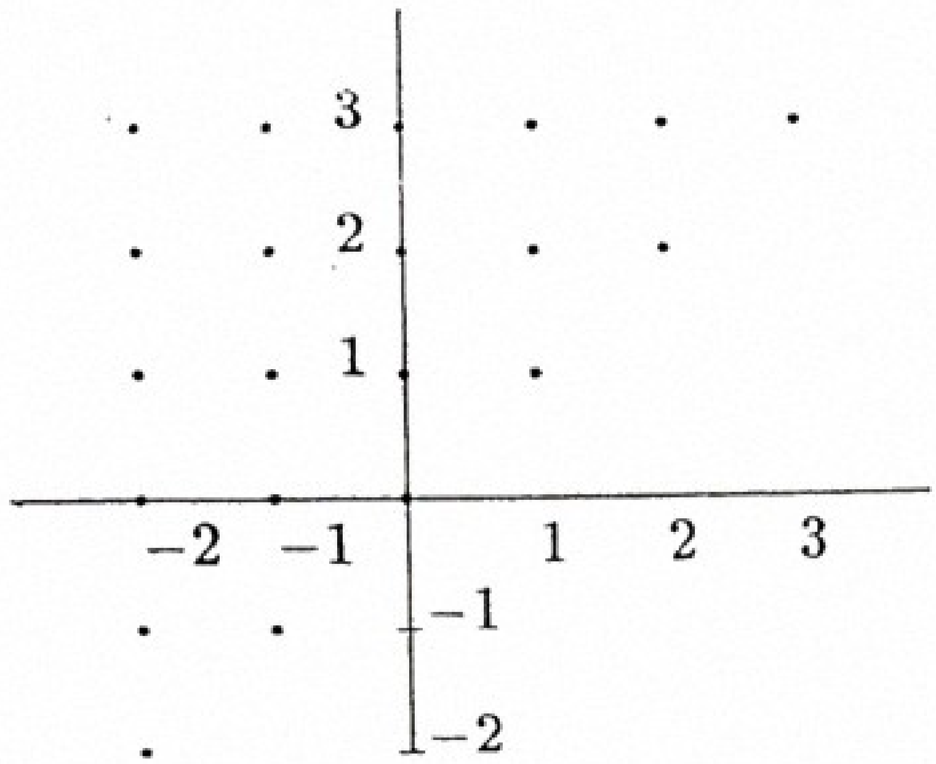

2. Quan hệ " = " trên một tập hợp $A$ bất kỳ:

$$(a\mathcal{R}b) \Leftrightarrow a = b$$

3. Quan hệ " $\leq$ " trên **Z**, **Q** hay **R**:

$$(a\mathcal{R}b) \Leftrightarrow (a \leq b)$$

Trên **Z** quan hệ $\leq$ có thể biểu diễn bởi sơ đồ:




4. Gọi $\mathcal{L}$ là tập hợp các đường thẳng trong mặt phẳng. Quan hệ song song được định nghĩa bởi:

$$L\mathcal{R}M \Leftrightarrow L//M$$

5. Một số nguyên $a$ được nói là chia hết cho số nguyên $n$ nếu tồn tại số nguyên $k$ sao cho $a = kn$. Khi ấy ta cũng nói $n$ là ước số của $a$ và $a$ là bội số của $n$.

Giả sử $n$ là một số nguyên $> 1$ và $a \in \mathbf{N}$.

Xét các bội số không âm của $n$:

$$0, n, 2n, \ldots, kn, \ldots$$

Trong số này, các bội số $\leq a$ tạo thành một tập hợp hữu hạn nên ta có thể tìm được bội số $qn$ lớn nhất:

$$qn \leq a < (q+1)n$$

Đặt $\quad r = a - qn \quad$ ta có

$a = qn + r \quad$ với $0 \le r < n$

Ta nói rằng $q$ và $r$ là *thương số* và *dư số* trong phép chia (có dư) $a$ cho $n$.

Chú ý rằng $q$ và $r$ tồn tại duy nhất. Thật vậy, giả sử tồn tại $q', r' \in \mathbf{N}$ sao cho

$$a = q'n + r', \ 0 \le r' < n$$

Ta có thể giả sử $r \le r'$. Khi ấy

$$qn + r = q'n + r'$$

Suy ra $(q - q')n = r' - r \ge 0$

Rõ ràng $r' - r < n \le (q - q')n$ nếu $q - q' \ge 1$

Điều mâu thuẫn này chứng tỏ $q - q' = r' - r = 0$.

Cho trước số nguyên $n > 1$, ta định nghĩa quan hệ:

$$a\mathcal{R}b \Leftrightarrow a - b \text{ chia hết cho } n$$

Quan hệ này được nói là quan hệ đồng dư modulo $n$. Nếu $a\mathcal{R}b$ ta viết

$$a \equiv b \ (mod\ n)$$

Rõ ràng khi ấy $a$ và $b$ có cùng dư số khi chia cho $n$.

Với $n = 7$ ta có $9 \equiv 2 \ (mod\ 7)$ và $3 \equiv 10 \ (mod\ 7)$ nhưng $3 \not\equiv 6 \ (mod\ 7)$.

**Định nghĩa 3.1.2**: cho trước các tập hợp $A_1, A_2, ..., A_n$. Khi ấy ánh xạ chiếu lên thành phần thứ $i$ là ánh xạ:

$$\begin{array}{llll} \pi_i: & A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n & \to & A_i \\ & (a_1, a_2, \ldots, a_n) & \mapsto & a_i \end{array}$$

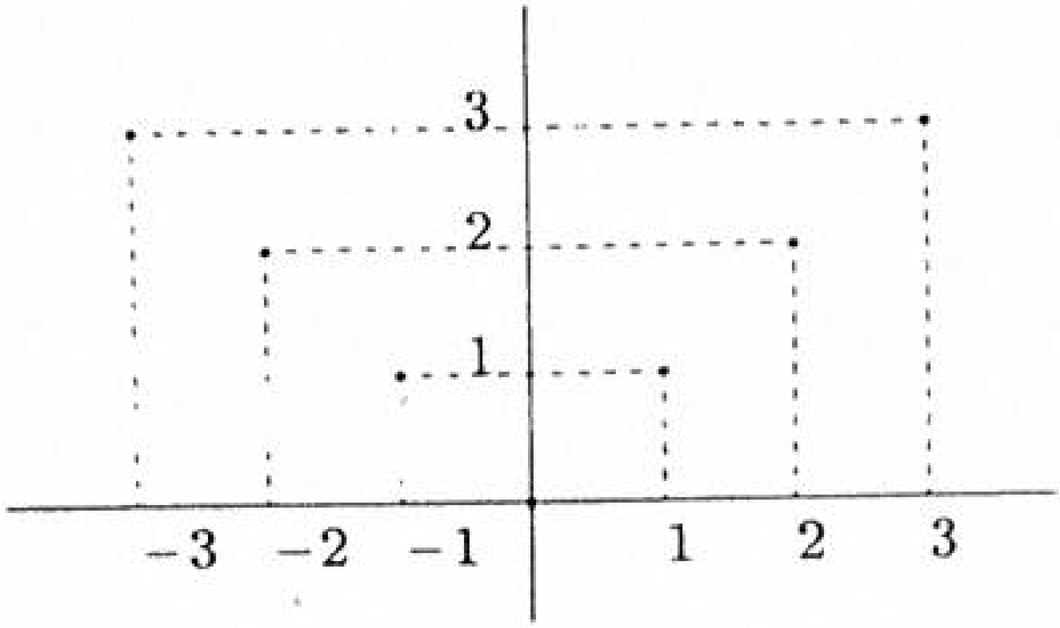
1. Ánh xạ chiếu $\pi_i$ rõ ràng là một toàn ánh.

2. Đặc biệt các ánh xạ chiếu $\pi_A, \pi_B$ từ $A \times B$ lên $A$ và $B$ tương ứng là các toàn ánh. Tuy nhiên, nếu $\mathcal{R}$ là một tập hợp con của $A \times B$, nghĩa là một quan hệ giữa $A$ và $B$ thì $\pi_A(\mathcal{R})$ và $\pi_B(\mathcal{R})$ có thể là tập hợp con thực sự của $A$ và $B$ tương ứng như các ví dụ sau cho thấy.

**Ví dụ:**

1. $A = B = \mathbf{Z}$, $\mathcal{R} = \{(x, y)/\ y = |x|\}$

Quan hệ $\mathcal{R}$ được biểu diễn bởi sơ đồ



Ta có $\pi_A(\mathcal{R}) = \mathbf{Z}$

Tuy nhiên $\pi_B(\mathcal{R}) = \mathbf{N} \subsetneqq B = \mathbf{Z}$

2. $A = B = \mathbf{R}$, $\mathcal{R} = \{(x, y) \in A \times B/\ y = x^2\}$

Rõ ràng $\pi_A(\mathcal{R}) = A = \mathbf{R}$ trong khi

$$\pi_B(\mathcal{R}) = [0, +\infty) = \{x \in \mathbf{R}/x \geq 0\} \subsetneqq \mathbf{R}$$

3. $A = B = [-1, 1] = \{x \in \mathbf{R}/ -1 \leq x \leq 1\}$ và

$\mathcal{R} = \{(x, y) \in A \times B/x^2 + y^2 \leq 1\}$

Khi ấy $\pi_A(\mathcal{R}) = \pi_B(\mathcal{R}) = A = B$ mặc dù $\mathcal{R} \subsetneqq A \times B$

**Định nghĩa 3.1.3**: một *quan hệ* trên các tập hợp $A_1, A_2 \times \ldots \times A_n$ là một tập hợp con của $\prod_{i=1}^{n} A_i = A_1 \times A_2, \ldots, A_n$

**Chú ý**:

1. Giả sử $\mathcal{R}$ là một quan hệ trên $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Khi ấy các phần tử của $\mathcal{R}$ là những bộ $n$ $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$

2. Xét $m$ số nguyên $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_m \leq n$

Khi ấy ta cũng có thể định nghĩa một ánh xạ chiếu

$$\begin{aligned} \pi_{i_1, i_2, \ldots, i_m} : A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n &\to A_{i_1} \times A_{i_2} \times \ldots \times A_{i_m} \\ (a_1, a_2, \ldots, a_n) &\mapsto (a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_m}) \end{aligned}$$

Rõ ràng $\pi_{i_1,i_2,\ldots,i_m}$ cũng là một toàn ánh.

**Định nghĩa 3.1.4**: Nếu $\mathcal{R}$ là một quan hệ trên $A_1, A_2, \ldots, A_n$ thì $\pi_{i_1,i_2,\ldots,i_m}(\mathcal{R})$ được gọi là quan hệ chiếu của $\mathcal{R}$.

**Chú ý**:

1. Quan hệ chiếu $\pi_{i_1,i_2,\ldots,i_m}(\mathcal{R})$ là một quan hệ trên $A_{i_1} \times A_{i_2} \times \ldots \times A_{i_m}$.

2. Trong Lý thuyết về cơ sở dữ liệu mô hình quan hệ, các tập hợp $A_1, A_2, \ldots, A_n$ được gọi là các thuộc tính. Như thế quan hệ chiếu $\pi_{i_1,i_2,\ldots,i_m}(\mathcal{R})$ chính là quan hệ ban đầu nhưng các thuộc tính không thuộc các tập hợp $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_m}$ đã được bỏ qua như ví dụ sau cho thấy

**Ví dụ**: trong cơ sở dữ liệu Môn học ở Đại học Khoa học Tự nhiên, ta có các tập hợp thuộc tính sau:

$A_1$: các mã số môn học

$A_2$: các tên môn học

$A_3$: các Giảng viên.

Quan hệ Môn học - Giảng viên được cho bởi bảng sau:

| Mã Môn học | Tên Môn học | Giảng viên |
|---|---|---|
| T001 | Vi tích phân | Ông Bình |
| T011 | Toán Rời rạc | Ông An |
| T012 | Đại số tuyến tính | Ông Minh |
| TH001 | Tin học ĐC A1 | Cô Hà |
| TH002 | Tin học ĐC A2 | Cô Hà |

Quan hệ chiếu $\pi_{1\ 2}$ (Môn học - Giảng viên) là quan hệ Môn học được cho bởi bảng sau:

| Mã Môn học | Tên Môn học |
|---|---|
| T001 | Vi tích phân |
| T011 | Toán Rời rạc |
| T012 | Đại số tuyến tính |
| TH001 | Tin học ĐC A1 |
| TH002 | Tin học ĐC A2 |

Rõ ràng $\pi_{i_1,i_2,\ldots,i_m}$ cũng là một toàn ánh.

**Định nghĩa 3.1.4**: Nếu $\mathcal{R}$ là một quan hệ trên $A_1, A_2, \ldots, A_n$ thì $\pi_{i_1,i_2,\ldots,i_m}(\mathcal{R})$ được gọi là quan hệ chiếu của $\mathcal{R}$.

**Chú ý**:

1. Quan hệ chiếu $\pi_{i_1,i_2,\ldots,i_m}(\mathcal{R})$ là một quan hệ trên $A_{i_1} \times A_{i_2} \times \ldots \times A_{i_m}$.

2. Trong Lý thuyết về cơ sở dữ liệu mô hình quan hệ, các tập hợp $A_1, A_2, \ldots, A_n$ được gọi là các thuộc tính. Như thế quan hệ chiếu $\pi_{i_1,i_2,\ldots,i_m}(\mathcal{R})$ chính là quan hệ ban đầu nhưng các thuộc tính không thuộc các tập hợp $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_m}$ đã được bỏ qua như ví dụ sau cho thấy

**Ví dụ**: trong cơ sở dữ liệu Môn học ở Đại học Khoa học Tự nhiên, ta có các tập hợp thuộc tính sau:

$A_1$: các mã số môn học

$A_2$: các tên môn học

$A_3$: các Giảng viên.

Quan hệ Môn học - Giảng viên được cho bởi bảng sau:

| Mã Môn học | Tên Môn học | Giảng viên |
|---|---|---|
| T001 | Vi tích phân | Ông Bình |
| T011 | Toán Rời rạc | Ông An |
| T012 | Đại số tuyến tính | Ông Minh |
| TH001 | Tin học ĐC A1 | Cô Hà |
| TH002 | Tin học ĐC A2 | Cô Hà |

Quan hệ chiếu $\pi_{1\ 2}$ (Môn học - Giảng viên) là quan hệ Môn học được cho bởi bảng sau:

| Mã Môn học | Tên Môn học |
|---|---|
| T001 | Vi tích phân |
| T011 | Toán Rời rạc |
| T012 | Đại số tuyến tính |
| TH001 | Tin học ĐC A1 |
| TH002 | Tin học ĐC A2 |

Mặt khác quan hệ chiếu $\pi_3$ (Môn học - Giảng viên) chính là quan hệ Giảng viên: {Ông Bình, Ông An, Ông Minh, Cô Hà}.

## §2 Quan hệ tương đương

<u>**Định nghĩa 3.2.1**</u>: một quan hệ $\mathcal{R}$ trên tập hợp $A$ được nói là *phản xạ* nếu:

$$\forall x \in A,\ x\mathcal{R}x$$

**Ví dụ:**

1. Quan hệ " $=$ " trên một tập hợp bất kỳ, quan hệ " $\leq$ " trên $\mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}$, quan hệ đồng dư trên $\mathbf{Z}$ là phản xạ

2. Quan hệ "//" trên $\mathcal{L}$ là phản xạ. Tuy nhiên quan hệ " $\perp$ " (vuông góc) trên $\mathcal{L}$ không phải là một quan hệ phản xạ.

<u>**Chú ý**</u>: gọi $\Delta_A$ là đường chéo chính của $A \times A$:

$$\Delta_A = \{(a, a)/\ a \in A\}$$

Khi ấy quan hệ $\mathcal{R}$ trên $A$ là phản xạ khi và chỉ khi $\mathcal{R} \supset \Delta_A$.

<u>**Định nghĩa 3.2.2**</u>: quan hệ $\mathcal{R}$ trên $A$ được nói là *đối xứng* nếu:

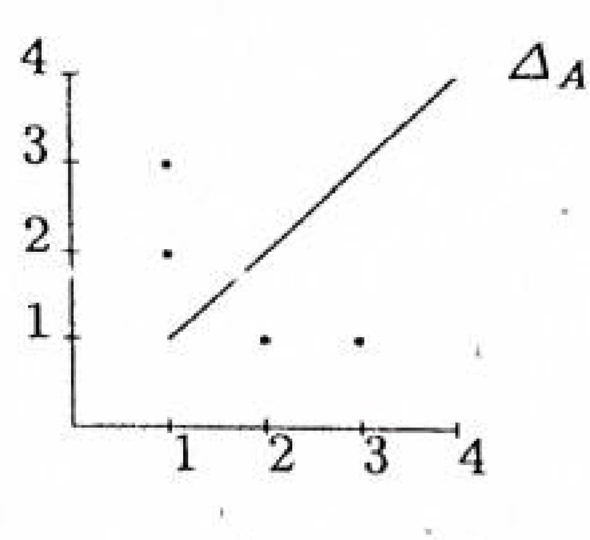
$$\forall x, y \in A,\ x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$$

**Ví dụ:**

1. Các quan hệ " $=, \equiv, //, \perp$ " là những quan hệ đối xứng

2. Quan hệ " $\leq$ " trên $\mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}$ không phải là quan hệ đối xứng.

3. Quan hệ $\mathcal{R} = \{(1,2), (2,1), (1,3), (3,1)\}$ trên $A = \{1, 2, 3, 4\}$ là một quan hệ đối xứng nhưng không phản xạ:



**Chú ý**: trong hình vẽ trên ta thấy tập hợp $\mathcal{R}$ tự đối xứng qua đường chéo chính $\Delta_A$. Tổng quát hơn một quan hệ $\mathcal{R}$ trên tập hợp $A$ bất kỳ là đối xứng khi và chỉ khi $\mathcal{R}$ là tự đối xứng qua $\Delta_A$.

**Định nghĩa 3.2.3**: một quan hệ $\mathcal{R}$ trên $A$ được nói là *bắc cầu* nếu:

$$\forall x, y, z, (x\mathcal{R}y) \wedge (y\mathcal{R}z) \Rightarrow x\mathcal{R}z$$

**Ví dụ:**

1. Các quan hệ " $=, \equiv, //, \leq$ " là các quan hệ bắc cầu.
2. Quan hệ " $\perp$ " trên $\mathcal{L}$ không phải là quan hệ bắc cầu.
3. Quan hệ $\{(1,1),(2,3),(3,4),(2,4)\}$ trên $A = \{1,2,3,4\}$ là bắc cầu.

**Định nghĩa 3.2.4**: một quan hệ $\mathcal{R}$ trên tập hợp $A$ được gọi là *quan hệ tương đương* nếu nó phản xạ, đối xứng và bắc cầu.

**Ví dụ:**

1. Các quan hệ " $=, //, \equiv$ " là quan hệ tương đương
2. Quan hệ " $\leq, \perp$ " không phải là quan hệ tương đương
3. Quan hệ $\mathcal{R} = \{(1,1),(2,2),(3,3),(2,3),(3,2)\}$ trên $A = \{1,2,3\}$ là quan hệ tương đương.
4. Quan hệ "tương đương logic" trên tập hợp các dạng mệnh đề là một quan hệ tương đương.
5. Cho trước một ánh xạ $f: A \to B$. Ta định nghĩa quan hệ $\mathcal{R}$ trên $A$ như sau:

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$$

Khi đó $\mathcal{R}$ là một quan hệ tương đương.

**Định nghĩa 3.2.5**: Giả sử $\mathcal{R}$ là một quan hệ tương đương trên $A$ và $x \in A$. Khi ấy lớp tương đương chứa $x$ là tập hợp con:

$$\{y \in A / y\mathcal{R}x\}$$

**Chú ý**: lớp tương đương chứa $x$ thường được ký hiệu bởi $\overline{x}$ hay $[x]$.

**Ví dụ**: Quan hệ $\equiv \pmod 3$ có 3 lớp tương đương:

$\overline{0} = \{ , \ldots , -6, -3, 0, 3, \ldots\}$
$\overline{1} = \{ , \ldots , -5, -2, 1, 4, \ldots\}$
$\overline{2} = \{ , \ldots , -4, -1, 2, 5, \ldots\}$
Để ý rằng:
$\overline{0} = \overline{3} = \overline{6} = \ldots$
$\overline{1} = \overline{4} = \overline{7} = \ldots$
$\overline{2} \doteq \overline{5} = \overline{8} = \ldots$

Như thế $\{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\}$ là một phân hoạch của $\mathbf{Z}$, nghĩa là $\mathbf{Z}$ là hợp của 3 tập hợp dôi một rời nhau $\{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\}$. Tổng quát hơn ta có:

**Định lý 3.2.1** *Giả sử $\mathcal{R}$ là một quan hệ tương đương trên A, Khi ấy:*

*i)* $\forall x \in A,\ x \in \overline{x}$

*ii)* $\forall x, y \in A,\ x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \overline{x} = \overline{y}$

*iii) hai lớp tương đương $\overline{x}$ và $\overline{y}$ sao cho $\overline{x} \cap \overline{y} \neq \emptyset$ thì trùng nhau.*

**Chứng minh**:

i) Do tính phản xạ, $x\mathcal{R}x$. Nói cách khác $x \in \overline{x}$

ii) Giả sử $x\mathcal{R}y$. Gọi $z$ là một phần tử bất kỳ của $\overline{x}$.

Ta có: $z\mathcal{R}x$ và $x\mathcal{R}y$ nên $z\mathcal{R}y$ do tính bắc cầu. Như thế $\overline{x} \subset \overline{y}$. Mặt khác do tính đối xứng ta cũng có $y\mathcal{R}x$. Do đó chứng minh tương tự như trên ta có $\overline{y} \subset \overline{x}$.

Ngược lại giả sử $\overline{x} = \overline{y}$, do $x \in \overline{x}$ nên $x \in \overline{y}$. Điều này có nghĩa là $x\mathcal{R}y$.

iii) Giả sử $\overline{x} \cap \overline{y} \neq \emptyset$. Khi ấy tồn tại $z \in \overline{x} \cap \overline{y}$, nghĩa là $z\mathcal{R}x$ và $z\mathcal{R}y$. Do ii) ta có $\overline{x} = \overline{z} = \overline{y}$.

•đpcm

**Ví dụ:**

1. Xét quan hệ $\mathcal{R}$ trên $\mathbf{Z}$:

$$m\mathcal{R}n \Leftrightarrow m^2 = n^2$$

Theo ví dụ 5 sau Định nghĩa 3.2.4, $\mathcal{R}$ là quan hệ tương đương xác định bởi ánh xạ $x \longmapsto x^2$ từ $\mathbf{Z}$ vào $\mathbf{Z}$. Các lớp tương đương là

$$\{0\}, \{-1, 1\}, \{-2, 2\}, \ldots, \{-n, n\}, \ldots$$

Ở đây $\mathbf{Z}$ được phân hoạch thành vô số tập hợp con hữu hạn.

2. Với $n \in \mathbf{Z}$, quan hệ đồng dư (mod $n$) là một quan hệ tương đương với $n$ lớp tương đương $\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{n-1}$. Ta ký hiệu:

$$\mathbf{Z}_n = \{\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{n-1}\}$$

Các phần tử của $\mathbf{Z}_n$ được gọi là các số nguyên đồng dư mod $n$.

Với $\overline{a}, \overline{b} \in \mathbf{Z}_n$, chọn tùy ý $x \in \overline{a}$ và $y \in \overline{b}$. Ta có thể kiểm tra được $\overline{x+y}$ không phụ thuộc vào $x$ và $y$ mà *chỉ* phụ thuộc vào $\overline{a}$ và $\overline{b}$. Do đó ta có thể dùng $\overline{x+y}$ để định nghĩa $\overline{a} + \overline{b}$. Đặc biệt ta có thể chọn $x = a$ và $y = b$:

$$\overline{a} + \overline{b} = \overline{a+b}$$

Tương tự ta có:

$$\overline{a}\overline{b} = \overline{ab}$$

Bây giờ ta có thể kiểm được 2 phép toán $\cdot, +$ trên $\mathbf{Z}_n$ thỏa các tính chất tương tự như các phép toán $\cdot, +$ trên $\mathbf{Z}$:

- Tính giao hoán: $\forall \overline{x}, \overline{y}$,

$$\begin{aligned} \overline{x} + \overline{y} &= \overline{y} + \overline{x} \\ \text{và} \quad \overline{x}\,\overline{y} &= \overline{y}\,\overline{x} \end{aligned}$$

- Tính kết hợp: $\forall \overline{x}, \overline{y}, \overline{z}$,

$$\begin{aligned} \overline{x} + (\overline{y} + \overline{z}) &= (\overline{x} + \overline{y}) + \overline{z} \\ \text{và} \quad \overline{x}(\overline{y}\,\overline{z}) &= (\overline{x}\,\overline{y})\overline{z} \end{aligned}$$

- Tính phân bố: $\forall \overline{x}, \overline{y}, \overline{z}$

$$\overline{x}(\overline{y} + \overline{z}) = \overline{x}\,\overline{y} + \overline{x}\,\overline{z}$$

- Phần tử trung hòa: $\forall \overline{x}$

$$\begin{aligned} \overline{x} + \overline{0} &= \overline{x} \\ \overline{x}.\overline{1} &= \overline{x} \end{aligned}$$

- Phần tử đối: $\forall \overline{x}$

$$\overline{x} + \overline{(n-x)} = \overline{0}$$

Ta nói $\mathbf{Z}_n$ cũng như $\mathbf{Z}$ là những *vành giao hoán có đơn vị*

## §3 Thứ tự

**Định nghĩa 3.3.1:** một quan hệ $\mathcal{R}$ trên tập hợp $A$ được nói là ***phản***

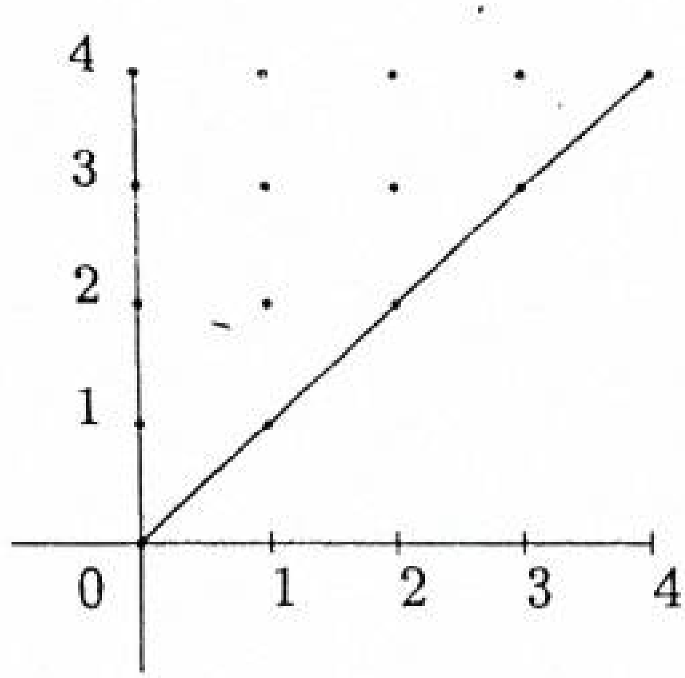
*xứng* nếu:

$$\forall x, y, \ (x\mathcal{R}y) \wedge (y\mathcal{R}x) \Rightarrow x = y$$

**Ví dụ**:

1. Quan hệ " $\leq$ " trên $\mathbf{Z}, \mathbf{Q}$ hay $\mathbf{R}$ là phản xứng.
2. Quan hệ " $\equiv, //$" không phản xứng.

**Chú ý**: trái với các quan hệ đối xứng, đối với một quan hệ phản xứng $\mathcal{R}$, mọi bộ phận tự đối xứng của $\mathcal{R}$ đều nằm trong đường chéo $\Delta_A$




**Định nghĩa 3.3.2**: một quan hệ trên tập hợp $A$ được nói là *một thứ tự* nếu nó phản xạ, phản xứng và bắc cầu. Khi ấy ta nói $A$ là một tập hợp sắp thứ tự (hay có thứ tự).

**Chú ý**:

1. Ta thường ký hiệu một thứ tự bởi $\prec$. Cặp $(A, \prec)$ là một tập hợp *có thứ tự*.

2. Giả sử $B$ là một tập hợp con của tập hợp có thứ tự $(A, \prec)$. Khi ấy $\prec$ cảm sinh một thứ tự trên $B$ một cách tự nhiên: với $x, y \in B$, ta nói $x \prec y$ trong $B$ nếu $x \prec y$ trong $A$.

**Ví dụ**:

1. $(\mathbf{R}, \leq)$ là một tập hợp có thứ tự. Thứ tự $\leq$ cảm sinh các thứ tự tự nhiên trên $\mathbf{Z}, \mathbf{Q}$.

2. Nhắc lại trên tập hợp $\mathcal{P}(E)$ ta có quan hệ:

$$A \prec B \Leftrightarrow A \subset B$$

Khi đó $\prec$ là một thứ tự trên $\mathcal{P}(E)$ gọi là thứ tự bao hàm. Ký hiệu $A \subset B$ sẽ được dùng thay vì $\prec$

3. Trên tập hợp $\mathcal{M}$ các dạng mệnh đề, ta định nghĩa $E \prec F$ khi và chỉ khi $E \Rightarrow F$, nghĩa là $F$ là hệ quả logic của $E$. Rõ ràng quan hệ trên có tính phản xạ và bắc cầu. Mặt khác nếu $E \Rightarrow F$ và $F \Rightarrow E$ thì $E$ và $F$ tương đương logic. Do đó nếu ta đồng nhất các dạng mệnh đề tương đương logic thì quan hệ trên trở thành một thứ tự trên $\mathcal{M}$.

Chính xác hơn, ta thấy quan hệ tương đương logic là một quan hệ tương đương trên $\mathcal{M}$. Ta có một quan hệ trên tập hợp các lớp tương đương như sau:

$[E] \prec [F] \Leftrightarrow F$ là hệ quả logic của $E$

Khi ấy quan hệ trên vẫn còn là phản xạ và bắc cầu.

Giả sử $[E] \prec [F]$ và $[F] \prec E$. Khi ấy $F$ là hệ quả logic của $E$ và ngược lại, nghĩa là $E$ và $F$ tương đương logic. Suy ra $[E] = [F]$.

Do đó $\prec$ là một thứ tự trên tập hợp các lớp tương đương của $\mathcal{M}$.

**Ví dụ 4**: Gọi $n$ là một số nguyên dương. Đặt

$$\mathcal{U}_n = \{a \in \mathbf{N} / a | n\}$$

trong đó $a|n$ có nghĩa $a$ là một ước của $n$ hay $n$ chia hết cho $a$. Trên $\mathcal{U}_n$ ta có thể định nghĩa một quan hệ:

$$x \prec y \Leftrightarrow x | y$$

Khi ấy rõ ràng $\prec$ là phản xạ và bắc cầu.

Giả sử $x \prec y$ và $y \prec x$. Ta có:

$$\begin{array}{lrcl} & y & = & ax \\ \text{và} & x & = & by \\ \text{với} & a, b & \in & \mathbf{Z}^+ \end{array}$$

Suy ra $y = aby \Rightarrow ab = 1$ vì $y > 0$.

Do $a, b \in \mathbf{Z}^+$ ta phải có $a = b = 1$, nghĩa là $x = y$.

Quan hệ thứ tự trên vẫn được ký hiệu bởi $x|y$

Với $n = 12$ ta có

$$\mathcal{U}_{12} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$$

Do đó ta có thể liệt kê các cặp thuộc quan hệ trên:
$\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,6),(1,12),$
$(2,2),(2,4),(2,6),(2,12),(3,3),(3,6),(3,12)$
$(4,4),(4,12),(6,6),(6,12),(12,12)\}$

Tuy nhiên đối với các tập hợp hữu hạn có nhiều phần tử, ta không thể dùng phương pháp liệt kê như trên mà sẽ sử dụng *biểu đồ Hasse*

**Định nghĩa 3.3.3**: Xét một tập hợp có thứ tự $(A, \prec)$ và $x, y$ là 2 phần tử bất kỳ của $A$

i) nếu $x \prec y$ ta nói $y$ là *trội của* $x$ hay $x$ *được trội* bởi $y$

ii) $y$ là *trội trực tiếp* của $x$ nếu $y$ trội $x$ và không tồn tại một trội $z$ của $x$ sao cho:

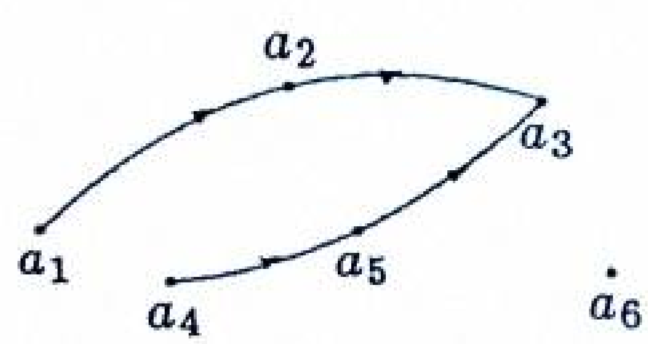
$$x \underset{\neq}{\prec} z \underset{\neq}{\prec} y$$

**Định nghĩa 3.3.4**: *Biểu đồ Hasse* của một tập hợp hữu hạn có thứ tự $(A, \prec)$ bao gồm:

i) một tập hợp các điểm trong mặt phẳng tương ứng $1-1$ với $A$, gọi là *các đỉnh*

ii) một tập hợp các *cung có hướng* nối một số đỉnh: hai đỉnh $x, y$ được nối lại bởi một cung có hướng (từ $x$ tới $y$) nếu $y$ là trội trực tiếp của $x$.

**Ví dụ**: 1.

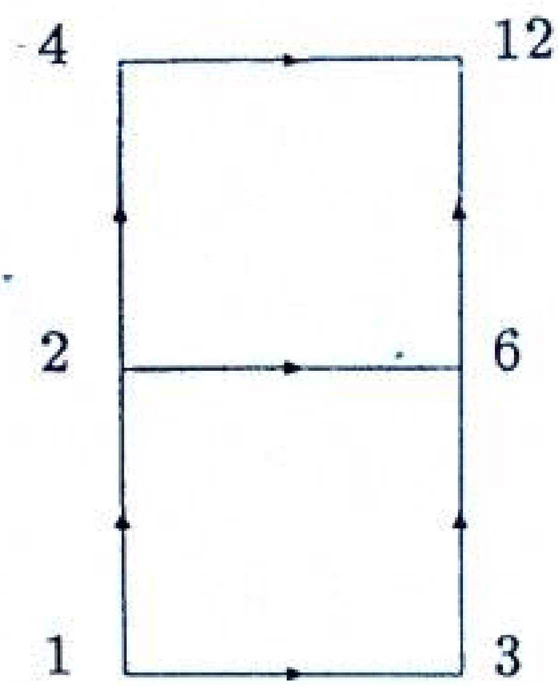



Trên đây là biểu đồ Hasse của tập hợp sắp thứ tự $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$ trong đó:

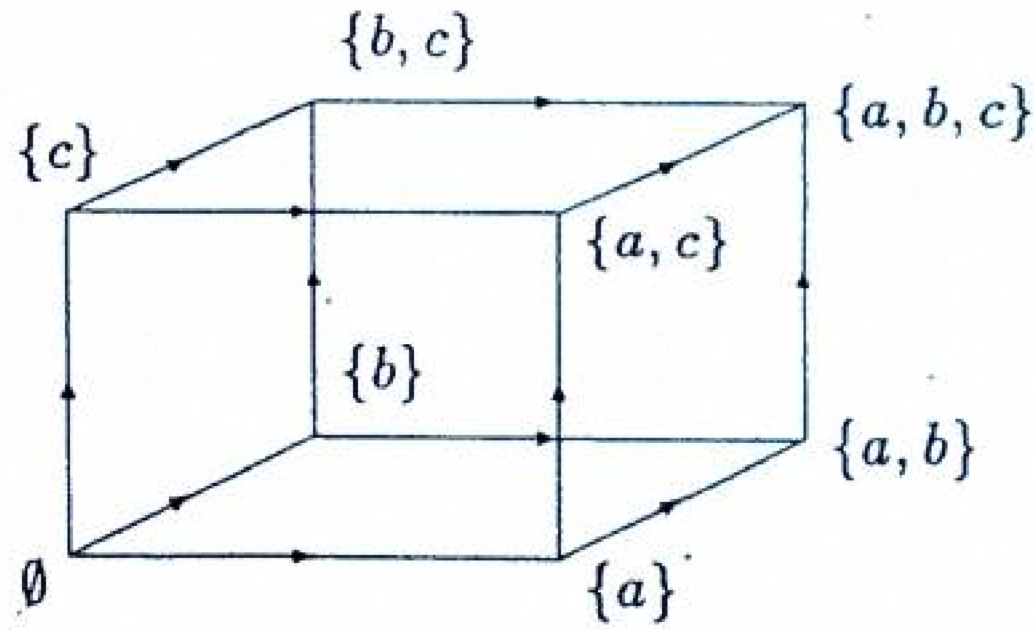
$a_1 \prec a_2 \prec a_3$ và $a_4 \prec a_5 \prec a_3$

$a_6$ không so sánh được với các phần tử khác, nghĩa là với $1 \leq i \leq 5$ thì $a_6 \not\prec a_i$ và $a_i \not\prec a_6$.

2. Biểu đồ Hasse của $\mathcal{U}_{12}$ được cho bởi

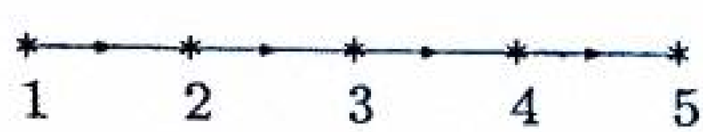


3. Với $E = \{a, b, c\}$ thì biểu đồ Hasse của $(\mathcal{P}(E), \subset)$ có dạng



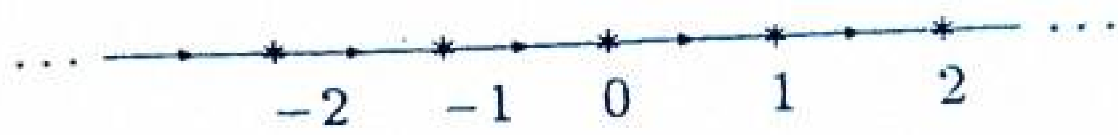
Ở đây ta qui ước các cung là không chéo nhau. Do đó một cách để hình dung dễ dàng là xem như biểu đồ Hasse của $\mathcal{P}(E)$ gồm các đỉnh và cạnh của một *hình lập phương 3 chiều.*

4. Biểu đồ Hasse của $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ với thứ tự thông thường có dạng của một *dây chuyền*:



Ta có thể duyệt hết các đỉnh một lần bằng cách đi theo các mà không quay trở lại.

Cũng thế trong $\mathbf{Z}$ vô hạn, ta cũng có thể qui ước biểu diễn thứ tự trên $\mathbf{Z}$ bởi biểu đồ Hasse vô hạn như sau:




Biểu đồ Hasse trên vẫn còn là một dây chuyền vô hạn

**Định nghĩa 3.3.5**: một thứ tự trên $A$ được nói là *toàn phần* nếu hai phần tử bất kỳ đều *so sánh được*, nghĩa là mệnh đề sau là đúng:

$$\forall x, y \in A,\ (x \prec y) \vee (y \prec x)$$

**Ví dụ:**

1. $\mathbf{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}$ với thứ tự $\leq$ thông thường là những tập hợp sắp thứ tự toàn phần

2. Xét một tập hợp hữu hạn không rỗng $\mathcal{A}$ mà ta gọi là bộ mẫu tự. Giả sử trện $\mathcal{A}$ có một thứ tự toàn phần $\prec$ (ví dụ như thứ tự thông thường nếu $\mathcal{A}$ là bộ chữ cái: $a \prec b \prec c \ldots \prec z$, hay thứ tự xác định bởi mã ASCII nếu $\mathcal{A}$ là bộ chữ cái được mở rộng thêm các ký tự là các số từ 0 đến 9, các dấu +, -, ...,).

Gọi $\mathcal{S}$ là tập hợp các chuỗi ký tự có dạng $s = a_1a_2\ldots a_m$ và $a_1, a_2, \ldots a_m \in \mathcal{A}$ với $m$ là số nguyên tự nhiên tùy ý. Với $m = 0$ ta được chuỗi rỗng $\emptyset$ không có ký tự nào cả. Ta sẽ định nghĩa một quan hệ $\prec$ trên $\mathcal{S}$ như sau:

- $\emptyset \prec s, \forall s \in \mathcal{S}$

- nếu $s = a_1a_2\ldots a_m$ và $t = b_1b_2\ldots b_n$ là 2 chuỗi khác $\emptyset$, ta định nghĩa $s \prec t$ khi và chỉ khi một trong hai điều kiện sau được thỏa:

i) tồn tại một chỉ số $i$, $1 \leq i \leq m$ sao cho:
$a_1 = b_1, \ldots, a_{i-1} = b_{i-1}$ và $a_i \underset{\neq}{\prec} b_i$.

ii) $m \leq n$ và $a_1 = b_1, \ldots, a_m = b_m$.

Ta chứng minh được rằng $\prec$ là một thứ tự trên $\mathcal{S}$ gọi là thứ tự tự điển. Hơn nữa với thứ tự tự điển, $\mathcal{S}$ là một tập sắp thứ tự toàn phần (Bài tập)

Bây giờ với Định nghĩa 3.3.5, nhận xét trên đây về biểu đồ Hasse có thể được phát biểu dưới dạng một kết quả tổng quát hơn mà chứng minh là hiển nhiên.

**Mệnh đề 3.3.1**: biểu đồ Hasse của $(A, \prec)$ là một dây chuyền khi và chỉ khi $\prec$ là một thứ tự toàn phần trên $A$.

Do Mệnh đề 3.3.1, biểu đồ Hasse của một tập hợp sắp thứ tự toàn phần hữu hạn là một dây chuyền xuất phát từ 1 phần tử $a$ và chấm dứt bởi 1 phần tử $b$. Rõ ràng $a$ là phần tử bé nhất và $b$ là phần tử lớn nhất theo nghĩa:

$$\forall x \in A, \ a \prec x \prec b$$

Mặt khác, Ví dụ 1 cho thấy phần tử bé nhất và lớn nhất không nhất thiết tồn tại, ngay cả trong 1 tập hợp sắp thứ tự hữu hạn. Tuy nhiên các phần tử $a_3, a_6$ là những phần tử *tối đại* và $a_1, a_4, a_6$ là những phần tử *tối tiểu* theo nghĩa sau:

**Định nghĩa 3.3.6**: trong tập hợp sắp thứ tự $(A, \prec)$, một phần tử $m$ được nói là *tối đại* (tương ứng *tối tiểu*) nếu $m$ không có trội thực sự (tương ứng không là trội thực sự của phần tử nào cả). Nói cách khác mệnh đề sau là đúng:

$\forall x \in A, (m \prec x) \Rightarrow (m = x)$

(tương ứng $\forall x \in A, (x \prec m) \Rightarrow (x = m)$)

**Định lý 3.3.2**: *trong một tập hợp sắp thứ tự $A$, phần tử lớn nhất $m$, nếu tồn tại, là phần tử tối đại duy nhất. Suy ra $m$ cũng là phần tử lớn nhất duy nhất. Kết luận tương tự cho phần tử bé nhất và phần tử tối tiểu.*

**Chứng minh**: Giả sử $m$ là phần tử lớn nhất và tồn tại $x$ sao cho $m \prec x$. Do $m$ lớn nhất, ta cũng có $x \prec m$. Do tính phản xứng, ta có $x = m$. Suy ra $m$ là một phần tử tối đại.

Mặt khác nếu gọi $b$ là một phần tử tối đại tùy ý, do $m$ lớn nhất ta có $b \prec m$. Nhưng $b$ là tối đại, ta phải có $b = m$. Như thế $m$ là phần tử tối đại duy nhất và dĩ nhiên cũng là phần tử lớn nhất duy nhất. Kết luận cho phần tử bé nhất và các phần tử tối tiểu được chứng minh tương tự bằng cách đổi chiều các thứ tự (bất đẳng thức).

**•đpcm**

Sự tồn tại của phần tử tối đại đối với các tập hợp sắp thứ tự hữu hạn được cho bởi:

**Định lý 3.3.3**: *trong một tập hợp sắp thứ tự hữu hạn thì:*

*i) mọi phần tử được trội bởi (tương ứng trội) một phần tử tối đại(tương ứng tối tiểu)*

*ii) Nếu m là phần tử tối đại (tương ứng tối tiểu) duy nhất của A thì m là phần tử lớn nhất (tương ứng phần tử bé nhất)*

**Chứng minh**:

i) Xét một phần tử $x \in A$. Nếu $x$ không tối đại sẽ có $x_1 \in A$ sao cho: $x \underset{\neq}{\prec} x_1$ .

Nếu $x_1$ tối đại thì đó là phần tử phải tìm.

Nếu không sẽ có $x_2 \in A$ sao cho: $x_1 \underset{\neq}{\prec} x_2$

Nếu $x_2$ tối đại thì đó là phần tử phải tìm vì $x_2$ rõ ràng trội $x$. Nếu không ta tiếp tục tìm được một trội thực sự của $x_2$ ...

Do $A$ hữu hạn và các phần tử $x, x_1, x_2, \ldots$ đôi một khác nhau, quá trình trên sẽ dừng sau tối đa $n-1$ bước, trong đó $n = |A|$. Phần tử cuối cùng tìm được chính là phần tử tối đại trội $x$.

ii) Giả sử $m$ là phần tử tối đại duy nhất của $A$, và $x$ là một phần tử tùy ý của $A$. Do i) tồn tại một phần tử tối đại $y$ sao cho: $x \prec y$.

Do $m$ duy nhất ta có: $y = m$

Suy ra $x \prec m, \forall x \in A$

Nói cách khác $m$ là phần tử lớn nhất.

Chứng minh cho kết luận về phần tử tối tiểu và phần tử bé nhất hoàn toàn tương tự.

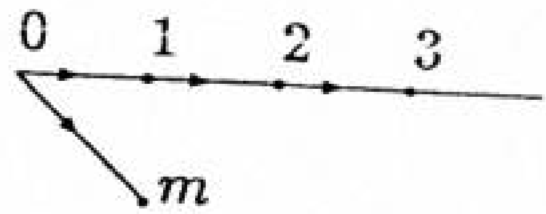
• **đpcm**

**Chú ý**: Nếu $A$ không hữu hạn, Định lý không đúng theo cả hai kết luận:

1) $A$ không có phần tử tối đại; ví dụ như $A = \mathbf{Z}$ với thứ tự thông thường.

2) $A$ có thể có phần tử tối đại duy nhất $m$ nhưng không có phần

tử lớn nhất như ví dụ sau cho thấy:




## §4 Dàn

Giả sử $B$ là một tập hợp con *hữu hạn* của tập hợp sắp thứ tự toàn phần $A$, khi ấy phần tử lớn nhất của $B$ tồn tại và được ký hiệu bởi max $B$. Tương tự, phần tử bé nhất của $B$ tồn tại, và được ký hiệu bởi min $B$.

Đối với các tập hợp sắp thứ tự không toàn phần, khái niệm max, min có thể được giảm nhẹ thành khái niệm sup và inf như sau:

**Định nghĩa 3.4.1**: Giả sử $B$ là một tập hợp con của tập hợp sắp thứ tự $(A, \prec)$. Khi ấy

i) Một phần tử $c \in A$ được nói là *chặn trên* (tương ứng *chặn dưới*) *chung* của $B$ nếu:

$$\forall b \in B, \quad b \prec c$$

(tương ứng $\forall b \in B, \quad c \prec b$)

ii) Phần tử bé nhất (tương ứng lớn nhất) của tập hợp $\{c \in A /\ c$ là chặn trên chung của $B\}$ (tương ứng $\{c \in A /\ c$ là chặn dưới chung của $B\}$) được ký hiệu bởi sup $B$ (tương ứng inf $B$)

**Ví dụ:**

1. Trong một tập hợp sắp thứ tự toàn phần $A$, rõ ràng max $B$ của 1 tập hợp con hữu hạn $B$ chính là sup $B$. Tương tự min $B$ chính là inf $B$.

2. Giả sử $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$ là một tập hợp con hữu hạn của $\mathcal{P}(E)$. Khi ấy $\bigcup_{i=1}^{n} B_i$ chính là sup $\mathcal{B}$ và $\bigcap_{i=1}^{n} B_i$ chính là inf $\mathcal{B}$.

3. Trên tập hợp $\mathcal{M}$ các dạng mệnh đề với thứ tự $\Rightarrow$, xét một tập hợp con hữu hạn $\mathcal{E} = \{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$. Khi ấy $E_1 \vee E_2 \vee \ldots \vee E_n$ và

$E_1 \wedge E_2 \wedge \ldots \wedge E_n$ chính là $\sup \mathcal{E}$ và $\inf \mathcal{E}$ (Bài tập).

**Định nghĩa 3.4.2**: một tập hợp sắp thứ tự $(A, \prec)$ được nói là *một dàn* nếu với hai phần tử bất kỳ $x, y \in A$, thì $\sup \{x, y\}$ và $\inf \{x, y\}$ luôn luôn tồn tại.

**Ký hiệu**: trong một dàn, ta sẽ ký hiệu $\sup \{x, y\}$ và $\inf \{x, y\}$ bởi $x \vee y$ và $x \wedge y$.

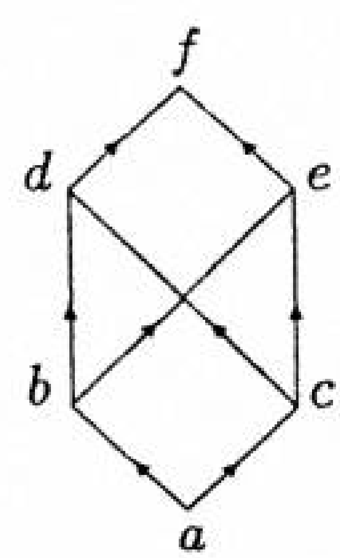
**Ví dụ:**

1. Một tập hợp sắp thứ tự toàn phần là một dàn
2. $\mathcal{P}(E)$ với thứ tự bao hàm là một dàn. Ta có

$$\begin{aligned} B_1 \vee B_2 &= B_1 \cup B_2 \\ B_1 \wedge B_2 &= B_1 \cap B_2 \end{aligned}$$

3. $\mathcal{M}$ với thứ tự $\Rightarrow$ là một dàn: với $E, F$ là 2 dạng mệnh đề, các ký hiệu mới $\vee, \wedge$ dành cho $\sup\{E, F\}$ và $\inf\{E, F\}$ trùng với các ký hiệu quen thuộc của phép nối rời và phép nối liền: $E \vee F$ và $E \wedge F$.

4. Tập hợp $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ với biểu đồ Hasse dưới đây không phải là một dàn vì $\{b, c\}$ không có sup. Thật vậy các trội chung của $\{b, c\}$ là $\{d, e, f\}$ và tập hợp này không có phần tử bé nhất.




Tương tự ta cũng thấy $\{d, e\}$ không có inf.

**Định lý 3.4.1**: *Trong một dàn $(A, \prec)$ các phép toán $\vee$ và $\wedge$ thỏa các tính chất giao hoán và kết hợp:*

$$\begin{array}{lrcll} i) & x \vee y & = & y \vee x & \multirow{2}{*}{} \\ \text{và} & x \wedge y & = & y \wedge x & \forall x, y \in A \end{array}$$

$$\begin{array}{lrcll} ii) & x \vee (y \vee z) & = & (x \vee y) \vee z & \\ \text{và} & x \wedge (y \wedge z) & = & (x \wedge y) \wedge z & \forall x, y \in A \end{array}$$

**Chứng minh**: i) hiển nhiên nên ta chỉ cần chứng minh ii). Xét 3 phần tử bất kỳ $x, y, z \in A$. Khi ấy $a = x \vee (y \vee z)$ là một trội chung của $x$ và $y \vee z$ nên nó cũng là trội chung của $x, y$ và $z$. Hơn nữa nếu $c$ là một trội chung của $x, y$ và $z$ thì $y \vee z \prec c$ vì $y \vee z$ là trội chung bé nhất của $\{y, z\}$. Như thế $c$ là trội chung của $\{x, y \vee z\}$. Suy ra $a = x \vee (y \vee z) \prec c$.

Như thế $a$ chính là trội chung bé nhất của $\{x, y, z\}$. Tương tự ta cũng thấy $(x \vee y) \vee z$ cũng là trội chung bé nhất của $\{x, y, z\}$. Do phần tử bé nhất là duy nhất, ta có:

$$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$$

Chứng minh của $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$ hoàn toàn tương tự.

• **đpcm**

**Chú ý**: Do tính kết hợp, nếu $B = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ là 1 tập hợp con hữu hạn của dàn $A$ thì $x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_n$ không phụ thuộc vào cách đặt các dấu "( )". Hơn nữa, chứng minh tương tự như trong Định lý 3.4.1 ta thấy $x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_n$ chính là sup $B$. Tương tự $x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n =$ inf $B$. Đặc biệt nếu $A$ hữu hạn ta có:

**Mệnh đề 3.4.2**: Trong dàn hữu hạn $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ thì $a_1 \vee a_2 \vee \ldots \vee a_n$ và $a_1 \wedge a_2 \wedge \ldots \wedge a_n$ chính là phần tử lớn nhất và phần tử bé nhất của $A$.

**Chú ý**: Nếu dàn $A$ không hữu hạn thì phần tử lớn nhất và bé nhất không nhất thiết tồn tại như ví dụ của $\mathbf{Z}$ cho thấy.

**Định nghĩa 3.4.3**: một dàn $A$ được nói là *phân bố* nếu với mọi $x, y, z$

trong $A$ ta có:

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$
$$\text{và} \quad x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$$

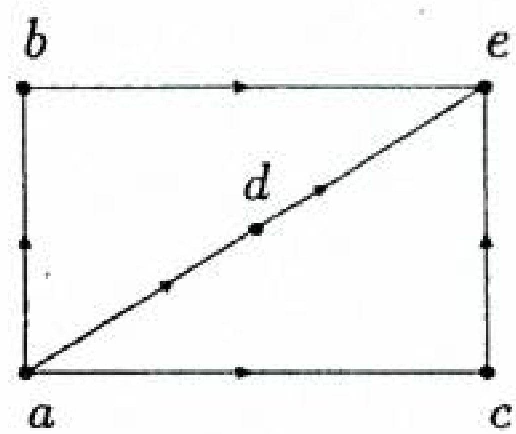
**Ví dụ:**

1. Mọi tập hợp sắp thứ tự toàn phần là một dàn phân bố (Bài tập)

2. Do tính phân bố của các phép tính tập hợp, dàn $\mathcal{P}(E)$ là một dàn phân bố.

3. Do qui luật phân bố, dàn $\mathcal{M}$ các dạng mệnh đề là một dàn phân bố

4. Xét tập hợp sắp thứ tự $A = \{a, b, c, d, e\}$ với biểu đồ Hasse như sau:




Ta có thể kiểm tra dễ dàng $A$ là một dàn. Tuy nhiên $A$ không phân bố vì:

$$\begin{array}{llllll} & d \wedge (b \vee c) & = & d \wedge e & = & d \\ \text{trong khi} & (d \wedge b) \vee (d \wedge c) & = & a \vee a & = & a \neq d \end{array}$$

<u>**Định nghĩa 3.4.4**:</u> Giả sử $A$ là một dàn với phần tử lớn nhất và bé nhất mà ta ký hiệu là 1 và 0. Khi ấy một phần tử $\overline{x} \in A$ được nói là *phần bù* của phần tử $x \in A$ nếu:

$$x \vee \overline{x} = 1$$
$$\text{và} \quad x \wedge \overline{x} = 0$$

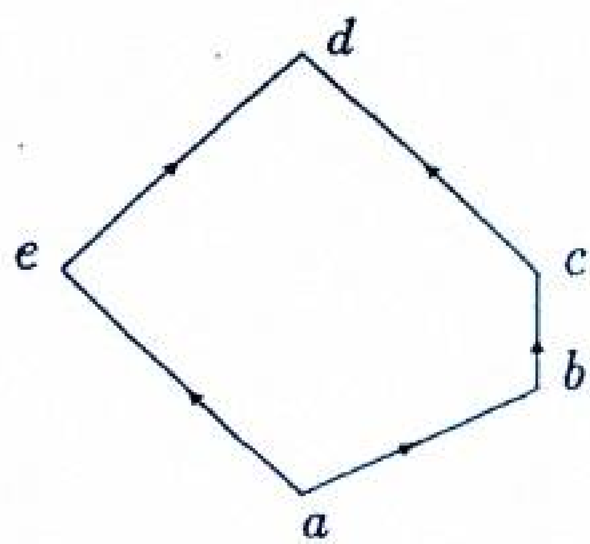
Ta nói $A$ là một *dàn bù* nếu mọi phần tử của $A$ đều có phần bù.

**Chú ý**: nếu $\bar{x}$ là phần bù của $x$ thì rõ ràng $x$ là phần bù của $\bar{x}$.

**Ví dụ:**

1. Các dàn $\mathcal{P}(E)$ và $\mathcal{M}$ là dàn bù. Phần bù của $A \in \mathcal{P}(E)$ chính là phần bù của tập hợp $A$ trong $E$, còn phần bù của dạng mệnh đề $E$ chính là phủ định của $E$.

2. Dàn $A = \{a, b, c, d, e\}$ với biểu đồ Hasse như dưới đây là một dàn bù




## §5 Dàn $2^E$

Cho trước 2 tập hợp $E, B$, nhắc lại rằng $B^E$ ký hiệu tập hợp các ánh xạ từ $E$ vào $B$. Giả sử $\prec_B$ là một thứ tự trên $B$. Khi ấy với $f, g \in B^E$, ta định nghĩa:

$$f \prec g \Leftrightarrow \forall x \in E, f(x) \prec_B g(x)$$

Có thể kiểm tra rằng $\prec$ là một thứ tự trên $B^E$, và hơn nữa $(B^E, \prec)$ là một dàn nếu $(B, \prec_B)$ là một dàn (Bài tập).

Gọi $f, g$ là hai phần tử bất kỳ của $B^E$, $f \vee g$ và $f \wedge g$ là ánh xạ sao cho với mọi $x \in E$:

$$(f \vee g)(x) = f(x) \vee_B g(x)$$

và

$$(f \wedge g)(x) = f(x) \wedge_B g(x)$$

trong đó $\vee_B$ và $\wedge_B$ chỉ sup và inf của 2 phần tử trong $B$ đối với thứ tự $\prec_B$.

Đặc biệt với $B = \{0, 1\}$, ta được dàn $\{0,1\}^E$ mà ta ký hiệu là $2^E$. Với $f \in 2^E$, đặt $A = f^{-1}(1)$. Khi ấy ta có:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } x \in A \\ 0 & \text{nếu } x \notin A \end{cases}$$

Ta nói $f$ là *hàm đặc trưng* của $A$

Hàm đặc trưng của $A$ được ký hiệu bởi $\chi_A$. Ta có:

**Định lý 3.5.1**: *tương ứng $\varphi : A \longmapsto \chi_A$ là một song ánh giữa $\mathcal{P}(E)$ và $2^E$. Hơn nữa với $A_1, A_2$ là 2 tập con tùy ý của $E$ ta có*

$$A_1 \subset A_2 \Leftrightarrow \chi_{A_1} \prec \chi_{A_2} \tag{3.5.1}$$

**Chứng minh**: Trên đây ta đã thấy $\varphi$ là toàn ánh. Hơn nữa nếu $\chi_{A_1} = \chi_{A_2}$ thì:

$$A_1 = \chi_{A_1}^{-1}(1) = \chi_{A_2}^{-1}(1) = A_2$$

Như thế $\varphi$ là một song ánh.

Mặt khác, với $A_1, A_2$ là 2 tập con tùy ý của $E$, ta có:

$$\begin{aligned} A_1 \subset A_2 \quad &\Leftrightarrow \quad (\forall x \in E, \chi_{A_1}(x) = 1 \Rightarrow \chi_{A_2}(x) = 1) \\ &\Leftrightarrow \quad \chi_{A_1} \prec \chi_{A_2} \end{aligned}$$

• đpcm

Ta có thể viết lại (3.5.1) như sau:

$$A_1 \subset A_2 \Leftrightarrow \varphi(A_1) \prec \varphi(A_2)$$

$\varphi$ là đẳng cấu giữa hai tập hợp có thứ tự $\mathcal{P}(E)$ và $2^E$ theo nghĩa sau:

**Định nghĩa 3.5.1**: một đẳng cấu giữa hai tập hợp có thứ tự $(A, \prec_A)$, $(B, \prec_B)$ là một song ánh $\varphi : A \leftrightarrow B$ sao cho:

$$\forall x, y, (x \prec_A y) \Leftrightarrow \varphi(x) \prec_B \varphi(y) \tag{3.5.2}$$

**Định lý 3.5.2**: *Giả sử $\varphi$ là một đẳng cấu giữa hai tập hợp có thứ tự $(A, \prec_A)$ và $(B, \prec_B)$*

*i) Nếu $(A, \prec_A)$ và $(B, \prec_B)$ là hai dàn, thì với $x, y \in A$ tùy ý ta có:*

$$\begin{aligned} \varphi(x \vee y) &= \varphi(x) \vee \varphi(y) & (3.5.3) \\ \text{và} \quad \varphi(x \wedge y) &= \varphi(x) \wedge \varphi(y) & (3.5.4) \end{aligned}$$

*ii) Nếu $A$ là dàn phân bố thì $B$ cũng là dàn phân bố.*

*iii) Giả sử $A$ có 0 là phần tử bé nhất và 1 là phần tử lớn nhất. Khi ấy $\varphi(0)$ và $\varphi(1)$ là phần tử bé nhất và lớn nhất của $B$.*

*iv) Nếu $A$ là dàn bù thì $B$ cũng là dàn bù. Hơn nữa nếu $\overline{x}$ là phần bù của phần tử $x \in A$, thì $\varphi(\overline{x})$ là phần bù của $\varphi(x)$. Nói cách khác $\varphi(\overline{x}) = \overline{\varphi(x)}$.*

**Chứng minh**:

i) Với $x, y \in A$ tùy ý, do (3.5.2) rõ ràng $\varphi(x \vee y)$ là chặn trên chung của $\varphi(x)$ và $\varphi(y)$. Suy ra

$$\varphi(x) \vee \varphi(y) \prec \varphi(x \vee y) \qquad (3.5.5)$$

Mặt khác, cũng do (3.5.2) $\varphi^{-1}(\varphi(x) \vee \varphi(y))$ là chặn trên chung của $x$ và $y$ nên:

$$\begin{aligned} x \vee y &\prec \varphi^{-1}(\varphi(x) \vee \varphi(y)) \\ \text{Do đó} \quad \varphi(x \vee y) &\prec \varphi(x) \vee \varphi(y) \qquad (3.5.6) \end{aligned}$$

Từ (3.5.5) và (3.5.6) ta suy ra (3.5.3).

Chứng minh của (3.5.4) hoàn toàn tương tự.

ii), iii), iv) được suy ra dễ dàng từ định nghĩa

• **đpcm**

**Hệ quả**: nếu $A, B$ là hai tập hợp con tùy ý của $E$ thì

$$\begin{aligned} \chi_{A \cup B} &= \chi_A \vee \chi_B \\ \text{và} \quad \chi_{A \cap B} &= \chi_A \chi_B \end{aligned}$$

trong đó $\chi_A\chi_B = \chi_A \wedge \chi_B$ là tích của hai hàm theo nghĩa tự nhiên.

## §6 Dàn $\mathcal{U}_n$

### 6.1 Ước số chung lớn nhất và bội số chung nhỏ nhất

Giả sử $a, b$ là 2 số nguyên dương, khi ấy số nguyên dương $c$ được nói là *ước số chung* của $a$ và $b$ nếu $c$ là ước số của $a$ và $c$ là ước số của $b$. Khi ấy $0 \leq c \leq \min(a, b)$. Do đó tập hợp của các ước số chung của $a$ và $b$ là một tập hợp hữu hạn và tồn tại 1 phần tử lớn nhất $d$ gọi là *ước số chung lớn nhất* của $a$ và $b$. Ta viết:

$$d = USCLN(a, b)$$

Để tìm ước số chung lớn nhất của 2 số nguyên dương $a$, $b$, ta sử dụng thuật toán sau:

**Thuật chia Euclide**: nếu $b$ là ước của $a$, đặt $r_0 = b$. Nếu không ta thực hiện lần lượt các phép chia có dư số:

$$\begin{array}{lcll}
a & = & bq_1 + r_1 & , 0 \leq r_1 < b \\
b & = & r_1q_2 + r_2 & , 0 \leq r_2 < r_1 \\
r_1 & = & r_2q_3 + r_3 & , 0 \leq r_3 < r_2 \\
\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\
r_k & = & r_{k+1}q_{k+2} + r_{k+2} & , 0 \leq r_{k+2} < r_{k+1} \\
\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

Do $b > r_1 > r_2 > \ldots > r_k > \ldots \geq 0$, thuật chia sẽ ngưng sau một số hữu hạn bước.

Gọi $r_{n+1}$ là dư số đầu tiên bằng không. Ta có:

$$\begin{array}{lcl}
r_{n-2} & = & r_{n-1}q_n + r_n,\ 0 \leq r_n < r_{n-1} \\
r_{n-1} & = & r_nq_{n+1} + 0
\end{array}$$

Ta có:

**Định lý 3.6.1**: *$r_n$ là ước số chung lớn nhất của $a$ và $b$. Hơn nữa mọi ước số chung của $a$ và $b$ là ước số của $r_n$*

**Chứng minh**: Nếu $b$ là ước của $a$ thì ước số chung lớn nhất của $a$ và $b$ chính là $b = r_0$. Nếu không $r_1 > 0$. Giả sử $c$ là ước số chung của $a$ và $b$. Do $r_1 = a - bq_1$

nên $c$ cũng là ước số của $r_1$. Bây giờ ta chứng minh bằng qui nạp $c$ là ước của $r_i$ với $1 \leq i \leq n$. Thật vậy, giả sử $1 \leq k < n$ và $c$ là ước của $r_i$ với $1 \leq i \leq k$. Khi ấy do $r_{k+1} = r_{k-1} - r_k q_{k+1}$ nên $c$ cũng là ước của $r_{k+1}$. Như thế theo nguyên lý qui nạp, $c$ là ước của $r_n$. Đặc biệt nếu gọi $d$ là ước số chung lớn nhất của $a$ và $b$ thì $d$ cũng là ước của $r_n$.

Suy ra $d \leq r_n$.

Ngược lại, do $r_{n-1} = r_n q_{n+1}$ nên $r_n$ là ước của $r_{n-1}$. Tương tự như trên, dùng nguyên lý qui nạp, ta thấy $r_n$ là ước của $r_i$ với $1 \leq i \leq n$. Nhưng $b = r_1 q_2 + r_2$ nên $r_n$ cũng là ước của $b$. Cuối cùng do $a = bq_1 + r_1$, $r_n$ cũng là ước của $a$. Như thế $r_n$ là ước số chung của $a$ và $b$.

Suy ra $r_n \leq d$

Tóm lại $d = r_n$

• **đpcm**

**Định lý 3.6.2**: *Giả sử $d$ là ước số chung lớn nhất của $a$ và $b$. Khi ấy tồn tại $m, n \in \mathbf{Z}$* sao cho:

$$d = ma + nb$$

**Chứng minh**: Với ký hiệu như trong Định lý 3.6.1, ta có $d = r_n$. Như thế:

$$d = r_{n-2} - q_n r_{n-1} = m_1 r_{n-2} + m_2 r_{n-1}$$

$$\begin{array}{lll} \text{Nhưng} & r_{n-1} & = r_{n-3} - q_{n-1} r_{n-2} \\ \text{Do đó} & d & = m_2 r_{n-3} + (m_1 - m_2 q_{n-1}) r_{n-2} \\ & & = m_2 r_{n-3} + m_3 r_{n-2} \end{array}$$

Bằng Nguyên lý qui nạp tương tự như trên ta cũng chứng minh được tồn tại $m_1, m_2, \ldots, m_{n-1} \in \mathbf{Z}$ sao cho:

$$d = m_{n-2} r_1 + m_{n-1} r_2$$

Sử dụng $r_2 = b - q_2 r_1$ ta được:

$$\begin{aligned} d &= m_{n-1} b + (m_{n-2} - m_{n-1} q_2) r_1 \\ &= m_{n-1} b + m r_1 \\ &= ma + (m_{n-1} - m q_1) b \\ &= ma + nb \end{aligned}$$

• **đpcm**

**Định nghĩa 3.6.1**: hai số nguyên dương $a, b$ được nói là ***nguyên tố cùng nhau*** nếu ước số chung lớn nhất của chúng bằng 1. **Khi** ...

viết $(a, b) = 1$.

**Chú ý**: Một số nguyên $p > 1$ được nói là *số nguyên tố* nếu $p$ không có ước nào ngoài 1 và chính nó. Nếu $p$ là số nguyên tố và $p$ không phải là ước của $a$ thì $p$ và $a$ nguyên tố cùng nhau.

**Mệnh đề 3.6.3**: Giả sử $a, b, c \in \mathbf{Z}^+$ sao cho $a$ là ước của $bc$ và $(a, b) = 1$. Khi ấy $a$ là ước của $c$.

**Chứng minh**: Do Định lý 3.6.2, tồn tại $m, n \in \mathbf{Z}$ sao cho:

$$1 = ma + nb$$

Do đó $\quad c = mac + nbc$

Vì $a$ là ước của $bc$ nên $a$ cũng là ước của $c$

• đpcm

**Mệnh đề 3.6.4**: Giả sử $a, b, c \in \mathbf{Z}^+$ sao cho $(a, b) = 1$ và $(a, c) = 1$. Khi ấy $(a, bc) = 1$.

**Chứng minh**: Giả sử ước số chung lớn nhất của $a$ và $bc$ là $d > 1$. Khi ấy $(d, b) = 1$ vì nếu không, gọi $e$ là ước số chung lớn nhất của $d$ và $b$ ta có $e > 1$. Rõ ràng $e$ cũng là ước số chung của $a$ và $b$. Điều này mâu thuẫn với giả thiết $(a, b) = 1$. Vậy $(d, b) = 1$. Do đó theo Mệnh đề 3.6.3 $d$ là ước số của $c$. Điều này mâu thuẫn với giả thiết $(a, c) = 1$. Do đó $d = 1$, nghĩa là $(a, bc) = 1$

• đpcm

Một số nguyên $c$ được nói là *bội số chung* của 2 số nguyên $a, b$ nếu $c$ đồng thời là bội số của $a$ và $b$.

**Bổ đề 3.6.5**: Cho $a, b, c \in \mathbf{Z}^+$. Giả sử $c$ là bội số chung của $a, b$ và $(a, b) = 1$. Khi ấy $c$ là bội số của $ab$.

**Chứng minh**: Do $c$ là bội số của $b$, ta có thể viết $c = kb$ với $k$ là số nguyên. Do Mệnh đề 3.6.3, $a$ là ước số của $k$:

$k = k'a$, $k' \in \mathbf{Z}^+$. Suy ra $c = k'ab$

• đpcm

**Định lý 3.6.6**: *Giả sử $a, b \in \mathbf{Z}^+$. Gọi $d$ là ước số chung lớn nhất của $a, b$. Khi ấy $\dfrac{ab}{d}$ là bội số chung của $a, b$. Hơn nữa mọi bội số* *chung của a, b đều chia hết cho* $\frac{ab}{d}$. *Suy ra* $\frac{ab}{d}$ *là bội số chung nhỏ nhất của a và b.*

**Chứng minh**: Ta có thể viết $\frac{ab}{d} = a\frac{b}{d} = \frac{a}{d}b$

với $\frac{a}{d}, \frac{b}{d} \in \mathbf{Z}^+$. Suy ra $\frac{ab}{d}$ là bội số chung của $a, b$.

Mặt khác, để ý rằng $\frac{a}{d}$ và $\frac{b}{d}$ nguyên tố cùng nhau. Thật vậy, gọi $e$ là ước số chung lớn nhất của chúng thì $de$ cũng là ước số chung của $a$ và $b$. Suy ra $e = 1$.

Gọi $m$ là một bội số chung của $a, b$. Áp dụng Bổ đề 3.6.5 cho $\frac{m}{d}$, $\frac{a}{d}, \frac{b}{d}$ ta thấy $\frac{m}{d}$ là bội số của $\frac{ab}{d^2}$ nên $m$ là bội số của $\frac{ab}{d}$

• **đpcm**

**Chú ý**: Ta ký hiệu bội số chung nhỏ nhất của $a, b$ bởi $BSCNN(a, b)$.

Giả sử $a \in \mathbf{N}, a > 1$. Khi ấy nếu gọi $q$ là ước bé nhất của $a$ sao cho $q > 1$ thì rõ ràng $q$ là một số nguyên tố. Lại tiếp tục xét $\frac{a}{q}$ ta chứng minh được bằng qui nạp rằng $a$ là tích của một số hữu hạn số nguyên tố. Gộp các thừa số giống nhau lại ta có thể phân tích $a$ *thành thừa số nguyên tố*:

$$a = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \dots p_n^{r_n} \tag{3.6.1}$$

trong đó $p_1, p_2, \dots, p_n$ là các số nguyên tố đôi một khác nhau và $r_1, r_2, \dots, r_n \in \mathbf{Z}^+$

**Mệnh đề 3.6.7**: Biểu diễn (3.6.1) là duy nhất.

**Chứng minh**: Xét một phân tích ra thừa số nguyên tố khác của $a$:

$$a = q_1^{s_1} q_2^{s_2} \dots q_m^{s_m} \tag{3.6.2}$$

Nếu $p_1 \notin \{q_1, q_2, \dots, q_m\}$ thì áp dụng Mệnh đề 3.6.4 nhiều lần ta đi đến kết luận $p_1$ và $a$ nguyên tố cùng nhau. Điều mâu thuẫn này chứng tỏ $p_1 \in \{q_1, q_2, \dots, q_m\}$. Lập luận tương tự cho $p_2, \dots, p_n, q_1, \dots, q_m$ ta được:

$$\{p_1, p_2, \dots, p_n\} = \{q_1, q_2, \dots, q_m\}$$

Đặc biệt $n = m$. Sáp xếp thứ tự lại $q_1, q_2, \ldots, q_m$ ta có thể giả sử $p_1 = q_1$, $p_2 = q_2, \ldots, p_n = q_n$. Ta sẽ chứng minh $r_1 = s_1$, $r_2 = s_2, \ldots, r_n = s_n$ bằng qui nạp trên $n$.

* Nếu $n = 1$ thì $a = p_1^{r_1} = p_1^{s_1}$. Suy ra $r_1 = s_1$.

* Giả sử $n > 1$. Nếu $r_1 < s_1$ thì $\dfrac{a}{p_1^{r_1}} = p_2^{r_2} \ldots p_n^{r_n}$ rõ ràng nguyên tố cùng nhau với $p_1$. Trong khi đó dùng biểu diễn (3.6.2) ta được:

$$\frac{a}{p_1^{r_1}} = p_1^{s_1 - r_1} p_2^{s_2} \ldots p_n^{s_n}$$

Do $s_1 - r_1 > 0$, $p_1$ là ước của $\dfrac{a}{p_1^{r_1}}$. Điều mâu thuẫn này chứng tỏ $r_1 \geq s_1$. Do $r_1$ và $s_1$ đóng vai trò đối xứng ta cũng có $r_1 \leq s_1$, nghĩa là $r_1 = s_1$. Khi ấy ta được 2 biểu diễn của $\dfrac{a}{p_1^{r_1}}$ thành thừa số nguyên tố:

$$\begin{aligned} \frac{a}{p_1^{r_1}} &= p_2^{r_2} p_3^{r_3} \ldots p_n^{r_n} \\ \frac{a}{p_1^{r_1}} &= p_2^{s_2} p_3^{s_3} \ldots p_n^{s_n} \end{aligned}$$

Áp dụng giả thiết qui nạp ta được $r_2 = s_2, r_3 = s_3, \ldots, r_n = s_n$.

• đpcm

Sử dụng phân tích (3.6.1) ta có một phương pháp thứ hai để tìm ước số chung lớn nhất và bội số chung nhỏ nhất của 2 số nguyên dương.

Trước tiên nhận xét rằng nếu $a$ và $b$ có phân tích

$$a = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \ldots p_n^{r_n} \tag{3.6.3}$$

$$b = q_1^{s_1} q_2^{s_2} \ldots q_m^{s_m} \tag{3.6.4}$$

thì $a$ là ước của $b$ khi và chỉ khi 2 điều kiện dưới đây được thỏa:

- $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\} \subset \{q_1, q_2, \ldots, q_m\}$. Đặc biệt $n \leq m$.
- Ta sắp xếp thứ tự $q_1, q_2, \ldots, q_m$ lại sao cho $p_1 = q_1$, $p_2 = q_2, \ldots, p_n = q_n$. Khi ấy các số mũ thỏa:

$$r_1 \leq s_1, r_2 \leq s_2, \ldots, r_n \leq s_n$$

Chứng minh của khẳng định trên dựa trên cùng ý tưởng với chứng minh của Mệnh đề 3.6.7 nên được dành cho đọc giả.

Bây giờ giả sử $a$ và $b$ có phân tích như trong (3.6.3) và (3.6.4) với các số mũ nguyên dương. Bằng cách bổ sung thêm vào $a$ các thừa số là lũy thừa 0 của những số nguyên tố trong (3.6.4) không xuất hiện trong (3.6.3) và ngược lại, ta có thể giả sử $a, b$ có dạng:

$$a = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \dots p_n^{r_n}$$

$$b = p_1^{s_1} p_2^{s_2} \dots p_n^{s_n}$$

Với các số mũ lấy giá trị nguyên dương hay 0. Khi ấy do nhận xét trên ta có:

**Mệnh đề 3.6.8**:

$$\begin{array}{lll} & USCLN(a,b) & = p_1^{u_1} p_2^{u_2} \dots p_n^{u_n} \\ \text{và} & BSCNN(a,b) & = p_1^{v_1} p_2^{v_2} \dots p_n^{v_n} \\ \text{với} & u_i = \min(r_i, s_i) & \\ \text{và} & v_i = \max(r_i, s_i) & 1 \le i \le n \end{array}$$

**6.2 Dàn $\mathcal{U}_n$**

Nhắc lại rằng tập hợp $\mathcal{U}_n$ gồm các ước số dương của $n$ được sắp thứ tự bởi quan hệ: $a \prec b \Leftrightarrow a|b$ ($a$ là ước số của $b$)

Giả sử $a, b \in \mathcal{U}_n$. Khi ấy $d = USCLN(a,b) \in \mathcal{U}_n$.

Rõ ràng $d \prec a$ và $d \prec b$. Hơn nữa nếu $c \in \mathcal{U}_n$ sao cho $c \prec a$ và $c \prec b$ thì $c$ là ước số chung của $a, b$ nên theo Định lý 3.6.1 $c$ cũng là ước số của $d$, nghĩa là $c \prec d$.

Nói tóm lại $d$ chính là $\inf(a,b)$. Tương tự $BSCNN(a,b)$ là $\sup(a,b)$. Với ký hiệu $\wedge, \vee$ cho inf và sup ta có:

$$a \wedge b = USCLN(a,b)$$

$$a \vee b = BSCNN(a,b)$$

Như thế $\mathcal{U}_n$ là một dàn. Phần tử bé nhất là 1 và phần tử lớn nhất là $n$.

Hơn nữa nếu gọi $p_1, p_2, \dots, p_m$ là các ước số nguyên tố của $n$ thì ta có thể biểu diễn 1 phần tử bất kỳ của $\mathcal{U}_n$ dưới dạng (3.6.1) với số mũ thuộc N. Xét 3 phần tử tùy ý $a, b, c \in \mathcal{U}_n$ với biểu diễn như trên:

$$a = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \dots p_m^{r_m}$$

$$b = p_1^{s_1} p_2^{s_2} \dots p_m^{s_m}$$

$$c = p_1^{t_1} p_2^{t_2} \dots p_m^{t_m}$$

Khi ấy do Mệnh đề 3.6.8 số mũ của $p_i$ trong $a \wedge (b \vee c)$ là:

$$\min(r_i, \max(s_i, t_i)) = \max(\min(r_i, s_i), \min(r_i, t_i))$$

Như thế $\quad a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$
Tương tự $\quad a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$
Tóm lại ta đã chứng minh.

**Định lý 3.6.9**: *$\mathcal{U}_n$ là một dàn phân bố.*
Một số nguyên dương $n$ được nói là *không có thừa số chính phương* nếu $n$ không chia hết cho bình phương của bất kỳ số nguyên $> 1$ nào.

**Định lý 3.6.10**: *$\mathcal{U}_n$ là dàn bù khi và chỉ khi $n$ không có thừa số chính phương.*

**Chứng minh**: Giả sử $n$ không có thừa số chính phương và $a$ là một phần tử tùy ý của $\mathcal{U}_n$. Khi ấy $a$ và $\frac{n}{a}$ nguyên tố cùng nhau vì nếu không, bất kỳ ước số chung $> 1$ nào của chúng cũng đều có bình phương là ước của $n$. Như thế

$$a \wedge \frac{n}{a} = 1$$

Ngoài ra $\quad a \vee \frac{n}{a} = BSCNN\left(a, \frac{n}{a}\right) = a\frac{n}{a} = n$

Vậy $\frac{n}{a}$ chính là phần bù của $a$ và do đó $\mathcal{U}_n$ là một dàn bù.

Ngược lại giả sử $n$ chia hết cho bình phương của số nguyên $a > 1$. Gọi $\bar{a}$ là phần bù của $a$ trong $\mathcal{U}_n$. Ta có:

$$\begin{aligned} a \wedge \bar{a} &= 1 \\ a \vee \bar{a} &= n \end{aligned}$$

Mà $a \vee \bar{a} = \dfrac{a\bar{a}}{a \wedge \bar{a}} = a\bar{a}$

Suy ra $\bar{a} = \frac{n}{a}$. Nhưng $a$ rõ ràng là ước số chung của $a$ và $\frac{n}{a}$ nên $a \wedge \bar{a} \neq 1$. Điều mâu thuẫn này chứng tỏ $a$ không có phần bù và $\mathcal{U}_n$

không phải là một dàn bù. Thật ra trong chương 4 ta sẽ chứng minh rằng nếu có một thứ tự nào đó trên $\mathcal{U}_n$ để nó trở thành một dàn bù thì số phần tử của $\mathcal{U}_n$ phải là một lũy thừa của 2. Trong khi đó số ước số của $n$ là một lũy thừa của 2 thì trong phân tích của $n$ thành thừa số nguyên tố, các số mũ phải có dạng $2^\alpha - 1$ (Bài tập).

# Bài tập

**1.** Giả sử $A_1 = \{0,1,2,3,4\}$, $A_2 = \{1,3,7,12\}$, $A_3 = \{0,1,2,4,8,16,32\}$ và $A_4 = \{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$

a) Xét $\mathcal{R}_1 = \{(x,y,z,t) \in A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_4; xyzt = 0\}$. Hãy tính $|\mathcal{R}_1|$.

b) Xét $\mathcal{R}_2 = \{(x,y,z,t) \in A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_4; xyzt < 0\}$. Hãy tính $|\mathcal{R}_2|$.

**2.** Giả sử $A = \{1,2,3\}$, $B = \{2,4,5\}$.

a) Tính $|A \times B|$

b) Tìm số quan hệ giữa $A$ và $B$

c) Tìm số quan hệ hai ngôi trên $A$.

d) Tìm số quan hệ giữa $A$ và $B$ chứa $(1, 2)$, $(1, 5)$

e) Tìm số quan hệ giữa $A$ và $B$ chứa đúng 5 cặp có thứ tự.

f) Tìm số quan hệ hai ngôi trên $A$ chứa ít nhất 7 cặp có thứ tự.

**3.** Xét 2 tập hợp hữu hạn $A$ và $B$ sao cho $|B| = 3$. Tìm số phần tử của $A$ biết rằng có đúng 4096 quan hệ giữa $A$ và $B$.

**4.** Một quan hệ $\mathcal{R}$ giữa hai tập hợp $A$ và $B$ được nói là một hàm nếu với mọi $x \in A$ (t. ư $y \in B$), tồn tại duy nhất một phần tử $y \in B$ (t. ư $x \in A$) sao cho $(x,y) \in \mathcal{R}$. Khi ấy tương ứng $x \mapsto y$ (t. ư $y \mapsto x$) rõ ràng là một ánh xạ từ $A$ vào $B$ (t. ư $B$ vào $A$) như đã xét trong Chương 2. Trong các quan hệ dưới đây, hãy cho biết quan hệ nào là một hàm và tìm ánh xạ tương ứng

a) $\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbf{Z}^2 / y = x^2 + 7\}$

b) $\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 / y^2 = x\}$

c) $\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 / y = 3x + 1\}$

d) $\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbf{Q}^2 / x^2 + y^2 = 1\}$

e) $\mathcal{R} = \{(x,y) \in [0,1] \times [0,1] / x^2 + y^2 = 1\}$

**5.** Giả sử $A = B = \mathbf{R}$. Hãy tìm $\pi_A(\mathcal{R})$ và $\pi_B(\mathcal{R})$ cho các quan hệ $\mathcal{R}$ sau đây:

a) $\mathcal{R} = \{(x,y) \in A \times B; x = y^2\}$

b) $\mathcal{R} = \{(x,y) \in A \times B; y = \cos x\}$

c) $\mathcal{R} = \{(x, y) \in A \times B; x^2 + y^2 = 1\}$

**6.** Giả sử $A_1 = \{U, V, W, X, Y, Z\}$ (mã số của các loại ngũ cốc) $A_2 = A_3 = A_4 = A_5 = \mathbf{Z}^+$. Xét quan hệ $\mathcal{R}$ giữa các tập $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5$ cho bởi bảng dưới đây:

| Mã số | Lượng đường /đvtt | L. vitamin A /đvtt | L. vitamin C /đvtt | L. protéin /đvtt |
|---|---|---|---|---|
| U | 1 | 25 | 25 | 6 |
| V | 7 | 25 | 2 | 4 |
| W | 12 | 25 | 2 | 4 |
| X | 0 | 60 | 40 | 20 |
| Y | 3 | 25 | 40 | 10 |
| Z | 2 | 25 | 40 | 10 |

a) Hãy tìm quan hệ chiếu của $\mathcal{R}$ lên $A_3 \times A_4 \times A_5$

b) Một thuộc tính được nói là *khóa chính* của quan hệ $\mathcal{R}$ nếu giá trị của nó xác định duy nhất một bộ 5 thuộc $\mathcal{R}$. Hãy tìm các khóa chính của $\mathcal{R}$.

**7.** Giả sử $A_1 = \{1, 2\}, A_2 = \{A, D, E\}, A_3 = A_4 = A_5 = \mathbf{Z}^+$. Xét quan hệ $\mathcal{R}$ giữa $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5$ cho bởi bảng dưới đây:

| Loại viên Vitamin | Loại Vitamin trong viên | Lượng Vitamin trong viên | Liều lượng: số viên/ngày | Số viên trong chai |
|---|---|---|---|---|
| 1 | A | 10.000 | 1 | 100 |
| 1 | D | 400 | 1 | 100 |
| 1 | E | 30 | 1 | 100 |
| 2 | A | 4.000 | 1 | 250 |
| 2 | D | 400 | 1 | 250 |
| 2 | E | 15 | 1 | 250 |

a) Tìm quan hệ chiếu của $\mathcal{R}$ lên $A_1 \times A_2$ và $A_3 \times A_4 \times A_5$

b) Quan hệ này có khóa chính không?

c) Một *khóa chính phức hợp* là tích Descartes của một số tối tiểu thuộc tính sao cho nếu gọi $\mathcal{R}'$ là quan hệ chiếu của $\mathcal{R}$ lên tích Descartes đó, thì mỗi bộ trong $\mathcal{R}'$ sẽ là hình chiếu duy nhất của một bộ trong $\mathcal{R}$. Hãy xác định các khóa chính phức hợp của $\mathcal{R}$.

**8.** Hãy tìm một quan hệ trên $A = \{1, 2, 3, 4\}$ sao cho nó có tính chất:

a) Phản xạ và đối xứng nhưng không bắc cầu.
b) Phản xạ và bắc cầu nhưng không đối xứng.
c) Đối xứng và bắc cầu nhưng không phản xạ.

**9.** Trong số các quan hệ dưới đây, hãy cho biết quan hệ nào có tính phản xạ, đối xứng, phản xứng, bắc cầu:

a) $C$ là một tập con cố định của $E$, xét quan hệ $\mathcal{R}$ trên $\mathcal{P}(E)$: $A\mathcal{R}B \Leftrightarrow A \cap C = B \cap C$

b) Quan hệ $\mathcal{R}$ trên $Z$: $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x + y$ chẵn

c) Quan hệ $\mathcal{R}$ trên $Z$: $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x - y$ lẻ

d) Quan hệ $\mathcal{R}$ trên $Z \times Z$: $(a, b)\mathcal{R}(c, d) \Leftrightarrow a \leq c$

e) Quan hệ $\mathcal{R}$ trên $Z$: $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^2 + y^2$ chẵn

f) Quan hệ $\mathcal{R}$ trên $R$: $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow |x| = |y|$

g) Quan hệ $\mathcal{R}$ trên $R$: $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \sin^2 x + \cos^2 y = 1$

**10.** $\mathcal{R}$ là một quan hệ trên tập hợp $A$ với $n$ phần tử. Cho biết các khẳng định dưới đây đúng hay sai. Nếu sai, chỉ ra một phản ví dụ:

a) Nếu $\mathcal{R}$ phản xạ thì $|\mathcal{R}| \geq n$

b) Nếu $|\mathcal{R}| \geq n$ thì $\mathcal{R}$ phản xạ

c) Nếu $\mathcal{R}_1$ và $\mathcal{R}_2$ là 2 quan hệ trên $A$ sao cho $\mathcal{R}_2 \supset \mathcal{R}_1$ và $\mathcal{R}_1$ phản xạ thì $\mathcal{R}_2$ phản xạ

d) Kết luận tương tự như c) cho tính đối xứng, phản xứng và bắc cầu.

e) Nếu $\mathcal{R}_1$ và $\mathcal{R}_2$ là 2 quan hệ trên $A$ sao cho $\mathcal{R}_2 \supset \mathcal{R}_1$ và $\mathcal{R}_2$ phản xạ thì $\mathcal{R}_1$ phản xạ

f) Kết luận tương tự như e) cho tính đối xứng, phản xứng và bắc cầu.

**11.** Giả sử $\mathcal{R}$ là một quan hệ trên $A$, *quan hệ đối ngẫu* của $\mathcal{R}$ được định nghĩa bởi:

$$x\mathcal{R}^*y \Leftrightarrow y\mathcal{R}x$$

a) Quan hệ đối ngẫu của $\mathcal{R}^*$ là gì?

b) Có thể nói gì về $\mathcal{R}$ nếu $\mathcal{R} = \mathcal{R}^*$

c) Nếu $\mathcal{R}$ bắc cầu thì $\mathcal{R}^*$ có bắc cầu không? Câu hỏi tương tự cho tính đối xứng, phản xứng.

**12.** $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Xác định số các quan hệ trên $A$ có tính chất:

a) phản xạ

b) đối xứng

c) phản xạ và đối xứng

d) phản xứng

e) đối xứng và phản xứng

f) phản xạ, đối xứng và phản xứng.

**13.** Giả sử $|A| = n$ và $\mathcal{R}$ là tập hợp con tối đại của $A \times A$ sao cho $\mathcal{R}$ là một quan hệ phản xứng. Tìm số phần tử của $\mathcal{R}$. Có bao nhiêu quan hệ $\mathcal{R}$ thỏa điều kiện trên?

**14.** $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\mathcal{R} = \{$ (1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,3), (4,4), (4,5), (5,4), (5,5), (6,6)$\}$.

a) Kiểm tra lại $\mathcal{R}$ là một quan hệ tương đương

b) Tìm các lớp tương đương [1], [2], [3].

c) Tìm phân hoạch của $A$ thành các lớp tương đương.

**15.** $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Tìm quan hệ tương đương $\mathcal{R}$ trên $A$ sao cho phân hoạch của $A$ thành các lớp tương đương có dạng:

$$A = \{1, 2\} \cup \{3, 4\} \cup \{5\}$$

**16.** $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A_1 = \{1, 2\}$, $A_2 = \{2, 3, 4\}$, $A_3 = \{5\}$. Định nghĩa quan hệ $\mathcal{R}$ trên $A$ như sau:

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \exists i : 1 \leq i \leq 3 \text{ và } x, y \in A_i$$

$\mathcal{R}$ có phải là quan hệ tương đương không?

**17.** Xét quan hệ $\mathcal{R}$ trên $A = \mathbf{R}^2$ sao cho:

$$(x, y)\mathcal{R}(z, t) \Leftrightarrow x = z$$

a) Kiểm tra lại $\mathcal{R}$ là một quan hệ tương đương

b) Chỉ ra các lớp tương đương và cho biết ý nghĩa hình học.

**18.** $A = \{1,2,3,4,5\} \times \{1,2,3,4,5\}$ và $\mathcal{R}$ là quan hệ trên $A$ sao cho:

$$(a,b)\mathcal{R}(c,d) \Leftrightarrow a+b=c+d$$

a) Kiểm tra lại $\mathcal{R}$ là một quan hệ tương đương

b) Xác định các lớp tương đương [(1,3)], [(2,4)] và [(1,1)]

c) Chỉ ra phân hoạch của $A$ thành các lớp tương đương.

**19.** a) Quan hệ $\mathcal{R}$ trong 9a) có phải tương đương không?

b) Với $E = \{1,2,3\}$ và $C = \{1,2\}$. Tìm phân hoạch của $\mathcal{P}(E)$ thành các lớp tương đương.

c) Với $E = \{1,2,3,4,5\}$ và $C = \{1,2,3\}$. Tìm lớp tương đương $[\{1,3,5\}]$. Có bao nhiêu lớp tương đương khác nhau?

**20.** Quan hệ $\mathcal{R}$ trên $\mathbf{Z}^+$ được định nghĩa bởi:

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \exists n \in \mathbf{Z} : x = y2^n$$

a) Kiểm tra lại $\mathcal{R}$ là một quan hệ tương đương

b) Trong số các lớp tương đương [1], [2], [3], [4], có bao nhiêu lớp đôi một phân biệt?

c) Câu hỏi tương tự như b) cho các lớp [6], [7], [21], [24], [25], [35], [42] và [48].

**21.** Có bao nhiêu quan hệ tương đương trên $A = \{a,b,c,d,e,f\}$ sao cho:

a) Có đúng hai lớp tương đương với 3 phần tử

b) Có một lớp tương đương với 3 phần tử

c) Có một lớp tương đương với 4 phần tử

d) Có ít nhất một lớp tương đương với $\geq 3$ phần tử.

**22.** Xét 1 ánh xạ $f: A \to B$. Định nghĩa quan hệ $\mathcal{R}$ trên $A$ như sau:

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$$

a) Chứng minh rằng $\mathcal{R}$ là một quan hệ tương đương.

b) Xác định các lớp tương đương.

**23.** $|A| = 30$ và $\mathcal{R}$ là một quan hệ tương đương trên $A$ sao cho $A$ được phân hoạch thành 3 lớp tương đương $A_1, A_2, A_3$ với cùng số phần tử. Hãy xác định $\mathcal{R}$.

**24.** $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Hãy tìm một quan hệ tương đương $\mathcal{R}$ trên $A$ sao cho $|\mathcal{R}|$ có các giá trị: 6, 7, 8, 9, 11, 22, 23, 30, 31.

**25.** Vẽ biểu đồ Hasse cho tập hợp sắp thứ tự $(\mathcal{P}(E), \subset)$ trong đó $E = \{1, 2, 3, 4\}$.

**26.** Xét 2 tập hợp sắp thứ tự $(A, \prec_A)$ và $(B, \prec_B)$. Với $(a_1, b_1)$, $(a_2, b_2) \in A \times B$ định nghĩa:

$$(a_1, b_1) \prec (a_2, b_2) \Leftrightarrow (a_1 \prec_A a_2) \wedge (b_1 \prec_B b_2)$$

a) Chứng minh rằng quan hệ trên là một thứ tự

b) Nếu $\prec_A$ và $\prec_B$ là thứ tự toàn phần thì $\prec$ có là thứ tự toàn phần không?

**27.** Cho trước hai tập hợp $E, B$ và $\prec_B$ là một thứ tự trên $B$. Ta định nghĩa quan hệ $\prec$ trên $B^E$ như sau:

$$f \prec g \Leftrightarrow \forall x \in E,\ f(x) \prec_B g(x)$$

a) Chứng minh rằng $\prec$ là một thứ tự trên $B^E$.

b) Nếu $(B, \prec_B)$ là một dàn, chứng minh rằng $(B^E, \prec)$ là một dàn.

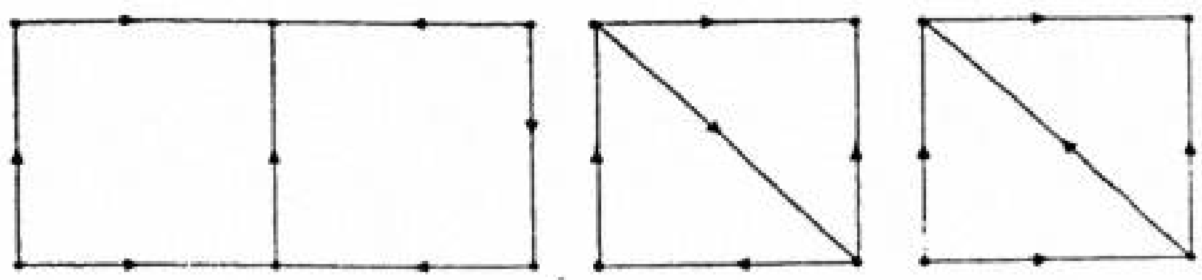
**28.** Giả sử $\mathcal{R}$ là một quan hệ bắc cầu trên $A$. Gọi $\mathcal{R}^*$ là quan hệ đối ngẫu của $\mathcal{R}$ như trong bài tập 11. Chứng minh rằng $\mathcal{R}$ là một thứ tự khi và chỉ khi

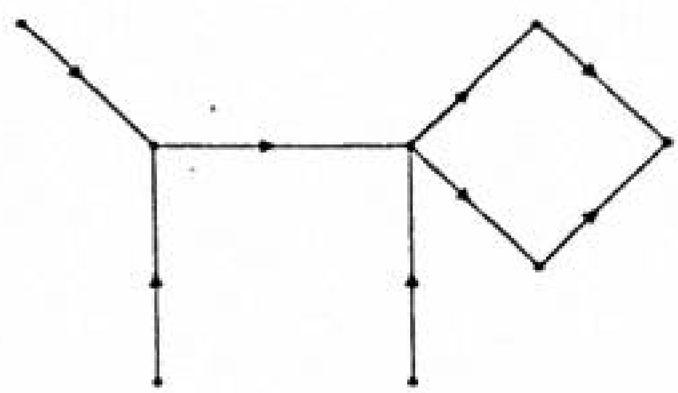
$$\mathcal{R} \cap \mathcal{R}^* = \Delta_A = \{(a, a)/a \in A\}$$

**29.** Chứng minh rằng thứ tự tự điển trên tập hợp $S$ các chuỗi ký tự thật sự là một thứ tự. Hơn nữa $S$ được sắp thứ tự toàn phần bởi quan hệ trên.

**30.** Giả sử $\prec$ là một thứ tự không toàn phần trên $A$, và $B$ là một tập hợp con khác $\emptyset$ của $A$. Khi ấy thứ tự cảm sinh trên $B$ bởi $\prec$ có nhất thiết là thứ tự không toàn phần không?

**31.** Trong các biểu đồ sau, cái nào là biểu đồ Hasse của một tập hợp sắp thứ tự?





**32.** Có bao nhiêu thứ tự trên tập $A$ dưới đây để cho $x$ là một phần tử tối tiểu?

a) $A = \{x, y\}$

b) $A = \{x, y, z\}$.

**33.** Giả sử $A = \mathcal{P}(E)$ với $E = \{1, 2, 3\}$. Trong tập hợp $A$ với thứ tự bao hàm, hãy tìm sup và inf của tập hợp con $B \subset A$ dưới đây:

a) $B = \{\{1\}, \{2\}\}$

b) $B = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}\}$

c) $B = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$

d) $B = \{\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$

e) $B = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$

f) $B = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$

**34.** Giả sử $A = \mathcal{P}(E)$ với thứ tự bao hàm trong đó $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Xét $B = \{\{1\}, \{2\}, \{2, 3\}\}$. Hãy cho biết:

a) Số chặn trên của $B$ bao gồm $3, 4, 5$ phần tử của $E$

b) Số tất cả chặn trên của $B$

c) sup $B$

d) Số tất cả chặn dưới của $B$

e) $\inf B$

**35.** Giả sử $(A, \prec)$ là một tập hợp sắp thứ tự. Cho biết các khẳng định dưới đây đúng hay sai? Tại sao?

a) Nếu $(A, \prec)$ là một dàn thì $\prec$ là thứ tự toàn phần

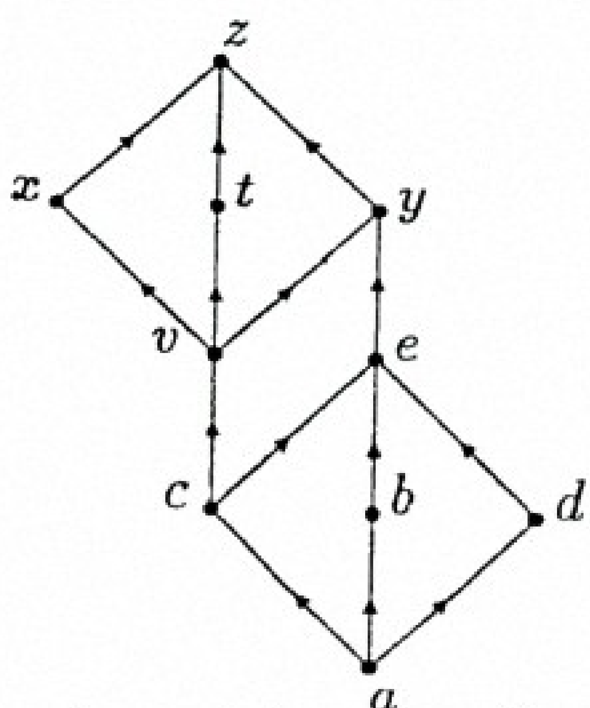
b) Nếu $\prec$ là thứ tự toàn phần thì $(A, \prec)$ là một dàn?

**36.** Giả sử $(A, \prec)$ là một dàn và $m$ là một phần tử tối đại của $A$. Khi ấy $m$ là phần tử lớn nhất. Kết luận tương tự cho phần tử tối tiểu.

**37.** Giả sử $A = \{a, b, c, d, e, x, y, z, t, v\}$ với thứ tự xác định bởi biểu đồ Hasse dưới đây. Hãy tính:

a) $\inf\{b, c\}$ b) $\inf\{b, t\}$ c) $\inf\{e, x\}$

d) $\sup\{c, b\}$ e) $\sup\{d, x\}$ f) $\sup\{c, e\}$ g) $\sup\{a, v\}$




**38.** Với $(A, \prec)$ như trong bài tập 37.

a) $A$ có phần tử lớn nhất và bé nhất không?

b) $(A, \prec)$ có là một dàn không?

**39.** Trên tập hợp $\mathcal{M}$ các dạng mệnh đề với thứ tự "có hệ quả logic là" ($\Rightarrow$), chứng minh rằng sup và inf của một tập hợp con hữu hạn $\mathcal{E} = \{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$ chính là các dạng mệnh đề $E_1 \vee E_2 \vee \ldots \vee E_n$

(nối rời) và $E_1 \wedge E_2 \wedge \ldots \wedge E_n$ (nối liền).

**40.** Một tập hợp thứ tự $\prec$ trên tập hợp $A$ được nói là *thứ tự tốt* nếu mọi tập hợp con khác $\emptyset$ của $A$ đều có phần tử bé nhất. Khi ấy ta nói $(A, \prec)$ được sắp tốt.

a) Chứng minh rằng mọi thứ tự tốt đều là toàn phần. Điều ngược lại có đúng không?

b) Chứng minh rằng mọi tập hợp sắp thứ tự tốt có phần tử bé nhất.

c) Cho ví dụ của một tập hợp sắp tốt không có phần tử lớn nhất, và ví dụ của một tập hợp sắp tốt có phần tử lớn nhất.

**41.** Trong các tập hợp sắp thứ tự dưới đây, cho biết tập hợp nào sắp thứ tự tốt:

a) $(\mathbf{N}, \leq)$

b) $(\mathbf{Z}, \leq)$

c) $(\mathbf{Q}, \leq)$

d) $(\mathbf{Q}^+, \leq)$

e) $(P, \leq)$ trong đó $P$ là tập hợp các số nguyên tố

f) $(A, \leq)$ trong đó $A \neq \emptyset$ là một tập con hữu hạn của $\mathbf{Z}$

g) $(\mathcal{S}, \prec)$ trong đó $\mathcal{S}$ là tập hợp các chuỗi ký tự trên một tập hợp mẫu tự $\mathcal{A}$ sắp thứ tự toàn phần và $\prec$ là thứ tự tự điển.

**42.** Giả sử $(A, \prec)$ là một tập hợp sắp thứ tự tốt không có phần tử tối đại.

a) Chứng minh rằng mỗi phần tử $x$ đều có trội trực tiếp duy nhất $s(x)$

b) Chứng minh rằng ánh xạ $s : A \to A$ là đơn ánh. Ánh xạ này có toàn ánh không?

c) Giả sử $s(A)$ bằng $A$ trừ đi một điểm. Chứng minh rằng $(A, \prec)$ đẳng cấu với $(\mathbf{N}, \leq)$

**43.** Tìm ước số chung lớn nhất của các cặp số sau:

a) 43, 16

b) 442, 276

c) 6234, 3312

d) 87657, 44441

e) 654321, 123456

**44.** a) Phân tích 2 số sau ra thừa số nguyên tố: 148.500 và 7.114.800

b) Hãy tìm USCLN và BSCNN của chúng

**45.** Giả sử số $m$ có phân tích ra thừa số nguyên tố:

$$m = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \dots p_n^{r_n}$$

Hãy tìm phân tích ra thừa số nguyên tố của $m^2$ và $m^3$

**46.** Hãy tìm phân tích ra thừa số nguyên tố của 8!, 10!, 12! và 15!

**47.** a) Hãy tìm các ước số dương của $2^3\ 5^2\ 7^4$

b) Giả sử $m$ có phân tích ra thừa số nguyên tố

$$m = p_1^{r_1} p_2^{r_2} p_3^{r_3}$$

Tìm số các ước số dương của $m$

c) Tổng quát hóa kết quả trên cho trường hợp có nhiều hơn 3 ước số nguyên tố.

d) Suy ra nếu số các ước số dương của $m$ là lũy thừa của 2 thì trong phân tích của $m$ thành thừa số nguyên tố, các số mũ đều có dạng $2^\alpha - 1,\ \alpha \in \boldsymbol{Z}^+$

**48.** a) Số $m = 2^{14}3^9 5^8 7^{10} 11^3 13^5 37^{10}$ có bao nhiêu ước số?

b) Có bao nhiêu ước số dương của $m$ chia hết cho $2^3 3^4 5^7 11^2 37^2$?

c) Có bao nhiêu ước số dương của $m$ chia hết cho 1.166.400.000.

**49.** Có 200 đồng xu được đánh số từ 1 đến 200 đặt thành một hàng ngang trên bàn và 200 sinh viên cũng được đánh số từ 1 đến 200. Sinh viên thứ nhất sẽ lật ngược tất cả các đồng xu lại. Tiếp theo sinh viên thứ hai lật ngược đồng xu thứ 2, 4, 6,... Sinh viên thứ $n, 1 \leq n \leq 200$, lật ngược đồng xu thứ $n, 2n, 3n, \dots$

a) Hỏi đồng xu thứ 200 bị lật ngược bao nhiêu lần?

b) Có đồng xu nào có số lần bị lật ngược như đồng xu thứ 200 không?

**50.** Hãy viết một chương trình máy tính cho phép phân tích số nguyên $n > 1$ ra thừa số nguyên tố.

**51.** Tìm số nguyên dương $n$ có đúng:
a) hai ước số dương b) ba ước số dương
c) bốn ước số dương d) năm ước số dương.

**52.** Cho 2 số nguyên dương $a, b$.

a) Giả sử $(a, b) = 1$. Hãy tìm tất cả các lời giải (nghĩa là các cặp $(x, y)$) của phương trình $xa = yb$.

b) Câu hỏi tương tự nhưng không giả thiết $a, b$ nguyên tố cùng nhau.

c) Hãy tìm số các cặp số nguyên $x, y$ thỏa:

$$xa + yb = USCLN(a, b)$$

**53.** Hãy tìm các cặp $(x, y)$ thỏa hệ thức:
$xa + yb = USCLN(a, b)$ trong các trường hợp sau:
a) $a = 46, \quad b = 16$
b) $a = 124, \quad b = 64$
c) $a = 3450, \quad b = 331$

**54.** Cho trước số nguyên $n > 1$. Ta nói $a \in \boldsymbol{Z}$ khả nghịch (mod $n$) nếu tồn tại $a' \in \boldsymbol{Z}$ sao cho: $aa' \equiv 1 \pmod{n}$.

a) Chứng minh rằng nếu $a$ khả nghịch (mod $n$) thì phương trình đồng dư $ax \equiv b \pmod{n}$ có nghiệm duy nhất trong $\boldsymbol{Z}_n$.

b) Nếu $a$ không khả nghịch mod $n$ thì sao?

**55.** Hãy giải các hệ thức đồng dư dưới đây (tìm tất cả các số $x$ đồng dư):

a) $3x \equiv 7 \pmod{16}$ b) $5x + 7 \equiv 6 \pmod{23}$
c) $4x + 3 \equiv 7x + 12 \pmod{11}$ d) $3x + 9 \equiv 8x + 61 \pmod{64}$

# Chương 4

# ĐẠI SỐ BOOL VÀ HÀM BOOL

## §1 Đại số Bool

**Định nghĩa 4.1.1**: một *đại số Bool* là tập hợp $\mathcal{A}$ cùng với hai phép tính (hai ngôi) $\vee$ và $\wedge$ thỏa mãn các tính chất sau:

i) *Tính kết hợp*: với mọi $x, y, z \in \mathcal{A}$:

$$\begin{aligned} x \vee (y \vee z) &= (x \vee y) \vee z \\ \text{và} \quad x \wedge (y \wedge z) &= (x \wedge y) \wedge z \end{aligned}$$

ii) *Tính giao hoán*: với mọi $x, y, z \in \mathcal{A}$:

$$\begin{aligned} x \vee y &= y \vee x \\ \text{và} \quad x \wedge y &= y \wedge x \end{aligned}$$

iii) *Tính phân bố*: với mọi $x, y, z \in \mathcal{A}$:

$$\begin{aligned} x \vee (y \wedge z) &= (x \vee y) \wedge (x \vee z) \\ \text{và} \quad x \wedge (y \vee z) &= (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \end{aligned}$$

iv) *Phần tử trung hòa*: tồn tại hai phần tử trung hòa 0,1 đối với hai phép toán $\vee$, $\wedge$ sao cho với mọi $x \in \mathcal{A}$ ta có:

$$\begin{aligned} x \vee 0 &= x \\ \text{và} \quad x \wedge 1 &= x \end{aligned}$$

v) *Phần tử bù*: với mọi $x \in \mathcal{A}$, tồn tại $\bar{x} \in \mathcal{A}$ sao cho:

$$\begin{aligned} x \vee \bar{x} &= 1 \\ \text{và} \quad x \wedge \bar{x} &= 0 \end{aligned}$$

**Ví dụ:**

1. Một dàn bù phân bố là một đại số Bool với hai phép tính $\vee$, $\wedge$ chính là sup và inf của hai phần tử. Đặc biệt $\mathcal{P}(E)$ là một đại số Bool đối với các phép tính tập hợp $\cup$ và $\cap$. Cũng thế $\mathcal{M}$ cũng là một đại số Bool đối với phép nối rời $\vee$ và phép nối liền $\wedge$ của hai dạng mệnh

đề. Do 30 không chia hết cho chính phương, $\mathcal{U}_{30}$ là dàn bù phân bố và do đó là một đại số Bool đối với các phép toán:

$$x \vee y = \text{BSCNN}(x, y)$$
$$\text{và} \quad x \wedge y = \text{USCLN}(x, y)$$

2. Tập hợp $B = \{0, 1\}$ là một đại số Bool đối với các phép toán:

$$x \wedge y = xy$$
$$x \vee y = x + y - xy$$

Phần bù của $x$ chính là $\bar{x} = 1 - x$.

Đại số Bool này đóng vai trò quan trọng trong lý thuyết về các *hàm Bool*.

**Chú ý**: phần bù $\bar{x}$ của một phần tử $x$ là duy nhất và hơn nữa ta có Qui tắc De Morgan (Bài tập).

$$\overline{x \vee y} = \bar{x} \wedge \bar{y}$$
$$\text{và} \quad \overline{x \wedge y} = \bar{x} \vee \bar{y}$$

Trong các ví dụ trên, các phép toán đại số Bool được định nghĩa còn tự nhiên hơn cấu trúc thứ tự của dàn bù phân bố. Vấn đề được đặt ra là liệu có thể suy cấu trúc của dàn bù phân bố từ cấu trúc của đại số Bool không? Định lý sau đây là câu trả lời cho câu hỏi trên.

**Định lý 4.1.1**: *trong đại số Bool $\mathcal{A}$, định nghĩa quan hệ:*

$$x \prec y \Leftrightarrow x \wedge y = x$$

*Khi ấy $\prec$ là một thứ tự trên $\mathcal{A}$ sao cho $\mathcal{A}$ là một dàn bù phân bố đối với thứ tự này. Hơn nữa, với $x$ và $y \in \mathcal{A}$ ta có:*

$$\sup(x, y) = x \vee y$$
$$\inf(x, y) = x \wedge y$$

**Chứng minh**: Trước hết ta kiểm tra $\prec$ là một thứ tự trên $\mathcal{A}$. Với mọi $x \in \mathcal{A}$ ta có:

$$\begin{aligned} x \wedge x &= (x \wedge x) \vee 0 \\ &= (x \wedge x) \vee (x \wedge \bar{x}) \\ &= x \wedge (x \vee \bar{x}) \\ &= x \wedge 1 = x \end{aligned} \tag{4.1.1}$$

nghĩa là $x \prec x$
Mặt khác với $x, y \in \mathcal{A}$ sao cho $x \prec y$ và $y \prec x$ ta có:

$$x \wedge y = x \text{ và } y \wedge x = y$$

Do tính giao hoán của $\wedge$ ta có $x = y$
Với $x, y, z \in \mathcal{A}$ sao cho $x \prec y$ và $y \prec z$ ta có:

$$x \wedge y = x \text{ và } y \wedge z = y$$

Suy ra

$$\begin{aligned} x \wedge z &= (x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z) \\ &= x \wedge y = x \end{aligned}$$

nghĩa là $x \prec z$
Tóm lại $\prec$ là một thứ tự trên $\mathcal{A}$.
Với $x, y \in \mathcal{A}$ tùy ý, ta có

$$(x \wedge y) \wedge x = (x \wedge x) \wedge y$$

Nhưng $x \wedge x = x$ (do 4.1.1)
nên $(x \wedge y) \wedge x = x \wedge y$
nghĩa là $x \wedge y \prec x$
Tương tự $x \wedge y = y \wedge x \prec y$
Như thế $x \wedge y$ là chặn dưới chung của $x, y$
Gọi $z$ là một chặn dưới chung bất kỳ của $x, y$. Ta có

$$z \wedge x = z \text{ và } z \wedge y = z$$

Do đó $z \wedge (x \wedge y) = (z \wedge x) \wedge y = z \wedge y = z$
nghĩa là $z \prec x \wedge y$
Như thế $x \wedge y = \inf(x, y)$

Bây giờ do iv) của Định nghĩa 4.1.1, 1 chính là phần tử lớn nhất. Mặt khác, với $x \in \mathcal{A}$ tùy ý:

$$\begin{aligned} 0 \wedge x &= (0 \wedge x) \vee 0 \\ &= (0 \wedge x) \vee (\bar{x} \wedge x) \\ &= (0 \vee \bar{x}) \wedge x \\ &= \bar{x} \wedge x = 0 \end{aligned}$$

nghĩa là 0 là phần tử bé nhất của $\mathcal{A}$.
Sau cùng với moi $x, y \in \mathcal{A}$, ta có:

$$\begin{array}{lll} & x \wedge (x \vee y) & = & (x \vee 0) \wedge (x \vee y) \\ & \emptyset & = & x \vee (0 \wedge y) \\ \text{Mà} & 0 \wedge y & = & 0 \text{ (do 4.1.2)} \\ \text{nên} & x \wedge (x \vee y) & = & x \vee 0 = x \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} \text{nghĩa là} & x & \prec & x \vee y \\ \text{Tương tự} & y & \prec & y \vee x = x \vee y \end{array}$$

Gọi $z$ là một chặn trên chung của $x, y$. Ta có:

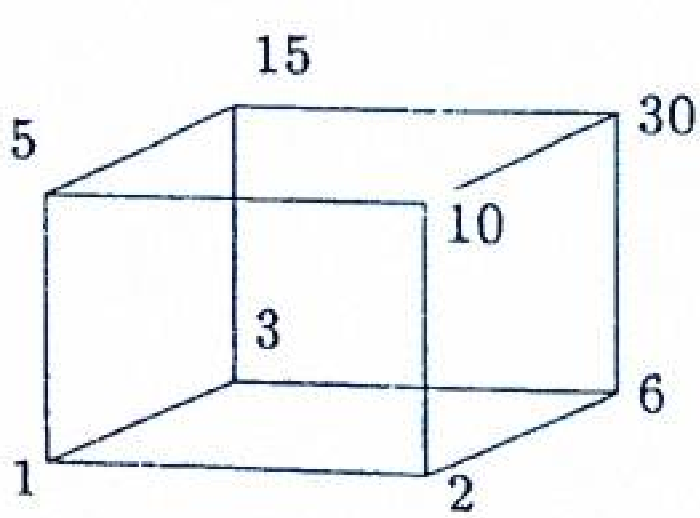
$$\begin{aligned} (x \vee y) \wedge z &= (x \wedge z) \vee (y \wedge z) \\ &= x \vee y \end{aligned}$$

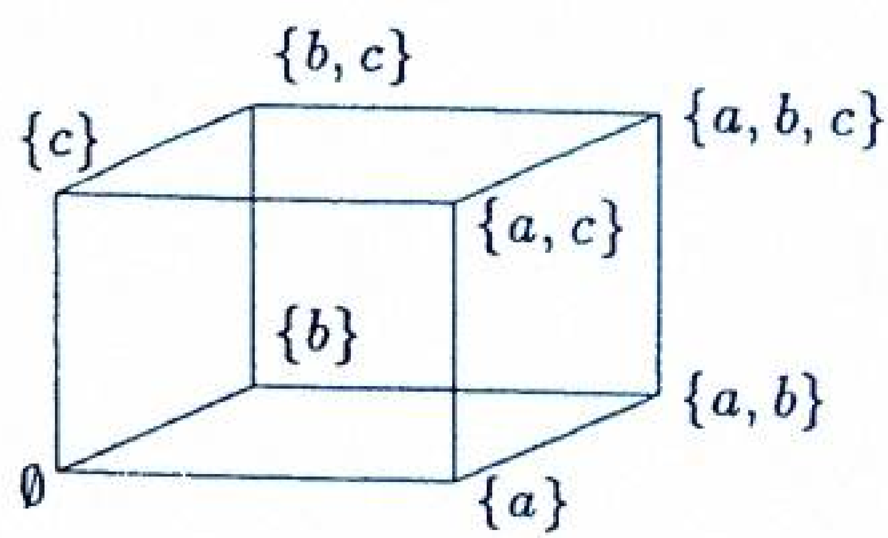
$$\begin{array}{llll} \text{nghĩa là} & x \vee y & \prec & z \\ \text{Như thế} & x \vee y & = & \sup(x, y) \end{array}$$

Tóm lại $\mathcal{A}$ là một dàn phân bố với phần tử lớn nhất và bé nhất là 1,0. Hơn nữa do v) của Định nghĩa 4.1.1 $\bar{x}$ chính là phần bù của $x$

•đpcm

Do Định lý 4.1.1, mỗi đại số Bool *hữu hạn* được liên kết với một biểu đồ Hasse. Ta hãy quan sát hai đại số Bool $\mathcal{U}_{30}$ và $\mathcal{P}(\{a, b, c\})$. Tuy được định nghĩa khác nhau, các đại số Bool này có hai biểu đồ Hasse "đồng dạng"



Từ hai biểu đồ trên, ta có thể xây dựng được 1 song ánh $\varphi$ giữa $\mathcal{U}_{30}$ và $\mathcal{P}(\{a,b,c\})$ sao cho các đỉnh tương ứng với nhau $1 \longmapsto \emptyset$, $2 \longmapsto \{a\}$, $3 \longmapsto \{b\}$,... và hai đỉnh được nối bởi một cạnh của $\mathcal{U}_{30}$ sẽ tương ứng với hai đỉnh được nối với một cạnh của $\mathcal{P}(\{a,b,c\})$. Nói cách khác ta có một đẳng cấu giữa các tập hợp có thứ tự. Do Định lý 3.4.1 sup và inf của hai phần tử $x, y$ trong $\mathcal{U}_{30}$ tương ứng với sup, inf của $\varphi(x)$, $\varphi(y)$. Nói cách khác $\varphi$ là một đẳng cấu giữa các đại số Bool theo nghĩa sau đây:

**Định nghĩa 4.1.2**: một *đẳng cấu* giữa hai đại số Bool $\mathcal{A}$ và $\mathcal{B}$ là một song ánh $\varphi : \mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B}$ sao cho với mọi $x, y \in \mathcal{A}$ ta có:

$$\begin{array}{rrcl} & \varphi(x \vee y) & = & \varphi(x) \vee \varphi(y) \\ \text{và} & \varphi(x \wedge y) & = & \varphi(x) \wedge \varphi(y) \end{array}$$

**Mệnh đề 4.1.2**: nếu $\varphi : \mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B}$ là một đẳng cấu đại số Bool thì $\varphi$ cũng là đẳng cấu tập hợp có thứ tự với những thứ tự trên $\mathcal{A}$ và $\mathcal{B}$ xác định bởi Định lý 4.1.1. Đặc biệt nếu $0, 1$ là phần tử trung hòa của $\vee, \wedge$ trong $\mathcal{B}$ thì $\varphi(0), \varphi(1)$ là phần tử trung hòa của $\vee, \wedge$ trong $\mathcal{B}$.

**Chứng minh**: Giả sử $x, y$ là hai phần tử trong $\mathcal{A}$ sao cho $x \prec y$. Khi ấy ta có:

$$\begin{array}{rcl} x \wedge y = x & \Rightarrow & \varphi(x) \wedge \varphi(y) = \varphi(x) \\ & \Rightarrow & \varphi(x) \prec \varphi(y) \end{array}$$

Do 0 và 1 cũng là phần tử bé nhất và lớn nhất của $\mathcal{A}$, ta thấy $\varphi(0)$ và $\varphi(1)$ cũng là phần tử bé nhất và lớn nhất của $\mathcal{B}$, nghĩa là phần tử trung hòa đối với các phép toán $\vee$ và $\wedge$ trong $\mathcal{B}$

**• đpcm**

Trở lại hai đại số Bool $\mathcal{U}_{30}$ và $\mathcal{P}(\{a,b,c\})$. Sự đẳng cấu của chúng không phải là trường hợp cá biệt. Ta có:

**Định lý 4.1.3 (Stone)**: *một đại số Bool hữu hạn $\mathcal{A}$ luôn luôn đẳng cấu với $\mathcal{P}(E)$, trong đó $E$ là một tập hợp hữu hạn.*

**Hệ quả 1**: số phần tử của một đại số Bool hữu hạn là một lũy thừa của 2.

**Hệ quả 2**: Hai đại số Bool hữu hạn có cùng số phần tử thì đẳng cấu với nhau.

**Chứng minh**: Thật vậy hai đại số Bool cho trước sẽ đẳng cấu với $\mathcal{P}(E_1)$ và $\mathcal{P}(E_2)$. Do chúng có cùng số phân tử ta có:

$$2^{|E_1|} = 2^{|E_2|}$$

Suy ra $|E_1| = |E_2|$

Khi ấy nếu $f$ là một song ánh giữa $E_1$ và $E_2$ thì $f$ sẽ cảm sinh một đẳng cấu giữa $\mathcal{P}(E_1)$ và $\mathcal{P}(E_2)$ như sau:

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{P}(E_1) &\to \mathcal{P}(E_2) \\ A &\longmapsto f(A) \end{aligned}$$

Khi ấy ta có: $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

nghĩa là $\varphi(A \vee B) = \varphi(A) \vee \varphi(B)$

Hơn nữa do $f$ là song ánh ta cũng có:

$$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$$

nghĩa là $\varphi(A \wedge B) = \varphi(A) \wedge \varphi(B)$

• đpcm

Bây giờ để chứng minh Định lý Stone ta cần tìm tập hợp $E$. Để ý rằng ta có một đơn ánh:

$$\begin{aligned} f: \quad E &\to \mathcal{P}(E) \\ x &\longmapsto \{x\} \end{aligned}$$

Hơn nữa trong $\mathcal{P}(E)$, các tập hợp $\{x\}$ chính là các trội trực tiếp của $\emptyset$. Từ đó ta có:

**Định nghĩa 4.1.3**: trong một đại số Bool $\mathcal{A}$, một trội trực tiếp của phần tử bé nhất được gọi là *một nguyên tử* của $\mathcal{A}$.

**Bổ đề 4.1.4**: Giả sử $\mathcal{A}$ là một đại số Bool hữu hạn với phần tử bé nhất 0. Khi ấy mọi phần tử $x \neq 0$ đều có thể viết dưới dạng:

$$x = a_1 \vee a_2 \vee \ldots \vee a_n$$

trong đó $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ là tập hợp các nguyên tử trội bởi $x$. Hơn nữa nếu $b_1, b_2, \ldots, b_m$ là các nguyên tử sao cho:

$$x = b_1 \vee b_2 \vee \ldots \vee b_m$$

thì $\{b_1, b_2, \ldots, b_m\} = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$

<u>Chứng minh</u>: Trước hết $\mathcal{A}\backslash\{0\}$ là một tập hợp sắp thứ tự hữu hạn chứa $x(\neq 0)$ nên tồn tại một phần tử tối tiểu $a \prec x$. Rõ ràng $a$ là một nguyên tử của $\mathcal{A}$. Nói cách khác tập hợp $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ các nguyên tử trội bởi $x$ là không $\emptyset$.

Đặt $y = a_1 \vee a_2 \vee \ldots \vee a_n$

Rõ ràng $y \prec x$.

Ta có: $x \;=\; x \wedge (y \vee \bar{y}) = (x \wedge y) \vee (x \wedge \bar{y})$
$\;=\; y \vee (x \wedge \bar{y})$

Giả sử $x \wedge \bar{y} \neq 0$

Khi ấy theo trên tồn tại một nguyên tử $a \prec x \wedge \bar{y}$. Như thế $a = a_i$ với $1 \leq i \leq n$ nào đó.

Đặt $b = a_1 \vee a_2 \vee \ldots \vee a_{i-1} \vee a_{i+1} \vee \ldots \vee a_n$

Ta có: $y = a \vee b$

Do đó: $\bar{y} = \bar{a} \wedge \bar{b}$

Suy ra $a = a \wedge \bar{y} = a \wedge \bar{a} \wedge \bar{b} = 0$: mâu thuẫn.

Như thế $\quad x \wedge \bar{y} = 0$

nghĩa là $\quad x = y$

Sau cùng giả sử $b_1, b_2, \ldots, b_m$ là các nguyên tử trội bởi $x$ sao cho

$$x = b_1 \vee b_2 \vee \ldots \vee b_m$$

Ta có: $\{b_1, b_2, \ldots, b_m\} \subset \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$

Mặt khác với mỗi $j$ cố định, $1 \leq j \leq n$ ta có:

$$a_j = a_j \wedge x = (a_j \wedge b_1) \vee (a_j \wedge b_2) \vee \ldots \vee (a_j \wedge b_m)$$

Suy ra tồn tại $k$ sao cho $1 \leq k \leq m$ và

$$0 \neq a_j \wedge b_k \prec a_j$$

Do $a_j$ là nguyên tử ta có:

$$a_j \wedge b_k = a_j$$

nghĩa là $a_j \prec b_k$

Do $b_k$ là nguyên tử và $a_j \neq 0$ ta có $a_j = b_k$

Như thế $\quad \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \quad \subset \quad \{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$

nghĩa là $\quad \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \quad = \quad \{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$

• đpcm

Gọi $E$ là tập hợp tất cả các nguyên tử của $\mathcal{A}$. Nhờ Bổ đề 4.1.4, ta có một ánh xạ $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{P}(E)$ được định nghĩa như sau:

$\varphi(0) = \emptyset$

nếu $x \neq 0$ thì $\varphi(x)$ là tập hợp tất cả các nguyên tử trội bởi $x$.

Bây giờ Định lý 4.1.3 là hệ quả của

**Định lý 4.1.5**: *$\varphi$ là một đẳng cấu giữa $\mathcal{A}$ và $\mathcal{P}(E)$.*

**Chứng minh**: Giả sử $0 \neq x \prec y$. Khi ấy các nguyên tử trội bởi $x$ cũng là nguyên tử trội bởi $y$ nên $\varphi(x) \subset \varphi(y)$

Ngược lại giả sử $\emptyset \neq \varphi(x) \subset \varphi(y)$

Ta viết $\varphi(x) = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$
và $\varphi(y) = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$

Do Bổ đề 4.1.4 ta có:

$x = a_1 \vee a_2 \vee \ldots \vee a_m$
và $y = b_1 \vee b_2 \vee \ldots \vee b_n$

Do $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\} \subset \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ nên

$$x \prec y$$

Trường hợp $x = 0$ là hiển nhiên.

Tóm lại, ta đã chứng minh:

$$(x \prec y) \Leftrightarrow (\varphi(x) \subset \varphi(y))$$

Đặt biệt nếu $\varphi(x) = \varphi(y)$ thì $x \prec y$ và $y \prec x$ nên $x = y$: $\varphi$ là đơn ánh.

Sau cùng, giả sử $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\} \subset E$

Đặt $x = a_1 \vee a_2 \vee \ldots \vee a_m$
và $\varphi(x) = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$

Do Bổ đề 4.1.4

$$x = b_1 \vee b_2 \vee \ldots \vee b_n$$

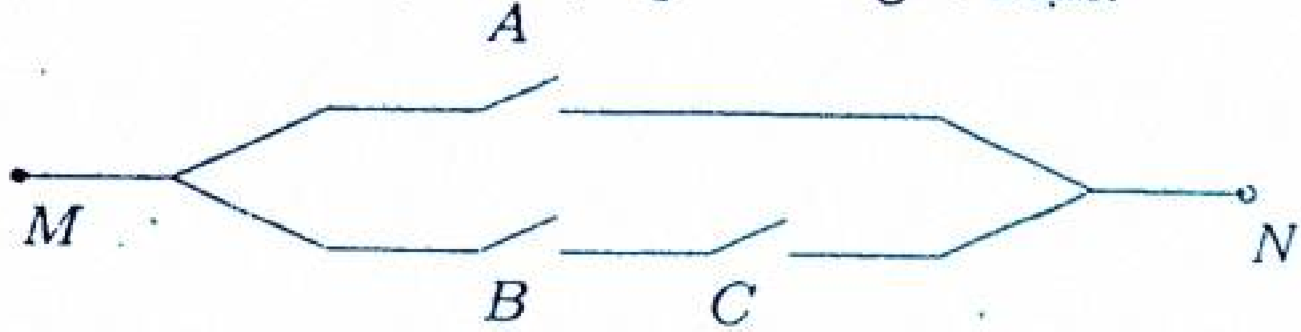
và $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\} = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$.

Như thế $\varphi$ là toàn ánh

• đpcm

## §2 Hàm Bool

Xét sơ đồ của mạch điện gồm 3 ngắt điện:




Tùy theo các ngắt điện $A, B, C$ được đóng hay mở, sẽ có dòng điện đi qua từ $M$ đến $N$ hay không. Để biết các ngắt điện điều khiển việc cho dòng điện đi qua hay không, ta vẽ ra sơ đồ cho tất cả mọi trường hợp. Tuy nhiên điều này không thể thực hiện được nếu số ngắt điện rất lớn. Ví dụ nếu có 100 ngắt điện, sẽ có tất cả $2^{100}$ sơ đồ khác nhau. Ngay cả trong trường hợp số ngắt điện bé, thì vẫn cần một cách sắp sếp có hệ thống các sơ đồ để có thể tra cứu dễ dàng từng trường hợp.

Chẳng hạn ta có thể liên kết với mỗi ngắt điện một biến lấy giá trị 1 nếu ngắt điện đóng và lấy giá trị 0 nếu ngắt điện mở. Trong ví dụ về mạch điện nói trên, ta có 3 biến $a, b, c$. Ngoài ra, toàn mạch điện còn được liên kết với biến $d$ lấy giá trị 1 nếu có dòng điện đi từ $M$ đến $N$ và lấy giá trị 0 trong trường hợp không có dòng điện nào đi từ $M$ đến $N$. Với tương ứng như vậy ta có thể liệt kê tất cả các trường hợp trong bảng giá trị như sau:

| $a$ | $b$ | $c$ | $d$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

Trong trường hợp số ngắt điện lớn thì việc thiết lập các bảng giá trị là không thực tế. Ta cần tìm một công thức cho phép biểu diễn hàm $d(a,b,c)$ theo các biến $a,b,c$ như các hàm đa thức trong trường hợp hàm biến thực chẳng hạn. Mặt khác ta cũng nhận xét rằng bảng trên rất giống bảng chân trị của các dạng mệnh đề. Thật ra khi khảo sát các dạng mệnh đề, điều ta quan tâm không phải là mệnh đề thu được $E(P,Q,R,\ldots)$ khi ta thay các biến mệnh đề $p,q,r\ldots$ lần lượt bởi các mệnh đề $P,Q,R,\ldots$, mà là sự phụ thuộc chân trị của mệnh đề $E(P,Q,R,\ldots)$ vào chân trị của các mệnh đề $P,Q,R\ldots$. Nói cách khác ta đồng nhất dạng mệnh đề $E(p,q,r\ldots)$ với bảng chân trị của nó. Thực chất ở đây là ta đang xem xét hàm $E(p,q,r,\ldots)$ theo các biến $p,q,r,\ldots$, trong đó $p,q,r,\ldots$, và cả $E$ cũng chỉ lấy hai giá trị $0,1$. Đó là các *hàm Bool* theo nghĩa dưới đây

**Định nghĩa 4.2.1**: một *hàm Bool n biến* là một ánh xạ $B^n \to B$, trong đó $B = \{0,1\}$. Tập hợp các hàm Bool $n$ biến được ký hiệu bởi $\mathcal{F}_n$.

**Chú ý**:

1. Các hàm Bool còn được gọi là *hàm logic* hay hàm nhị phân.
2. Nhắc lại tập hợp $B$ là đại số Bool đối với các phép toán

$$a \wedge b = ab$$
$$a \vee b = a + b - ab$$
$$\bar{a} = 1 - a$$

3. Các biến xuất hiện trong hàm Bool được gọi là *biến Bool*. Mỗi hàm Bool được liên kết với một bảng tương tự như bảng trên cho biết sự phụ thuộc của hàm Bool theo giá trị của các biến Bool. Ta cũng gọi bảng giá trị này là *Bảng chân trị* của hàm Bool.

4. Theo ký hiệu của Chương 3, $\mathcal{F}_n$ chính là tập hợp $2^{B^n}$. Do đó số hàm Bool khác nhau chính là:

$$|\mathcal{F}_n| = 2^{|B^n|} = 2^{(2^n)}$$

Mặt khác trong §1, tương ứng $A \longmapsto \chi_A$ là một đẳng cấu của tập hợp có thứ tự $\mathcal{P}(B^n)$ và $\mathcal{F}_n$, trong đó thứ tự trên $\mathcal{F}_n$ được xác định như sau: với $f, g \in \mathcal{F}_n$ thì

$$f \prec g \Leftrightarrow \forall a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in B^n, f(a) \leq g(a)$$

Khi ấy sup và inf của hai hàm $f, g$ được cho bởi:

$$\begin{aligned} (f \vee g)(a) &= f(a) \vee g(a) \\ &= f(a) + g(a) - f(a)g(a), \forall a \in B^n \end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned} (f \wedge g)(a) &= f(a) \wedge g(a) \\ &= f(a)g(a), \forall a \in B^n \end{aligned}$$

và phần bù $\bar{f}$ của hàm Bool $f$ được cho bởi

$$\begin{aligned} \bar{f}(a) &= \overline{f(a)} \\ &= 1 - f(a), \forall a \in B^n \end{aligned}$$

Ta sử dụng ký hiệu thông thường $fg$ và $1 - f$ để chỉ các hàm $f \wedge g$ và $\bar{f}$ trong đó 1 chỉ hàm hằng $B^n \to \{1\}$.

Với các phép toán trên, $\mathcal{F}_n$ trở thành một đại số Bool đẳng cấu với $\mathcal{P}(B^n)$. Đặc biệt các nguyên tử trong $\mathcal{F}_n$ sẽ tương ứng với các nguyên tử trong $\mathcal{P}(B^n)$. Mà trong $\mathcal{P}(B^n)$ các nguyên tử chính là các tập hợp thu về một điểm nên ta có:

**Mệnh đề 4.2.1**: các nguyên tử trong $\mathcal{F}_n$ là các hàm Bool chỉ khác 0 tại 1 điểm duy nhất, hay nói cách khác, bảng chân trị của nó chỉ có một dòng duy nhất ở đó hàm khác 0. Các hàm này được gọi là các *từ tối tiểu* của $\mathcal{F}_n$

Do định lý Stone ta có:

**Mệnh đề 4.2.2**: mỗi hàm Bool $f$ đều được viết dưới dạng:

$$f = m_1 \vee m_2 \vee \ldots \vee m_l \qquad (4.2.1)$$

trong đó $m_1, m_2, \ldots, m_l$ là các từ tối tiểu trội bởi $f$.

Do từ tối tiểu $m_i$ chỉ khác 0 duy nhất ở 1 dòng, $m_i$ sẽ được trội bởi $f$ khi và chỉ khi dòng mà $m_i$ khác 0 cũng là một trong những dòng mà $f$ khác 0. Từ đó ta có quy tắc viết ra công thức (4.2.1) bằng cách chọn các $m_i$ chính là các từ tối tiểu tương ứng với một dòng khác 0 nào đó của $f$. Chẳng hạn như trong ví dụ về hàm $d(a, b, c)$ biểu diễn mạch điện ở trên ta có;

| $a$ | $b$ | $c$ | $d$ | $m_1$ | $m_2$ | $m_3$ | $m_4$ | $m_5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |

Ta có

$$d = m_1 \vee m_2 \vee m_3 \vee m_4 \vee m_5 \tag{4.2.2}$$

Bây giờ để có một công thức tường minh cho một hàm Bool bất kỳ, do (4.2.1) ta cần tìm một công thức tường minh cho các từ tối tiểu. Nhắc lại phép chiếu thứ $i$ được cho bởi:

$$\begin{array}{llll} \pi_i: & B^n & \to & B \\ & (x_1, x_2, \ldots, x_n) & \longmapsto & x_i \end{array}$$

Rõ ràng bản thân $\pi_i$ là một hàm Bool $n$ biến mà giá trị của nó chỉ phụ thuộc vào biến thứ $i$. Tương tự như trường hợp các hàm thực, ta sẽ dùng cùng ký hiệu $x_i$ để chỉ hàm Bool $\pi_i$:

$$x_i(a_1, a_2, \ldots, a_n) = a_i$$

Với ký hiệu này thì phần bù $\bar{x}_i = 1 - x_i$ cũng là một hàm Bool mà giá trị chỉ phụ thuộc vào biến thứ $i$. Ta nói $x_i, \bar{x}_i$ là các *từ đơn*. Có tất cả $2n$ từ đơn.

**Mệnh đề 4.2.3**: các từ tối tiểu đều có thể viết dưới dạng:

$$m = b_1 b_2 \ldots b_n$$

trong đó $b_i = x_i$ hay $b_i = \bar{x}_i$

**Chứng minh**: giả sử $b_i$ là từ đơn bằng $x_i$ hay $\bar{x}_i$. Ta sẽ chứng minh $m = b_1 b_2 \ldots b_n$ là một từ tối tiểu. Chính xác hơn gọi $a =$

$(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ là phần tử của $B^n$ sao cho $a_i = 1$ nếu $b_i = x_i$ và $a_i = 0$ nếu $b_i = \bar{x}_i$. Ta sẽ chứng minh rằng $m$ khác 0 duy nhất tại $a$.

Thật vậy với $1 \leq i \leq n$ ta có:

$$b_i(a) = x_i(a) = a_i = 1 \quad \text{nếu } b_i = x_i$$
và $$b_i(a) = \bar{x}_i(a) = \bar{a}_i = 1 \quad \text{nếu } b_i = \bar{x}_i$$

Như thế $b_i(a) = 1$ với $1 \leq i \leq n$

Suy ra $m(a) = 1$

Mặt khác nếu $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \neq a$ thì tồn tại $i$ sao cho $1 \leq i \leq n$ và $y_i \neq a_i$. Khi ấy:

$$b_i(y) = x_i(y) = y_i = 0 \text{ (vì } \neq a_i) \quad \text{nếu } b_i = x_i$$
và $$b_i(y) = \bar{x}_i(y) = \bar{y}_i = 0 \text{ (vì } = a_i) \quad \text{nếu } b_i = \bar{x}_i$$

Như thế $b_i(y) = 0$ và do đó $m(y) = 0$.

Tóm lại $m$ là từ tối tiểu tương ứng với điểm $a$.

Ngược lại giả sử $m$ là từ tối tiểu khác 0 duy nhất tại điểm $c = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$. Đặt:

$$b_i = x_i \quad \text{nếu } c_i = 1$$
và $$b_i = \bar{x}_i \quad \text{nếu } c_i = 0$$

Khi ấy theo chứng minh trên, $b_1 b_2 \ldots b_n$ là từ tối tiểu tương ứng với điểm $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ sao cho:

$$a_i = 1 \quad \text{nếu } b_i = x_i$$
và $$a_i = 0 \quad \text{nếu } b_i = \bar{x}_i$$

nói cách khác $a_i = c_i$, $1 \leq i \leq n$

Do đó $m = b_1 b_2 \ldots b_n$

• đpcm

**Chú ý:**

1. Do mỗi $b_i$ có thể lấy 2 giá trị $x_i, \bar{x}_i$ nên ta tìm lại được số từ tối tiểu chính là số phần tử của $B^n$ : $2^n$.

2. Ta có quy tắc để viết biểu thức của một từ tối tiểu ứng với điểm $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$: viết tích của tất cả các biến $x_1 x_2 \ldots x_n$, sau đó biến thứ $i$ mà $a_i = 0$ sẽ được gạch đầu. Chẳng hạn trong ví dụ về mạch điện ở trên các từ tối tiểu $m_1, m_2, \ldots, m_5$ có biểu diễn như sau:

$$
\begin{aligned}
m_1 &= \bar{a}bc \\
m_2 &= a\bar{b}\bar{c} \\
m_3 &= a\bar{b}c \\
m_4 &= ab\bar{c} \\
m_5 &= abc
\end{aligned}
$$

Do đó (4.2.2) trở thành:

$$d = \bar{a}bc \vee ab\bar{c} \vee a\bar{b}c \vee ab\bar{c} \vee abc$$

Ở đây ta sử dụng quy ước về thứ tự ưu tiên của phép tính nhân đối với phép toán $\vee$: Công thức $ab \vee c$ có nghĩa là phép toán $ab$ được thực hiện trước rồi mới thực hiện phép toán $\vee$ giữa $ab$ và $c$. Nói cách khác: $ab \vee c = (ab) \vee c$

Ngược lại nếu thực hiện $\vee$ trước ta phải viết:

$$a(b \vee c)$$

3. Tổng quát hơn, do (4.2.1) và Mệnh đề (4.2.3) một hàm Bool bất kỳ $f$ có thể viết như là tổng Bool của các từ tối tiểu trội bởi $f$, và mỗi từ tối tiểu này được viết như là tích của đủ $n$ biến. Công thức này được gọi là *dạng nối rời chính tắc* của $f$

4. Thay vì các từ tối tiểu, ta có thể xét các *từ tối đại*: đó là phần bù của các từ tối tiểu. Khi ấy do Mệnh đề (4.2.3), mỗi từ tối đại sẽ là tổng Bool của $n$ từ đơn. Hơn nữa áp dụng (4.2.1) cho $\bar{f}$, ta có thể viết $f$ như là tích của các từ tối đại: đây chính là *dạng nối liền chính tắc* của hàm Bool $f$. Từ đây ta chỉ để ý đến dạng nối rời chính tắc và tổng quát hơn các công thức đa thức theo nghĩa dưới đây:

**Định nghĩa 4.2.1**:

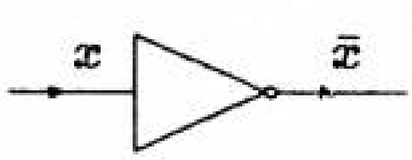
i) Một *đơn thức* là một tích khác 0 của các từ đơn

ii) Một *công thức đa thức* của hàm Bool $f$ là công thức biểu diễn $f$ dưới dạng tổng Bool của các đơn thức.

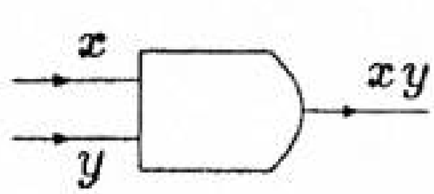
**Chú ý**: Do $x_i x_i = x_i$ và $x_i \bar{x}_i = 0$ nên trong một đơn thức $m$, biến $x_i$ hoặc $\bar{x}_i$ có thể xuất hiện nhưng không đồng thời xuất hiện. Nói cách khác mỗi đơn thức có thể viết như là tích $b_1 b_2 \ldots b_n$ trong đó $b_i$ lấy một trong 3 giá trị $1, x_i, \bar{x}_i$. Do đó số đơn thức khác nhau là $3^n$. Suy ra mỗi hàm Bool chỉ có một số hữu hạn công thức đa thức. Để ý rằng nếu $b_i \neq 1$, ta nói $b_i$ là một thừa số của $m$. Như thế mỗi đơn thức được viết như là tích của tối đa $n$ thừa số khác nhau.

## §3 Mạng các cổng và công thức đa thức tối tiểu

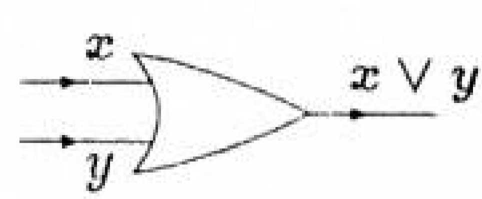
Trong ví dụ về mạch điện trong §2, ta đã biểu diễn mạch điện dưới dạng một hàm Bool để khảo sát sự phụ thuộc của output $d$ (có dòng điện qua hay không) theo các input $a, b, c$ (ngắt điện tương ứng đóng hay mở). Bây giờ ta hãy xét bài toán ngược lại: cho trước một hàm Bool $f(x, y, z, \ldots)$. Hãy thiết kế một mạng các thiết bị vật lý cho phép tổng hợp nên hàm Bool $f$. Ở đây ta không quan tâm đến các thiết bị vật lý cụ thể mà chỉ để ý đến cách nối kết chúng trong một mạng để tổng hợp nên hàm Bool. Do mệnh đề 4.2.2 và 4.2.3, mỗi hàm Bool đều có thể viết thành một công thức trong đó các biến logic (biến Bool) được nối kết lại với nhau bởi các phép toán $\wedge, \vee, -$. Do đó trước tiên ta cần tổng hợp các phép toán trên. Thiết bị để tổng hợp các phép toán này được gọi là các *cổng* được biểu diễn bởi các sơ đồ sau:



Cổng NOT
hay đảo điện



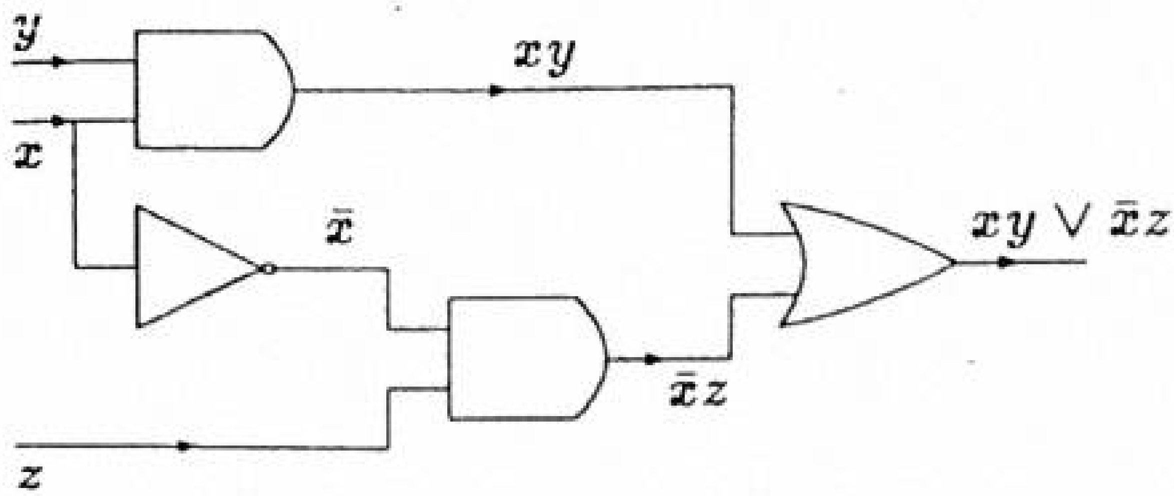
Cổng AND



Cổng OR

Trong các sơ đồ trên, $x$ và $y$ là các tín hiệu vào với 2 trạng thái khác nhau cho phép chúng biểu diễn được các biến logic với hai giá trị 0, 1. Ở đầu ra ta cũng có một tín hiệu biểu diễn cho một biến logic phụ thuộc vào các input theo các phép toán $-, \wedge, \vee$.

**Ví dụ**: để tổng hợp hàm Bool $f = xy \vee \bar{x}z$, ta có thể sử dụng mạng các cổng sau:




trong đó có 2 cổng AND, 1 cổng OR và 1 cổng NOT.

Mặt khác ta cũng có thể viết hàm $f$ như:

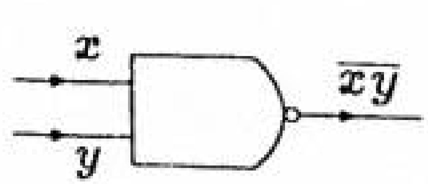
$$
\begin{aligned}
f &= xy(z \vee \bar{z}) \vee \bar{x}(y \vee \bar{y})z \\
&= xyz \vee xy\bar{z} \vee \bar{x}yz \vee \bar{x}\bar{y}z
\end{aligned}
$$

Đây chính là dạng nối rời chính tắc của $f$ vì các số hạng đều là từ tối tiểu. Nếu sử dụng công thức trên để thiết kế một mạng các cổng tổng hợp $f$, ta phải sử dụng 8 cổng AND và 3 cổng OR, không kể một số cổng NOT.

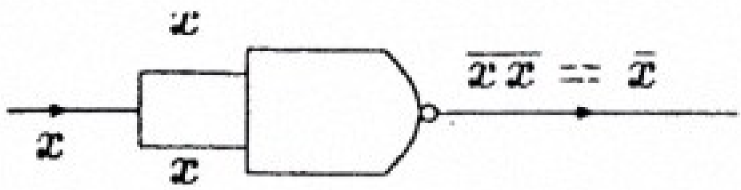
Vấn đề được đặt ra là làm sao tìm một công thức tối ưu để tổng hợp một hàm Bool cho trước.

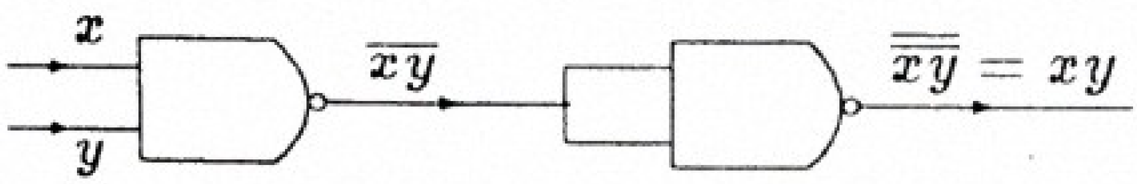
3.1 Bài toán tối ưu đầu tiên là tìm cách giảm số loại cổng từ 3 xuống còn 2, hoặc nếu được chỉ dùng một loại cổng.

Thật vậy ta có thể tổng hợp cổng OR từ cổng NOT và cổng AND (Bài tập). Do đó mọi hàm Bool đều có thể được tổng hợp mà chỉ dùng cổng NOT và cổng AND. Thật ra ta có thể đặt 2 cổng này lại chung thành một cổng có tên là NAND với sơ đồ:

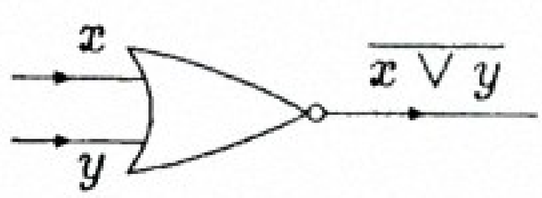


Khi ấy cổng NOT và cổng AND có thể được tổng hợp như sau:




Từ đó có thể tổng hợp cổng OR mà chỉ dùng cổng NAND như trong bài tập nêu trên. Suy ra mọi hàm Bool đều được tổng hợp mà chỉ dùng cổng NAND. Bên cạnh cổng NAND ta cũng có cổng NOR (NOT OR) với sơ đồ:




Khi ấy ta cũng chứng minh được mọi hàm Bool đều được tổng hợp mà chỉ sử dụng cổng NOR (Bài tập).

**3.2** Bài toán tối ưu tiếp theo là tối ưu hóa hai mục tiêu:

- cực tiểu hóa thời gian chậm trễ (delay): tuy thời gian chậm trễ khi đi qua một cổng là nhỏ nhưng nếu tích lũy qua nhiều lớp cổng thì nó trở thành đáng kể, nhất là trong các máy tính có tốc độ cao.

- cực tiểu hóa số cổng sử dụng.

Do thời gian chậm trễ khi qua cổng NOT là không đáng kể, dưới đây khi phân tích các mạch, ta có thể bỏ qua cổng NOT. Nói cách khác các biến $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \ldots$ cũng được xem như là các biến input tương tự như $x, y, z, \ldots$

Thật ra hai mục tiêu trên không thể đồng thời tối ưu hóa được. Do đó trước hết ta tối ưu hóa theo thời gian. Ta sẽ thiết kế các mạch chỉ có tối đa hai lớp cổng: lớp cổng AND rồi lớp cổng OR hay lớp cổng OR rồi lớp cổng AND. Tuy nhiên trường hợp sau luôn luôn có thể đưa được về trường hợp trước nếu ta xét $\bar{f}$. Do đó ta chỉ xét các công thức có dạng OR ($\vee$) của các số hạng là AND ($\wedge$) của từ đơn. Đây chính là các *công thức đa thức*

Trong lớp các công thức đa thức, ta có một số thuật toán cho phép tìm được *công thức đa thức tối tiểu.*

**Định nghĩa 4.3.1**: Xét 2 công thức đa thức của hàm Bool $f$:

$$f = m_1 \vee m_2 \vee \ldots \vee m_p \tag{4.3.1}$$

$$f = M_1 \vee M_2 \vee \ldots \vee M_q \tag{4.3.2}$$

Ta nói (4.3.1) *đơn giản hơn* (4.3.2) nếu tồn tại một đơn ánh $\sigma : \{1, 2, \ldots, p\} \to \{1, 2, \ldots, q\}$ sao cho với $1 \leq i \leq p$ thì số thừa số là từ đơn của $m_i$ không nhiều hơn số thừa số là từ đơn của $M_{\sigma(i)}$.

**Chú ý**:

1. Nếu (4.3.1) đơn giản hơn (4.3.2) thì $p \leq q$.

2. Quan hệ "đơn giản hơn" giữa các công thức đa thức của $f$ rõ ràng có tính phản xạ và bắc cầu. Tuy nhiên quan hệ này không phản xứng.

3. Nói rằng (4.3.1) đơn giản hơn (4.3.2) và (4.3.2) đơn giản hơn (4.3.1) có nghĩa là tồn tại các đơn ánh

$\sigma : \{1, 2, \ldots, p\} \to \{1, 2, \ldots, q\}$

và $\tau : \{1, 2, \ldots, q\} \to \{1, 2, \ldots, p\}$

sao cho $\sigma, \tau$ thỏa định nghĩa (4.3.1). Khi ấy $\sigma, \tau$ là song ánh và với $1 \leq i \leq p$ thì số thừa số là từ đơn của $m_i$ không nhiều hơn số thừa số là từ đơn của $m_{\tau o \sigma(i)}$. Do đó nếu gọi $k$ là số nguyên nhỏ nhất sao cho

$$\underbrace{(\tau \circ \sigma) \circ (\tau \circ \sigma) \circ \ldots \circ (\tau \circ \sigma)}_{k}(i) = i$$

và

$$j = \underbrace{(\tau \circ \sigma) \circ (\tau \circ \sigma) \circ \ldots \circ (\tau \circ \sigma)(i)}_{k-1}$$

thì $m_i$ và $m_j$ có số thừa số là từ đơn bằng nhau.

Suy ra với $1 \leq i \leq p$ thì $m_i$ và $M_{\sigma(i)}$ có số thừa số là từ đơn bằng nhau. Khi ấy ta nói (4.3.1) và (4.3.2) *đơn giản như nhau.* Rõ ràng quan hệ đơn giản như nhau là một *quan hệ tương đương.* Hơn nữa nếu hai công thức đa thức là đơn giản như nhau thì mạng các cổng tổng hợp chúng sẽ sử dụng cùng số cổng AND và cổng OR.

4. Tương tự như trong Chương 3, nếu chuyển qua các lớp tương đương thì quan hệ "đơn giản hơn" trở thành một thứ tự. Tuy nhiên ta cũng có thể khảo sát trực tiếp các quan hệ chỉ có 2 tính chất phản xạ và bắc cầu. Ta nói chúng là các quan hệ *tiền thứ tự.* Đối với quan hệ tiền thứ tự, khái niệm phần tử tối tiểu và tối đại vẫn còn ý nghĩa. Chẳng hạn như một công thức đa thức $(F)$ của hàm Bool $f$ được nói là *tối tiểu* nếu với bất kỳ công thức đa thức $(G)$ của $f$ "đơn giản hơn" $(F)$ thì $(G)$ và $(F)$ "đơn giản như nhau". Bây giờ do tập hợp các công thức đa thức của một hàm Bool $f$ là hữu hạn, ta chứng minh được tương tự như Định lý 3.3.3, cho trước một công thức đa thức $(F)$ của $f$ thì sẽ tồn tại một công thức đa thức tối tiểu $(G)$ của $f$ sao cho $(G)$ đơn giản hơn $(F)$. Cũng như trường hợp các tập hợp có thứ tự, một hàm Bool $f$ có thể có nhiều công thức đa thức tối tiểu.

5. Xét công thức đa thức (4.3.1) của hàm $f$. Giả sử tồn tại 1 đơn thức $m$ sao cho $m_1 \underset{\neq}{\prec} m \prec f$. Khi ấy ta có:

$$f = m \vee f = (m \vee m_1) \vee m_2 \vee \ldots \vee m_p$$

$$f = m \vee m_2 \vee \ldots \vee m_p \qquad (4.3.3)$$

Do $m_1 \prec m$ ta có thể viết:

$$mm_1 = m_1$$

Như thế mọi thừa số là từ đơn của $m$ cũng là một thừa số của $m_1$. Hơn nữa do $m_1 \neq m$ nên có ít nhất một thừa số là từ đơn của $m_1$ không xuất hiện trong $m$. Khi ấy công thức (4.3.3) rõ ràng "đơn giản hơn" (4.3.1) nhưng không "đơn giản như nhau". Suy ra (4.3.1) không tối tiểu. Ta đã chứng minh.

**Mệnh đề 4.3.1**: trong một công thức đa thức tối tiểu, các số hạng là đơn thức tối đại trội bởi $f$.

**Định nghĩa 4.3.2**: một đơn thức tối đại trội bởi hàm Bool $f$ được gọi là một *tiền đề nguyên tố* của $f$.

Do Mệnh đề 4.3.1, để tìm công thức đa thức tối tiểu của một hàm Bool $f$, ta hạn chế tìm kiếm trong số các công thức đa thức mà các số hạng là những tiền đề nguyên tố đôi một khác nhau. Các công thức này là rút gọn theo nghĩa sau:

**Định nghĩa 4.3.3**: công thức đa thức (4.3.1) của hàm $f$ được nói là *rút gọn* nếu với $1 \leq i \neq j \leq p$, thì $m_i$ không phải là ước thật sự của $m_j$.

**Ví dụ**: Xét hàm Bool theo 3 biến

$$f = xyz \vee x\bar{y}\bar{z} \vee xy\bar{z} \vee \bar{x}y\bar{z} \qquad (F_1)$$

Rõ ràng $(F_1)$ là dạng nối rời chính tắc của $f$ và là rút gọn. Để có những công thức rút gọn khác ta sẽ gom các số hạng lại và sử dụng

**Bổ đề 4.3.2**: nếu $g$ và $h$ là hai hàm Bool thì

$$g\bar{h} \vee h = g \vee h$$

**Chứng minh**:

$$\begin{aligned} g\bar{h} \vee h &= g\bar{h} \vee (gh \vee h) \\ &= g(\bar{h} \vee h) \vee h = g \vee h \end{aligned}$$

• đpcm

Từ $(F_1)$ ta được:

$$f = xyz \vee x(y \vee \bar{y})\bar{z} \vee \bar{x}y\bar{z}$$

$$f = xyz \vee x\bar{z} \vee \bar{x}y\bar{z} \qquad (F_2)$$

Tương tự $f = xyz \vee x\bar{y}\bar{z} \vee y\bar{z}$ $\qquad (F_3)$

và $f = xy \vee x\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}y\bar{z}$ $\qquad (F_4)$

Áp dụng Bổ đề 4.3.2 cho $(F_2)$, $(F_3)$ và $(F_4)$ ta được:

$$\begin{aligned} f &= x(yz \vee \bar{z}) \vee \bar{x}y\bar{z} \\ &= x(y \vee \bar{z}) \vee \bar{x}y\bar{z} \\ &= xy \vee x\bar{z} \vee \bar{x}y\bar{z} \qquad (F_5) \end{aligned}$$

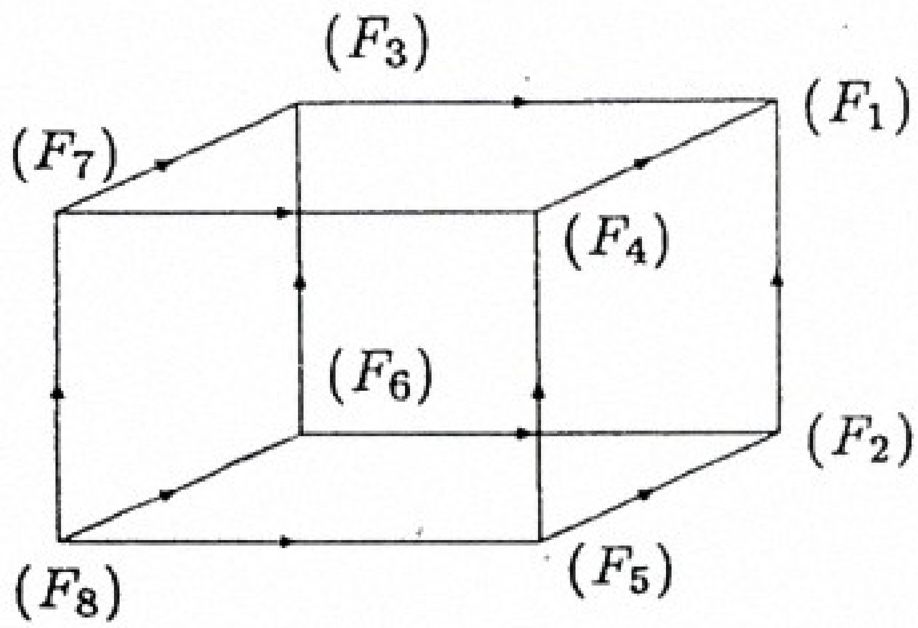
Tương tự $f = xyz \vee x\bar{z} \vee y\bar{z}$ $\qquad (F_6)$

và $f = xy \vee x\bar{y}\bar{z} \vee y\bar{z}$ $\qquad (F_7)$

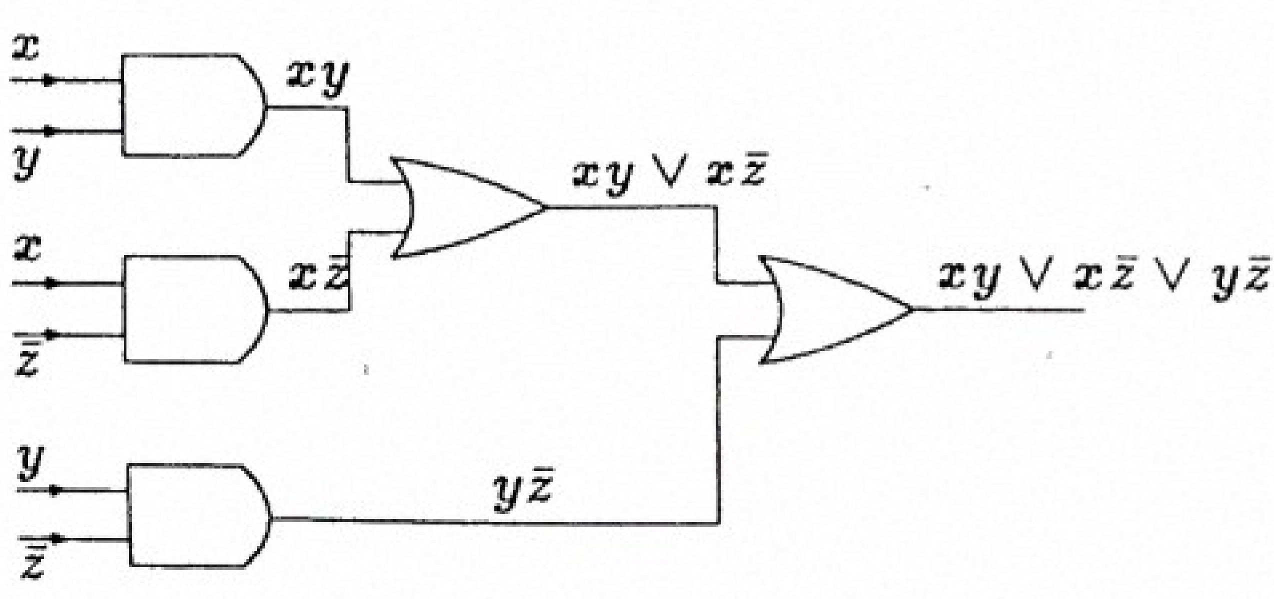
Cuối cùng, áp dụng Bổ đề 4.3.2 cho một trong ba công thức $(F_5), (F_6)$ hay $(F_7)$ ta được:

$$f = xy \vee x\bar{z} \vee y\bar{z} \qquad (F_8)$$

Tám công thức trên đều là rút gọn và có biểu đồ Hasse:




Công thức $(F_8)$ là công thức đa thức tối tiểu duy nhất nên cũng là công thức *đơn giản nhất*. Sử dụng công thức $(F_8)$ để tổng hợp hàm Bool $f$ ta chỉ tốn 3 cổng AND và 2 cổng OR thay vì 8 cổng AND và 3 cổng OR nếu sử dụng $(F_1)$. Ta có sơ đồ mạng các cổng ứng với $(F_8)$ như sau:



## §4 Phương pháp biểu đồ Karnaugh

Phương pháp biểu đồ Karnaugh cho phép tìm nhanh công thức đa thức tối tiểu của hàm Bool 3, 4 biến. Trường hợp 3 biến hoàn toàn tương tự nhưng đơn giản hơn trường hợp 4 biến. Do đó ta tập trung trình bày trường hợp 4 biến. Nhắc lại một hàm Bool 4 biến là một ánh xạ $B^4 \to B$ nên để có thể biểu diễn bằng hình ảnh ta sẽ sử dụng một hình vuông gồm có 16 ô vuông nhỏ để biểu diễn 16 phần tử của $B^4$. Khi ấy ta có thể biểu diễn một hàm Bool $f : B^4 \to B$ bằng cách gạch chéo các ô ở đó $f$ bằng 1.

Như vậy vấn đề chính là đánh số 16 ô của hình vuông tương ứng với các phần tử của $B^4$. Ta đã biết các phần tử của $B^4$ có thể được xếp thứ tự theo thứ tự tự điển:

$$0000, 0001, 0010, 0011, \ldots, 1111$$

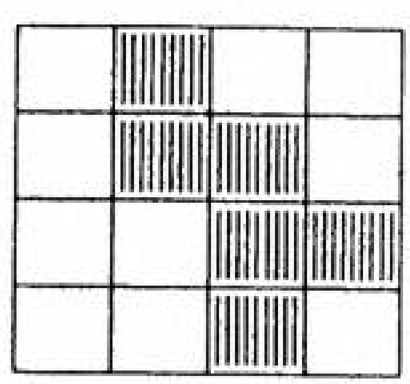
Ta có thể xếp các phần tử của $B^4$ theo thứ tự trên lần lượt trên các dòng của hình vuông lớn Tuy nhiên cách này không thuận tiện bằng cách của Veitch và Karnaugh như sau:

| | $x$ | | $\bar{x}$ | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $z$ | 1 0 1 0 | 1 1 1 0 | 0 1 1 0 | 0 0 1 0 | $\bar{t}$ |
| | 1 0 1 1 | 1 1 1 1 | 0 1 1 1 | 0 0 1 1 | $t$ |
| $\bar{z}$ | 1 0 0 1 | 1 1 0 1 | 0 1 0 1 | 0 0 0 1 | |
| | 1 0 0 0 | 1 1 0 0 | 0 1 0 0 | 0 0 0 0 | $\bar{t}$ |
| | $\bar{y}$ | $y$ | | $\bar{y}$ | |

Ở đây ký hiệu $x$ chỉ cột ở đó biến đầu tiên $x$ lấy giá trị 1, $\bar{x}$ chỉ cột ở đó biến $x$ lấy giá trị 0. Tương tự cho biến thứ hai $y$. Các biến thứ ba và thứ tư $z, t$ được gán với các dòng. Ví dụ ở 2 dòng đầu biến $z$ lấy giá trị 1 và 2 dòng sau biến $z$ lấy giá trị 0. Tương tự cho biến $t$. Cách biểu diễn trên của $B^4$ rất thuận tiện cho việc biểu diễn các đơn thức. Thật vậy ta nhận xét rằng 2 ô liên tiếp nhau chỉ khác nhau một thành phần, ví dụ ô ở dòng 2 cột 2 và ô ở dòng 2 cột 3 chỉ khác nhau ở thành phần đầu tiên: 1111 và 0111. Mặt khác ô ở dòng 1 cột 1 và dòng 1 cột 4 cũng biểu diễn 2 phần tử chỉ khác nhau 1 thành phần: 1010 và 0010. Ta qui ước rằng các ô này cũng được xem như kề nhau theo nghĩa rộng: 2 ô được nói là *kề nhau theo nghĩa rộng* nếu sau khi ta cuốn hình vuông lớn theo chiều dọc hay chiều ngang tạo thành hình trụ thì 2 ô ban đầu sẽ trở thành kề nhau trên hình trụ. Với qui ước trên ta thấy rằng 2 ô kề nhau (theo nghĩa thông thường hay nghĩa rộng) khi và chỉ khi chúng biểu diễn 2 phần tử của $B^4$ chỉ khác nhau 1 thành phần.

Bây giờ để biểu diễn 1 hàm Bool 4 biến $f$, ta sẽ gạch chéo các ô của hình vuông lớn tương ứng với các điểm của $B^4$ ở đó $f$ bằng 1. Ta nói hình vẽ ấy là *biểu đồ Karnaugh* của hàm Bool $f$. Ví dụ như hình vẽ dưới đây chỉ biểu đồ Karnaugh của hàm Bool 4 biến:

$$f = xyzt \vee xyz\bar{t} \vee \bar{x}yzt \vee \bar{x}y\bar{z}t \vee \bar{x}y\bar{z}\bar{t} \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z}t$$



Nhận xét rằng hàm Bool $f$ chính là hàm đặc trưng của tập hợp gạch chéo trong biểu đồ Karnaugh. Do đó sử dụng đẳng cấu giữa 2 đại số Bool $\mathcal{P}(B^4)$ và $2^{B^4}$ ta có:

<u>**Mệnh đề 4.4.1**</u>: Với mọi hàm Bool 4 biến $f, g$:

i) Biểu đồ Karnaugh của $f$ là tập hợp con của biểu đồ Karnaugh của $g$ khi và chỉ khi $f \prec g$

ii) Biểu đồ Karnaugh của $f \vee g$ (tương ứng $f \wedge g$) là hợp (tương ứng giao) của các biểu đồ Karnaugh của $f$ và $g$

iii) Biểu đồ Karnaugh của $\bar{f}$ là phần bù của biểu đồ Karnaugh của $f$.

<u>**Chú ý**</u>:

1. Sử dụng Mệnh đề 4.4.1, ta có thể vẽ được biểu đồ Karnaugh của một hàm Bool nếu biết bảng chân trị của nó, hoặc nếu biết được một công thức biểu diễn hàm Bool dưới dạng một biểu thức theo các biến và các phép toán $\vee, \wedge, -$.

2. Ngược lại, nếu biết được biểu đồ Karnaugh của hàm Bool $f$, ta có thể đọc ngay từ đó dạng nối rời chính tắc: các từ tối tiểu trội bởi $f$ chính là hàm đặc trưng của mỗi ô nằm trong biểu đồ Karnaugh. Hơn nữa, công thức cho từ tối tiểu như là tích của 4 từ đơn được đọc ngay trong biểu đồ Karnaugh khi xem các dòng và cột chứa ô đang xét: ví dụ như từ đơn ứng với ô ở dòng 3 cột 2 là $xy\bar{z}t$ vì các dòng và cột chứa ô này là $x, y, \bar{z}$ và $t$.

3. Hai từ tối tiểu ứng với 2 ô kề nhau (theo nghĩa thông thường hoặc nghĩa rộng) chỉ khác nhau một thừa số là từ đơn, nên ta có thể dùng luật phân bố để đặt thừa số chung trong tổng Bool của chúng và được một đơn thức có 3 thừa số là từ đơn. Ví dụ như:

$$xyzt \vee xyz\bar{t} = xyz(t \vee \bar{t}) = xyz$$

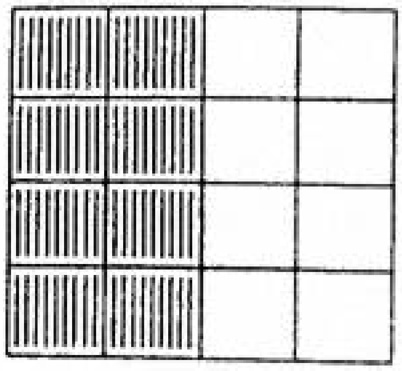
có biểu đồ Karnaugh là một hình chữ nhật theo nghĩa rộng gồm 2 ô liên tiếp nhau 1110 và 1111.

Tổng quát hơn ta có:

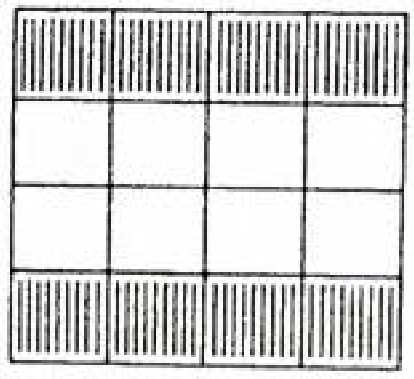
<u>**Mệnh đề 4.4.2**</u>: Biểu đồ Karnaugh của một đơn thức có dạng tích của $p(1 \leq p \leq 4)$ từ đơn là một hình chữ nhật (theo nghĩa rộng) gồm

$2^{4-p}$ ô, mà ta gọi là các *tế bào*.

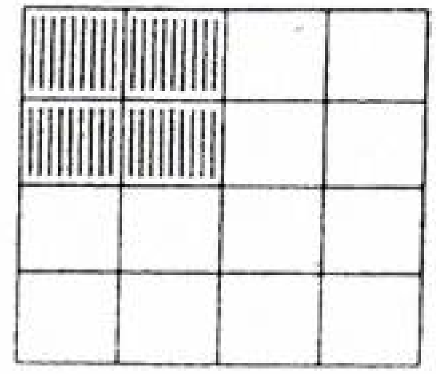
**Ví dụ:**



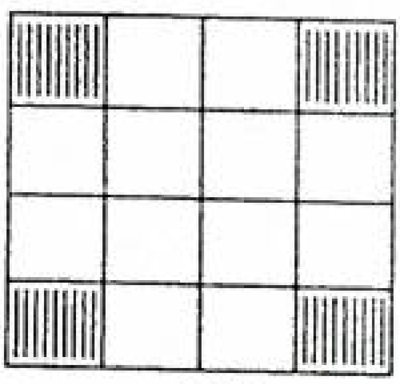
$x$



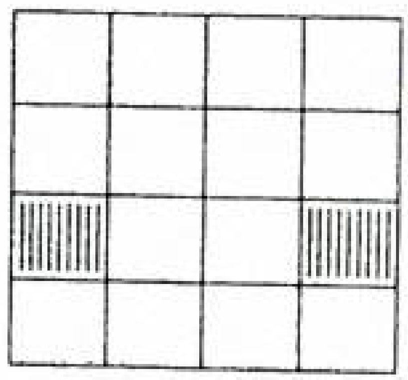
$\bar{t}$



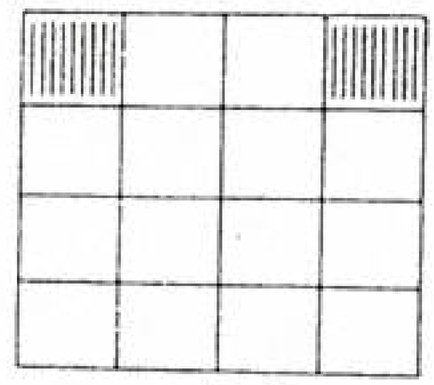
$xz$



$\bar{y}\bar{t}$



$\bar{y}\bar{z}t$



$\bar{y}z\bar{t}$

Do Mệnh đề 4.4.1 và 4.4.2, các tiền đề nguyên tố của một hàm Bool 4 biến có biểu đồ Karnaugh là một tế bào tối đại nằm trong biểu đồ Karnaugh của $f$, nghĩa là không được bao hàm thực sự bởi một tế bào khác nằm trong biểu đồ Karnaugh của $f$. Ta nói các tế bào này là *tế bào lớn* của biểu đồ Karnaugh của $f$. Như vậy việc tìm công thức đa thức tối tiểu của $f$ đưa về việc giải quyết hai vấn đề:

• Tìm tất cả các tế bào lớn nằm trong biểu đồ Karnaugh của $f$

• Tìm một *phép phủ tối tiểu* biểu đồ Karnaugh của $f$ bằng các tế bào lớn, nghĩa là một họ tế bào lớn có hợp là biểu đồ Karnaugh của $f$ sao cho khi rút bớt một tế bào lớn trong số đó thì họ còn lại không phủ kín biểu đồ Karnaugh của $f$. Từ đó ta được một thuật toán để tìm công thức đa thức tối tiểu

**Thuật toán**: gồm 4 bước

**Bước 1**: chỉ ra tất cả các tế bào lớn của biểu đồ Karnaugh của $f$.

Sau Bước 1, ta sẽ phủ dần biểu đồ Karnaugh bằng các tế bào lớn cho đến khi phủ kín.

**Bước 2**: nếu tồn tại một ô chỉ nằm trong một tế bào lớn duy nhất, ta chọn ra tế bào này để phủ. Trong phần còn lại của biểu đồ Karnaugh, nếu có một ô chỉ nằm trong một tế bào lớn duy nhất, ta chọn ra tế bào này để phủ, và lặp lại Bước 2 cho đến khi không còn ô nào có tính chất trên.

**Bước 3**: nếu các tế bào lớn chọn trong Bước 2 đã phủ kín biểu đồ Karnaugh của $f$ ta qua thẳng Bước 4. Nếu không, chọn ra một ô còn lại. Trong số các tế bào lớn chứa ô này ta chọn ra một tế bào tùy ý để thêm vào phép phủ, và cứ tiếp tục như trên cho phần còn lại cho đến khi phủ kín biểu đồ Karnaugh của $f$

**Bước 4**: Ở bước này ta đã chọn được một số tế bào lớn phủ kín biểu đồ Karnaugh của $f$. Do trong Bước 3 có sự lựa chọn tùy ý tế bào lớn chứa một ô, ta thường có nhiều hơn một phép phủ. Trong số các phép phủ nhận được, loại bỏ các phép phủ không tối tiểu. Sau cùng, các phép phủ còn lại cho ta một công thức đa thức của $f$ mà ta còn phải so sánh chúng theo Định nghĩa 4.3.1: loại bỏ những công thức có một công thức khác trong số đó thực sự đơn giản hơn nó. Các công thức còn lại chính là công thức đa thức tối tiểu phải tìm.

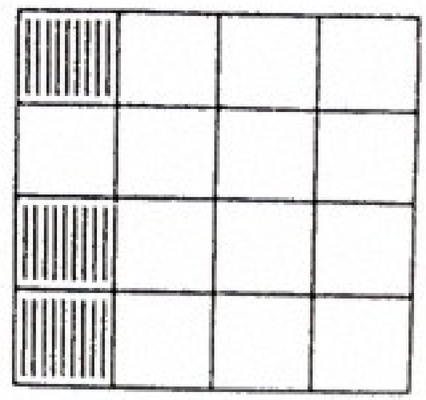
**Chú ý**:

1. Nếu Bước 3 được bỏ qua thì không có sự lựa chọn tùy ý. Trong trường hợp này ta được một phép phủ duy nhất tương ứng với công thức đa thức tối tiểu duy nhất.

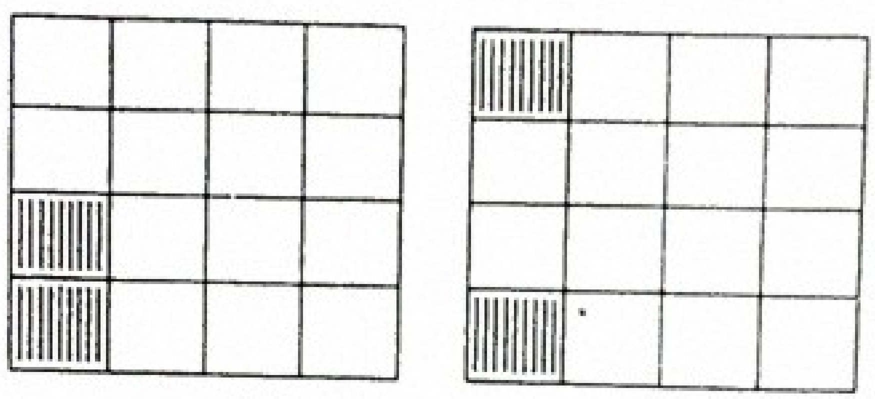
2. Để tiện việc xem xét, ta sẽ gạch chéo mỗi tế bào lớn được chọn cho đến khi phần gạch chéo trùng với biểu đồ Karnaugh của $f$. Đương nhiên hai cách chọn khác nhau sẽ dẫn đến hai quá trình phủ

khác nhau và cho ta hai công thức khác nhau.

**Ví dụ 1**: Xét hàm $f$ có biểu đồ Karnaugh như sau:



<u>**Bước 1**</u>: Biểu đồ Karnaugh của $f$ có 2 tế bào lớn:



$x\bar{y}\bar{z}$ $\qquad$ $x\bar{y}\bar{t}$

<u>**Bước 2**</u>: ô (3,1) nằm duy nhất trong $x\bar{y}\bar{z}$

ô (1,1) nằm duy nhất trong $x\bar{y}\bar{t}$

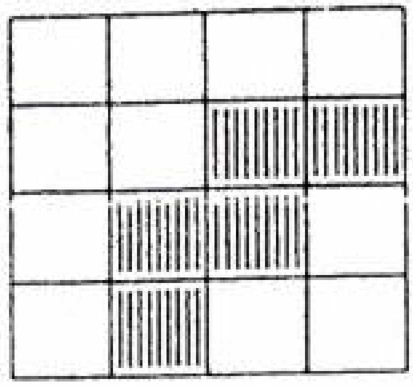
Hai tế bào lớn này đã phủ kín biểu đồ Karnaugh của $f$ nên ta qua thẳng Bước 4.

<u>**Bước 4**</u>: Ta chỉ có duy nhất một phép phủ ứng với công thức đa thức tối tiểu duy nhất của $f$:

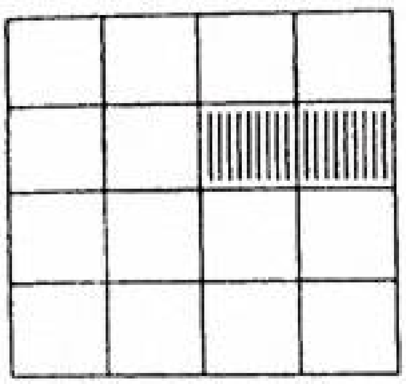
$$f = x\bar{y}\bar{z} \vee x\bar{y}\bar{t}$$

<u>**Chú ý**</u>: sử dụng công thức trên để tổng hợp hàm Bool $f$ bằng một mạng các cổng, ta cần 4 cổng AND và 1 cổng OR (không kể cổng NOT)

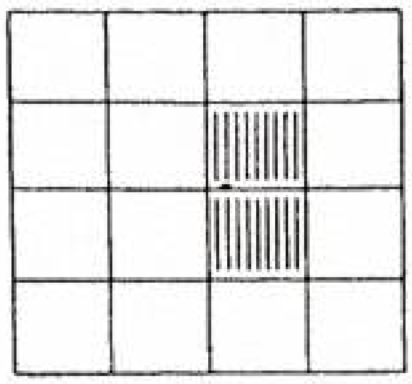
**Ví dụ 2**: Xét hàm $f$ có biểu đồ Karnaugh như sau:



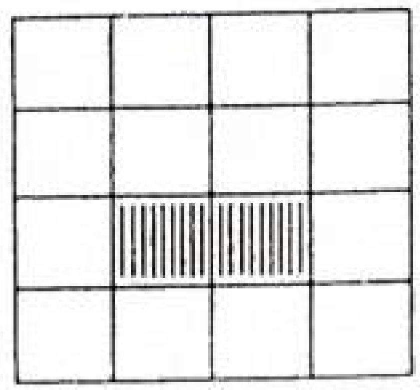
**Bước 1**: Biểu đồ Karnaugh của $f$ có 4 tế bào lớn:



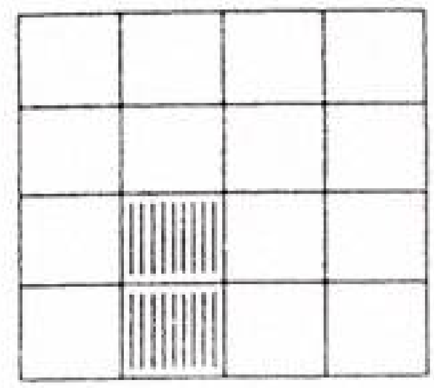
$\bar{x}zt$



$\bar{x}yt$



$y\bar{z}t$

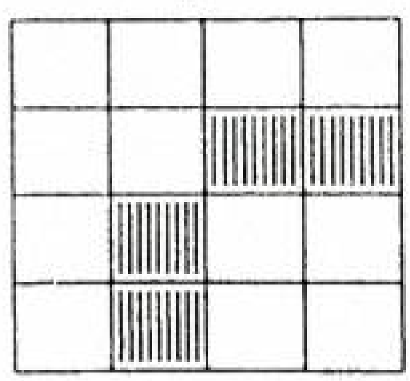


$xy\bar{z}$

**Bước 2**: ô (2,4) nằm trong tế bào lớn duy nhất $\bar{x}zt$

ô (4,2) nằm trong tế bào lớn duy nhất $xy\bar{z}$

Gạch chéo hai tế bào lớn này ta được sơ đồ sau:



Còn lại ô (3,3) chưa được phủ, nằm trong 2 tế bào lớn nên ta qua Bước 3

**Bước 3**: ô (3,3) nằm trong 2 tế bào lớn $\bar{x}yt$ và $y\bar{z}t$. Chọn tùy ý một trong hai tế bào trên ta đều phủ kín biểu đồ Karnaugh của $f$.

**Bước 4**: Ta được phép phủ tối tiểu tương ứng với hai công thức đa thức:

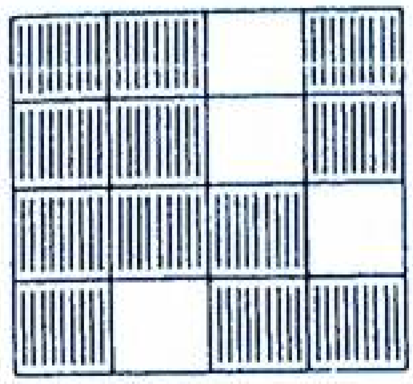
$$f = xy\bar{z} \vee \bar{x}zt \vee \bar{x}yt$$

và $$f = xy\bar{z} \vee \bar{x}zt \vee y\bar{z}t$$

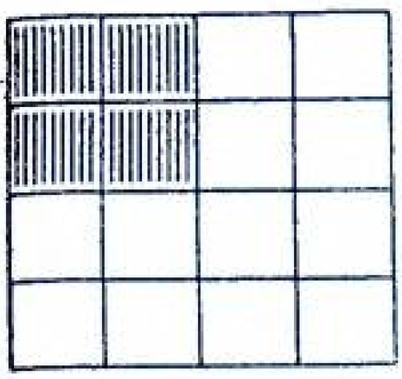
Cả hai công thức này đều đơn giản như nhau theo Định nghĩa 4.3.2 nên ta được 2 công thức đa thức tối tiểu

Chú ý: sử dụng các công thức này để tổng hợp hàm $f$ bằng một mạng các cổng, ta cần 6 cổng AND và 2 cổng OR.

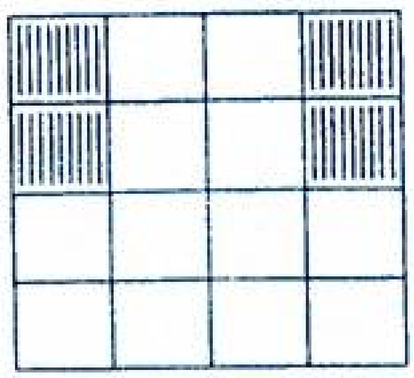
**Ví dụ 3**: Xét hàm $f$ với biểu đồ Karnaugh sau đây:



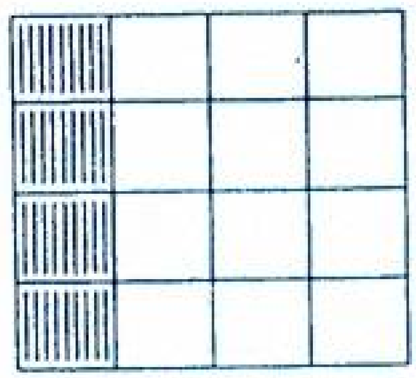
**Bước 1**: Biểu đồ Karnaugh của $f$ có 8 tế bào lớn như sau:



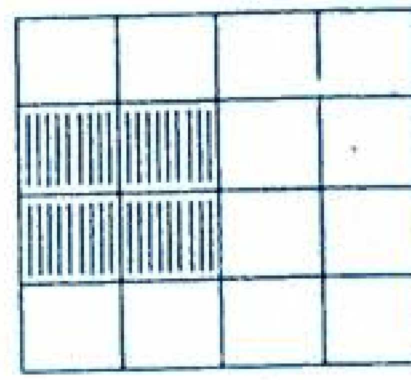
$xz$



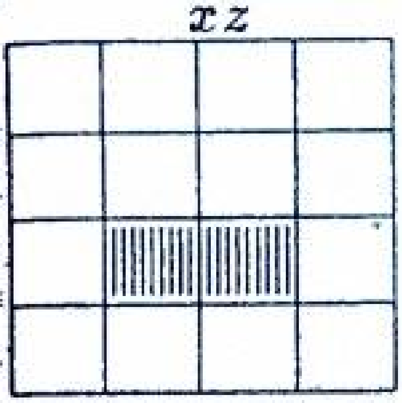
$\bar{y}z$



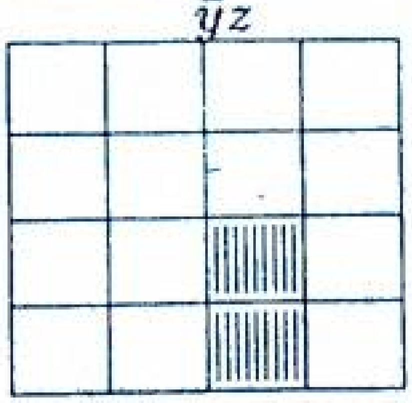
$x\bar{y}$



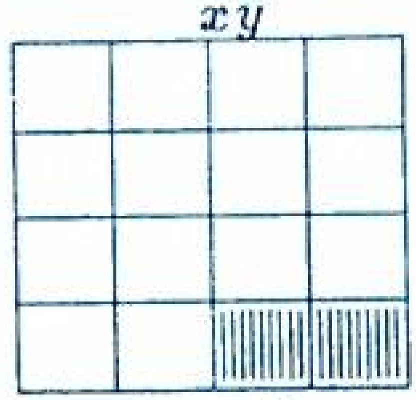
$xt$



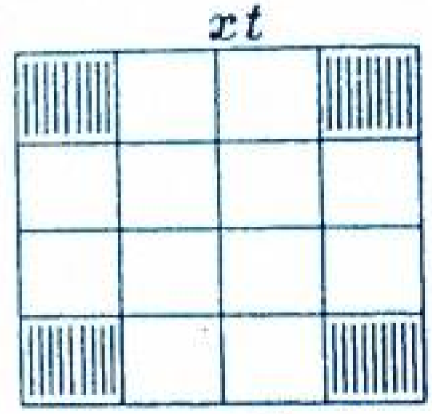
$y\bar{z}t$



$\bar{x}y\bar{z}$

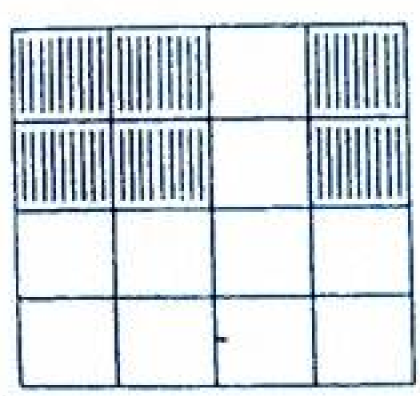


$\bar{x}\bar{z}\bar{t}$



$\bar{y}\bar{t}$

**Bước 2**: các ô (1,2) và (2,4) nằm trong các tế bào lớn duy nhất là $xz$ và $\bar{y}z$ tương ứng. Sau khi chọn các tế bào lớn này thì phần còn lại của biểu đồ Karnaugh của $f$ đều có mỗi ô nằm đúng trong 2 tế bào lớn nên ta qua Bước 3.



**Bước 3**: ta có sơ đồ cách chọn các tế bào lớn còn lại để phủ kín biểu đồ Karnaugh của $f$ theo các nhánh (của hình cây):

◻ *Chọn $x\bar{y}$*: còn lại 4 ô chưa phủ

- *Chọn $y\bar{z}t$*: còn lại 2 ô chưa phủ

  * Chọn $\bar{x}\bar{z}t$: phủ kín biểu đồ Karnaugh của $f$:

$$f = xz \vee \bar{y}z \vee x\bar{y} \vee y\bar{z}t \vee \bar{x}\bar{z}t \qquad (F_1)$$

* Không chọn $\bar{x}\bar{z}t$: để phủ 2 ô (4,3) và (4,4) ta buộc phải chọn $\bar{x}y\bar{z}$ và $\bar{y}\bar{t}$:

$$f = xz \vee \bar{y}z \vee x\bar{y} \vee y\bar{z}t \vee \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{y}\bar{t} \qquad (F_2)$$

- *Không chọn $y\bar{z}t$*: để phủ 2 ô (3,2) và (3,3) ta buộc phải chọn $xt$ và $\bar{x}y\bar{z}$. Lúc này chỉ còn lại ô (4,4). Nếu chọn $\bar{y}\bar{t}$ ta sẽ được một phép phủ không tối tiểu vì có thể loại bớt tế bào lớn $x\bar{y}$ mà vẫn còn được một phép phủ. Do đó ta buộc phải chọn $\bar{x}\bar{z}\bar{t}$:

$$f = xz \vee \bar{y}z \vee x\bar{y} \vee xt \vee \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}\bar{z}\bar{t} \qquad (F_3)$$

◻ *Không chọn $x\bar{y}$*: để phủ 2 ô (3,1) và (4,1) ta buộc phải chọn các tế bào lớn $xt$ và $\bar{y}\bar{t}$. Lúc này còn lại 2 ô chưa phủ là (3,3) và (4,3).

- *Chọn $\bar{x}y\bar{z}$*: phủ kín biểu đồ Karnaugh:

$$f = xz \vee \bar{y}z \vee xt \vee \bar{y}\bar{t} \vee \bar{x}y\bar{z} \qquad (F_4)$$

- *Không chọn $\bar{x}y\bar{z}$*: để phủ 2 ô (3,3) và (4,3) ta buộc phải chọn các tế bào lớn $y\bar{z}t$ và $\bar{x}\bar{z}\bar{t}$:

$$f = xz \vee \bar{y}z \vee xt \vee \bar{y}\bar{t} \vee y\bar{z}t \vee \bar{x}\bar{z}\bar{t} \qquad (F_5)$$

**Bước 4**: ta có 5 công thức đa thức. Tuy nhiên có thể xây dựng dễ dàng các đơn ánh trong Định nghĩa 4.3.1 cho thấy công thức $(F_4)$ đơn giản hơn $(F_1)$, $(F_2)$, $(F_3)$, $(F_5)$ mà không tương đương (đơn giản như nhau theo định nghĩa 4.3.2). Chẳng hạn như ta có đơn ánh:

$$\begin{array}{rcl} xz & \longmapsto & xz \\ \bar{y}z & \longmapsto & \bar{y}z \\ xt & \longmapsto & x\bar{y} \\ \bar{y}\bar{t} & \longmapsto & y\bar{z}t \\ \bar{x}y\bar{z} & \longmapsto & \bar{x}\bar{z}t \end{array}$$

trong đó $\bar{y}t$ chỉ có 2 thừa số là từ đơn trong khi $y\bar{z}t$ có 3 thừa số là từ đơn, nghĩa là $(F_4)$ thực sự đơn giản hơn $(F_1)$. Các đơn ánh khác cũng được xây dựng tương tự. Tóm lại ta chỉ có một công thức đa thức tối tiểu duy nhất của hàm $f$ là:

$$f = xz \vee \bar{y}z \vee xt \vee \bar{y}\bar{t} \vee \bar{x}y\bar{z}$$

<u>Chú ý</u>: Sử dụng công thức trên để tổng hợp $f$ bằng mạng các cổng, ta cần 6 cổng AND và 4 cổng OR.

**<u>Trường hợp hàm 3 biến</u>:**

Đối với các hàm Bool 3 biến, ta sẽ sử dụng hình chữ nhật có 8 ô để biểu diễn $B^3$ thay vì hình vuông 16 ô.

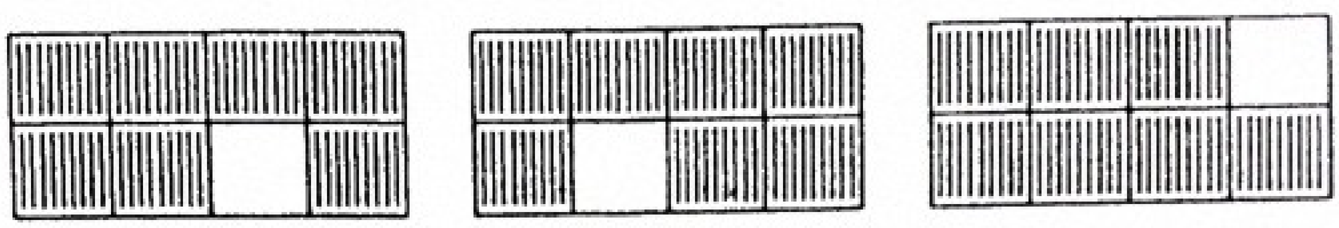
| | $x$ | | $\bar{x}$ | |
|---|---|---|---|---|
| $z$ | 1 0 1 | 1 1 1 | 0 1 1 | 0 0 1 |
| $\bar{z}$ | 1 0 0 | 1 1 0 | 0 1 0 | 0 0 0 |
| | $\bar{y}$ | $y$ | | $\bar{y}$ |

Khi ấy định nghĩa biểu đồ Karnaugh, tế bào, tế bào lớn hoàn toàn tương tự và ta có thể áp dụng quy trình 4 bước như trên để tìm công thức đa thức tối tiểu.

**Ví dụ**: Xét hàm Bool

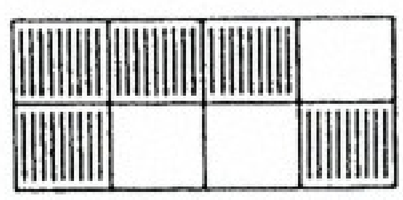
$$f = (x \vee \bar{y} \vee z)(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z)(x \vee y \vee \bar{z})$$

Biểu đồ Karnaugh của 3 thừa số là:

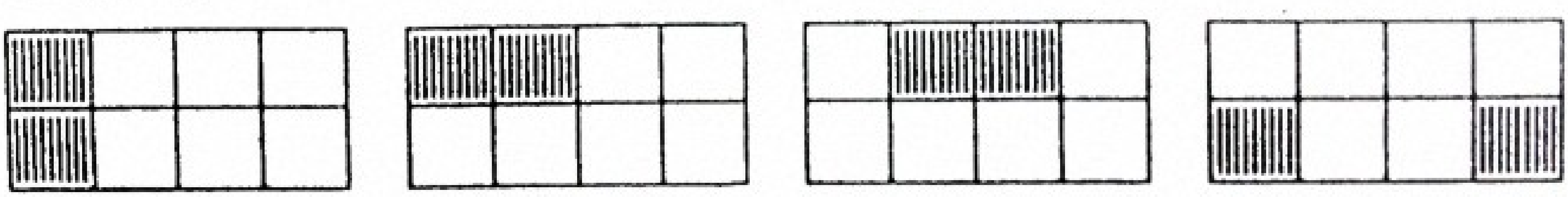


$x \vee \bar{y} \vee z$ $\qquad$ $\bar{x} \vee \bar{y} \vee z$ $\qquad$ $x \vee y \vee \bar{z}$

Do đó biểu đồ Karnaugh của $f$ có dạng:

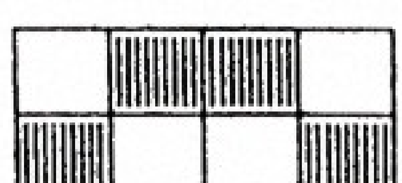


**Bước 1**: có 4 tế bào lớn



$x\bar{y}$ $\qquad$ $xz$ $\qquad$ $yz$ $\qquad$ $\bar{y}\bar{z}$

**Bước 2**: Ô (1,3) nằm trong tế bào lớn duy nhất $yz$
Ô (2,4) nằm trong tế bào lớn duy nhất $\bar{y}\bar{z}$
Chọn các tế bào này cho phép phủ ta được:



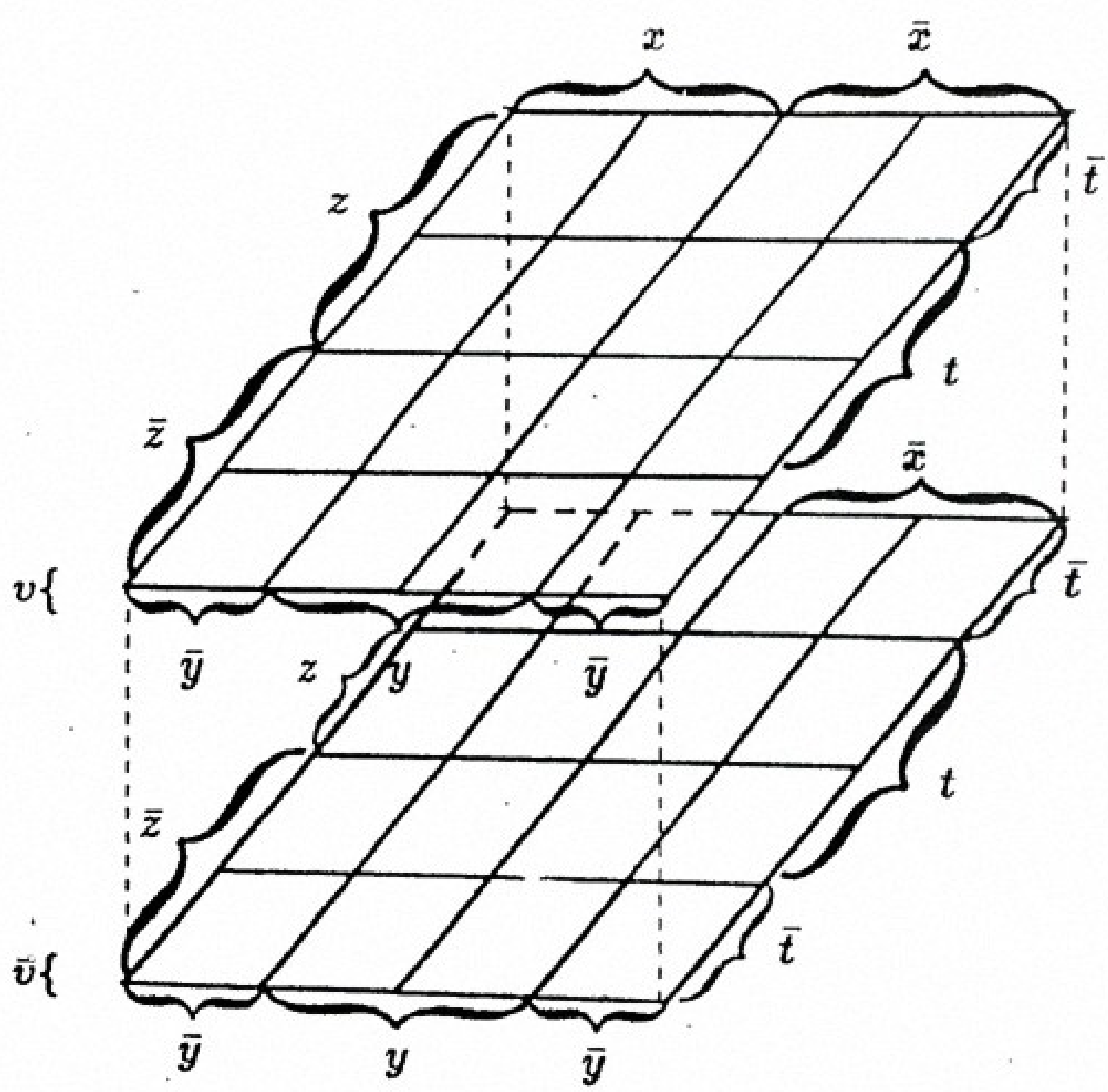
**Bước 3**: còn lại ô (1,1) nằm trong 2 tế bào lớn $x\bar{y}$ và $xz$. Chọn 1 trong 2 tế bào này ta đều phủ kín biểu đồ Karnaugh của $f$.

**Bước 4**: ta có 2 công thức đều là công thức đa thức tối tiểu

$$f = yz \vee \bar{y}\bar{z} \vee x\bar{y}$$
$$f = yz \vee yz \vee xz$$

**Trường hợp 5, 6 biến:**

Đối với hàm Bool 5 biến, ta dùng 2 lớp hình vuông 16 ô để biểu diễn 32 ô của $B^5$, một lớp ứng với giá trị của biến thứ 5 $v = 0$ và lớp ứng với $v = 1$




Biểu đồ Karnaugh của 1 hàm Bool theo 5 biến $x, y, z, t, v$ được thiết lập bằng cách gạch chéo các ô trong 2 lớp trên ứng với các điểm ở đó $f$ lấy giá trị 1. Ở đây ngoài các tế bào là những hình chữ nhật trong mỗi lớp, ta có các tế bào là 2 hình chữ nhật (tế bào) thuộc 2 lớp có cùng hình chiếu xuống một mặt phẳng nằm ngang, hay nói cách khác, khối chữ nhật 3 chiều với chiều cao 2 lớp và đáy là một tế bào. Bằng cách này ta được các tế bào là biểu đồ Karnaugh của tích của $p(1 \leq p \leq 5)$ thừa số là từ đơn. Tế bào tương ứng sẽ có $2^{5-p}$ ô. Phương pháp biểu đồ Karnaugh để tìm công thức đa thức tối tiểu hoàn toàn tương tự với trường hợp 4 biến.

Để xử lý trường hợp hàm 6 biến ta sẽ xử dụng 4 lớp 16 ô thay vì 2 lớp. Các lớp kể từ trên xuống bây giờ ứng với $v = 1$, $w = 0$; $v = 1$, $w = 1$; $v = 0$, $w = 1$; $v = 0, w = 0$. Phương pháp tìm công thức đa thức tối tiểu cũng tương tự nhưng hình vẽ phức tạp hơn. Do đó đối với trường hợp này hay trường hợp nhiều biến hơn ta sẽ dùng phương pháp "Thỏa thuận" dưới đây.

## §5 Phương pháp thỏa thuận

Nhắc lại hai bài toán chính để tìm công thức đa thức tối tiểu của một hàm Bool $f$:

5.1 Tìm tất cả các tiền đề nguyên tố của $f$.

5.2 Tìm cách biểu diễn $f$ như là tổng tối tiểu của các tiền đề nguyên tố.

Để giải quyết bài toán 5.1 ta sẽ dùng phương pháp Thỏa thuận.

**Định nghĩa 4.5.1**: Giả sử $x$ là một trong số các biến Bool và $m_1, m_2$ là hai đơn thức không chia hết cho cả $x$ lẫn $\bar{x}$. Khi ấy $m_1m_2$ được nói là *thỏa thuận* giữa hai đơn thức $xm_1$ và $\bar{x}m_2$.

**Chú ý**: Nếu có một biến thứ hai $y$ sao cho $m_1$ chia hết cho $y$ (hoặc $\bar{y}$) và $m_2$ chia hết cho $\bar{y}$ (hoặc $y$), khi ấy thỏa thuận $m_1m_2$ rõ ràng bằng 0. Do đó cho trước hai đơn thức, có 3 trường hợp có thể xảy ra:

**Trường hợp 1**: không tìm được thỏa thuận của chúng vì không có biến $x$ nào như trong Định nghĩa 4.5.1

**Trường hợp 2**: thỏa thuận của chúng bằng 0 vì có ít nhất 2 biến Bool thỏa Định nghĩa 4.5.1

**Trường hợp 3**: chỉ có một biến Bool thỏa Định nghĩa 4.5.1 và do đó thỏa thuận của 2 đơn thức cho trước là một đơn thức ($\neq 0$).

**Ví dụ:**

1. $xz$ và $y\bar{t}$ không có thỏa thuận
2. $x\bar{y}z$ và $y\bar{z}t$ có thỏa thuận bằng 0
3. $x\bar{y}z$ và $yt$ có thỏa thuận là $xzt$

**Định lý 4.5.1**: Thỏa thuận của hai đơn thức luôn luôn được trội bởi tổng Bool của hai đơn thức ấy.

**Chứng minh**: Xét 2 đơn thức $xm_1$ và $\bar{x}m_2$ với thỏa thuận $m_1m_2$. Ta có:

$$m_1m_2 = m_1m_2(x \vee \bar{x}) = xm_1m_2 \vee \bar{x}m_1m_2$$

Suy ra:

$$\begin{aligned} m_1m_2 \vee xm_1 \vee \bar{x}m_2 &= (xm_1m_2 \vee xm_1) \vee (\bar{x}m_2 \vee \bar{x}m_2m_1) \\ &= xm_1 \vee \bar{x}m_2 \end{aligned}$$

Nghĩa là $m_1m_2 \prec xm_1 \vee \bar{x}m_2$

• **đpcm**

Với khái niệm thoả thuận, ta có phương pháp sau để xác định tất cả các tiền đề nguyên tố của một hàm Bool $f$.

**Bước 1**: Viết $f$ dưới dạng một công thức thu gọn tùy ý (dạng nối rời chính tắc chẳng hạn):

$$f = m_1 \vee m_2 \vee \ldots \vee m_r$$

Đặt $\mathcal{T} = \{m_1, m_2, \ldots, m_r\}$

Gọi $\mathcal{V}$ là danh sách các biến theo một thứ tự nhất định nhưng tùy ý.

**Bước 2**: Trong bước 2, ta sẽ cập nhật dần $\mathcal{T}$ theo từng biến trong $\mathcal{V}$ như sau:

i) Giả sử $x$ là một biến trong $\mathcal{V}$ mà ta đang xét tới với $\mathcal{T}$ đã được cập nhật theo các biến trước $x$. Ta phân hoạch $\mathcal{T}$ thành 3 phần (rời nhau):

* $\mathcal{A}$: gồm các đơn thức chia hết cho $x$
* $\mathcal{B}$: gồm các đơn thức chia hết cho $\bar{x}$

* $\mathcal{C}$: gồm các đơn thức không chia hết cho $x$ lẫn $\bar{x}$.

ii) Nếu $\mathcal{A} = \emptyset$ hay $\mathcal{B} = \emptyset$ ta sẽ xét biến kế tiếp $x$. Nếu không, ta thêm vào $\mathcal{T}$ tất cả các thỏa thuận của một đơn thức thuộc $\mathcal{A}$ và một đơn thức thuộc $\mathcal{B}$.

iii) Mỗi lần thêm một phần tử mới vào $\mathcal{T}$, ta phải duyệt lại và loại bớt những phần tử được trội thực sự bởi một phần tử khác (kể cả phần tử mới thêm vào).

<u>Bước 3</u>: Sau khi đã duyệt tất cả các biến trong $\mathcal{V}$, ta có:

**<u>Định lý 4.5.2</u>:** *Tập hợp $\mathcal{T}$ sau cùng trong Bước 3 chính là tập hợp tất cả các tiền đề nguyên tố của $f$.*

**<u>Chứng minh</u>:** Gọi $\nu$ là số biến trong $\mathcal{V}$, và $m$ là một tiền đề nguyên tố bất kỳ của $f$, ta sẽ chứng minh tập hợp $\mathcal{T}$ sau cùng sẽ chứa $m$ bằng quy nạp trên $\nu$.

Gọi $x$ là biến đầu tiên trong danh sách $\mathcal{V}$ và $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ là các tập hợp tương ứng như trong i).

**<u>Trường hợp 1</u>:** $m$ không chia hết cho $x$ lẫn $\bar{x}$. Ta có:

$$mx \prec \left(\bigvee_{n\in\mathcal{A}} n\right) x \vee \left(\bigvee_{p\in\mathcal{B}} px\right) \vee \left(\bigvee_{q\in\mathcal{C}} q\right) x$$

Ở đây ký hiệu $\bigvee\limits_{n\in\mathcal{A}} n$ để chỉ tổng Bool của tất cả các phần tử của $\mathcal{A}$. Các ký hiệu khác cũng tương tự. Để ý rằng nếu $p \in \mathcal{B}$ thì $p$ chia hết cho $\bar{x}$ nên $px = 0$. Do đó:

$$mx \prec \left(\bigvee_{n\in\mathcal{A}} n/x\right) x \vee \left(\bigvee_{q\in\mathcal{C}} q\right) x$$

Cho $x = 1$ ta được

$$m \prec \left(\bigvee_{n\in\mathcal{A}} n/x\right) \vee \left(\bigvee_{q\in\mathcal{C}} q\right)$$

Tương tự ta có:

$$m \prec \left(\bigvee_{p\in\mathcal{B}} p/\bar{x}\right) \vee \left(\bigvee_{q\in\mathcal{C}} q\right)$$

Suy ra

$$m \prec \left[\bigvee_{n\in\mathcal{A}, p\in\mathcal{B}} (n/x)(p/\bar{x})\right] \vee \left(\bigvee_{q\in\mathcal{C}} q\right)$$

Giả sử $\mathcal{T}$ đã được cập nhật theo biến $x$ như trong Bước 2 ở trên. Gọi $\mathcal{T}'$ là tập hợp con của $\mathcal{T}$ gồm các đơn thức không chia hết cho $x$ lẫn $\bar{x}$. Gọi $f'$ là tổng Bool của các đơn thức trong $\mathcal{T}'$ xem như hàm Bool theo các biến trong $\mathcal{V}' = \mathcal{V}\backslash[x]$. Rõ ràng $m$ là một tiền đề nguyên tố của $f'$ nên theo giả thiết quy nạp, sau khi cập nhật theo biến cuối cùng trong $\mathcal{V}'$, $\mathcal{T}'$ chứa $m$. Nhưng tập hợp $\mathcal{T}'$ sau cùng là tập hợp con của tập hợp $\mathcal{T}$ sau khi cập nhật theo biến sau cùng của $\mathcal{V}'$, vì trong quá trình cập nhật theo các biến của $\mathcal{V}'$, các đơn thức của $\mathcal{T}$ bị loại đi cũng chính là các đơn thức của $\mathcal{T}'$ bị loại đi hoặc là các đơn thức chia hết cho $x$ hoặc $\bar{x}$. Nói tóm lại ta đã chứng minh được tập hợp $\mathcal{T}$ sau cùng chứa $m$ trong trường hợp này.

<u>Trường hợp 2</u>: $m$ chia hết cho $x$ hay $\bar{x}$. Ta có thể giả sử $m$ chia hết cho $x$ vì trường hợp $m$ chia hết cho $\bar{x}$ được chứng minh tương tự.

Gọi $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ là 3 tập hợp tạo thành phân hoạch của $\mathcal{T}$ ứng với biến $x$ như trong Bước 2. Cho $x = 1$ ta được:

$$
\begin{aligned}
m/x &\prec \left(\bigvee_{n\in\mathcal{A}} (n/x)\right) \vee \left(\bigvee_{q\in\mathcal{C}} q\right) \\
\text{Suy ra } m &\prec \left(\bigvee_{n\in\mathcal{A}} n\right) \vee x\left(\bigvee_{q\in\mathcal{C}} q\right) \\
&\prec \left(\bigvee_{n\in\mathcal{A}} n\right) \vee \left(\bigvee_{q\in\mathcal{C}} q\right) = f
\end{aligned}
$$

Ứng với mỗi hàm Bool $g$ theo các biến trong $\mathcal{V}$, ta liên kết một hàm Bool $\bar{g}$ theo các biến trong $\mathcal{V}' = \mathcal{V}\backslash[x]$ bằng cách cho $x = 1$. Đặt $\mathcal{T}' = \mathcal{A} \cup \mathcal{C}$. Khi ấy $g \longmapsto \bar{g}$ là một song ánh giữa $\mathcal{T}'$ và một tập hợp $\bar{\mathcal{T}}'$ các đơn thức theo các biến trong $\mathcal{V}'$ vì không có phần tử nào của $\mathcal{C}$ là ước của một phần tử của $\mathcal{A}$ (công thức đa thức ban đầu của $f$ là rút gọn).

Ta có công thức đa thức rút gọn:

$$\bar{f}' = \left(\bigvee_{n\in\mathcal{A}} \bar{n}\right) \vee \left(\bigvee_{q\in\mathcal{C}} q\right)$$

Hơn nữa tương ứng $g \longmapsto \bar{g}$, nếu thu hẹp trên tập hợp $\mathcal{T}'$ đã được cập nhật đối với biến sau cùng, cũng là một song ánh giữa tập hợp này và tập hợp $\bar{\mathcal{T}}'$ đã được cập nhật theo biến sau cùng đối với hàm $\bar{f}'$, vì nếu có $\bar{m}_1 = \bar{m}_2$ với $m_1 \neq m_2$ thì một trong hai đơn thức $m_1, m_2$ là tích của đơn thức kia và $x$ nên đã được loại trong quá trình cập nhật.

Rõ ràng $\bar{m} \prec \bar{f}'$. Giả sử tồn tại đơn thức $\bar{m}'$ theo các biến trong $\mathcal{V}'$ sao cho:

$$\bar{m} \prec \bar{m}' \prec \bar{f}'$$

Ta có:

$$m = x\tilde{m} \prec x\tilde{m}' \quad \prec \quad x\tilde{f}' = \left(\bigvee_{n\in\mathcal{A}} x\tilde{n}\right) \vee x\left(\bigvee_{q\in\mathcal{C}} q\right)$$

$$\prec \quad f$$

Do $m$ là tiền đề nguyên tố, ta có $m = x\tilde{m}'$

Suy ra $\tilde{m} = \tilde{m}'$, nghĩa là $\tilde{m}$ là tiền đề nguyên tố của $\tilde{f}'$.

Như thế theo giả thiết quy nạp, $\tilde{\mathcal{T}}'$, sau khi cập nhật theo biến cuối cùng, sẽ chứa $\tilde{m}$. Tương tự như trong Trường hợp 1, ta thấy tập hợp $\mathcal{T}$, sau khi cập nhật đối với biến cuối cùng, sẽ chứa $\mathcal{T}'$.

Suy ra $m \in \mathcal{T}$

Cuối cùng, do cách cập nhật các đơn thức, không đơn thức nào trong $\mathcal{T}$ được trội thực sự bởi một đơn thức khác, nghĩa là các phần tử của $\mathcal{T}$ đều là tiền đề nguyên tố của $f$ • đpcm

**Ví dụ 1:** $f = xz\bar{t} \vee \bar{x}\bar{t}v \vee \bar{y}zv \vee \bar{t}\bar{v} \vee yztv$

Ta có quá trình cập nhật theo các biến trong $\mathcal{V} = [x, y, z, t, v]$ như sau:

<u>Biến $x$</u>: $xz\bar{t}$ $\quad \bar{x}\bar{t}v$ $\quad \bar{y}zv$ $\quad \bar{t}\bar{v}$ $\quad yztv$

<u>Thỏa thuận</u>: $z\bar{t}v$

<u>Biến y</u>: $y\cancel{z}tv$ $\quad \bar{y}zv$ $\quad xz\bar{t}$ $\quad \bar{x}\bar{t}v$ $\quad \bar{t}\bar{v}$ $\quad z\bar{t}v$

<u>Thỏa thuận</u>: $ztv$

<u>Biến z</u>: không có thỏa thuận.

<u>Biến t</u>: $ztv$ $\quad xz\bar{t}$ $\quad z\bar{t}v$ $\quad \bar{x}\bar{t}v$ $\quad \bar{t}\bar{v}$ $\quad \bar{y}zv$

<u>Thỏa thuận</u>: $xzv$

$z\cancel{t}v$ $\quad z\cancel{\bar{t}}v$ $\quad xz\bar{t}$ $\quad \bar{x}\bar{t}v$ $\quad \bar{t}\bar{v}$ $\quad \bar{y}\cancel{z}v$ $\quad x\cancel{z}v$

<u>Thỏa thuận</u>: $zv$

<u>Biến $v$</u>: $zv$ $\quad \bar{t}\bar{v}$ $\quad x\cancel{z}\bar{t}$ $\quad \bar{x}\bar{t}v$

<u>Thỏa thuận</u>: $z\bar{t}$

$\bar{t}\bar{v}$ $\quad \bar{x}\cancel{\bar{t}}v$ $\quad zv$ $\quad z\bar{t}$

<u>Thỏa thuận</u>: $\bar{x}\bar{t}$

Cuối cùng, tập hợp các tiền đề nguyên tố là

$$\mathcal{T} = \{\bar{x}\bar{t}, z\bar{t}, zv, \bar{t}\bar{v}\}.$$

**Ví dụ 2:** $f = \bar{x}\bar{y}zt \vee \bar{x}yzt \vee \bar{x}y\bar{z}t \vee xy\bar{z}t \vee xy\bar{z}\bar{t}$

<u>Biến $x$</u>: $\bar{x}y\bar{z}t$ $\quad xy\bar{z}t$ $\quad xy\bar{z}\bar{t}$ $\quad \bar{x}\bar{y}zt$ $\quad \bar{x}yzt$

<u>Thỏa thuận</u>: $y\bar{z}t$

<u>Biến y</u>: $\bar{x}\bar{y}zt$ $\quad \bar{x}yzt$ $\quad xy\bar{z}\bar{t}$ $\quad y\bar{z}t$

<u>Thỏa thuận</u>: $\bar{x}zt$

<u>Biến z</u>: $y\bar{z}t$ $\quad \bar{x}zt$ $\quad xy\bar{z}\bar{t}$

<u>Thỏa thuận</u>: $\bar{x}yt$

<u>Biến t</u>: $y\bar{z}t$ $\quad xy\bar{z}\bar{t}$ $\quad \bar{x}zt$ $\quad \bar{x}yt$

<u>Thỏa thuận</u>: $xy\bar{z}$

Như vậy tập hợp các tiền đề nguyên tố là

$$\mathcal{T} = \{xy\bar{z}, \bar{x}yt, \bar{x}zt, y\bar{z}t\}.$$

Bây giờ ta xét bài toán 5.2: biểu diễn hàm Bool $f$ như là tổng tối tiểu của các tiền đề nguyên tố. Trong phương pháp Biểu đồ Karnaugh, bài toán trên chính là bài toán phủ tối tiểu của biểu đồ Karnaugh của hàm $f$ bởi các tế bào lớn. Đó là một họ $\mathcal{O}$ các tế bào lớn sao cho:

i) mỗi ô trong biểu đồ Karnaugh nằm trong ít nhất một tế bào lớn thuộc $\mathcal{O}$

ii) nếu rút bớt một tế bào lớn thuộc $\mathcal{O}$ thì phần còn lại không thỏa i).

Do các ô thuộc biểu đồ Karnaugh của $f$ chính là biểu đồ Karnaugh của một từ tối tiểu trội bởi $f$, ta có thể phát biểu bài toán phủ tổng quát như sau:

<u>**Bài toán phủ**</u>: tìm một họ $\mathcal{T}_0$ các tiền đề nguyên tố của $f$ sao cho:

i) mỗi từ tối tiểu trội bởi $f$ được trội bởi một tiền đề thuộc $\mathcal{T}_0$

ii) họ $\mathcal{T}_0$ là tối tiểu, nghĩa là nếu rút bớt một phần tử thì phần còn lại không thỏa i).

Gọi $\mathcal{T} = \{m_1, \ldots, m_p\}$ là tập hợp tất cả các tiền đề nguyên tố của $f$ mà ta tìm được khi giải Bài toán 5.1.

Ta đưa vào các biến Bool $a_1, a_2, \ldots, a_p$ và thiết lập một hệ phương trình Bool theo các biến Bool trên như sau:

Với mỗi từ tối tiểu $t$ trội bởi $f$, gọi $m_{i_1}, m_{i_2}, \ldots, m_{i_k}$ là tất cả các tiền đề nguyên tố của $f$ trội $t$. Khi ấy ta có một phương trình:

$$a_{i_1} \vee a_{i_2} \vee \ldots \vee a_{i_k} = 1$$

Cho $t$ chạy khắp các từ tối tiểu trội bởi $f$, ta được một hệ $q$ phương trình trong đó $q$ là số các từ tối tiểu trội bởi $f$. Giải hệ phương trình Bool trên ta được các nghiệm là bộ $p$:

$$\begin{cases} a_1 & = & b_1 \\ a_2 & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_p & = & b_p \end{cases}$$

trong đó $b_1, b_2, \ldots, b_p$ là các giá trị cố định bằng 1 hoặc tùy ý. Với các $b_i = 1$ ta có $a_i = 1$, nghĩa là tiền đề nguyên tố $m_i$ được chọn để phủ $f$. Để giải hệ phương trình Bool có dạng trên, ta thực hiện các bước sau.

__Bước 1__: loại bỏ các phương trình trùng lắp, nói cách khác giả sử có hai phương trình có dạng:

$$\begin{array}{lcl} & a_{i_1} \vee a_{i_2} \vee \ldots \vee a_{i_k} & = & 1 \\ \text{và} & a_{j_1} \vee a_{j_2} \vee \ldots \vee a_{j_h} & = & 1 \end{array}$$

sao cho $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\} \subset \{j_1, j_2, \ldots, j_h\}$

Khi ấy phương trình thứ hai là hệ quả của phương trình đầu và do đó có thể được loại bỏ.

__Bước 2__: Vì hệ phương trình đồng thời nghiệm đúng, ta thấy nó tương đương với một phương trình duy nhất có vế trái là tích của tất cả các vế trái và vế phải bằng 1

Dùng luật phân bố khai triển vế trái và đưa nó về dạng một công thức đa thức.

__Bước 3__: Loại bỏ các đơn thức dư thừa, nghĩa là nó là bội của một đơn thức khác. Nói cách khác đưa vế trái của phương trình đã biến đổi ở Bước 2 về dạng một công thức đa thức rút gọn. Ở đây lưu ý rằng các đơn thức đều là tích của một số biến, không có thừa số đơn nào là phần bù của biến. Phương trình trở thành:

$$n_1 \vee n_2 \vee \ldots \vee n_r = 1$$

__Bước 4__: các lời giải là:

$$\begin{array}{llll} & n_1 & = & 1 \\ \text{hay} & n_2 & = & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \text{hay} & n_r & = & 1 \end{array}$$

Mỗi $n_i$ là tích của một số biến, nên lời giải tương ứng chính là các tiền đề nguyên tố tương ứng với biến đó.

**Ví dụ**: trong ví dụ 2 ở trên, ta có 4 tiền đề nguyên tố $m_1 = \bar{x}zt$, $m_2 = \bar{x}yt$,

$m_3 = y\bar{z}t$, $m_4 = xy\bar{z}$, và 5 từ tối tiểu $t_1 = \bar{x}\bar{y}zt$, $t_2 = \bar{x}yzt$, $t_3 = \bar{x}y\bar{z}t$, $t_4 = xy\bar{z}t$, $t_5 = xy\bar{z}\bar{t}$.

Ta có hệ 5 phương trình:

$$\begin{cases} a_1 & = & 1 \\ a_1 \vee a_2 & = & 1 \\ a_2 \vee a_3 & = & 1 \\ a_3 \vee a_4 & = & 1 \\ a_4 & = & 1 \end{cases}$$

Phương trình thứ hai là hệ quả của phương trình đầu và phương trình thứ 4 là hệ quả của phương trình cuối: loại bỏ chúng và lấy tích ta được phương trình duy nhất:

$$a_1(a_2 \vee a_3)a_4 = 1$$

Khai triển ta được:

$$a_1a_2a_4 \vee a_1a_3a_4 = 1$$

Do đó ta có hai lời giải:

$a_1a_2a_4 = 1$

hay $a_1a_3a_4 = 1$

Nói cách khác ta có 2 công thức đa thức:

$f = m_1 \vee m_2 \vee m_4 = \bar{x}zt \vee \bar{x}yt \vee xy\bar{z}$

và $f = m_1 \vee m_3 \vee m_4 = \bar{x}zt \vee y\bar{z}t \vee xy\bar{z}$

Cả hai đều là công thức đa thức tối tiểu.

## Bài tập

**1.** Chứng minh rằng trong một đại số Bool $\mathcal{A}$

a) Phần bù của một phần tử là duy nhất

b) Suy ra Quy tắc De Morgan: $\forall x, y \in \mathcal{A}, \overline{x \vee y} = \overline{x} \wedge \overline{y}$ và $\overline{x \wedge y} = \overline{x} \vee \overline{y}$

**2.** Trong đại số Bool $\mathcal{A}$, xét quan hệ thứ tự $\prec$ xác định bởi định lý 4.1.1. Chứng minh rằng:

a) nếu $x \prec y$ thì $x \vee y = y$

b) nếu $x \prec y$ thì $\overline{y} \prec \overline{x}$

c) nếu $x \prec y$ và $z \prec t$ thì $x \wedge z \prec y \wedge t$

d) nếu $x \prec y$ và $z \prec t$ thì $x \vee z \prec y \vee t$

**3.** Trong một đại số Bool hãy tìm phần bù của:

$$(\overline{b} \wedge c) \quad \vee \quad (c \wedge d)$$
$$(b \wedge \overline{c}) \quad \vee \quad (\overline{b} \wedge a) \vee (a \wedge c)$$

**4.** Trong đại số Bool $\mathcal{A}$, một tập hợp con $\mathcal{B} \neq \emptyset$ của $\mathcal{A}$ được nói là một đại số con nếu với mọi $x, y \in \mathcal{B}$ thì $x \vee y$, $x \wedge y$ và $\overline{x}$ cũng là phần tử của $\mathcal{B}$.

a) Chứng minh rằng nếu $\mathcal{B}$ là một đại số con của $\mathcal{A}$ thì $0, 1 \in \mathcal{B}$

b) Với $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\{a, b, c\})$. Hãy tìm tất cả các đại số con của $\mathcal{A}$

c) Giả sử $\mathcal{B}$ là một tập hợp con của $\mathcal{A}$ sao cho với mọi $x, y \in \mathcal{B}$ thì $x \vee y \in \mathcal{B}$ và $\overline{x} \in \mathcal{B}$. Chứng minh rằng $\mathcal{B}$ là một đại số con của $\mathcal{A}$.

**5.** $\mathcal{A}$ là một đại số Bool, $a \in \mathcal{A}$. Tập hợp tất cả phần tử trội bởi $a$ có là một đại số Bool không? Nó có là đại số con không?

**6.** Giả sử $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ là một đẳng cấu đại số Bool. Chứng minh rằng:

a) nếu $a$ là một nguyên tử của $\mathcal{A}$ thì $\varphi(a)$ là một nguyên tử của $\mathcal{B}$

b) nếu $\mathcal{S}$ là một đại số con của $\mathcal{A}$ thì $\varphi(\mathcal{S})$ là một đại số con của $\mathcal{B}$

**7.** Gọi $\mathcal{U}_{210}$ là tập hợp các ước dương của 210. Trong $\mathcal{U}_{210}$ ta định nghĩa các phép toán $\vee, \wedge, -$ như sau: với mọi $x, y \in \mathcal{U}_{210}$ thì:

$$\begin{array}{rcll} x \vee y & = & \text{BSCNN } (x, y) & \text{(bội số chung nhỏ nhất)} \\ x \wedge y & = & \text{USCLN } (x, y) & \text{(ước số chung lớn nhất)} \\ \overline{x} & = & 210/x & \end{array}$$

Chứng minh rằng $\mathcal{U}_{210}$ là một đại số Bool.

**8.** a) Xét ánh xạ $\varphi : \mathcal{U}_{210} \to \mathcal{P}(\{a, b, c, d\})$

Sao cho $\varphi(2) = \{a\}, \varphi(3) = \{b\}, \varphi(5) = \{c\}$ và $\varphi(7) = \{d\}$.

Muốn cho $\varphi$ là một đẳng cấu đại số Bool thì ảnh của 35, 70, 42 là bao nhiêu?

b) Có bao nhiêu đẳng cấu khác nhau từ $\mathcal{U}_{210}$ lên $\mathcal{P}(\{a, b, c, d\})$.

**9.** Giả sử $\mathcal{B}$ là một đại số Bool và $\mathcal{A}$ là một tập hợp khác $\emptyset$. Với $f, g \in \mathcal{B}^{\mathcal{A}}$ định nghĩa:

$\forall x \in \mathcal{A};\ (f \vee g)(x) = f(x) \vee g(x)$

$\forall x \in \mathcal{A};\ (f \wedge g)(x) = f(x) \wedge g(x)$

$\forall x \in \mathcal{A};\ \overline{f}(x) = \overline{f(x)}$

a) Chứng minh rằng $\mathcal{B}^{\mathcal{A}}$ là một đại số Bool với các phép toán trên.

b) Chứng minh rằng thứ tự tương ứng trên $\mathcal{B}^{\mathcal{A}}$ chính là thứ tự trong bài tập 27, chương 3.

**10.** Giả sử $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ là hai đại số Bool. Trên $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ định nghĩa:

$$\begin{array}{rcl} (x, y) \vee (z, t) & = & (x \vee z, y \vee t) \\ (x, y) \wedge (z, t) & = & (x \wedge z, y \wedge t) \\ \overline{(x, y)} & = & (\overline{x}, \overline{y}) \end{array}$$

Chứng minh rằng $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ là một đại số Bool với các phép toán trên.

**11.** Trên đại số Bool $\mathcal{A}$ định nghĩa phép toán

$$a \oplus b = (a \wedge \overline{b}) \vee (\overline{a} \wedge b) \qquad (*)$$

a) Chứng minh rằng phép toán trên thỏa: $\forall a, b, c \in \mathcal{A}$

$$\begin{aligned}
(a \oplus b) \oplus c &= a \oplus (b \oplus c) \\
a \oplus b &= b \oplus a \\
a \oplus 0 &= a \\
a \oplus a &= 0 \\
a \wedge (b \oplus c) &= (a \wedge b) \oplus (a \wedge c)
\end{aligned}$$

Nghĩa là $(\mathcal{A}, \oplus, \wedge)$ là một vành giao hoán.

b) Ngược lại nếu $\oplus$ là một phép toán trên $\mathcal{A}$ thỏa các điều kiện trên thì $(*)$ được thỏa.

**12.** Cho trước phần tử $a$ của đại số Bool $\mathcal{A}$. Có thể nói gì về phần tử $b$ thỏa một trong các điều kiện sau:

a) $a \wedge b = 0$

b) $a \vee b = 1$

c) $a \wedge b = 0$ và $a \vee b = 1$

**13.** Trong một đại số Bool $\mathcal{A}$ ta khảo sát phương trình:

$$a \vee x = b \tag{1}$$

trong đó $a$ và $b$ là hai phần tử cho trước của $\mathcal{A}$ và $x$ là ẩn.

a) Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để cho (1) có ít nhất một nghiệm là $a \prec b$.

b) Đặt $y = x \vee \overline{a}$. Chứng minh rằng $b \wedge y = x$ và $b \vee y = 1$.

c) Nếu $x$ là một nghiệm, chứng minh rằng $\overline{a} \wedge b \prec x \prec b$. Phát biểu và chứng minh phần đảo.

d) Chứng minh rằng nghiệm của (1) gồm tất cả các phần tử có dạng $x = b \wedge c$ với $c \succ \overline{a}$.

e) Khảo sát tương tự cho phương trình $a \wedge x = b$

**14.** Tập hợp $\mathcal{U}_{1728}$ có là một đại số Bool không? Có các phép toán nào khác để $\mathcal{U}_{1728}$ trở thành đại số Bool không?

**15.** a) Mở rộng định nghĩa trong bài tập 10 cho tích của $n$ đại số Bool $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \times \ldots \times \mathcal{A}_n$.

b) Đặc biệt với $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2 = \ldots = \mathcal{A}_n = B \equiv \{0, 1\}$ hãy xác định thứ tự tương ứng với cấu trúc đại số Bool trên $B^n$. Chứng minh rằng mọi đại số Bool có $n$ nguyên tử đều đẳng cấu với $B^n$

**16.** Giả sử $x$ là một phần tử bất kỳ của đại số Bool có $n$ nguyên tử. Gọi $d(x)$ là số đỉnh tối thiểu cần phải đi qua để đi từ 0 đến $x$ dọc theo các mũi tên của biểu đồ Hasse ($d(0) = 0$).

a) Tính $d(a)$ khi $a$ là một nguyên tử

b) Chứng minh rằng với $x, y$ tùy ý ta có:

$$d(x \vee y) = d(x) + d(y) - d(x \wedge y)$$

**17.** Tìm giá trị của các hàm Bool dưới đây khi các biến $x, y, z$ và $t$ lấy các giá trị 1,1,0 và 0:

a) $\overline{xy} \vee \bar{x}\bar{y}$ b) $t \vee \bar{x}y$

c) $tx \vee \bar{y} \vee yz$ d) $tx \vee xy \vee yz$

e) $(tx \vee y\bar{z}) \vee t\bar{y} \vee \overline{(t \vee y)(\bar{x} \vee y)}$

**18.** Tìm tất cả các giá trị của $y$ và $z$ để các biểu thức dưới đây luôn luôn lấy giá trị 1 biết rằng $x = 1$:

a) $x \vee xy \vee z$ b) $xy \vee z$ c) $\bar{x}y \vee xz$ d) $\bar{x}y \vee z$

**19.** Tìm từ tối tiểu theo 4 biến $x, y, z, t$ biết rằng nó lấy giá trị 1 tại:

a) $x = t = 0,\ y = z = 1$ b) $x = y = 1,\ z = t = 0$

c) $x = y = z = 1,\ t = 0$ d) $x = y = z = t = 0$

**20.** a) Có bao nhiêu hàm Bool 6 biến lấy giá trị 1 tại các điểm có đúng hai thành phần có giá trị 1 (tại các điểm khác hàm Bool có thể bằng 0 hay 1)

b) Có bao nhiệu hàm Bool 6 biến lấy giá trị 1 tại các điểm có ít nhất 2 thành phần có giá trị 1 (tại các điểm khác hàm Bool có thể bằng 0 hay 1)

c) Có bao nhiêu hàm Bool theo 6 biến không phụ thuộc biến thứ nhất. Có bao nhiêu hàm không phụ thuộc 3 biến đầu tiên.

**21.** Tìm các hàm Bóol theo 2 biến sao cho:

$$f(x,y) = f(y,x) \quad \forall x, y$$

**22.** Xác định tất cả các hàm Bool theo 3 biến sao cho:

$$f(x,y,z) = f(y,z,x) \quad \forall x, y, z$$

(Hướng dẫn: lập bảng chân trị)

**23.** Xác định các hàm Bool theo 3 biến biết rằng nó không thay đổi giá trị nếu ta hoán vị 2 biến bất kỳ? Câu hỏi tương tự cho hàm Bool 4 biến

(Hướng dẫn: lập bảng chân trị)

**24.** Tồn tại hay không một hàm Bool 3 biến khác 0 biết rằng nó được thay bằng phần bù nếu ta hoán vị 2 biến bất kỳ? Câu hỏi tương tự cho hàm Bool $n$ biến

**25.** Một hàm Bool $n$ biến $f$ được nói là hàm *chẵn* nếu

$$f(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_n}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n), \forall x_1, x_2, \ldots, x_n$$

Có bao nhiêu hàm chẵn theo $n$ biến? Xác định các hàm này khi $n = 2$

**26.** Một hàm Bool $n$ biến $f$ được nói là hàm *lẻ* nếu

$$f(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_n}) = \overline{f}(x_1, x_2, \ldots, x_n), \forall x_1, x_2, \ldots, x_n$$

Có bao nhiêu hàm lẻ theo $n$ biến? Xác định các hàm này khi $n = 2$

**27.** a) Chứng minh rằng mọi hàm Bool $f$ theo $n$ biến đều được viết dưới dạng:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = [x_1 f(1, x_2, \ldots, x_n)] \vee [\overline{x_1} f(0, x_2, \ldots, x_n)]$$

b) Sử dụng hệ thức trên để xây dựng một song ánh giữa $\mathcal{F}_n \times \mathcal{F}_n$ và $\mathcal{F}_{n+1}$. Áp dụng để tìm lại số phần tử của $\mathcal{F}_n$

c) Sử dụng hệ thức trên để chứng minh lại sự tồn tại của dạng nối rời chính tắc.

**28.** Giả sử $f$ là tích của $p$ từ đơn phân biệt

a) Trong dạng nối rời chính tắc của $f$ có bao nhiêu từ tối tiểu xuất hiện

b) có bao nhiêu hàm Bool trội $f$

**29.** Tìm dạng nối rời chính tắc của các hàm Bool $f$ theo 4 biến biết rằng $f$ thỏa một trong hai điều kiện:

a) $f^{-1}(1) = \{0101, 0110, 1000, 1011\}$

b) $f^{-1}(0) = \{0000, 0001, 0010, 0100, 1000, 1001, 0110\}$

Ở đây ta viết 0101 thay vì $(0, 1, 0, 1)$ để chỉ phần tử của $B^4$

**30.** Tìm dạng nối rời chính tắc của các hàm Bool theo 3 biến:

a) $xy \vee \overline{x}z$

b) $x(y \vee \overline{x})z$

c) $xy \vee yz \vee xz$

d) $x\overline{y}(z \vee \overline{x}y)$

e) $xyz \vee \overline{x}\overline{z}$

f) $[x(y \vee z) \vee \overline{x}] \vee \overline{y}$

g) $(x \vee yz)(\overline{x} \vee \overline{y}\overline{z})$

h) $x(y \vee xz) \vee \overline{z}$

i) $(x \vee yz)(x \vee zx)(z \vee xy)$

j) $(\overline{x} \vee yz)(\overline{y} \vee zx)(\overline{z} \vee xy)$

**31.** Tìm dạng nối rời chính tắc của hàm Bool theo 4 biến:

a) $(xy \vee zt)(x \vee z)(xz \vee yt)(xt \vee yz)$

b) $xyz \vee \overline{y}zt \vee x\overline{t}[(x \vee y)(z \vee t)] \vee [(x \vee z)(y \vee t)] \vee [(x \vee t)(y \vee z)]$

c) $(xz \vee y\overline{z} \vee x\overline{t})xyt \vee yz \vee zt \vee tx$

**32.** Một bài thi có 4 câu $A, B, C, D$ với số điểm tối đa $8, 5, 4, 3$. Nếu trả lời đúng một câu, sinh viên được điểm tối đa, trả lời sai được 0 điểm. Muốn đạt sinh viên phải được 10 điểm trở lên. Ta liên kết với các câu 4 biến Bool $a, b, c, d$ và một hàm Bool $f(a, b, c, d)$ lấy giá trị 1 nếu sinh viên đạt và bằng 0 nếu sinh viên không đạt. Hãy tìm dạng nối rời chính tắc của hàm $f$.

**33.** Hãy vẽ mạng sử dụng các cổng NOT, AND, OR để tổng hợp hàm Bool

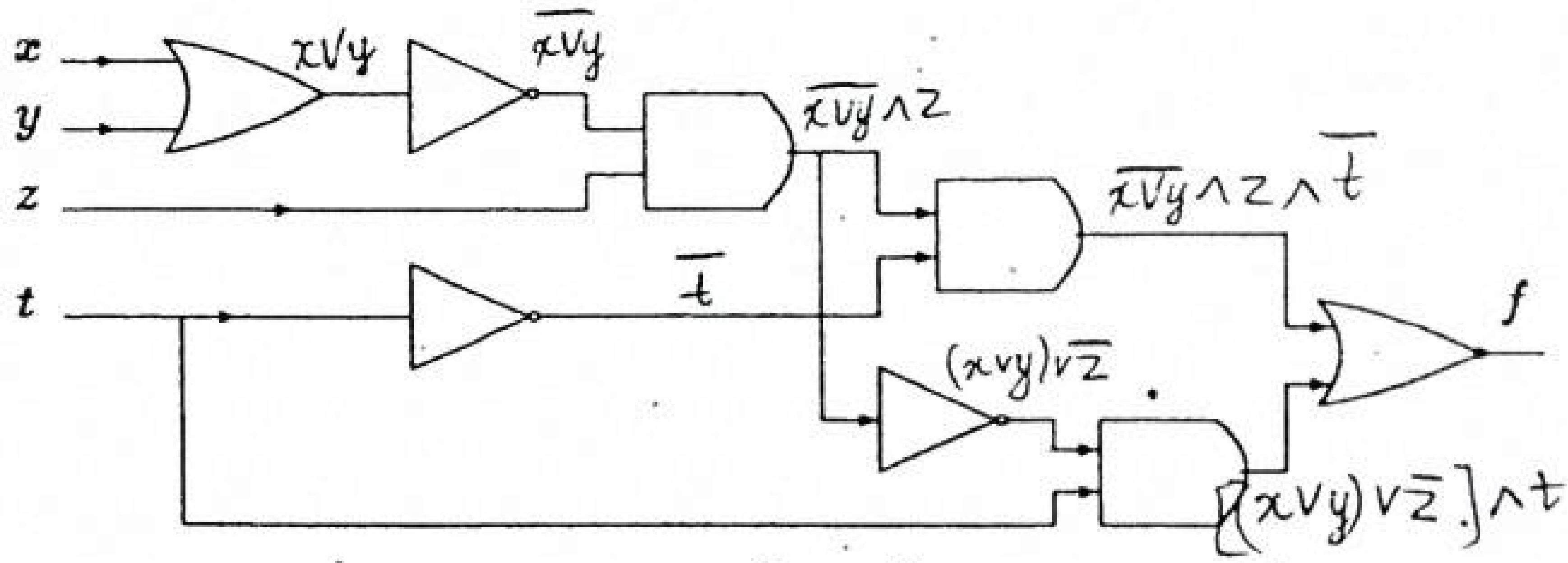
a) $(\bar{x} \vee \bar{y})(x \vee \bar{y})(\bar{x} \vee y)$ b) $x\bar{z} \vee y\bar{z} \vee x$

c) $(x \vee \bar{z})(y \vee \bar{z})\bar{x}$ d) $x \vee \bar{y}(\bar{x} \vee z)$

**34.** Hãy tổng hợp phép toán $\vee$ mà chỉ sử dụng cổng AND và cổng NOT

**35.** Hãy tổng hợp các cổng $AND$, $OR$, $NOT$ mà chỉ sử dụng cổng NOR

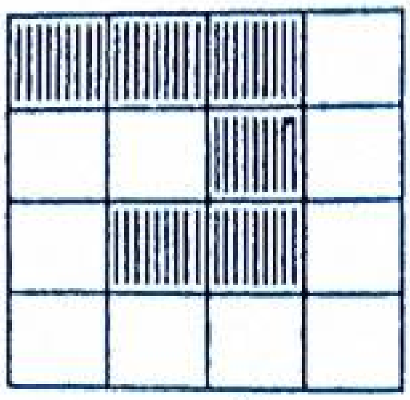
**36.** Viết ra biểu thức của hàm $f$ tổng hợp bởi mạng các cổng dưới đây:

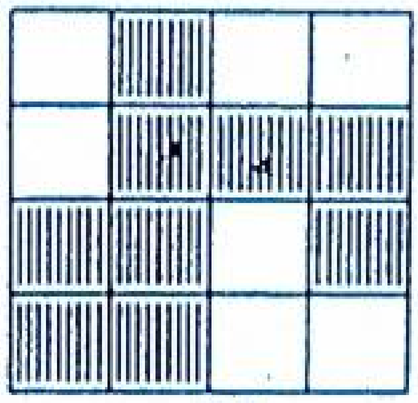


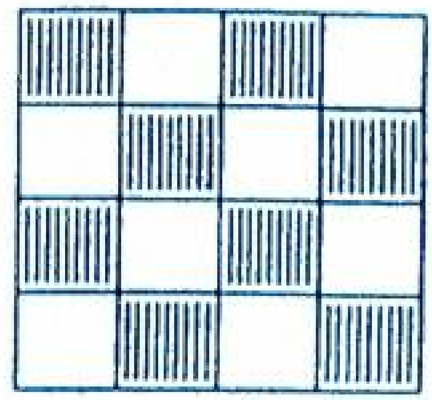

$f = (\overline{x \vee y} \wedge z \wedge \bar{t}) \vee [((x \vee y) \vee \bar{z}) \wedge t)] = 1$

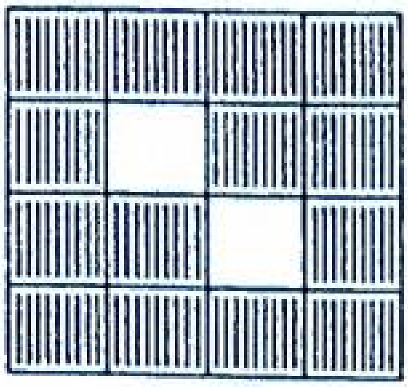
**37.** Hãy vẽ một mạch chỉ có cổng NOR tổng hợp hàm Bool theo 4 biến $f$ sao cho $f$ lấy giá trị 1 khi và chỉ khi số biến lấy giá trị 1 là số chẵn. Tương tự đối với cổng NAND.

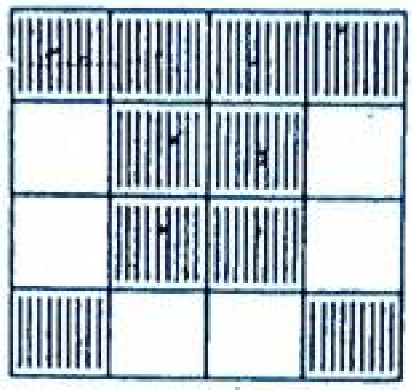
**38.** Tìm công thức đa thức tối tiểu của các hàm Bool có biểu đồ Karnaugh dưới đây:

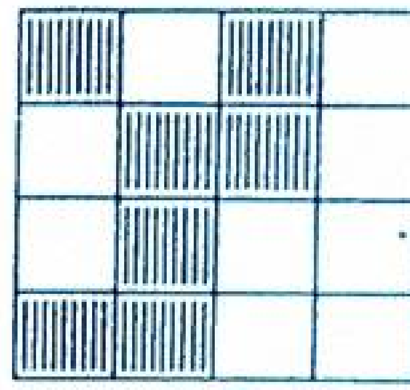

a)


b)


c)


d)


e)


f)

**39.** Tìm công thức đa thức tối tiểu của các hàm sau:

a) $\overline{z}(x\overline{y} \vee yt) \vee y(x\overline{z} \vee \overline{x}z)$

b) $xyzt \vee \overline{x}\overline{y} \vee x\overline{z}t \vee y\overline{z}\overline{t}$

c) $\overline{y}(zt \vee \overline{z}\overline{t}) \vee y(\overline{z}\overline{t} \vee xzt) \vee \overline{x}zt$

d) $xyzt \vee x\overline{y} \vee x\overline{z} \vee yz \vee xy(\overline{z} \vee \overline{t})$

e) $\overline{z}\overline{t} \vee xy\overline{t} \vee \overline{x}y\overline{z} \vee \overline{x}\overline{y}z\overline{t} \vee x\overline{y}\overline{z}t \vee \overline{y}zt$

f) $(x \vee t)(x \vee z)(y \vee t)(y \vee z)$

g) $yt(y \vee z) \vee \overline{z}(x \vee y) \vee xy\overline{z}$

h) $yt(x \vee \overline{z}) \vee \overline{x}(\overline{x}\overline{t} \vee yt) \vee \overline{x}\overline{y}\overline{z}t$

i) $y\overline{t} \vee xy\overline{z} \vee \overline{x}yz \vee xyzt \vee \overline{x}\overline{y}\overline{z}\overline{t}$

**40.** Tìm các công thức đa thức tối tiểu của hàm Bool $f$ dưới đây. Cho biết số cổng để thiết kế các mạng tối ưu tổng hợp $f$

a) $f$ là hàm Bool 3 biến và lấy giá trị 1 khi và chỉ khi có đúng 2 biến lấy giá trị 1

b) $f$ là hàm Bool 3 biến và lấy giá trị 1 khi và chỉ khi có ít nhất 2 biến lấy giá trị 1

c) $f$ là hàm Bool 4 biến và lấy giá trị 1 khi và chỉ khi số biến lấy giá trị 1 là một số lẻ.

# Giải đáp một số bài tập

## Chương 1

**1.** Các mệnh đề là:

a) c) f)

**2.** a) $P \wedge Q$ b) $\neg P \wedge Q$ c) $P \vee (\neg Q \wedge \neg P)$ d) $P \rightarrow \neg Q$
e) $(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$

**3.** a) $P \wedge R \wedge \neg Q$ b) $P \wedge Q \wedge \neg(Q \wedge R)$ c) $\neg(R \wedge \neg P)$
d) $\neg[(R \vee Q) \wedge \neg P]$ e) $\neg Q \wedge \neg R \wedge P$

**12.** b) c) e) f)

**13.** a) b) d) . f) h)

**14.** a) Để dạng mệnh đề đã cho lấy chân trị 1, hai dạng mệnh đề sau cần lấy chân trị 1:

$$(\neg q \vee r) \wedge \neg s, \quad \text{và } \neg s \rightarrow \neg r$$

Nghĩa là $\neg s$, $\neg r$, và $\neg q \vee r$ phải lấy chân trị 1.
Tóm lại ta phải chọn: $p = 1$, $q = 0$, $r = 0$ và $s = 0$.

b) Do $\neg r \wedge p$ có chân trị 0 ta suy ra $\neg s$ có chân trị 0, nghĩa là $s$ có chân trị 1. Trong trường hợp này $q$ và $r$ có chân trị tùy ý.

**15.** Dạng mệnh đề đã cho là:
a) Mâu thuẫn b), c) Tùy ý d) Hằng đúng

**17.** a) Thay thế $p \vee q$ bởi $s$ ta cần chứng minh dạng mệnh đề $(s \rightarrow r) \leftrightarrow (\neg r \rightarrow \neg s)$ là hằng đúng.

Do Qui tắc thay thế thứ nhất, dạng mệnh đề trên tương đương logic với:

$$(\neg s \vee r) \leftrightarrow (r \vee \neg s) \Leftrightarrow 1$$

b) Thay $(p \vee q) \rightarrow r$ bởi $u$ ta cần chứng minh dạng mệnh đề sau là hằng đúng:

$$[u \vee (s \wedge t)] \leftrightarrow [(u \vee s) \wedge (u \vee t)]$$

Đây chính là luật phân bố.

**22.** a) Sai b) Đúng, Phương pháp phủ định
c) Sai d) Đúng, Tam đoạn luận

**29.** a), b) $p = 1, q = 1, r = 1, s = 0$

**30.** a) Phép suy luận có dạng:

$$\begin{array}{ll} (p \wedge q) & \rightarrow r \\ r & \rightarrow s \\ \neg s & \\ \hline \therefore & \neg p \vee \neg q \end{array}$$

Sử dụng Tam đoạn luận và Phương pháp Phủ định.

b) Phép suy luận có dạng:

$$\begin{array}{ll} p & \rightarrow q \\ r & \rightarrow s \\ (s \wedge q) & \rightarrow (p \wedge t) \\ t & \rightarrow \neg p \\ \hline \therefore & \neg r \vee \neg p \end{array}$$

Dùng phép Phản chứng.

c) Phép suy luận có dạng:

$$\begin{array}{ll} p & \rightarrow q \\ r & \rightarrow s \\ (q \vee s) & \rightarrow t \\ \neg t & \\ \hline \therefore & \neg p \wedge \neg r \end{array}$$

Dùng Phương pháp Phủ định 3 lần.

**34.** a) Sai b) Đúng c) Đúng d) Đúng: chọn $x = 1$
e) Sai: chọn $x = 0$.

**37.** a) Đúng: nếu thay $x$ bởi phần tử tùy ý sao cho $p(x)$ đúng thì $x = 2$ hay $x = 3$. Khi đó $x > 0$.

b) Sai: chọn $x = 5$ thì $p(5)$ đúng và $\neg r(5)$ sai.

c) Đúng: chọn $x = 0$ thì $q(0)$ sai nên $q(0) \rightarrow r(0)$ đúng.

d) Đúng: chọn $x = 0$ thì $p(0)$ sai nên $p(0) \rightarrow \neg r(0)$ đúng.

**38.** a) Sai b) Đúng c) Đúng d) Đúng

e) Cho $y$ tùy ý, chọn $x = y$ thì $p(x, y)$ đúng

f) Sai vì có phủ định đúng là:$\forall y \exists x$, $\neg p(x, y)$. Thật vậy cho $y$ tùy ý, chọn $x = y + 1$ thì $\neg p(x, y)$ đúng.

g) Đúng h) Đúng

**39.** a) Sai: chọn $x = -1$ và $y = 0$ thì $x^2 > y^2$ nhưng $x < y$. Phủ định đã cho được viết đúng.

b) Đúng. Phủ định đã cho được viết đúng.

c) Đúng: $1.3 = 3$ là số lẻ. Phủ định được viết không chính xác. Phủ định đúng là: tích của hai số lẻ bất kỳ là số chẵn.

d) Đúng. Phủ định được viết không chính xác. Phủ định đúng là: tồn tại số hữu tỉ có bình phương là số vô tỉ.

**40.** a) Tồn tại số nguyên $n$ sao cho $x$ chia hết cho 2 và $n$ là số chẵn.

b) Tồn tại số nguyên chẵn có bình phương là số lẻ.

c) Tồn tại các số nguyên $k, m, n$ sao cho $k - m$, $m - n$ và $k - n$ là số lẻ.

d) Tồn tại số thực $x$ sao cho $x^2 > 16$ và $-4 \leq x \leq 4$.

e) Tồn tại số thực $x$ sao cho $|x - 3| < 7$ trong khi $x \leq -4$ hay $x \geq 10$.

**41.** a) $\forall x, \neg(p(x) \vee q(x)) \Leftrightarrow \forall x, \neg p(x) \wedge \neg q(x)$.

b) $\exists x, \neg(p(x) \wedge \neg q(x)) \Leftrightarrow \exists x, \neg p(x) \vee q(x) \Leftrightarrow \exists x, p(x) \rightarrow q(x)$.

c) $\exists x, \neg(p(x) \rightarrow q(x)) \Leftrightarrow \exists x, \neg(\neg p(x) \vee q(x)) \Leftrightarrow \exists x, p(x) \wedge \neg q(x)$.

d) $\forall x, (p(x) \vee q(x)) \wedge \neg p(x) \Leftrightarrow \forall x, q(x) \wedge \neg p(x)$.

**43.** a) $\exists u\, \forall x,\ xu = x$.

b) $\forall x\, \exists x',\ x + x' = 0$

c) $\forall x, (x \neq 0) \rightarrow (\exists x', xx' = 1)$.

d) Trong **Z** b) vẫn như trên trong khi đó c) phải được thay bởi $\forall x, (|x| = 1) \rightarrow (\exists x', xx' = 1)$.

**44.** a) $\forall x \in \mathbf{R}, ((x \neq 0) \rightarrow \exists! x' : xx' = 1)$

Nếu **R** được hiểu ngầm thì mệnh đề trên có thể viết

$$\forall x \neq 0, \exists! x' : xx' = 1)$$

b) $\forall x \in \mathbf{R}\ \forall y \in \boldsymbol{R}\ \exists! z \in \boldsymbol{R}: \ z = x + y$

c) $\forall x\ \exists! y: \ y = 3x + 7$

**45.** $\forall x\ \exists! y,\ y = -2x$ đúng trong khi $\exists! y \forall x,\ y = -2x$ sai.

Thật vậy ta chỉ cần kiểm tra $\exists y \forall x,\ y = -2x$ sai hay $\forall y \exists x,\ y \neq -2x$ đúng. Muốn vậy, ta cho $y = b$ tùy ý và chọn $x = -\frac{b}{2} + 1$ thì $b = -2x + 2 \neq -2x$.

Với kết quả trên thì a) sai và b) đúng.

**46.** Chọn $x = 0,\ y = 0,\ z = 2$ thì $p(x, y)$ và $p(x, z)$ đúng trong khi $y \neq z$. Như vậy $\forall x \exists! y\ p(x, y)$ sai.

Trong khi đó với $y = b$ tùy ý, chọn $x = b + 1$ thì $p(x, b)$ sai nên $\exists y \forall x,\ p(x, y)$ sai. Suy ra $\exists! y \forall x,\ p(x, y)$ cũng sai. Từ đó ta thấy cả hai kết luận a) và b) đều đúng.

**47.** Với tập hợp vũ trụ $\mathcal{U} = \{1, 2\}$ thì mệnh đề "$\exists! x,\ x > 1$" đúng trong khi v i $\mathcal{U} = \{1, 2, 3\}$ thì mệnh đề trên sai.

**49.** a) Đúng. Qui tắc đặc biệt hóa phổ dụng và Phương pháp khẳng định đã được sử dụng.

b) Sai. Có thể ông Bình đã đóng thuế nhưng vẫn không là công dân tốt (hay vi phạm luật đi đường chẳng hạn!).

c) Sai. Có thể Hà không quan tâm đến môi trường nhưng vẫn để riêng các túi nhựa bỏ đi (để giúp người đổ rác chẳng hạn!).

d) Sai. Có thể Minh không nộp bài chưa làm xong vì không chịu làm bài (và do đó không phải là sinh viên nghiêm túc).

**50.** a), b) hiển nhiên.

c) Sử dụng Qui tắc đặc biệt hóa phổ dụng, Qui tắc tổng quát hóa phổ dụng và Phép chứng minh theo trường hợp.

d) Xét 2 vị từ trên $\mathbf{Z}$:

$p(x)$ : "$x \geq 0$"

$q(x)$ : "$x \leq 0$"

Khi ấy "$\forall x, p(x) \vee q(x)$" đúng trong khi cả "$\forall x, p(x)$" và "$\forall x, q(x)$" đều sai.

**54.** Suy luận sai ngay trong bước qui nạp đầu tiên: $p(1) \rightarrow p(2)$.

**55.** Giả sử 3 số liên tiếp bất kỳ có tổng $\leq 38$. Khi ấy ta có:
$3.(1 + 2 + \ldots + 25) \quad \leq 25.38$
nghĩa là $25.39 \quad \leq 25.38$: mâu thuẫn.

**56.** a) Suy ra dễ dàng từ nguyên lý qui nạp.
b) Cần chứng minh bằng qui nạp bất đẳng thức phụ:
nếu $n > 2$ thì $2n + 1 < 2^n$
c) Cần chứng minh bằng qui nạp 2 bất đẳng thức phụ:

nếu $n > 5$ thì $6n + 10 < 2^n$
và nếu $n > 6$ thì $3n^2 + 3n + 1 < 2^n$

**57.** Giả sử

$$1 + 2 + \ldots + k = \frac{(k + \frac{1}{2})^2}{2}$$

Khi ấy

$$1 + 2 + \ldots + k + 1 = \frac{(k + \frac{1}{2})^2}{2} + k + 1 = \frac{(k + 1 + \frac{1}{2})^2}{2}$$

Tuy nhiên $S(1)$ đã sai nên không áp dụng nguyên lý qui nạp được.

**58.** Công thức cần chứng minh là

$$(n^2 + 1) + (n^2 + 2) + \ldots + (n + 1)^2 = n^3 + (n + 1)^3 \text{ với } n \geq 0$$

Giả sử công thức trên đúng với $n = k$. Ta có
$((k + 1)^2 + 1) + ((k + 1)^2 + 2) + \ldots + (k + 2)^2 =$
$(k^2 + 2k + 1 + 1) + (k^2 + 2k + 1 + 2) + \ldots + (k^2 + 2k + 1 + 2k + 1) +$
$((k + 1)^2 + 2k + 2) + ((k + 1)^2 + 2k + 3) =$
$(k^2 + 1) + (k^2 + 2) + \ldots + (k + 1)^2 + (2k + 1).(2k + 1) + 2(k + 1)^2 + 4k + 5 =$
$(k + 1)^3 + k^3 + 6k^2 + 12k + 8 = (k + 1)^3 + (k + 2)^3$

## Chương 2

**1.** Bốn tập hợp bằng nhau. Tuy nhiên 3 cách viết sau không hợp lệ vì có những phần tử được kể 2 lần trong tập hợp.

**2.** a) Đúng b) Đúng c) Đúng do a) d) Đúng do b)

e) Sai. Ta phải viết $\{\{2\}\} \subset A$. f) Sai. Ta phải viết $\{2\} \in A$

3. a) Sai. b), c), d) Đúng.

4. a) $\{0, 2\}$ b) $\{2, \frac{5}{2}, \frac{10}{3}, \frac{26}{5}, \frac{50}{7}\}$ c) $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{12}, \frac{1}{30}, \frac{1}{56}, \frac{1}{90}, \frac{1}{132}\}$

5. a) b) c) e) đúng. d) và f) sai.

7. Chỉ có d) khác $\emptyset$ vì phương trình tương ứng có nghiệm.

8. a) $\{1, 2, 3, 5\}$ b) $A$ c) và d) $\mathcal{U}\setminus\{2\}$
e) $\{4, 8\}$ f) $\{1, 2, 3, 4, 5, 8\}$ g) $\emptyset$ h) $\{1\}$ i) $\{1, 3, 4, 5, 8\}$

9. a) c) d) Đúng. b) e) f) Sai.

10. a) $E$ b) $B$ c) $D$ d) $D$ f) $E$ e) $\overline{A} = \{2n + 1/n \in \mathbf{Z}\}$

12. a) Sai, chọn $\mathcal{U} \neq \emptyset$ tùy ý và $A = C = \emptyset$, $B = \mathcal{U}$
b) Sai, chọn $\mathcal{U} \neq \emptyset$ tùy ý và $A = \emptyset$, $B = C = \mathcal{U}$
c) Đúng. Ta có:

$$(A \cap \bar{B}) \cup (C \cap \bar{B}) = (A \cup C) \cap \bar{B} = (B \cup C) \cap \bar{B} = (B \cap \bar{B}) \cup (C \cap \bar{B}) = C \cap \bar{B}$$

Suy ra $A \cap \bar{B} \subset A \cap (C \cap \bar{B}) = A \cap C \cap \bar{B} = B \cap C \cap \bar{B} = \emptyset$
Do 11. d) $A \subset B$. Tương tự ta có $B \subset A$. Nghĩa là $A = B$.

13. a) Sai. Chọn $A = \{1\}$, $B = \{2\}$. b) Đúng.

15. a) $A \cap (B \cap \bar{A}) = (A \cap \bar{A}) \cap B = \emptyset$
b) $(A \cap B) \cup (A \cap B \cap \bar{C} \cap D) \cup (\bar{A} \cap B) = B$.
c) $\bar{A} \cup \bar{B} \cup (A \cap B \cap \bar{C}) = \overline{A \cap B \cap C}$
d) Tập hợp đã cho bằng $\overline{A \cap B \cap C \cap D}$

**21.** a) $f \circ g(x) = 3x - 1$ và $g \circ f(x) = 3x - 3$
$h \circ g(x) = h(3x) = h(x)$; $g \circ h(x) = \begin{cases} 0 \text{ nếu } x \text{ chẵn} \\ 3 \text{ nếu } x \text{ lẻ} \end{cases}$
$f \circ g \circ h(x) = 3h(x) - 1$
b) $f^2(x) = x - 2$, $f^3(x) = x - 3$; $g^2(x) = 9x$, $g^3(x) = 27x$
$h^2 = h$, $h^3 = h^2 = h$. Bằng qui nạp $h^{100} = h$

**22.** $f^2(A) = f(T \cap (S \cup A)) = T \cap (S \cup (T \cap (S \cup A)))$
$= (T \cap (S \cup T)) \cap (S \cup A) = T \cap (S \cup A) = f(A)$

**23.** a) $f$ là song ánh. Ánh xạ ngược $f^{-1}$: $\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ cho bởi $f^{-1}(y) = y - 7$.

b) $f(1) = f(-3) = 0$ nên $f$ không đơn ánh.

c) Hàm số $f$ tăng ngặt trên $[4, 9]$ nên $f$ là đơn ánh. Mặt khác $f([4, 9]) \subset [21, 96]$. Hơn nữa với $y \in [21, 96]$ thì phương trình $x^2 + 2x - 3 = y$ có nghiệm duy nhất là $x = -1 + \sqrt{4 + y}$. Do đó $f$ là song ánh với ánh xạ ngược là $f^{-1}(y) = -1 + \sqrt{4 + y}$.

d) $f$ là song ánh. Ánh xạ ngược:

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} y \text{ nếu } y \geq 0 \\ \dfrac{y}{5} \text{ nếu } y < 5 \end{cases}$$

e) $f$ là song ánh. $f^{-1}(y) = \ln(y) - 1$, $y \in (0, +\infty)$.

f) $f$ là đơn ánh nhưng $f$ không toàn ánh vì $1 \notin f(A)$.

**27.** a) $f^{-1}(-10) = -3$, $f^{-1}(0) = 7$, $f^{-1}(2) = 1$, $f^{-1}(6) = 5$.

b) $f^{-1}([-5, -1]) = [2, 6]$

$f^{-1}([-2, 4]) = f^{-1}([-2, 0]) \cup f^{-1}((0, 3)) \cup f^{-1}([3, 4]) = (-1, 7]$

**28.** a) Chú ý rằng $f$ là một song ánh giữa $\mathbf{Z}^+ = \{1, 2, \ldots\}$ và tập hợp các số nguyên tự nhiên lẻ, cũng như là một song ánh giữa $\mathbf{Z}^- \cup \{0\} = \{\ldots, -2, -1, 0\}$ và tập hợp các số nguyên tự nhiên chẵn. Suy ra $f$ là một song ánh giữa $\mathbf{Z}$ và $\mathbf{N}$.

b) $$f^{-1}(y) = \begin{cases} \dfrac{y+1}{2} & \text{nếu } y \text{ là số nguyên tự nhiên lẻ} \\ -\dfrac{y}{2} & \text{nếu } y \text{ là số nguyên tự nhiên chẵn} \end{cases}$$

**29.** a) $f(x) = f(x') \Rightarrow g(f(x)) = g(f(x')) \Rightarrow x = x'$

b) Do $g \circ f$ toàn ánh nên cho $z \in C$ tùy ý, sẽ tồn tại $x \in A$ sao cho $z = g \circ f(x) = g(y)$ với $y = f(x) \in B$. Điều này chứng tỏ $g$ toàn ánh.

c) $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} & \text{nếu } x \text{ là số nguyên tự nhiên chẵn} \\ \dfrac{x-1}{2} & \text{nếu } x \text{ là số nguyên tự nhiên lẻ} \end{cases}$$

**30.** a) $f(n) = n \pm 1$ nên $n$ và $f(n)$ khác tính chẵn lẻ.

b) Giả sử $f(m) = f(n)$. Khi ấy $m$ và $n$ cùng tính chẵn lẻ nên $(-1)^m = (-1)^n$. Suy ra $m = n$ : $f$ là đơn ánh.

c) $f^2(n) = f(n) + (-1)^{f(n)} = n + (-1)^n - (-1)^n = n, \forall n \in \mathbf{Z}$
Như vậy $f$ là song ánh và $f^{-1} = f$.

d) Ta có $n = f^{-1}(365) = f(365) = 365 + (-1)^{365} = 364$.

**31.** i) Giả sử $m + n < m' + n'$. Khi ấy

$$\begin{aligned} f(m+n) &\leq \frac{(m+n)(m+n+3)}{2} \\ &\leq \frac{(m'+n'-1)(m'+n'+2)}{2} < f(m'+n') \end{aligned}$$

Tương tự nếu $m'+n' < m+n$ thì $f(m'+n') < f(m,n)$. Mặt khác nếu $m+n = m'+n'$ và $f(m,n) = f(m',n')$ thì $n = n'$ và $m = m'$. Tóm lại $f$ là đơn ánh.

ii) Đặt $A = f(\mathbf{N} \times \mathbf{N})$. Ta có $0 = f(0,0) \in A$

Mặt khác, giả sử $k = f(m,n)$. Khi ấy $k+1 = f(m-1, n+1)$ nếu $m > 0$ và $k+1 = f(n+1, 0)$ nếu $m = 0$. Suy ra $f(\mathbf{N} \times \mathbf{N}) = \mathbf{N}$ theo Nguyên lý qui nạp.

**33.** a) $\begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix} = 252$, b) $\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} = 35$

c) $\begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix} = 56$

**34.** a) Đó chính là các tập hợp có dạng $A \cup B$ với $A$ là 1 tập con $\neq \emptyset$ của $\{2,4,6,8,10\}$ và $B \subset \{1,3,5,7,9,11\}$. Do đó theo Nguyên lý nhân số tập hợp này là: $(2^5 - 1)2^6$

b) Tương tự như trên, số tập hợp con có dạng này là $2^6(2^6 - 1)$.

c) *Tổng quát hóa*: nếu $M$ là 1 tập hợp số chẵn có $m$ phần tử và $N$ là một tập hợp số lẻ có $n$ phần tử thì số tập hợp con của $M \cup N$ chứa ít nhất 1 số chẵn là: $(2^m - 1)2^n$

**35.** $n = 20$

**38.** Viết $A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C$ rồi áp dụng 2.3.1.

**39.** a) Số nhãn hiệu thỏa ít nhất 2 tính năng là:

$$|(A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (A \cap C)| = |A \cap B| + |B \cap C| + |A \cap C| = 4$$

Số nhãn hiệu thỏa ít nhất 1 tính năng là:

$$|A \cup B \cup C| = 18 - 4 = 14$$

Do đó số nhãn hiệu thỏa đúng 1 tính năng là 10.

b) Số nhãn hiệu không thỏa tính năng nào là $15 - 14 = 1$.

**40.** a) $2^7 - 2 = 126$; $2^7 - 2 - \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \end{pmatrix} = 112$

b) $2^n - 2$; $2^n - 2 - 2n$

**41.** $\begin{pmatrix} n \\ n_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n - n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} n_r \\ n_r \end{pmatrix} = \dfrac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_r!}$

**44.** Gọi $A, B, C$ là tập hợp các sinh viên làm thí nghiệm thứ nhất, thứ hai và thứ ba tương ứng. Ta có: $|A| = 21 - 5 = 16$, $|B| = 21 - 7 = 14$, $|C| = 21 - 6 = 15$. Áp dụng 38. ta được

$$|A \cap B| + |B \cap C| + |A \cap C| = 33$$

Số sinh viên làm ít nhất hai thí nghiệm là:

$$|(A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (A \cap C)| = 33 - 3|A \cap B \cap C| + |A \cap B \cap C| = 15$$

Do đó có $21 - 15 = 6$ sinh viên chỉ làm được 1 thí nghiệm.

**45.** Mỗi đường đi được xác định bởi $m$ ký tự $N$ (đi ngang) chọn trong một dãy gồm có $m + n$ ký tự $N$ và $L$ (đi lên). Do đó số các đường đi khác nhau là

$$\binom{m+n}{m} = \binom{m+n}{n}$$

**46.** $\binom{10+4-1}{4-1} = \binom{13}{3} = 286$

**47.** a) $\binom{10+5-1}{5-1} = \binom{14}{4} = 1001$

b) Chia cho đứa trẻ lớn nhất 2 hòn bi, còn lại chia cho 5 đứa:

$$\binom{8+5-1}{5-1} = \binom{12}{4} = 495$$

c) Chia 5 hòn bi còn lại cho 5 đứa:

$$\binom{5+5-1}{5-1} = \binom{9}{4} = 126$$

**48.** a) Cho vào mỗi hộp 1 vật, còn lại $r-n$ vật chia cho $n$ hộp:

$$\binom{r-n+n-1}{n-1} = \binom{r-1}{n-1}$$

b) $\binom{r-1}{n-1}$

**49.** a) Đây là số nghiệm $\geq 0$ của phương trình $y_1+y_2+y_3+y_4=8$

$$\binom{8+4-1}{4-1} = \binom{11}{3} = 165$$

b) Chỉ có 1 nghiệm: $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 8$

c) Chính là số nghiệm của phương trình $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 28$ với $y_1, y_2, y_3 \geq 0$, $0 \leq y_4 \leq 24$:

$$\binom{31}{3} - \binom{6}{3} = 4475$$

ở đây $\binom{6}{3}$ chính là số nghiệm $\geq 0$ của $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 3$

**50.** a) Theo Nguyên lý nhân, số các số hạng có dạng $x(2y)^2(3z)^3t$ là:

$$7 \times \binom{6}{2} \times \binom{4}{3} = 420$$

Do đó hệ số của $xy^2z^3t$ là $420 \times 2^2 \times 3^3 = 15120$

b) Số số hạng có dạng $x^{\alpha_1}y^{\alpha_2}z^{\alpha_3}t^{\alpha_4}v^{\alpha_5}$ là số nghiệm của phương trình $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 = 7$, với $\alpha_i \in \mathbf{N}$, $1 \leq i \leq 5$:

$$\binom{7+5-1}{5-1} = \binom{11}{4} = 330$$

**53.** a) $\binom{8}{2} = 28$, b) $\binom{8}{4} = 70$, c) $\binom{8}{6} = 28$

d) Đây cũng là số byte có nhiều nhất 2 bit 0:

$$\binom{8}{0} + \binom{8}{1} + \binom{8}{2} = 37$$

**55.** a) $\binom{15}{2} = 105$, b) $\binom{25}{3} = 2300$, $\binom{25}{4} = 12650$

**56.** a) $\binom{n}{3} = \dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}$

b) Có $n$ tam giác có chung 2 cạnh với đa giác đều và $n(n-4)$ tam giác có chung 1 cạnh với đa giác đều. Do đó số tam giác không có cạnh chung là:

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{6} - n(n-4) - n = \frac{n}{6}(n^2 - 9n + 20)$$

**59.** a) $(1+2)^n = 3^n$

b) $(1+x-x)^n = 1$

c) $\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!(n-i)!} = \frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = \frac{2^n}{n!}$

d) $\sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!(n-i)!} = \frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{n}(-1)^i \binom{n}{i} = \frac{1}{n!}(1-1)^n = 0$

**60.** Giả sử mỗi cửa có ít hơn $\left\lceil \frac{m}{n} \right\rceil$ bồ câu. Khi ấy ta có:

$m \leq n\left(\left\lceil \frac{m}{n} \right\rceil - 1\right) < n\frac{m}{n} = m$: mâu thuẫn

**61.** a) Ít nhất 7 lần: Nguyên lý chuồng bồ câu.

b) Gọi $m$ là số lần tung. Do 60. ta cần có: $\left\lceil \frac{m}{6} \right\rceil \geq 3$

Do đó giá trị nhỏ nhất của $m$ là 13.

c) $6(n-1)+1$

**63.** a) Ta chọn 10 cửa chuồng bồ câu: $[1,2), [2,3), \ldots, [9,10), \{10\}$. Do Nguyên lý chuồng bồ câu có 2 phần tử $x \neq y$ có căn bậc 2 cùng thuộc một tập hợp, nghĩa là: $0 < |\sqrt{x} - \sqrt{y}| < 1$

b) *Cho trước 1 số nguyên $k > 0$. Trong $n+1$ phần tử khác nhau của $\{1, 2, \ldots, n^k\}$, có ít nhất 2 phần tử $x, y$ sao cho:* $0 < |\sqrt[k]{x} - \sqrt[k]{y}| < 1$

**64.** Vẽ 9 tam giác đều có các cạnh song song với các cạnh của tam giác đều đã cho và đỉnh chọn trong số 3 đỉnh, 6 điểm chia các cạnh theo tỉ số $\frac{1}{3}$ và tâm của tam giác đều. Theo Nguyên lý chuồng bồ câu, có ít nhất 2 trong số 10 điểm đã cho thuộc về cùng một tam giác đều nhỏ. Khoảng cách của chúng $\leq \frac{1}{3}$. Dấu = chỉ xảy ra đối với hai đỉnh của một tam giác đều nhỏ. Tuy nhiên chỉ có một đỉnh duy nhất nằm bên trong tam giác đều đã cho.

## Chương 3

**1.** a) $x = 0, (y, z, t) \in A_2 \times A_3 \times A_4$ tùy ý: có $4.7^2 = 196$ bộ 4
$x \neq 0$ tùy ý, $z = 0, (y, t) \in A_2 \times A_4$ tùy ý: có $4^2.7 = 112$ bộ 4
$x \neq 0$ tùy ý, $y$ tùy ý, $z \neq 0$ tùy ý, $t = 0$: có $4^2.6 = 96$ bộ 4
Vậy $|\mathcal{R}_1| = 196 + 112 + 96 = 404$
b) $x \neq 0$ tùy ý, $y$ tùy ý, $z \neq 0$ tùy ý và $t < 0$ tùy ý.
Vậy $|\mathcal{R}_2| = 4^2.6.3 = 288$

**2.** a) $|A \times B| = 3^2 = 9$, b) $2^{|A \times B|} = 2^9 = 512$, c) $2^{|A \times A|} = 512$
d) Đó là số tập hợp con của $A \times B \backslash \{(1,2),(1,5)\} = 2^7 = 128$
e) Đó là số tập hợp con 5 phần tử của $A \times B$: $\binom{9}{5} = 126$
f) $2^9 - \binom{9}{0} - \binom{9}{1} - \binom{9}{2} = 466$

**3.** $2^{|A||B|} = 4096 = 2^{12} \Rightarrow 3|A| = 12 \Rightarrow |A| = 4$

**4.** a) Quan hệ hàm: $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = x^2 + 7$
b) Quan hệ hàm: $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $f(y) = y^2$
c) Quan hệ hàm: $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = 3x + 1$ hay $g: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $g(y) = \dfrac{y-1}{3} = f^{-1}(y)$
d) Không phải là quan hệ hàm
e) Quan hệ hàm: $f: [0,1] \to [0,1]$, $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ hay $g: [0,1] \to [0,1]$, $g(y) = \sqrt{1-y^2} = f^{-1}(y) = f(y)$

**5.** a) $\pi_A(\mathcal{R}) = [0, +\infty)$, $\pi_B(\mathcal{R}) = \boldsymbol{R}$
b) $\pi_A(\mathcal{R}) = \boldsymbol{R}$, $\pi_B(\mathcal{R}) = [-1, 1]$
c) $\pi_A(\mathcal{R}) = [-1, 1]$, $\pi_B(\mathcal{R}) = [-1, 1]$

**6.** a) Quan hệ trên $A_3 \times A_4 \times A_5$ trong đó dòng 2 và 3 đồng nhất nên loại bớt 1 và dòng 5 và 6 đồng nhất nên loại bớt 1.

b) $A_1$ hoặc $A_2$ đều có thể dùng làm khóa chính.

**7.** a) Quan hệ chiếu lên $A_1 \times A_2$ gồm 2 cột đầu và đủ 6 dòng. Quan hệ chiếu lên $A_3 \times A_4 \times A_5$ gồm 3 cột cuối và đủ 6 dòng.

b) Không có khóa chính vì mỗi cột đều có giá trị lặp lại.

c) $A_1 \times A_2$, $A_1 \times A_3$, $A_2 \times A_3$, $A_2 \times A_5$, $A_3 \times A_5$.

**8.** a) $\mathcal{R} = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,2),(2,1),(2,3),(3,2)\}$

b) $\mathcal{R} = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,2),(2,1),(2,3),(1,3)\}$

c) $\mathcal{R} = \{(1,1),(2,2),(1,2),(2,1)\}$

**9.** a) Phản xạ, đối xứng, bắc cầu. Tuy nhiên không phản xứng trừ trường hợp $C = E$.

b), e), f), g) Phản xạ, đối xứng, bắc cầu nhưng không phản xứng.

c) Đối xứng nhưng không có 3 tinh chất kia.

d) Phản xạ, phản xứng, bắc cầu nhưng không đối xứng.

**11.** a) $(\mathcal{R}^*)^* = \mathcal{R}$.

b) $\mathcal{R} = \mathcal{R}^*$ khi và chỉ khi $\mathcal{R}$ đối xứng.

c) $\mathcal{R}$ bắc cầu, phản xứng khi và chỉ khi $\mathcal{R}^*$ bắc cầu, phản xứng. Theo b) nếu $\mathcal{R}$ đối xứng thì $\mathcal{R}^* = \mathcal{R}$ cũng đối xứng.

**12.** a) $|A \times A| = 16$, $|\Delta_A| = 4$ nên số quan hệ phản xạ là: $2^{16-4} = 4096$

b) Gọi $\mathcal{T} = \{(i,j)/1 \le i < j \le 4\}$. Với $\mathcal{S} \subset \mathcal{T} \cup \Delta_A$ thì $\mathcal{S} \cup \{(a,b)/(b,a) \in \mathcal{S}\}$ là 1 quan hệ đối xứng và ngược lại. Do đó số quan hệ đối xứng là $2^{\mathcal{T} \cup \Delta_A} = 2^{10} = 1024$.

c) Một quan hệ phản xạ và đối xứng xác định duy nhất bởi tập hợp $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$ nên số quan hệ phản xạ và đối xứng là $2^{|\mathcal{T}|} = 2^6 = 64$.

d) Giả sử $\mathcal{R}$ phản xứng, đặt $\mathcal{S}_1 = \mathcal{R} \cap \Delta_A$, $\mathcal{S}_2 = \mathcal{R} \cap \mathcal{T}$ và $\mathcal{S}_3 = \mathcal{R}^* \cap \mathcal{T}$: rõ ràng $\mathcal{R}$ được xác định duy nhất bởi $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$ và $\mathcal{S}_3$. Do đó số các quan hệ phản xứng là: $2^4 \sum_{k=0}^{6} \begin{pmatrix} 6 \\ k \end{pmatrix} 2^{6-k} = 11.664$.

e) Đó là các quan hệ $\mathcal{R} \subset \Delta_A$: có $2^4 = 16$ quan hệ.

f) Quan hệ duy nhất là $\mathcal{R} = \Delta_A$.

**13.** Ta viết $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Đặt $\mathcal{T} = \{(a_i, a_j)/i < j\}$. Ta có $|\mathcal{T}| = \dfrac{n(n-1)}{2}$. Tương tự như trên, mỗi quan hệ phản xứng $\mathcal{R}$ tương ứng với các tập con $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$ và $\mathcal{S}_3$. $\mathcal{R}$ là tối đại khi và chỉ khi $\mathcal{S}_1 = \Delta_A$ và $\mathcal{S}_2 \cup \mathcal{S}_3 = \mathcal{T}$, nghĩa là $|\mathcal{R}| - \dfrac{n(n-1)}{2} + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Hơn nữa số quan hệ như vậy chính là $2^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

**14.** a) Trực tiếp từ định nghĩa.

b) $[1] = \{1,2\} = [2]$, $[3] = \{3\}$.

c) $[4] = \{4,5\} = [5]$ và $[6] = \{6\}$. Do đó ta có phân hoạch của $A$ thành các lớp tương đương: $A = \{1,2\} \cup \{3\} \cup \{4,5\} \cup \{6\}$.

**15.** Ngoài đường chéo chính $\Delta_A$, $\mathcal{R}$ còn chứa các cặp $\{1,2\}$, $\{2,1\}$, $\{3,4\}$, $\{4,3\}$.

**16.** Ta có $(1,2)$ và $(2,3) \in \mathcal{R}$ nhưng $(1,3) \notin \mathcal{R}$ nên $\mathcal{R}$ không phải là quan hệ tương đương.

**17.** a) Hiển nhiên.

b) $[(x,y)] = \{(x,t)/t \in \mathcal{R}\}$. Đấy chính là đường thẳng song song với trục tung và đi qua điểm $(x,y)$.

**19.** a) Đó là quan hệ tương đương.

b) $[\emptyset] = \{\emptyset, \{3\}\}$, $[\{1\}] = \{\{1\}, \{1,3\}\}$, $[\{2\}] = \{\{2\}, \{2,3\}\}$, $[\{1,2\}] = \{\{1,2\}, \{1,2,3\}\}$.

c) $[\{1,3,5\}] = \{\{1,3,4\}, \{1,3,5\}\}$. Mỗi lớp tương đương đều chứa một tập con duy nhất của $C$ nên số lớp tương đương chính là $2^{|C|} = 2^3 = 8$.

**21.** a) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} = 10$, b) $\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}\left(1 + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = 80$

c) $\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} \times 2 = 30$, d) $10 + 80 + 30 + \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix} = 126$

**22.** a) Suy trực tiếp từ định nghĩa.

b) $\{f^{-1}(y)/y \in f(B)\}$.

**23.** $\mathcal{R} = (A_1 \times A_1) \cup (A_2 \times A_2) \cup (A_3 \times A_3)$

**25.** Xét $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}(\{1,2,3\})$ và $\mathcal{P}_2 = \{A \subset E/4 \in A\}$. Khi ấy biểu đồ Hasse của $\mathcal{P}_1$ và $\mathcal{P}_2$ là 2 hình lập phương 3 chiều. Nối mỗi đỉnh $A \in \mathcal{P}_1$ đến đỉnh $A \cup \{4\} \in \mathcal{P}_2$ bởi 1 cung có hướng xuất phát từ $A$. Tập hợp các đỉnh trong $\mathcal{P}_1$ và $\mathcal{P}_2$ và các cung trong $\mathcal{P}_1$ và $\mathcal{P}_2$ cùng với các cung mới thêm vào như trên chính là biểu đồ Hasse của $\mathcal{P}(E)$.

**26.** a) Kiểm tra trực tiếp từ định nghĩa.

b) $\prec$ không nhất thiết là toàn phần. Ví dụ $A = B = \{0, 1\}$ và $\prec_A, \prec_B$ là thứ tự thông thường.

**27.** a) Trực tiếp từ định nghĩa.

b) Với $f, g \in B^E$ tùy ý. Định nghĩa ánh xạ $h: E \to B$ bởi $h(x) = f(x) \vee_B g(x)$, $\forall x \in E$. Khi ấy $h = \sup\{f, g\}$.

Tương tự ta thấy $\inf(f, g)$ là ánh xạ $E \to B$:

$$\inf(f, g)(x) = f(x) \wedge_B g(x), \ \forall x \in E$$

**29.** Tính phản xạ hiển nhiên. Gọi $i$ là chỉ số sao cho $a_1 = b_1, a_2 = b_2, \ldots, a_i = b_i$ và $i = m$ hoặc $a_{i+1} \precneq b_{i+1}$ nếu $i < m$. Gọi $j$ là chỉ số tương tự xác định từ $s_2 \prec s_3$.

* Nếu $j \geq i$ thì ta có $a_1 = c_1, \ldots, a_i = c_i$ và $i = m$ hoặc $a_{i+1} \precneq b_{i+1} \prec c_{i+1}$ nếu $i < m$.

* Nếu $j < i$ thì $j < n$ nên ta có $a_1 = c_1, \ldots, a_j = c_j$ và $a_{j+1} \prec b_{j+1} \precneq c_{j+1}$.

Trong cả hai trường hợp ta đều có $s_1 \prec s_3$ và $\prec$ có tính bắc cầu. Chú ý rằng trong chứng minh trên nếu $s_3 = s_1$ thì trường hợp hai không xảy ra và khi đó $s_1 = s_2$, nghĩa là $\prec$ là phản xứng.

Xét 2 chuỗi khác rỗng $s_1$ và $s_2$ như trên. Nếu $a_i = b_i$ với $1 \leq i \leq \min(m, n)$ thì ta có $s_1 \prec s_2$ hay $s_2 \prec s_1$ theo Định nghĩa của $\prec$. Trong trường hợp ngược lại sẽ có chỉ số $i$ bé nhất để $a_i \neq b_i$, nghĩa là $a_1 = b_1, \ldots, a_{i-1} = b_{i-1}$. Do thứ tự trên $\mathcal{A}$ là toàn phần ta có $a_i \precneq b_i$ hay $b_i \precneq a_i$. Nói cách khác $s_1 \prec s_2$ hay $s_2 \prec s_1$. Tóm lại thứ tự trên $\mathcal{S}$ là toàn phần.

**30.** Thứ tự $\subset$ trên $\mathcal{P}(\{1, 2\})$ không toàn phần nhưng thứ tự cảm sinh trên $\mathcal{P}(\{1\}) = \{\emptyset, \{1\}\}$ là toàn phần.

**31.** Trong 3 biểu đồ đầu, định nghĩa trội trực tiếp bị vi phạm.

Ngoài ra trong biểu đồ thứ hai tính phản xứng cũng bị vi phạm. Chỉ có biểu đồ cuối cùng là biểu đồ Hasse.

**34.** a) Chỉ có 1 chặn trên gồm 3 phần tử: $\{1, 2, 3\}$.

Số chặn trên gồm 4 phần tử: $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = 4$

Số chặn trên gồm 5 phần tử: $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 6$

b) $11 + \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} = 16$

c) $\{1, 2, 3\}$, d) Một chặn dưới duy nhất: $\emptyset$, e) $\emptyset$

**35.** a) $(\mathcal{P}(\{1, 2\}), \subset)$ là 1 dàn nhưng thứ tự $\subset$ không toàn phần.
b) Nếu $\prec$ toàn phần thì với $x, y \in A$ tùy ý ta có:
$\sup\{x, y\} = \max(x, y)$ và $\inf\{x, y\} = \min(x, y)$
Do đó $A$ là một dàn.

**37.** a) $a$ b) $a$ c) $c$ d) $e$ e) $z$ f) $e$ g) $v$

**38.** a) $z$ là phần tử lớn nhất và $a$ là phần tử bé nhất.
b) $(A, \prec)$ là một dàn.

**39.** Sử dụng các qui luật logic.

**40.** a) $\forall x, y$, $\min\{x, y\}$ tồn tại. Vậy thứ tự tốt là toàn phần. Tuy nhiên $\leq$ là thứ tự toàn phần trên $\boldsymbol{Z}$ nhưng không phải là thứ tự tốt.

b) Do định nghĩa của thứ tự tốt.

c) $\leq$ là thứ tự tốt trên $\boldsymbol{N}$ nhưng $\boldsymbol{N}$ không có phần tử lớn nhất. $\{1, 2\}$ là 1 tập hợp sắp tốt có phần tử lớn nhất.

**41.** a), e), f) là tập hợp sắp tốt.

b) Không phải là tập sắp tốt. Mặt khác tập hợp $\{1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\}$ không có phần tử bé nhất nên $(Q, \leq)$ và $(Q^+, \leq)$ không phải là tập sắp tốt.

g) Giả sử $\mathcal{A}$ là bộ mẫu tự gồm 2 chữ cái $a \prec b$. Khi ấy $\{ab, aab, aaab, \ldots\}$ là một tập con của $\mathcal{S}$ không có phần tử bé nhất nên $\mathcal{S}$ không phải là tập sắp tốt.

**42.** a) $s(x) = \min\{y \in A / x \underset{\neq}{\prec} y\}$ chính là trội trực tiếp duy nhất của $x$.

b) Giả sử $x \underset{\neq}{\prec} y$. Khi ấy $s(x) \prec y \underset{\neq}{\prec} s(y)$ nên $s$ là đơn ánh. Tuy nhiên phần tử bé nhất $\alpha$ của $A$ không thuộc $s(A)$.

c) Định nghĩa ánh xạ $\varphi: \ \boldsymbol{N} \to A$ bởi $\varphi(0) = \alpha$, $\varphi(n) = s^n(\alpha)$, trong đó $s^n(\alpha)$ được định nghĩa bằng qui nạp: $s^n(\alpha) = s(s^{n-1}(\alpha))$. Khi ấy $\varphi$ là một đẳng cấu giữa hai tập hợp sắp thứ tự $(\boldsymbol{N}, \leq)$ và $(A, \prec)$.

**43.** a) 1 b) 22 c) 6 d) 11 e) 3.

**44.** a) $2^2.3^3.5^3.11$ và $2^4.3.5^2.7^2.11^2$

b) $USCLN = 2^2.3.5^2.11 = 3300$ $\quad BSCNN = 2^4.3^3.5^3.7^2.11^2 = 320.166.000$

**47.** a) $2^a.5^b.7^c$, $0 \leq a \leq 3$, $0 \leq b \leq 2$, $0 \leq c \leq 4$.

b) Các ước số dương của $m$ có dạng $p_1^{s_1} p_2^{s_2} p_3^{s_3}$ với $0 \leq s_1 \leq r_1$, $0 \leq s_2 \leq r_2$, $0 \leq s_3 \leq r_3$. Do đó theo Nguyên lý nhân, số ước số dương là $(r_1 + 1)(r_2 + 1)(r_3 + 1)$.

c) Nếu $m = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \dots p_n^{r_n}$ thì $n$ có $(r_1 + 1)(r_2 + 1) \dots (r_n + 1)$ ước số dương.

d) Suy ra $r_i + 1 = 2^{a_i}$, nghĩa là $r = 2^{a_i} - 1$, $a_i \in \boldsymbol{Z}^+$, $1 \leq i \leq n$.

**49.** a) Sinh viên thứ $n$ lật ngược đồng xu thứ 200 khi và chỉ khi $n$ là ước số của $200 = 2^3.5^2$. Do đó số lần mà đồng xu thứ 200 được lật ngược là $4.3 = 12$.

b) Giả sử đồng xu thứ $m = p^a q^b r^c \dots < 200$ được lật ngược $(a+1)(b+1)(c+1) \dots = 12$ lần. Khi ấy $m$ có thể lấy các giá trị sau:

$$\begin{array}{llll}
2^5.3 = 96, & 2^5.5 = 160, & 2^3.3^2 = 72, & 3^3.2^2 = 108, \\
2^2.3.5 = 60, & 2^2.3.7 = 84, & 2^2.3.11 = 132, & 2^2.3.13 = 156, \\
2^2.5.7 = 140, & 3^2.2.5 = 90, & 3^2.2.7 = 126, & 3^2.2.11 = 198
\end{array}$$

**52.** a) Giả sử $(x, y)$ là một lời giải thì $a$ là ước của $y$ do Mệnh đề 3.6.3.: $y = ka$. Khi ấy $x = kb$.

Ngược lại $(kb, ka)$, $k \in \boldsymbol{Z}$ là một lời giải.

b) Gọi $d = USCLN(a,b)$. Ta có $x\frac{a}{d} = y\frac{b}{d}$ nên do a) các lời giải có dạng $\left(k\frac{b}{d}, k\frac{a}{d}\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

c) $d = USCLN(a,b) = ma + nb$, $m, n \in \mathbb{Z}$ (Định lý 3.6.2.)
Do đó nếu $x, y$ thỏa $d = xa + yb$ thì $(x-m)a = (n-y)b$
Theo b), $x - m = k\frac{b}{d}, n - y = k\frac{a}{d}$, với $k \in \mathbb{Z}$.
Nghĩa là $x = m + k\frac{b}{d}$ và $y = n - k\frac{a}{d}$

**53.** Dùng thuật chia Euclide để tìm $d, m, n$:
a) $d = 2, m = -1, n = 3; x = -1 + 8k, y = 3 - 23k, k \in \mathbb{Z}$
b) $d = 4, m = -1, n = 2; x = -1 + 16k, y = 2 - 31k, k \in \mathbb{Z}$
c) $d = 1, m = -26, n = 271; x = -26 + 331k, y = 271 - 3450k, k \in \mathbb{Z}$

**54.** a) Giả sử $aa' \equiv 1 (\text{mod } n)$ khi ấy ta có

$$x = aa'x \equiv a'b (\text{mod } n)$$

Do đó $a'b$ là nghiệm duy nhất trong $\mathbb{Z}_n$ của phương trình đồng dư đã cho.

b) Gọi $d = USCLN(a,n) > 1$. Nếu $b$ không chia hết cho $d$, thì phương trình đồng dư là vô nghiệm. Mặt khác giả sử $d|b$ khi ấy ta đưa về việc giải phương trình đồng dư mod $n' = \frac{n}{d}$:

$$\frac{a}{d}x \equiv \frac{b}{d} \ (\text{mod } n')$$

Theo a) phương trình trên có nghiệm duy nhất trong $\mathbb{Z}'_n$:

$$x \equiv a'\frac{b}{d} (\text{mod } n') \text{ với } a'\frac{a}{d} \equiv 1 (\text{mod } n')$$

Đó cũng là nghiệm của phương trình đồng dư ban đầu.

**55.** a) $(3, 16) = 1$. Ta có $3 \times 11 \equiv 33 \equiv 1$ (mod 16) nên

$$x \equiv 11 \times 7 \equiv 13 \ (\text{mod } 16)$$

b) $(5, 23) = 1$. Ta có $5 \times 14 \equiv 70 \equiv 1 \pmod{23}$ nên

$$x \equiv 14(6 - 7) \equiv 9 \pmod{23}$$

c) Phương trình có dạng $3x \equiv -12 \equiv 10 \pmod{11}$
Mà $3 \times 4 \equiv 1 \pmod{11}$ nên

$$x \equiv 4 \times 10 \equiv 7 \pmod{11}$$

d) Phương trình có dạng $5x \equiv -52 \equiv 12 \pmod{64}$
Mà $5 \times 13 \equiv 65 \equiv 1 \pmod{64}$ nên

$$x \equiv 13 \times 12 \equiv 28 \pmod{64}$$

## Chương 4

**1.** a) Giả sử $\bar{x}$ và $x'$ là 2 phần bù của $x$. Ta có:

$$(\bar{x} \wedge x) \vee x' = 0 \vee x' = x'$$

Mà $(\bar{x} \wedge x) \vee x' = (\bar{x} \vee x') \wedge (x \vee x') = (\bar{x} \vee x') \wedge 1 = \bar{x} \vee x'$
Suy ra $\bar{x} \prec \bar{x} \vee x' = x'$
Tương tự nếu xét $(x' \wedge x) \vee \bar{x}$ ta cũng có $x' \prec \bar{x}$. Nghĩa là $\bar{x} = x'$
b) Kiểm tra trực tiếp từ định nghĩa của phần bù rồi sử dụng a).

**2.** a) Do $x \prec y$ nên $y$ là trội chung của $x$ và $y$. Hơn nữa nếu $z$ là trội chung của $x, y$ thì $y \prec z$. Như thế $y = \sup\{x, y\} = x \vee y$
b) Do a) $x \prec y \Rightarrow x \vee y = y \Rightarrow \bar{x} \wedge \bar{y} = \bar{y} : \bar{y} \prec \bar{x}$
c) $x \wedge z \prec x \prec y$ và $x \wedge z \prec z \prec t$. Suy ra $x \wedge z \prec y \wedge t$
d) $x \prec y \prec y \vee t$ và $z \prec t \prec y \vee t$. Suy ra $x \vee z \prec y \vee t$

**3.** a) $(\bar{b} \wedge c) \vee (c \wedge d) = (\bar{b} \vee d) \wedge c$ nên

$$\overline{(\bar{b} \wedge c) \vee (c \wedge d)} = \overline{\bar{b} \vee d} \vee \bar{c} = (b \wedge \bar{d}) \vee \bar{c}$$

b) $$\begin{aligned}(b \wedge \bar{c}) \vee ((\bar{b} \wedge a) \vee (a \wedge c)) &= (b \wedge \bar{c}) \vee ((\bar{b} \vee c) \wedge a) \\ &= ((b \wedge \bar{c}) \vee \overline{(b \wedge \bar{c})}) \wedge ((b \wedge \bar{c}) \vee a) \\ &= (b \wedge \bar{c}) \vee a\end{aligned}$$

Do đó phần bù của nó là: $(\bar{b} \vee c) \wedge \bar{a}$

**4.** a) Xét một phần tử $x \in \mathcal{B}$. Khi ấy $\bar{x} \in \mathcal{B}$ và $0 = x \wedge \bar{x} \in \mathcal{B}$, $1 = x \vee \bar{x} \in \mathcal{B}$

b) Có 4 đại số con là $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}_1 = \{\emptyset, \{a\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$, $\mathcal{B}_2 = \{\emptyset, \{b\}, \{a,c\}, \{a,b,c\}\}$, $\mathcal{B}_3 = \{\emptyset, \{c\}, \{a,b\}, \{a,b,c\}\}$.

c) Với $x, y \in \mathcal{B}$ tùy ý ta có $\bar{x}, \bar{y} \in \mathcal{B}$ nên $\bar{x} \vee \bar{y} \in \mathcal{B}$. Suy ra $x \wedge y = \overline{\bar{x} \vee \bar{y}} \in \mathcal{B}$.

**5.** Đó là Đại số Bool với phần tử trung hòa đối với $\wedge$ là $a$. Hơn nữa với $x \prec a$ thì $\bar{x} \wedge a$ là phần bù của $x$. Tuy nhiên nó không phải là đại số con nếu $a \neq 1$ vì khi ấy nó không chứa 1

**6.** a) Giả sử $y \prec \varphi(a)$, tồn tại $x$ sao cho $\varphi(x) = y$. Ta có $\varphi(x) \prec \varphi(a)$ nên $x \prec a$ suy ra $x = 0$ hay $x = a$, nghĩa là $y = 0$ hay $y = b$.

b) Trực tiếp từ định nghĩa của đại số con.

**8.** a) Do $35 = BSCNN(5,7)$, $70 = BSCNN(35,2)$ và $42 = BSCNN(2,3,7)$ ta phải có $\varphi(35) = \{c,d\}$, $\varphi(70) = \{a,c,d\}$, $\varphi(42) = \{a,b,d\}$.

b) Mỗi đẳng cấu phải biến nguyên tử thành nguyên tử nên được xác định hoàn toàn bởi một song ánh giữa $\{2,3,5,7\}$ và $\{a,b,c,d\}$. Có tất cả $4! = 24$ đẳng cấu khác nhau.

**11.** a)
$$\begin{aligned}
(a \oplus b) \oplus c &= [((a \wedge \bar{b}) \vee (\bar{a} \wedge b)) \wedge \bar{c}] \vee [(\bar{a} \vee b) \wedge (a \vee \bar{b}) \wedge c] \\
&= (a \wedge \bar{b} \wedge \bar{c}) \vee (\bar{a} \wedge b \wedge \bar{c}) \vee (a \wedge b) \wedge c) \vee (\bar{a} \wedge \bar{b}) \wedge c \\
&= [a \wedge ((b \wedge c) \vee (\bar{b} \wedge \bar{c}))] \vee [\bar{a} \wedge ((b \wedge \bar{c}) \vee (\bar{b} \wedge c))] \\
&= (a \wedge \overline{b \oplus c}) \vee (\bar{a} \wedge (b \oplus c)) = a \oplus (b \oplus c) \\
a \wedge (b \oplus c) &= (a \wedge b \wedge \bar{c}) \vee (a \wedge \bar{b} \wedge c) \\
&= (a \wedge b \wedge (\bar{a} \vee \bar{c})) \vee ((a \wedge c) \wedge (\bar{a} \vee \bar{b})) \\
&= (a \wedge b) \oplus (a \wedge c)
\end{aligned}$$

Các tính chất khác hiển nhiên.

b) Đặt $a \oplus' b = (a \wedge \bar{b}) \vee (b \wedge \bar{a})$

$$(a \oplus b) \wedge (a \wedge \bar{b}) = (a \wedge a \wedge \bar{b}) \oplus (b \wedge a \wedge \bar{b}) = a \wedge \bar{b}$$

$$\begin{array}{lll}
\text{Suy ra} & a \wedge \bar{b} & \prec a \oplus b \\
\text{Tương tự} & b \wedge \bar{a} & \prec a \oplus b \\
\text{Vậy} & a \oplus' b & \prec a \oplus b \\
\text{Do đó} & (a \oplus b) & \vee \overline{a \oplus' b} = 1
\end{array}$$

Mặt khác

$$\begin{aligned}
(a \oplus b) \wedge \overline{a \oplus' b} &= (a \wedge (\bar{a} \vee b) \wedge (a \vee \bar{b})) \oplus (b \wedge (\bar{a} \vee b) \wedge (a \vee \bar{b})) \\
&= (a \wedge b) \oplus (a \wedge b) = 0
\end{aligned}$$

Như thế $a \oplus b = \overline{\overline{a \oplus' b}} = a \oplus' b$

**13.** a) $a \vee x = b \Rightarrow a \prec b$.

Mặt khác giả sử $a \prec b$. Đặt $x = \bar{a} \wedge b$. Ta có:

$$a \vee x = a \vee b = b$$

b) $b \wedge y = (b \wedge x) \vee (b \wedge \bar{a}) = x \vee (x \wedge \bar{a}) = x$

$b \vee y = b \vee x \vee \bar{a} = b \vee \bar{a} \succ a \vee \bar{a} = 1$

c) Ta có $\bar{a} \wedge b = \bar{a} \wedge x \prec x \prec b$. Ngược lại giả sử $a \prec b$ và $\bar{a} \wedge b \prec x \prec b$. Khi ấy

$$a \vee b = a \vee (\bar{a} \wedge b) \prec a \vee x \prec a \vee b$$

Suy ra $x$ là nghiệm của (1)

d) Nếu $x$ là nghiệm, do b) $x$ có dạng $b \wedge c$ với $c = x \vee \bar{a} \succ \bar{a}$. Ngược lại nếu $x = b \wedge c$ với $c \succ \bar{a}$ thì $\bar{a} \wedge x = \bar{a} \wedge c \wedge b = \bar{a} \wedge b$

Như thế $\bar{a} \wedge b \prec x \prec b$ nên $x$ là nghiệm do c).

e) Nghiệm của $a \wedge x = b$ cũng là nghiệm của $\bar{a} \vee \bar{x} = \bar{b}$ nên ta đưa về (1).

**14.** Do $1728 = 2^6.3^3$ chia hết cho chính phương nên $\mathcal{U}_{1728}$ không là đại số Bool. Hơn nữa số mũ 6 không có dạng $2^a - 1$, $a \in \boldsymbol{Z}$ nên không có thứ tự nào trên $\mathcal{U}_{1728}$ để cho nó trở thành dàn bù phân bố, nghĩa là đại số Bool.

**16.** a) $d(a) = 1$ nếu $a$ là nguyên tử.

b) Nhận xét rằng nếu $a$ là nguyên tử không trội bởi $x$ thì $x \vee a$ là trội trực tiếp của $x$. Do đó ta có thể chứng minh bằng qui nạp rằng $d(x) = m$ nếu có đúng $m$ nguyên tử trội bởi $x$.

Suy ra $d(x \vee y) = d(x) + d(y) - d(x \wedge y)$.

**17.** a) 0 b) 0 c) 0 d) 1 e) 1

**18.** a), b) $y = 1$ hay $z = 1$ c), d) $z = 1$, $y$ tùy ý.

**19.** a) $\bar{x}yz\bar{t}$ b) $xy\bar{z}\bar{t}$ c) $xyz\bar{t}$ d) $\bar{x}\bar{y}\bar{z}\bar{t}$.

**20.** a) Có $\binom{6}{2} = 15$ điểm có đúng 2 thành phần bằng 1. Còn lại $(2^6 - 15) = 49$ điểm, nên có $2^{49}$ hàm Bool thỏa điều kiện này.

b) Có $\binom{6}{0} + \binom{6}{1} = 7$ điểm ở đó số thành phần có giá trị 1 bé hơn 2, nên tổng số hàm Bool thỏa điều kiện này là $2^7 = 128$.

c) $2^{2^5} = 2^{32}$ và $2^{2^3} = 2^8 = 256$.

**21.** Ta có $f(1,0) = f(0,1)$ nên các hàm Bool này đều có dạng $\alpha xy \vee \beta\bar{x}\bar{y} \vee \gamma(x\bar{y} \vee \bar{x}y)$, với $\alpha, \beta, \gamma$ là các hằng số bất kỳ thuộc $\{0,1\}$.

**22.** Ta có $f(1,0,0) = f(0,0,1) = f(0,1,0)$
và $f(1,1,0) = f(1,0,1) = f(0,1,1)$

Do đó các hàm Bool này đều có dạng:

$$f(x,y,z) = \alpha xyz \vee \beta\bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee \gamma(xy\bar{z} \vee x\bar{y}z \vee \bar{x}yz) \vee \delta(x\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z)$$

trong đó $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ là các hằng số tùy ý thuộc $\{0,1\}$.

**23.** Hàm Bool 3 biến không thay đổi giá trị khi ta hoán vị 2 biến bất kỳ chính là các hàm Bool trong 22.

Tương tự một hàm Bool 4 biến không thay đổi giá trị khi ta hoán vị 2 biến bất kỳ có dạng:
$f(x,y,z,t) = \alpha xyzt \vee \beta\bar{x}\bar{y}\bar{z}\bar{t} \vee \gamma(x\bar{y}\bar{z}\bar{t} \vee \bar{x}y\bar{z}\bar{t} \vee \bar{x}\bar{y}z\bar{t} \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z}t)$
$\vee\delta(xy\bar{z}\bar{t} \vee x\bar{y}z\bar{t} \vee x\bar{y}\bar{z}t \vee \bar{x}yz\bar{t} \vee \bar{x}y\bar{z}t \vee \bar{x}\bar{y}zt) \vee \varepsilon(xyz\bar{t} \vee xy\bar{z}t \vee x\bar{y}zt \vee \bar{x}yzt)$
với $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ là các hằng số tùy ý thuộc $\{0,1\}$.

**24.** Xét $a, b, c \in \{0,1\}$. Khi ấy ít nhất 2 trong 3 số trên bằng nhau. Giả sử $a = b$. Ta có:

$$f(a,b,c) = \overline{f(b,a,c)} = \overline{f(a,b,c)} \Rightarrow f(a,b,c) = 0$$

Tương tự trong các trường hợp khác ta cũng có $f = 0$.

Nếu $n > 2$ cũng không tồn tại hàm Bool $n$ biến $\neq 0$ thỏa điều kiện tren. Tuy nhiên nếu $n = 2$ thì các hàm Bool như vậy có dạng $f(x, y) = \alpha x\bar{y} \vee \bar{\alpha}\bar{x}y$ với $\alpha$ là hằng số tùy ý thuộc $\{0, 1\}$.

**25.** Lập bảng chân trị. Khi ấy hàm chẵn được xác định hoàn toàn bởi $\frac{1}{2}2^n = 2^{n-1}$ dòng đầu tiên. Do đó số hàm chẵn là $2^{2^{n-1}}$.

Với $n = 2$, ta được 4 hàm chẵn: $xy \vee \bar{x}\bar{y}$, $x\bar{y} \vee \bar{x}y$, 0, 1.

**26.** Tương tự như trong 25, số hàm lẻ $n$ biến là $2^{2^{n-1}}$.

Với $n = 2$, ta được 4 hàm lẻ: $x, \bar{x}, y, \bar{y}$.

**27.** a) Hai vế bằng nhau khi $x_1 = 1$ hay $x_1 = 0$.

b) Xét ánh xạ
$$\begin{array}{lcl} \mathcal{F}_n \times \mathcal{F}_n & \to & \mathcal{F}_{n+1} \\ (g_1, g_2) & \mapsto & f \end{array}$$

với $f(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = x_1 g_1(x_2, \ldots, x_{n+1}) \vee \bar{x_1} g_2(x_2, \ldots, x_{n+1})$

Khi ấy ta kiểm được dễ dàng ánh xạ trên là song ánh. Suy ra

$$|\mathcal{F}_{n+1}| = |\mathcal{F}_n| \times |\mathcal{F}_n|$$

Bằng qui nạp trên $n$ ta suy ra $|\mathcal{F}_n| = 2^{2^n}$

c) Bằng qui nạp trên $n$ và tính phân bố.

**28.** a) Viết hàm hằng 1 theo $n - p$ biến còn lại như là tổng Bool của $2^{n-p}$ từ tối tiểu và sử dụng tính phân bố, ta viết được $f$ như là tổng Bool của $2^{n-p}$ từ tối tiểu theo $n$ biến.

b) $f \prec g \Leftrightarrow \exists h : \ f = gh$

Do đó $g$ là tích của một số từ đơn xuất hiện trong $f$. Suy ra có $2^p$ hàm Bool trội $f$.

**29.** a) $f = \bar{x}y\bar{z}t \vee \bar{x}yz\bar{t} \vee x\bar{y}\bar{z}\bar{t} \vee x\bar{y}zt$

b) $f = \bar{x}\bar{y}zt \vee \bar{x}y\bar{z}t \vee \bar{x}yzt \vee x\bar{y}\bar{z}\bar{t} \vee x\bar{y}zt \vee xy\bar{z}\bar{t} \vee xy\bar{z}t \vee xyz\bar{t} \vee xyzt$

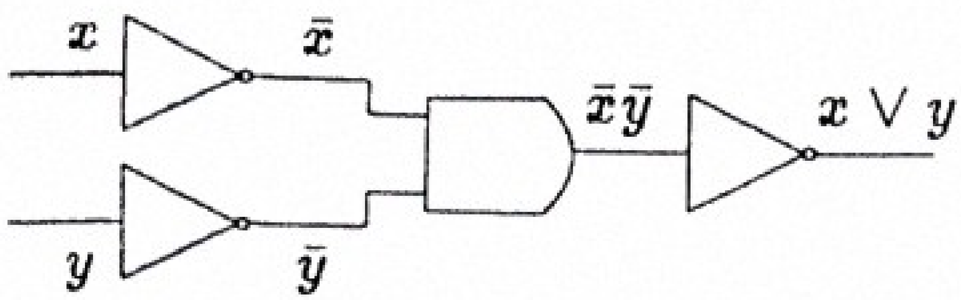
**31.** a) $xyzt \vee xyz\bar{t} \vee xy\bar{z}t \vee x\bar{y}zt \vee \bar{x}yxt$

b) $xyzt \vee xyz\bar{t} \vee xy\bar{z}t \vee xy\bar{z}\bar{t} \vee x\bar{y}zt \vee x\bar{y}\bar{z}t \vee x\bar{y}z\bar{t} \vee \bar{x}yzt \vee \bar{x}y\bar{z}t \vee \bar{x}\bar{y}zt \vee \bar{x}yz\bar{t}$

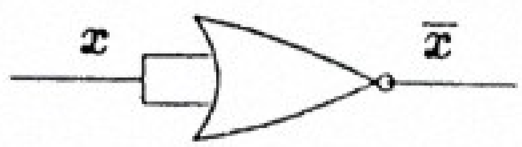
c) $xyzt \vee xy\bar{z}t \vee x\bar{y}zt \vee x\bar{y}\bar{z}t \vee xyz\bar{t} \vee \bar{x}yzt \vee \bar{x}yz\bar{t} \vee \bar{x}\bar{y}zt$

**32.** $abcd \vee abc\bar{d} \vee ab\bar{c}d \vee ab\bar{c}\bar{d} \vee a\bar{b}cd \vee a\bar{b}c\bar{d} \vee a\bar{b}\bar{c}d \vee \bar{a}bcd$

**34.**




**35.** Cổng NOT có thể được tổng hợp như sau:




Do đó cổng AND và cổng OR được tổng hợp nhờ các công thức:

$$xy = \overline{\bar{x} \vee \bar{y}} \quad \text{và} \quad x \vee y = \overline{\overline{x \vee y}}$$

**36.** $f = (\overline{x \vee y}\, z\bar{t}) \vee \overline{\overline{x \vee y}\, zt} = \bar{x}\bar{y}z\bar{t} \vee (x \vee y \vee \bar{z})t$

**37.** $f = xyzt \vee xy\bar{z}\bar{t} \vee x\bar{y}z\bar{t} \vee x\bar{y}\bar{z}t \vee \bar{x}yz\bar{t} \vee \bar{x}y\bar{z}t \vee \bar{x}\bar{y}zt \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z}\bar{t}$

Ta viết $xyzt = \overline{\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z} \vee \bar{t}}$ để sử dụng một cổng NOR có 4 ngõ vào tổng hợp từ tối tiểu này. Tương tự cho các từ tối tiểu khác.

Mặt khác ta có thể viết $f = \overline{\overline{xyzt}\; \overline{xy\bar{z}\bar{t}} \ldots}$ để thiết kế mạng chỉ dùng cổng NAND.

**38.** a) Các tế bào lớn: $xz\bar{t}$, $yz\bar{t}$, $\bar{x}yz$, $\bar{x}yt$, $y\bar{z}t$

Dùng phương pháp biểu đồ Karnaugh ta được 2 công thức:

$f = xz\bar{t} \vee y\bar{z}t \vee \bar{x}yz$

$f = xz\bar{t} \vee y\bar{z}t \vee yz\bar{t} \vee \bar{x}yt$

trong đó chỉ có công thức đầu là tối tiểu.

b) Các tế bào lớn: $x\bar{z}$, $xy$, $yzt$, $\bar{x}zt$, $\bar{x}\bar{y}t$, $\bar{y}\bar{z}t$

Có 3 công thức đa thức tối tiểu:

$f = x\bar{z} \vee xy \vee \bar{x}\bar{y}t \vee yzt$

$f = x\bar{z} \vee xy \vee \bar{x}\bar{y}t \vee \bar{x}zt$

$f = x\bar{z} \vee xy \vee \bar{x}zt \vee \bar{y}\bar{z}t$

c) Dạng nối rời chính tắc cũng là công thức đa thức tối tiểu duy nhất.

d) Các tế bào lớn: $\bar{y}$, $x\bar{z}$, $\bar{x}z$, $\bar{t}$

Công thức đa thức tối tiểu duy nhất: $f = \bar{y} \vee \bar{t} \vee x\bar{z} \vee \bar{x}z$

e) Các tế bào lớn: $\bar{y}\bar{t}$, $z\bar{t}$, $yz$, $yt$

Có 2 công thức đa thức tối tiểu:

$f = \bar{y}\bar{t} \vee yt \vee yz$

$f = \bar{y}\bar{t} \vee yt \vee z\bar{t}$

f) Các tế bào lớn: $x\bar{y}\bar{t}$, $x\bar{z}\bar{t}$, $xy\bar{z}$, $xyt$, $yzt$, $\bar{x}yz$

Có 3 công thức đa thức tối tiểu:

$f = x\bar{y}\bar{t} \vee \bar{x}yz \vee x\bar{z}\bar{t} \vee xyt$

$f = x\bar{y}\bar{t} \vee \bar{x}yz \vee xy\bar{z} \vee xyt$

$f = x\bar{y}\bar{t} \vee \bar{x}yz \vee xy\bar{z} \vee yzt$

**39.** a) $f = x\bar{z} \vee \bar{x}yz \vee y\bar{z}t$

và $f = x\bar{z} \vee \bar{x}yz \vee \bar{x}yt$

b) $f = \bar{x}\bar{y} \vee xyt \vee \bar{y}\bar{z}t \vee y\bar{z}\bar{t}$

$f = \bar{x}\bar{y} \vee xyt \vee x\bar{z}t \vee y\bar{z}\bar{t}$

c) $f = zt \vee \bar{z}\bar{t}$

d) $f = x \vee yz$

e) Dùng Phương pháp biểu đồ Karnaugh được 6 công thức trong đó chỉ có một công thức tối tiểu:

$f = \bar{x}y\bar{z} \vee xy\bar{t} \vee \bar{z}\bar{t} \vee \bar{x}\bar{y}z \vee x\bar{y}t$

f) $f = xy \vee tz$

g) $f = x\bar{z} \vee y\bar{z} \vee yt$

h) $f = yt \vee \bar{x}\bar{z}$

i) $f = xz\bar{t} \vee xy\bar{z} \vee \bar{x}yz \vee \bar{x}\bar{z}\bar{t}$

**40.** a) $f = xy\bar{z} \vee x\bar{y}z \vee \bar{x}yz$

Đây cũng là công thức đa thức tối tiểu duy nhất. Mạng tối ưu sử dụng 6 cổng AND và 2 cổng OR.

b) $f = xy \vee yz \vee xz$

Đây cũng là công thức đa thức tối tiểu duy nhất. Mạng tối ưu sử dụng 3 cổng AND và 2 cổng OR.

c) $f = xyz\bar{t} \vee xy\bar{z}t \vee x\bar{y}zt \vee \bar{x}yzt \vee x\bar{y}\bar{z}\bar{t} \vee \bar{x}y\bar{z}\bar{t} \vee \bar{x}\bar{y}z\bar{t} \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z}t$

Đây cũng là công thức đa thức tối tiểu duy nhất. Mạng tối ưu sử dụng 24 cổng AND và 7 cổng OR.

## Tài liệu tham khảo


[1] R.P. Grimaldi, Discrete and Combinatorial Mathematics, An Applied Introduction, Addison-Wesley, 1994.

[2] J. Vélu, Méthodes mathématiques pour l'informatique, Dunod, 1989.

[3] Đỗ Văn Nhơn, Toán rời rạc, Đại học Khoa học Tự nhiên TP.Hồ Chí Minh, 1996

[4] K.A. Ross & C.R.B. Wright, Discrete Mathematics, Englewood Cliffs, N.J., Prentice-Hall, 1992.

[5] J.E. Munro, Discrete Mathematics for computing, Thomas Nelson Australia, 1992.

[6] A. Mizrahi & M. Sullivan, Finite Mathematics with Applications, J. Wiley & Sons, Inc., 1988