



Cơ sở lý thuyết hàm biến phức

Nguyễn Thủy Thanh

NXB Đại học quốc gia Hà Nội 2006, 565 Tr.

Từ khoá: Mặt phẳng phức, Hàm số phức, số phức, Hàm biến phức, Điểm tụ, Biên của tập hợp, Tập hợp compact, Hàm phức biến thực, Miền đơn liên, Đa liên, Hàm chỉnh hình, Ánh xạ bảo giác, Ánh xạ chỉnh hình, Nguyên lý thác triển giải tích, tập hợp mờ, Hàm đa trị, Diện đa liên, Lý thuyết thặng dư, Hàm đơn điệp, Phiến hàm liên tục, Diện Riemann.

Tài liệu trong Thư viện điện tử ĐH Khoa học Tự nhiên có thể sử dụng cho mục đích học tập và nghiên cứu cá nhân. Nghiêm cấm mọi hình thức sao chép, in ấn phục vụ các mục đích khác nếu không được sự chấp thuận của nhà xuất bản và tác giả.

NGUYỄN THUYẾT THANH

CƠ SỞ LÝ THUYẾT HÀM BIẾN PHỨC

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
Hà Nội – 2006

Mục lục

Lời nói đầu	8
1 Mặt phẳng phức và hàm biến phức	10
1.1 Tập hợp số phức, mặt phẳng phức	11
1.1.1 Định nghĩa số phức	12
1.1.2 Dạng đại số của số phức	16
1.1.3 Phép trừ và phép chia số phức	18
1.1.4 Mặt phẳng phức	19
1.1.5 Môđun và acgumen của số phức	20
1.1.6 Phép khai căn số phức	28
1.1.7 Dạng mũ của số phức	29
1.1.8 Khái niệm về mặt phẳng mở rộng	30
1.1.9 Khoảng cách trên \mathbb{C}	33
1.2 Các khái niệm tôpô cơ bản trên mặt phẳng phức	35
1.2.1 Tôpô trên \mathbb{C}	36
1.2.2 Phần trong và phần ngoài	38
1.2.3 Điểm tụ	39
1.2.4 Biên của tập hợp	40
1.2.5 Tập hợp compact	41
1.2.6 Tập hợp liên thông	42
1.2.7 Hàm phức biến thực. Tuyến và đường cong	46
1.2.8 Phép đồng luân	53
1.2.9 Miền đơn liên và đa liên	56

1.3	Hàm biến phức	59
1.3.1	Định nghĩa hàm biến phức	59
1.3.2	Các ví dụ về ánh xạ đơn điệu	62
1.3.3	Giới hạn của hàm	64
1.3.4	Tính liên tục và liên tục đều	67
1.4	Lý thuyết dãy và chuỗi trong miền phức	72
1.4.1	Giới hạn của dãy điểm	72
1.4.2	Chuỗi số phức và sự hội tụ của nó	75
1.4.3	Dãy và chuỗi hàm	79
1.4.4	Chuỗi lũy thừa	85
1.4.5	Sự hội tụ đều trên từng compact	92
1.5	Hàm $\arg z$	95
1.5.1	Tính liên tục của hàm $\arg z$	95
1.5.2	Số gia của argumen dọc theo đường cong	96
1.5.3	Nhánh đơn trị liên tục của hàm $\arg z$	98
1.6	Bài tập	100
2	Hàm chỉnh hình	105
2.1	Hàm khả vi	106
2.1.1	Hàm \mathbb{R}^2 - khả vi	106
2.1.2	Đạo hàm theo phương	108
2.1.3	Hàm \mathbb{C} - khả vi	110
2.1.4	Mối liên hệ giữa \mathbb{C} - khả vi và \mathbb{R}^2 - khả vi	114
2.1.5	Hàm chỉnh hình	115
2.1.6	Không gian các hàm chỉnh hình	121
2.2	Một số hàm chỉnh hình sơ cấp	122
2.2.1	Đa thức và hàm hữu tỷ	122
2.2.2	Hàm $w = z^n$ và $z = \sqrt[n]{w}$, $n \in \mathbb{N}$	122
2.2.3	Hàm e^z	124
2.2.4	Hàm lôgarit	126
2.2.5	Hàm lũy thừa z^α , $\alpha \in \mathbb{R}$	130
2.2.6	Các hàm sơ cấp khác	131

2.2.7	Nhánh chỉnh hình của hàm đa trị	134
2.3	Hàm chỉnh hình và ánh xạ bảo giác	138
2.3.1	Ý nghĩa hình học của argumen của đạo hàm	138
2.3.2	Ý nghĩa hình học của môđun đạo hàm	140
2.3.3	Ánh xạ bảo giác	141
2.3.4	Ánh xạ liên tục và ánh xạ chỉnh hình	143
2.4	Các đẳng cấu sơ cấp	146
2.4.1	Đẳng cấu phân tuyến tính	147
2.4.2	Ánh xạ $w = e^z$ và $z = \log w$	160
2.4.3	Hàm Jukovski	164
2.4.4	Các đẳng cấu sơ cấp khác	172
2.4.5	Một số ví dụ	175
2.5	Bài tập	183
3	Lý thuyết tích phân hàm chỉnh hình	188
3.1	Tích phân trong miền phức	189
3.1.1	Định nghĩa tích phân	189
3.1.2	Ước lượng tích phân	193
3.1.3	Tính tích phân bằng phương pháp qua giới hạn	194
3.1.4	Dạng vi phân đúng và dạng vi phân đóng	200
3.1.5	Tích phân đường phụ thuộc tham số	213
3.2	Lý thuyết Cauchy	217
3.2.1	Nguyên hàm địa phương của hàm chỉnh hình	217
3.2.2	Nguyên hàm của hàm chỉnh hình theo tuyến	223
3.2.3	Tính bất biến của tích phân đối với các tuyến đồng luân	227
3.2.4	Công thức tích phân cơ bản thứ nhất của Cauchy	231
3.2.5	Nguyên hàm trong miền đơn liên	234
3.2.6	Công thức tích phân Cauchy (công thức cơ bản thứ hai của Cauchy)	235
3.2.7	Biểu diễn tích phân đối với đạo hàm của hàm chỉnh hình	241
3.2.8	Điều kiện đủ để hàm f chỉnh hình	250
3.2.9	Hàm điều hòa và mối liên hệ với hàm chỉnh hình	250

3.2.10	Tích phân dạng Cauchy. Công thức Sokhotski	257
3.2.11	Biểu diễn tích phân hàm điều hòa	270
3.3	Bài tập	277
4	Các tính chất cơ bản của hàm chỉnh hình	278
4.1	Các kết quả quan trọng nhất rút ra từ tích phân Cauchy . . .	279
4.1.1	Định lý giá trị trung bình	279
4.1.2	Định lý Liouville	280
4.1.3	Định lý Weierstrass về chuỗi hàm hội tụ đều	284
4.1.4	Tính chất địa phương của hàm chỉnh hình. Chuỗi Taylor	288
4.1.5	Các quan điểm khác nhau trong việc xây dựng lý thuyết hàm chỉnh hình	305
4.2	Tính chất duy nhất của hàm chỉnh hình	310
4.2.1	Không điểm (0-điểm) của hàm chỉnh hình	310
4.2.2	Tính chất duy nhất của hàm chỉnh hình	313
4.2.3	Nguyên lý thác triển giải tích	317
4.2.4	Nguyên lý môđun cực đại	320
4.3	Điểm bất thường cô lập	326
4.3.1	Chuỗi Laurent	326
4.3.2	Điểm bất thường cô lập đơn trị	337
4.3.3	Dáng điệu của hàm tại điểm vô cùng	348
4.3.4	Phân loại hàm chỉnh hình	350
4.4	Tính bất biến của tập hợp mở	354
4.4.1	Nguyên lý argumen	354
4.4.2	Định lý Rouché	360
4.4.3	Tính bất biến của tập hợp mở	363
4.5	Bài tập	365
5	Hàm đa trị và diện Riemann	369
5.1	Phương pháp thác triển của Weierstrass	370
5.1.1	Phần tử chính tắc	371

5.1.2	Điểm bất thường của phần tử chính tắc	372
5.1.3	Phương pháp thác triển của Weierstrass	373
5.1.4	Hàm không cho phép thác triển giải tích	378
5.2	Các phương pháp khác	380
5.2.1	Thác triển giải tích theo tuyến	380
5.2.2	Thác triển đối xứng	386
5.3	Hàm giải tích đủ	391
5.3.1	Khái niệm hàm giải tích đủ	391
5.3.2	Một vài ví dụ	393
5.3.3	Tính đơn trị và đa trị. Định lý đơn trị (monodromie)	396
5.3.4	Nhánh và phương pháp tách nhánh chỉnh hình	399
5.3.5	Khái niệm về điểm bất thường	405
5.4	Khái niệm về diện Riemann	412
5.4.1	Một số ví dụ mở đầu	413
5.4.2	Phương pháp dựng diện Riemann	419
5.5	Bài tập	420
6	Lý thuyết thặng dư và ứng dụng	422
6.1	Cơ sở lý thuyết thặng dư	423
6.1.1	Định nghĩa thặng dư	423
6.1.2	Phương pháp tính thặng dư	425
6.1.3	Định lý cơ bản của lý thuyết thặng dư	436
6.1.4	Tích tích phân theo chu tuyến đóng	444
6.2	Một số ứng dụng của lý thuyết thặng dư	448
6.2.1	Phương pháp tính tích phân	448
6.2.2	Tích tích phân dạng $I = \int_0^{2\pi} R(\cos \varphi, \sin \varphi) d\varphi$	451
6.2.3	Tích phân dạng $I = \int_{-\infty}^{+\infty} R(x) dx$	454

6.2.4	Tích phân dạng $I = \int_{\mathbb{R}} e^{iax} R(x) dx$	459
6.2.5	Tích phân dạng $I = \int_{\mathbb{R}^+} R(x) x^\alpha dx$	463
6.2.6	Một số ví dụ khác	478
6.2.7	Tìm tổng của chuỗi	490
6.3	Hàm nguyên và hàm phân hình	495
6.3.1	Hàm phân hình. Bài toán Cousin thứ nhất trong mặt phẳng phức	495
6.3.2	Hàm nguyên. Bài toán Cousin thứ hai trong mặt phẳng phức	503
6.4	Bài tập	513
7	Ánh xạ bảo giác	515
7.1	Các khái niệm chung	516
7.1.1	Hàm đơn điệu	517
7.1.2	Điều kiện đủ để hàm đơn điệu	522
7.1.3	Sự hội tụ của dãy hàm đơn điệu	524
7.1.4	Tính chất địa phương của ánh xạ chỉnh hình có đạo hàm bằng 0	525
7.1.5	Tính chất chung của ánh xạ bảo giác	527
7.1.6	Đẳng cấu và tự đẳng cấu	528
7.1.7	Điều kiện cần để tồn tại đẳng cấu	532
7.1.8	Điều kiện chuẩn	534
7.2	Định lý cơ bản của lý thuyết ánh xạ bảo giác	537
7.2.1	Tập hợp bị chặn trong $\mathcal{H}(D)$	538
7.2.2	Tập hợp liên tục đồng bậc	539
7.2.3	Nguyên lý compact	540
7.2.4	Phiếm hàm liên tục	544
7.2.5	Đơn giản hóa cách đặt bài toán Riemann	546
7.2.6	Định lý Riemann	548
7.2.7	Định lý duy nhất của ánh xạ bảo giác	553

7.2.8	Sự tương ứng giữa các biên và công thức Christoffel-Schwarz	554
7.3	Bài tập	560
	Tài liệu tham khảo	563

Lời nói đầu

Cơ sở lý thuyết hàm biến phức (LTHBP) được đặt nền móng từ giữa thế kỷ XVIII bởi các công trình của L. Euler. Với tư cách một nhánh độc lập, LTHBP được hình thành vào giữa thế kỷ XIX nhờ các công trình của O. Cauchy, C. Weierstrass và B. Riemann.

Ngày nay LTHBP là một trong những phần quan trọng nhất của toán học. Đó là khoa học vừa cổ điển vừa hiện đại, vừa gắn bó mật thiết với các nhánh hiện đại nhất của toán học lý thuyết lại vừa gắn bó với nhiều bài toán vật lý và cơ học cụ thể. Tư tưởng và kết quả của nó đã thâm nhập sâu vào nhiều phần khác nhau của toán học. Các phương pháp của LTHBP đã trở thành quen thuộc cả trong nhiều ngành ứng dụng như thủy động học, và khí động học, lý thuyết đàn hồi,... Vì lý do đó mà LTHBP là môn học bắt buộc, là một phần tất yếu của giáo dục toán học đối với các hệ đào tạo: Toán, Toán - Cơ, Toán - Tin ứng dụng của trường Đại học Khoa học Tự nhiên (Đại học Quốc gia Hà Nội).

Giáo trình “*Cơ sở lý thuyết hàm biến phức*” này được biên soạn theo sát chương trình Hàm biến phức được Đại học Quốc gia Hà Nội ban hành. Khối lượng và cấu trúc chung của cuốn sách là hoàn toàn tương ứng với nội dung và cấu trúc của chương trình hiện hành của Đại học Quốc gia Hà Nội. Nó được biên soạn dựa trên nội dung cuốn sách “*Cơ sở lý thuyết Hàm biến phức*” trước đây của tác giả và kinh nghiệm trình bày LTHBP ở trường Đại học Tổng hợp Hà Nội trước đây và Đại học Quốc gia Hà Nội ngày nay.

Nhằm mục đích giúp sinh viên hiểu thấu đáo cơ sở lý thuyết của LTHBP, khi biên soạn giáo trình này chúng tôi đã cố gắng đưa vào nhiều ví dụ minh

họa được chọn lọc kỹ càng và được giải một cách chi tiết.

Chúng tôi hy vọng rằng giáo trình này cùng với giáo trình “*Hướng dẫn giải Bài tập Hàm biến phức*” (Nhà Xuất bản Đại học Quốc gia Hà Nội, 2003) của chúng tôi sẽ là bộ sách đáp ứng được những yêu cầu cơ bản về LTHBP của ĐHQG Hà Nội.

Chúng tôi chân thành bày tỏ lòng biết ơn đến Bộ môn Giải tích, Khoa Toán - Cơ - Tin học trường Đại học Tổng hợp Hà Nội trước đây và trường Đại học Khoa học Tự nhiên ngày nay đã tạo điều kiện cho tôi hoàn thành bản thảo giáo trình này.

Chúng tôi chân thành cảm ơn GS. TSKH Nguyễn Văn Mậu và PGS. TS Nguyễn Minh Tuấn đã có những trao đổi và đóng góp nhiều ý kiến quý báu cho tác giả khi chuẩn bị bản thảo giáo trình này.

Tác giả chân thành mong nhận được sự quan tâm và góp ý của bạn đọc xa gần về nội dung và hình thức để giáo trình ngày được hoàn thiện hơn.

Hà Nội, Mùa thu 2005

Tác giả

Chương 1

Mặt phẳng phức và hàm biến phức

1.1	Tập hợp số phức, mặt phẳng phức	11
1.1.1	Định nghĩa số phức	12
1.1.2	Dạng đại số của số phức	16
1.1.3	Phép trừ và phép chia số phức	18
1.1.4	Mặt phẳng phức	19
1.1.5	Môđun và acgumen của số phức	20
1.1.6	Phép khai căn số phức	28
1.1.7	Dạng mũ của số phức	29
1.1.8	Khái niệm về mặt phẳng mở rộng	30
1.1.9	Khoảng cách trên \mathbb{C}	33
1.2	Các khái niệm tôpô cơ bản trên mặt phẳng phức	35
1.2.1	Tôpô trên \mathbb{C}	36
1.2.2	Phần trong và phần ngoài	38
1.2.3	Điểm tụ	39

1.2.4	Biên của tập hợp	40
1.2.5	Tập hợp compact	41
1.2.6	Tập hợp liên thông	42
1.2.7	Hàm phức biến thực. Tuyến và đường cong	46
1.2.8	Phép đồng luân	53
1.2.9	Miền đơn liên và đa liên	56
1.3	Hàm biến phức	59
1.3.1	Định nghĩa hàm biến phức	59
1.3.2	Các ví dụ về ánh xạ đơn diệp	62
1.3.3	Giới hạn của hàm	64
1.3.4	Tính liên tục và liên tục đều	67
1.4	Lý thuyết dãy và chuỗi trong miền phức	72
1.4.1	Giới hạn của dãy điểm	72
1.4.2	Chuỗi số phức và sự hội tụ của nó	75
1.4.3	Dãy và chuỗi hàm	79
1.4.4	Chuỗi lũy thừa	85
1.4.5	Sự hội tụ đều trên từng compact	92
1.5	Hàm $\arg z$	95
1.5.1	Tính liên tục của hàm $\arg z$	95
1.5.2	Số gia của argumen dọc theo đường cong	96
1.5.3	Nhánh đơn trị liên tục của hàm $\arg z$	98
1.6	Bài tập	100

1.1 Tập hợp số phức, mặt phẳng phức

Tập hợp số phức có hai cấu trúc: cấu trúc đại số của một *trường* và đồng thời nó có cấu trúc tôpô của một *không gian* (không gian Euclide hai chiều,

tức là mặt phẳng). Do đó tập hợp các số phức có cả tính chất đại số lẫn tính chất tôpô. Trong mục này ta sẽ nghiên cứu các tính chất đại số của tập hợp số phức.

1.1.1 Định nghĩa số phức

Ta xét phương trình

$$x^2 + 1 = 0.$$

Rõ ràng là phương trình này không có nghiệm thuộc \mathbb{R} vì $x^2 + 1 \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}$. Do đó một vấn đề tự nhiên đặt ra là tìm một tập hợp (ta ký hiệu là \mathbb{C}) thỏa mãn các điều kiện sau đây:

1. \mathbb{C} là một trường;
2. $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$;
3. Phương trình $x^2 + 1 = 0$ có nghiệm trong \mathbb{C} .

Vì tập hợp các số thực \mathbb{R} là một tập hợp con của \mathbb{C} nên khi xác định các phép tính số học cơ bản trên các số phức ta cần đòi hỏi rằng khi áp dụng cho các số thực các phép toán đó đưa lại kết quả như kết quả thu được trong số học các số thực. Mặt khác, nếu ta mong muốn các số phức có những ứng dụng trong các vấn đề của giải tích thì ta cần đòi hỏi rằng các phép toán cơ bản được đưa vào đó phải thỏa mãn các tiên đề thông thường của số học các số thực.

Định nghĩa 1.1.1. Mỗi cặp số thực có thứ tự $(a, b) \quad \forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}$ được gọi là một *số phức* nếu trên tập hợp các cặp đó quan hệ bằng nhau, phép cộng và phép nhân được đưa vào theo các định nghĩa (tiên đề) sau đây:

$$\text{I.} \quad (a, b) = (c, d) \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = d. \end{cases}$$

II. *Phép cộng:* $(a, b) + (c, d) \stackrel{\text{def}}{=} (a + c, b + d)$ ¹ và cặp $(a + c, b + d)$ được gọi là *tổng* của các cặp (a, b) và (c, d) .

¹Def. là cách viết tắt của từ tiếng Anh definition (định nghĩa)

III. *Phép nhân*: $(a, b)(c, d) \stackrel{def}{=} (ac - bd, ad + bc)$ và cặp $(ac - bd, ad + bc)$ được gọi là *tích* của các cặp (a, b) và (c, d) .

IV. Cặp $(a, 0)$ được đồng nhất với số thực a , nghĩa là

$$(a, 0) \stackrel{def}{=} a.$$

Tập hợp các số phức được ký hiệu là \mathbb{C} .

Như vậy mọi phần của định nghĩa số phức đều được phát biểu bằng ngôn ngữ số thực và các phép toán trên chúng.

Trong định nghĩa này ba tiên đề đầu thực chất là định nghĩa các khái niệm khác nhau: định nghĩa khái niệm bằng nhau, tổng và tích các số phức. Do đó việc đối chiếu các tiên đề đó với nhau sẽ không dẫn đến bất cứ mâu thuẫn nào. Điều duy nhất có thể gây ra đôi chút lo ngại là tiên đề IV. Vấn đề là ở chỗ: vốn dĩ các khái niệm bằng nhau, tổng và tích các số thực có ý nghĩa hoàn toàn xác định và do đó nếu các khái niệm này không tương thích với những khái niệm được đề cập đến trong các tiên đề I - III khi xét các số thực với tư cách là các cặp dạng đặc biệt thì buộc phải loại trừ tiên đề IV. Do đó ta cần đối chiếu tiên đề IV với các tiên đề I, II và III.

1) I - IV. Giả sử hai số thực a và b bằng nhau như những cặp dạng đặc biệt đồng nhất với chúng: $(a, 0) = (b, 0)$. Khi đó theo tiên đề I ta có $(a, 0) = (b, 0) \Leftrightarrow a = b$, tức là nếu chúng bằng nhau theo nghĩa thông thường.

2) II - IV. Theo tiên đề II, tổng hai số thực a và c được xét như những cặp $(a, 0)$ và $(c, 0)$ là bằng cặp $(a + c, 0 + 0) = (a + c, 0)$. Nhưng theo tiên đề IV thì $(a + c, 0) \equiv a + c$. Như vậy

$$(a, 0) + (c, 0) = (a + c, 0 + 0) = (a + c, 0) \equiv a + c$$

tức là đồng nhất bằng tổng $a + c$ theo nghĩa thông thường.

3) III - IV. Theo tiên đề III, tích các số thực a và b được xét như những cặp $(a, 0)$ và $(c, 0)$ là bằng cặp

$$(ac - 0 \cdot 0, a \cdot 0 + 0 \cdot c) = (ac, 0)$$

và theo tiên đề IV ta có $(ac, 0) \equiv ac$. Như vậy

$$(a, 0)(c, 0) \stackrel{(III)}{=} (ac, 0) \stackrel{(IV)}{=} ac$$

tức là đồng nhất bằng tích a với c theo nghĩa thông thường.

Như vậy tiên đề IV tương thích với các tiên đề I, II và III.

Ta cũng lưu ý công thức sau đây được suy trực tiếp từ III và IV:

$$m(a, b) = (ma, mb), \quad m \in \mathbb{R}.$$

Thật vậy từ IV và III ta có

$$\begin{aligned} m(a, b) &= (m, 0)(a, b) = (ma - 0 \cdot b, mb + 0 \cdot a) \\ &= (ma, mb). \end{aligned}$$

Nếu $m \in \mathbb{N}$ thì theo II ta có

$$\begin{aligned} (a, b) + (a, b) &= (2a, 2b); \\ (2a, 2b) + (a, b) &= (3a, 3b), \dots \end{aligned}$$

tức là (ma, mb) là kết quả của phép cộng liên tiếp m số hạng bằng (a, b) . Điều đó phù hợp với biểu tượng thông thường là phép nhân với số tự nhiên tương ứng với phép cộng m số hạng bằng nhau.

Dễ dàng thấy rằng các tiên đề II và III là tương thích với nhau và các quy luật thông thường của các phép tính thực hiện trên các số vẫn được bảo toàn khi chuyển sang số phức (đương nhiên phải cắt bỏ mọi quy luật có quan hệ tới dấu $>$).

Định nghĩa 1.1.2. Giả sử $z = (a, b) \in \mathbb{C}$. Khi đó số phức $(a, -b)$ được gọi là *số phức liên hợp* với số phức z và được ký hiệu là \bar{z} :

$$\bar{z} = (a, -b).$$

Ta có định lý sau đây:

Định lý 1.1.1. Tập hợp \mathbb{C} lập thành một trường thỏa mãn các điều kiện:

1. $\mathbb{C} \supset \mathbb{R}$;
2. \mathbb{C} chứa phần tử i với tính chất $i^2 = -1$; phần tử i này được gọi là đơn vị ảo.

Chứng minh. 1. \mathbb{C} là một trường. Hiển nhiên, phần tử đơn vị của \mathbb{C} là cặp $(1, 0)$ vì rằng $(a, b)(1, 0) = (a \cdot 1 - b \cdot 0, a \cdot 0 + b \cdot 1) = (a, b)$; và phần tử - không của \mathbb{C} là cặp $(0, 0)$ vì rằng $(a, b) + (0, 0) = (a + 0, b + 0) = (a, b)$.

Để chứng tỏ \mathbb{C} là một trường ta chỉ cần kiểm nghiệm sự tồn tại phần tử nghịch đảo (việc kiểm nghiệm các tiên đề còn lại đối với một trường là hiển nhiên). Giả sử $z = (a, b) \neq (0, 0)$ (tức là $a^2 + b^2 > 0$). Ta sẽ tìm $z' = (a', b')$ sao cho

$$(a, b)(a', b') = (1, 0).$$

Từ I và III suy ra

$$\left. \begin{aligned} aa' - bb' &= 1, \\ ba' + ab' &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Từ đó rút ra $a' = \frac{a}{a^2 + b^2}$, $b' = -\frac{b}{a^2 + b^2}$. Như vậy

$$z' = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, -\frac{b}{a^2 + b^2} \right),$$

và rõ ràng là

$$\begin{aligned} z \cdot z' &= (a, b) \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, -\frac{b}{a^2 + b^2} \right) \\ &= \left(\frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2}, -\frac{ab + ab}{a^2 + b^2} \right) = (1, 0). \end{aligned}$$

Về sau phần tử nghịch đảo z' của z thường được ký hiệu là z^{-1} .

2. $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Xét các cặp dạng $(a, 0)$. Dễ dàng thấy rằng tập hợp $\mathbb{R}' = \{(a, 0), a \in \mathbb{R}\}$ lập thành một trường con của \mathbb{C} . Ta xét ánh xạ từ \mathbb{R} vào \mathbb{R}'

$$a \mapsto (a, 0).$$

Hiển nhiên rằng nếu $(a, 0) = (a', 0)$ thì $a = a'$ và ngược lại, đồng thời

$$\begin{aligned}a + b &\mapsto (a + b, 0) = (a, 0) + (b, 0), \\ab &\mapsto (ab, 0) = (a, 0)(b, 0).\end{aligned}$$

Do đó ánh xạ vừa xét là một đẳng cấu giữa \mathbb{R} và \mathbb{R}' và phép đẳng cấu này cho phép ta xem \mathbb{R} như là một trường con của \mathbb{C} .

3. Phương trình $x^2 + 1 = 0$ có nghiệm trong \mathbb{C} , tức là \mathbb{C} chứa phần tử i mà $i^2 = -1$.

Thật vậy, giả sử $x = (a, b) \in \mathbb{C}$. Khi đó trong \mathbb{C} phương trình $x^2 + 1 = 0$ có dạng:

$$(a, b)(a, b) + (1, 0) = (0, 0),$$

hay là

$$\begin{aligned}a^2 - b^2 + 1 &= 0, \\2ab &= 0.\end{aligned}$$

Từ đó rút ra $a = 0, b = 1$ và $a = 0, b = -1$. Ta ký hiệu hai nghiệm đó là $i = (0, 1)$ và $-i = (0, -1)$. \square

1.1.2 Dạng đại số của số phức

Ta có định lý sau đây

Định lý 1.1.2. Mọi số phức $z = (a, b) \in \mathbb{C}$ đều có thể biểu diễn dưới dạng

$$z = (a, b) = a + ib.$$

Chứng minh. Thật vậy, ta có

$$z = (a, b) = (a, 0) + (b, 0)(0, 1) = a + ib. \quad \square$$

Phép biểu diễn số phức $z = (a, b)$ dưới dạng $a + ib$ được gọi là *dạng đại số* hay *dạng Descartes* của số phức. Số a được gọi là *phần thực* của số phức

z và ký hiệu là $a = \operatorname{Re}[z]$, số b được gọi là *phần ảo* của nó và ký hiệu là $b = \operatorname{Im}[z]$.²

Nếu $z = \operatorname{Re}[z]$ thì z là một số thực. Nếu $z = i\operatorname{Im}[z]$ thì z là một số *thuần ảo*. Với quan điểm các phép toán trong trường các số phức, số thuần ảo bi có thể hiểu như là tích của số thực b với đơn vị ảo i và mỗi số phức $a + ib$ như là tổng của số thực a với số thuần ảo ib .

Do đó trong cách xây dựng số phức này ta đã sử dụng các ký hiệu có một ý nghĩa hoàn toàn cụ thể và vì thế tránh được tính hình thức do ký hiệu đơn vị ảo i mang lại.

Hệ quả. Giả sử $z = a + ib \in \mathbb{C}$. Khi đó số phức liên hợp \bar{z} có thể biểu diễn dưới dạng $\bar{z} = a - ib$.

Phép chuyển từ số phức đã cho sang số phức liên hợp với nó được gọi là *phép lấy liên hợp*.

Định lý 1.1.3. Giả sử z, z_1 và $z_2 \in \mathbb{C}$. Khi đó

1. $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2;$
2. $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2, \quad \overline{\alpha z} = \alpha \bar{z}, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R};$
3. $\overline{\bar{z}} = z.$

Chứng minh. 1. Thật vậy, giả sử $z_1 = a_1 + ib_1, z_2 = a_2 + ib_2$. Khi đó

$$\begin{aligned} \overline{z_1 + z_2} &= (a_1 + a_2) - i(b_1 + b_2) \\ &= (a_1 - ib_1) + (a_2 - ib_2) = \bar{z}_1 + \bar{z}_2. \end{aligned}$$

2. Tương tự

$$\begin{aligned} \overline{z_1 z_2} &= (a_1 a_2 - b_1 b_2) - i(a_1 b_2 + a_2 b_1) \\ &= (a_1 - ib_1)(a_2 - ib_2) = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2. \end{aligned}$$

3. Hiển nhiên. □

²Các ký hiệu Re và Im xuất hiện do việc viết tắt các từ tiếng Pháp *Reel* (thực) và *Imaginaire* (ảo)

Một số phức trùng với số liên hợp với nó khi và chỉ khi nó là số thực.

Dễ thấy ánh xạ từ tập hợp tất cả các số phức vào tập hợp các số phức liên hợp với chúng:

$$\mathbb{C} \ni z \mapsto \bar{z} \in \mathbb{C}$$

là một tự đẳng cấu của \mathbb{C} (Bạn đọc hãy tự kiểm tra!).

1.1.3 Phép trừ và phép chia số phức

Các phép toán trừ và chia được định nghĩa như các phép toán ngược với phép cộng và nhân. Đối với phép trừ ta có

Định lý 1.1.4. *Giả sử z_1 và $z_2 \in \mathbb{C}$. Khi đó tồn tại một và chỉ một số phức z sao cho $z_1 + z = z_2$, cụ thể là $z = (-z_1) + z_2$.*

Chứng minh. 1. Ta có $z_1 + ((-z_1) + z_2) = (z_1 + (-z_1)) + z_2 = 0 + z_2 = z_2$ và như vậy $z = (-z_1) + z_2$ thỏa mãn đòi hỏi của định lý.

2. Ngược lại, nếu $z_1 + z = z_2$ thì $(-z_1) + (z_1 + z) = (-z_1) + z_2$. Từ đó $z = (-z_1) + z_2$ và như vậy định lý được chứng minh. \square

Số phức $z = (-z_1) + z_2$ được gọi là *hiệu* của các số phức z_2 và z_1 . Thông thường hiệu đó được ký hiệu là

$$z = z_2 - z_1,$$

và nếu $z_1 = a_1 + ib_1$, còn $z_2 = a_2 + ib_2$ thì

$$z = z_2 - z_1 = (a_2 - a_1) + i(b_2 - b_1).$$

Đối với phép chia ta có

Định lý 1.1.5. *Giả sử z_1 và $z_2 \in \mathbb{C}$, $z_2 \neq 0$. Khi đó tồn tại một và chỉ một số phức z sao cho $z_2 z = z_1$, cụ thể là: $z = z_2^{-1} z_1$.*

Chứng minh. 1. Nếu $z = z_2^{-1} z_1$ thì $z_2 z = z_2 (z_2^{-1} z_1) = z_1$.

2. Nếu $z_2 z = z_1 \Rightarrow z = z_2^{-1} (z_2 z) = z_2^{-1} z_1$. \square

Như vậy số $z_2^{-1}z_1$ là *thương* của phép chia z_1 cho z_2 .

Số thương thường được ký hiệu là $\frac{z_1}{z_2}$ hoặc z_1/z_2 .

Giả sử $z_1 = a_1 + ib_1$, $z_2 = a_2 + ib_2$. Khi đó ta có thể viết:

$$\begin{aligned} z = \frac{z_1}{z_2} &= \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} = \frac{(a_1 + ib_1)(a_2 - ib_2)}{a_2^2 + b_2^2} \\ &= \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i \frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}. \end{aligned}$$

Như vậy

$$z = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i \frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}.$$

Và từ đó suy ra rằng phép chia cho số phức $z \neq 0$ bất kỳ là luôn luôn thực hiện được.

1.1.4 Mặt phẳng phức

Giả sử trên mặt phẳng \mathbb{R}^2 cho hệ tọa độ Descartes vuông góc xOy . Như đã biết, hai điểm được xác định bởi các tọa độ Descartes vuông góc trùng nhau khi và chỉ khi chúng có hoành độ bằng nhau và tung độ bằng nhau. Do đó ta có thể xác lập một phép tương ứng đơn trị một - một giữa các điểm của mặt phẳng \mathbb{R}^2 với các số phức của \mathbb{C} , trong đó mỗi số phức $z = x + iy \in \mathbb{C}$ sẽ tương ứng với điểm hoàn toàn xác định $M(x, y) \in \mathbb{R}^2$ và ngược lại mỗi điểm $M(x, y) \in \mathbb{R}^2$ sẽ tương ứng với số phức hoàn toàn xác định $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Như vậy phép tương ứng

$$\mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto x + iy \in \mathbb{C}$$

là đơn trị một - một. Từ đó ta thấy rằng mọi số phức đều có thể biểu diễn bởi điểm của mặt phẳng và như vậy các thuật ngữ “số phức z ” và “điểm z ” được dùng như những từ đồng nghĩa.

Định nghĩa 1.1.3. Mặt phẳng với phép tương ứng đơn trị một - một

$$\mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto x + iy \in \mathbb{C}$$

như đã mô tả ở trên được gọi là *mặt phẳng phức* và cũng được ký hiệu là \mathbb{C} .

Có thể nói một cách khác: *mặt phẳng* mà các điểm của nó được dùng để mô tả số phức gọi là *mặt phẳng phức*. Các số thực được mô tả bởi các điểm trên trục Ox nên trục đó được gọi là *trục thực*. Các số thuần ảo được mô tả bởi các điểm trên trục Oy nên trục Oy được gọi là *trục ảo*.

Ta cũng có thể xác lập phép tương ứng giữa các phần thực và phần ảo của số phức với các tọa độ của vectơ với gốc, chẳng hạn, tại gốc tọa độ. Sự tương ứng giữa các số phức và các vectơ trên mặt phẳng phức với gốc tại O là một phép tương ứng đơn trị một - một. Do đó số phức z còn có thể biểu diễn bởi một vectơ với gốc tại O và đầu mút tại điểm z và ta có thể sử dụng thuật ngữ “*số phức z* ” và “*vectơ z* ” như những thuật ngữ đồng nghĩa.

Nhờ cách minh họa vectơ đối với các số phức, về mặt hình học ta có thể thực hiện phép cộng và trừ các số phức theo các quy tắc cộng và trừ các vectơ.

1.1.5 Môđun và argumen của số phức

Bây giờ ta xét các tọa độ cực của điểm biểu diễn số phức z bằng cách chọn gốc tọa độ làm gốc-cực và phần dương của trục thực làm trục cực.

Như ta biết, các tọa độ cực của điểm gồm có bán kính vectơ của nó (bằng khoảng cách từ điểm z đến gốc cực) và góc cực tạo nên bởi hướng dương của trục cực và vectơ đi từ cực đến điểm z .

Định nghĩa 1.1.4. Độ dài của bán kính-vectơ của điểm biểu diễn số phức z được gọi là *môđun* của số phức và ký hiệu là $|z|$.

Rõ ràng là nếu $z = a + ib$ thì

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = (a^2 + b^2)^{1/2}.$$

Đối với số phức $z \in \mathbb{C}$ bất kỳ môđun của nó xác định một cách đơn trị. Trong trường hợp khi z là số thực thì môđun của z trùng với giá trị tuyệt đối của nó.

Định lý 1.1.6. *Môđun của số phức z có các tính chất sau đây:*

1. $|z| \geq 0, \quad |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0;$
2. $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|,$
3. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ (bất đẳng thức tam giác).

Chứng minh. 1. Được suy từ định nghĩa.

2. Ta có $|z_1 z_2|^2 = z_1 z_2 \cdot \overline{z_1 z_2} = z_1 \overline{z_1} \cdot z_2 \overline{z_2} = |z_1|^2 |z_2|^2$. Do đó $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$.

3. Ta có

$$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1 \overline{z_2}).$$

Do đó, để ý đến bất đẳng thức

$$-|z_1 z_2| \leq \operatorname{Re}(z_1 \overline{z_2}) \leq |z_1 z_2|$$

ta suy ra

$$|z_1 + z_2|^2 \leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1 z_2| = (|z_1|^2 + |z_2|^2)^2$$

thành thử

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

□

Nhận xét. Từ định lý vừa chứng minh suy ra rằng

$$|z_1 - z_2| = d(z_1, z_2)$$

là khoảng cách giữa hai điểm z_1 và z_2 và đại lượng $|z|$ là độ dài của bán kính-vector z .

Hệ quả

- a) $|z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|;$
- b) $|z_1 + z_2| \geq |z_1| - |z_2|;$
- c) $|z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|;$
- d) $|z_1 + z_2| \geq ||z_1| - |z_2||;$
- e) $|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||.$

Chứng minh. a) Thật vậy, vì $|z_2| = |-z_2|$ nên

$$|z_1 - z_2| = |z_1 + (-z_2)| \leq |z_1| + |-z_2| = |z_1| + |z_2|.$$

b) Để chứng minh b) ta áp dụng a) cho

$$z_1 = (z_1 + z_2) - z_2.$$

Ta có

$$|z_1| \leq |z_1 + z_2| + |z_2| \Rightarrow |z_1 + z_2| \geq |z_1| - |z_2|.$$

$$\text{c) } |z_1 - z_2| = |z_1 + (-z_2)| \geq |z_1| - |-z_2| = |z_1| - |z_2|.$$

d) Ta có $|z_1 + z_2| \geq |z_1| - |z_2|$ và $|z_1 + z_2| \geq |z_2| - |z_1|$. Do đó

$$-|z_1 + z_2| \leq |z_1| - |z_2| \leq |z_1 + z_2| \Leftrightarrow ||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2|.$$

e) Bất đẳng thức e) thu được từ d) sau khi thay z_2 bởi $-z_2$. □

Từ bất đẳng thức tam giác, dễ dàng suy ra rằng

$$\left| \sum_{k=1}^n z_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |z_k|. \quad (1.1)$$

Từ bất đẳng thức này và a) suy ra

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2 + \cdots + z_n| &\geq |z_1| - |z_2 + z_3 + \cdots + z_n| \\ &\geq |z_1| - |z_2| - \cdots - |z_n|. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Có thể xem các bất đẳng thức (1.1) và (1.2) như những bất đẳng thức tổng quát đối với bất đẳng thức tam giác và bất đẳng thức a).

Bây giờ ta chuyển sang định nghĩa argumen của số phức $z = a + ib \neq 0$.

Ta đặt $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Vì $a^2 \leq r^2$, $b^2 \leq r^2$ nên

$$\left| \frac{a}{r} \right| \leq 1 \quad \text{và} \quad \left| \frac{b}{r} \right| \leq 1.$$

Như ta biết, với mọi $x \in [0, 1]$ tồn tại một và chỉ một số $y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ sao cho $\sin y = x$. Từ đó suy rằng tồn tại số α_0 sao cho

$$\text{a) } 0 \leq \alpha_0 \leq \frac{\pi}{2}, \quad \text{b) } \sin \alpha_0 = \left| \frac{b}{r} \right|.$$

Nhưng vì

$$\left(\frac{a}{r}\right)^2 + \left(\frac{b}{r}\right)^2 = 1$$

nên

$$\frac{a}{r} = \pm \cos \alpha_0, \quad \frac{b}{r} = \pm \sin \alpha_0.$$

Đặt $\alpha = \alpha_0$. Nếu $a < 0$ thì thay α bằng $\pi - \alpha$. Nếu $b < 0$ thì thay α bằng $-\alpha$. Do đó ta thu được số α thỏa mãn điều kiện

$$\frac{a}{r} = \cos \alpha, \quad \frac{b}{r} = \sin \alpha. \quad (1.3)$$

Ta có định nghĩa sau đây.

Định nghĩa 1.1.5. Số thực α thỏa mãn hệ (1.3) được gọi là *acgumen* của số phức z và được ký hiệu là $\text{Arg } z$.

Từ định nghĩa này dễ dàng nhận thấy rằng acgumen của z là góc tạo nên giữa hướng dương của trục thực với vector z nhận hướng ngược chiều kim đồng hồ làm hướng biến thiên dương.

Đối với số $z = 0$ acgumen không có giá trị xác định và đó cũng là điểm duy nhất có acgumen không xác định. Thật vậy, $z = 0 \Leftrightarrow \text{Re } z = \text{Im } z = 0$, do đó từ (1.3) suy ra $\arg 0$ không xác định.

Acgumen của số phức được xác định không đơn trị. Ta sẽ nói rõ đặc điểm của tính đa trị của acgumen.

Giả sử φ_0 là giá trị bé nhất của acgumen của z được tính theo hướng dương. Sau khi thực hiện một số vòng quay toàn phần vector z xung quanh trục theo hướng dương ta sẽ đi đến giá trị acgumen là $\varphi_0 + k \cdot 2\pi$, trong đó $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 0$ là số vòng quay vector z . Số đo đơn giản nhất của acgumen theo

hướng âm sẽ là $-(2\pi - \varphi_0) = \varphi_0 - 2\pi$. Do đó nếu thực hiện tiếp s vòng quay vector z xung quanh cực theo hướng âm thì ta sẽ đi đến giá trị acgumen là $\varphi_0 - (s+1)2\pi$, $s \geq 0$. Do đó, tất cả các giá trị có thể có của acgumen của z sẽ được cho bởi công thức $\varphi = \varphi_0 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Như vậy, mọi số phức $z \neq 0$ đều có vô số giá trị acgumen liên hệ với nhau một cách đơn giản: hai giá trị bất kỳ của acgumen khác nhau một bội nguyên của 2π .

Ta có thể tránh được tính đa trị của acgumen nếu đặt thêm điều kiện để tách một trong các giá trị có thể có của acgumen, chẳng hạn điều kiện $0 \leq \varphi < 2\pi$, hoặc $-\pi < \varphi \leq \pi$.

Giá trị của acgumen của z thỏa mãn điều kiện vừa nêu được gọi là *giá trị chính* của acgumen và được ký hiệu là $\arg z$. Thông thường ta sẽ xét giá trị acgumen thỏa mãn điều kiện

$$-\pi < \arg z \leq \pi.$$

Trừ trường hợp $z = 0$, còn đối với số phức z bất kỳ luôn luôn tồn tại giá trị duy nhất của acgumen thỏa mãn điều kiện vừa nêu.

Từ định nghĩa giá trị chính của $\arg z$ ta có hệ thức

$$\arg z = \begin{cases} \arctg \frac{b}{a}, & \text{khi } a > 0 \\ \arctg \frac{b}{a} + \pi, & \text{khi } a < 0, b \geq 0, \\ \arctg \frac{b}{a} - \pi, & \text{khi } a < 0, b < 0. \end{cases}$$

Chứng minh. Thật vậy, vì giá trị chính của $\arctg \frac{b}{a}$ thuộc khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ nên ta có:

a) nếu điểm z nằm trong góc phần tư thứ I và IV ($a > 0$) thì $\arg z = \arctg \frac{b}{a}$;

b) nếu điểm z nằm trong góc phần tư thứ II ($a < 0, b \geq 0$) thì

$$-\frac{\pi}{2} < \arctg \frac{b}{a} \leq 0$$

và

$$\arg z = \operatorname{arctg} \frac{b}{a} + \pi;$$

c) cuối cùng nếu z nằm trong góc phần tư thứ III thì $0 < \operatorname{arctg} \frac{b}{a} < \frac{\pi}{2}$ và $\arg z = \operatorname{arctg} \frac{b}{a} - \pi$. \square

Nhận xét. Nếu $0 \leq \arg z < 2\pi$ và $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} \frac{b}{a} < \frac{\pi}{2}$ là những giá trị chính thì tương tự ta có

$$\arg(a + ib) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{b}{a} & \text{nếu } a > 0, b > 0, \\ \operatorname{arctg} \frac{b}{a} + 2\pi & \text{nếu } a > 0, b < 0, \\ \operatorname{arctg} \frac{b}{a} + \pi & \text{nếu } a < 0. \end{cases}$$

Với khái niệm môđun và argumen của số phức ta có thể biểu diễn số phức ở một dạng khác tiện lợi hơn trong việc thực hiện phép nhân và phép chia.

Định nghĩa 1.1.6. Giả sử $z \in \mathbb{C}$ và $z \neq 0$; $r = |z|$. $\alpha = \arg z$. Khi đó từ (1.3) ta có

$$z = r(\cos \alpha + i \sin \alpha). \quad (1.4)$$

Hệ thức (1.4) được gọi là *dạng lượng giác* của số phức z .

Định lý 1.1.7. Mọi số phức $z \neq 0$ đều có thể biểu diễn dưới dạng lượng giác, trong đó $r = |z|$ xác định đơn trị, còn $\operatorname{Arg} z$, $z \neq 0$ xác định với sự sai khác một số hạng bội nguyên của 2π .

Chứng minh. Giả sử $z = a + ib \neq 0$. Khi đó

$$z = a + ib = |z| \left(\frac{a}{|z|} + i \frac{b}{|z|} \right) = r(\cos \alpha + i \sin \alpha).$$

Nếu cho hai dạng lượng giác của số z là: $r(\cos \alpha_1 + i \sin \alpha_1) = r(\cos \alpha_2 + i \sin \alpha_2)$ thì khi $z \neq 0$ ta có $r \neq 0$ và do đó $\cos \alpha_1 = \cos \alpha_2$ và $\sin \alpha_1 = \sin \alpha_2$. Do đó

$$\alpha_1 = \alpha_2 + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

□

Về sau, thay vì viết $\alpha_1 = \alpha_2 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ ta sẽ viết

$$\alpha_1 \equiv \alpha_2 \pmod{2\pi}.$$

Điều đó có nghĩa là hiệu $\alpha_1 - \alpha_2$ chia hết cho 2π .

Định lý 1.1.8. Giả sử $z_1 = \rho_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$ và $z_2 = \rho_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$. Khi đó

1. $z_1 = z_2 \Leftrightarrow \rho_1 = \rho_2$ và $\varphi_1 \equiv \varphi_2 \pmod{2\pi}$.
2. $z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$.
3. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)]$, $z_2 \neq 0$.

Chứng minh. Phép chứng minh được suy trực tiếp từ công thức (1.4). □

Hệ quả.

$$1. \quad |z_1 z_2| = |z_1| |z_2|,$$

$$\arg(z_1 z_2) \equiv \arg z_1 + \arg z_2 \pmod{2\pi}.$$

$$2. \quad \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|},$$

$$\arg \frac{z_1}{z_2} \equiv \arg z_1 - \arg z_2 \pmod{2\pi}.$$

Bằng phương pháp quy nạp, công thức 1) trong hệ quả dễ dàng được khái quát cho trường hợp một số hữu hạn n thừa số. Cụ thể ta có

$$|z_1 z_2 \cdots z_n| = |z_1| \cdot |z_2| \cdots |z_n|,$$

$$\arg(z_1 z_2 \dots z_n) \equiv \arg z_1 + \arg z_2 + \dots + \arg z_n \pmod{2\pi}.$$

Bây giờ giả sử $z_1 = z_2 = \dots = z_n = z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$. Khi đó dễ thấy là: $|z^n| = |z|^n$, $\arg(z^n) \equiv n \arg z \pmod{2\pi}$ $[\rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^n = \rho^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$. Khi $\rho = 1$ ta thu được công thức Moivre:

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi.$$

Công thức Moivre vẫn còn đúng cả khi $n = 0$ và n là số nguyên âm. Với $n = 0$, đó là điều hiển nhiên vì $(\cos \varphi + i \sin \varphi)^0 = \cos 0 + i \sin 0 = 1$. Bây giờ đặt $k = -n$, $n \in \mathbb{N}$.

Ta có

$$\begin{aligned} (\cos \varphi + i \sin \varphi)^k &= (\cos \varphi + i \sin \varphi)^{-n} = \frac{1}{(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n} \\ &= \frac{1}{(\cos n\varphi + i \sin n\varphi)} = \frac{(\cos n\varphi - i \sin n\varphi)}{(\cos^2 n\varphi + \sin^2 n\varphi)} \\ &= \cos(-n\varphi) + i \sin(-n\varphi) = \cos k\varphi + i \sin k\varphi. \end{aligned}$$

Như vậy công thức Moivre đúng với mọi $n \in \mathbb{Z}$.

Nhận xét 1. Từ định lý 1.1.8 suy rằng phép nhân số phức z_1 với số phức z_2 được dẫn về phép quay vector z_1 xung quanh gốc tọa độ một góc bằng $\arg z_2$ và tiếp đến là phép giãn $|z_2|$ lần (nếu $|z_2| > 1$) hoặc co $|z_2|$ lần vector z_1 (nếu $|z_2| < 1$).

2. Phép chia z_1 cho z_2 được xem như phép nhân z_1 với $1/z_2$. Bây giờ ta nêu ra sự giải thích hình học phép toán $w = 1/z$.

Giả sử $|z| < 1$. Từ điểm z ta kẻ đường vuông góc với tia Oz cắt đường tròn đơn vị $\{|z| = 1\}$ tại điểm ζ . Từ điểm ζ ta kẻ tiếp tuyến với đường tròn đơn vị và giả sử tiếp tuyến đó cắt tia Oz tại điểm ω . Hiển nhiên rằng $\arg \omega = \arg z$, $|\omega| = \frac{1}{|z|}$.

Như vậy số ω liên hợp với $1/z$: $\omega = 1/\bar{z}$. Bước chuyển từ điểm z đến điểm $1/\bar{z}$ được gọi là *phép đối xứng* qua đường tròn đơn vị. Bây giờ để thu được $1/z$ ta chỉ cần xác định điểm đối xứng với ω qua trục thực.

Trong trường hợp $|z| > 1$ thì phép dựng đã mô tả cần tiến hành theo thứ tự ngược lại.

1.1.6 Phép khai căn số phức

Bây giờ ta chuyển sang xét phép khai căn các số phức. Đối với số phức $z \in \mathbb{C}$ cho trước, ta giải phương trình $z = w^n$. Tập hợp các nghiệm của phương trình này được ký hiệu là $\sqrt[n]{z}$ và gọi đó là *căn bậc n của số phức z* .

Định lý 1.1.9. *Giả sử $z \in \mathbb{C}$ và $n \in \mathbb{N}$. Khi đó tồn tại đúng n giá trị của căn bậc n của số phức khác 0: $z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$. Các giá trị đó được cho bởi công thức*

$$\sqrt[n]{z} = \rho^{1/n} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right), \quad (1.5)$$

trong đó giả thiết k nhận các giá trị, chẳng hạn $0, 1, 2, \dots, n-1$.

Chứng minh. 1. Ta sẽ tìm w dưới dạng lượng giác $w = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$. Khi đó đẳng thức $w^n = z$ được viết dưới dạng

$$r^n [\cos n\alpha + i \sin n\alpha] = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Từ định lý 1.1.8 suy ra

$$\left. \begin{array}{l} r^n = \rho \\ n\alpha \equiv \varphi \pmod{2\pi} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} r = \sqrt[n]{\rho}, \\ \alpha \equiv \frac{\varphi + 2k\pi}{n}, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Do đó các căn bậc n của số z tồn tại và được tính theo công thức

$$w_k = \rho^{1/n} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right) \quad (1.6)$$

với $k \in \mathbb{Z}$ bất kỳ.

2. Bây giờ ta chứng minh rằng $w_{k_1} = w_{k_2} \Leftrightarrow k_1 \equiv k_2 \pmod{n}$. Thật vậy

$$w_{k_1} = w_{k_2} \Leftrightarrow \frac{\varphi + 2k_1\pi}{n} = \frac{\varphi + 2k_2\pi}{n} + 2\pi m, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Nhưng đẳng thức vừa viết lại tương đương với đẳng thức

$$\frac{k_1 - k_2}{n} = m \in \mathbb{Z} \Rightarrow k_1 \equiv k_2 \pmod{n}.$$

Như vậy

$$w_{k_1} = w_{k_2} \Leftrightarrow k_1 = k_2 \pmod{n}.$$

3. Vì hai số nguyên khác nhau của dãy số $0, 1, \dots, n-1$ đều có hiệu (lấy số lớn trừ cho số bé) bé hơn n và do đó không chia hết cho n . Do đó ta tìm được tất cả các giá trị khác nhau của w_k nếu $k = 0, 1, \dots, n-1$. \square

Ví dụ. Ta có $1 = \cos 0 + i \sin 0$, từ đó căn bậc n của đơn vị được biểu diễn bởi công thức

$$\varepsilon_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \quad (1.7)$$

Về phương diện hình học, các điểm w_0, w_1, \dots, w_{n-1} chính là các đỉnh của một đa giác đều n cạnh nội tiếp trong đường tròn bán kính $R = \rho^{1/n}$. Thật vậy môđun của mọi w_k , $k = 0, 1, \dots, n-1$ đều bằng nhau và khi chuyển từ w_k đến w_{k+1} argumen được tăng lên $2\pi/n$. Sau n lần chuyển như thế ta trở lại giá trị căn đầu tiên rồi sau đó lại nhận được các giá trị của nó mà ta đã lập.

1.1.7 Dạng mũ của số phức

Để đơn giản cách viết các số phức ta đặt

$$\cos \varphi + i \sin \varphi \stackrel{\text{def}}{=} e^{i\varphi}. \quad (1.8)$$

(Để ý rằng đến bây giờ ta chưa định nghĩa phép toán nâng một số phức lên lũy thừa ảo. Trong chương II ta sẽ chứng tỏ sự đúng đắn của công thức (1.8)).

Từ (1.8) ta có

$$z = \rho e^{i\varphi}. \quad (1.9)$$

Đó là *dạng số mũ* của số phức.

Dễ dàng chứng minh rằng nếu $z_1 = \rho_1 e^{i\varphi_1}$ và $z_2 = \rho_2 e^{i\varphi_2}$ thì

1. $z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$
2. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i\varphi_1 - i\varphi_2}.$
3. $z^n = \rho^n e^{in\varphi}.$
4. $w_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\varphi + 2k\pi}{n}}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$

Từ (1.8) và (1.9) và bằng cách thay φ bởi $-\varphi$ ta có

$$\left. \begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{1}{2}(e^{i\varphi} + ie^{-i\varphi}), \\ \sin \varphi &= \frac{1}{2i}(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}). \end{aligned} \right\} \quad (1.10)$$

Các công thức (1.10) được gọi là *công thức Euler*.

1.1.8 Khái niệm về mặt phẳng mở rộng

Trong không gian Euler ba chiều với hệ tọa độ Descartes vuông góc (ξ, η, ζ) ta xét mặt cầu với tâm tại điểm $(0, 0, \frac{1}{2})$ với bán kính bằng $\frac{1}{2}$ (hình I.1)

$$S = \left\{ (\xi, \eta, \zeta) : \xi^2 + \eta^2 + \left(\zeta - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \right\}$$

sao cho nó tiếp xúc với mặt phẳng z tại gốc tọa độ và trục thực của mặt phẳng z trùng với trục $\{\eta = 0, \zeta = 0\}$, còn trục ảo thì trùng với trục $\{\xi = 0, \zeta = 0\}$.

Ta xét phép chiếu π với cực bắc tại điểm $P(0, 0, 1)$. Giả sử $z \in \mathbb{C}$ là điểm tùy ý. Nối điểm $z \in \mathbb{C}$ với cực bắc P bằng đoạn thẳng. Đoạn thẳng này cắt mặt cầu S tại điểm $A(z)$. Và ngược lại, giả sử $A \in S$ là một điểm tùy ý của mặt cầu. Khi đó tia PA sẽ cắt mặt phẳng phức tại điểm z . Hiển nhiên rằng đó là một phép tương ứng đơn trị một-một.

Hình 1.1

Định nghĩa 1.1.7. Phép tương ứng

$$\pi : \mathbb{C} \ni z \mapsto A(z) \in S$$

như đã mô tả ở trên được gọi là *phép chiếu nổi* với cực tại điểm P . Điểm $A(z) \in S$ được gọi là *ảnh nổi* hay là *ảnh cầu* của điểm z .

Định lý 1.1.10. Trong phép chiếu nổi

$$\pi : \mathbb{C} \ni z \mapsto A(z) \in S$$

điểm $x = x + iy \in \mathbb{C}$ sẽ tương ứng với điểm $A(z) \in S$ có tọa độ là

$$\xi = \frac{x}{1 + |z|^2}, \quad \eta = \frac{y}{1 + |z|^2}, \quad \zeta = \frac{|z|^2}{1 + |z|^2}. \quad (1.11)$$

Công thức (1.11) được gọi là *công thức của phép chiếu nổi*.

Chứng minh. Thật vậy, vì ba điểm $P(0, 0, 1)$, $A(z) = (\xi, \eta, \zeta)$ và $z = (x, y, 0)$ cùng nằm trên một đường thẳng nên các tọa độ của chúng phải thỏa mãn hệ thức

$$\frac{\xi - 0}{x - 0} = \frac{\eta - 0}{y - 0} = \frac{\zeta - 1}{0 - 1},$$

hay là

$$x = \frac{\xi}{1 - \zeta}, \quad y = \frac{\eta}{1 - \zeta}, \quad z = \frac{\xi + i\eta}{1 - \zeta}. \quad (1.12)$$

Để ý rằng

$$|z|^2 = \frac{\xi^2 + \eta^2}{(1 - \zeta)^2} \quad \text{và} \quad \xi^2 + \eta^2 + \left(\zeta - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

ta thu được

$$|z|^2 = \frac{\zeta}{1 - \zeta},$$

và do đó $\zeta = \frac{|z|^2}{1+|z|^2}$. Thế giá trị ζ vào (1.12) ta tìm được

$$\xi = \frac{x}{1+|z|^2}, \quad \eta = \frac{y}{1+|z|^2}.$$

□

Hiển nhiên trong phép biến đổi π , điểm $P(0, 0, 1)$ không tương ứng với điểm z nào của mặt phẳng \mathbb{C} . Bây giờ ta xét số phức “lý tưởng” $z = \infty$ và “bổ sung” cho mặt phẳng phức \mathbb{C} bằng cách thêm cho nó điểm xa vô cùng duy nhất (gọi tắt *điểm vô cùng*) tương ứng với số phức $z = \infty$.

Định nghĩa 1.1.8. Tập hợp lập nên từ mặt phẳng phức \mathbb{C} và điểm vô cùng (ký hiệu là ∞) được gọi là *mặt phẳng phức mở rộng* và ký hiệu là $\overline{\mathbb{C}}$.

Như vậy $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ và $\overline{\mathbb{C}}$ không phải là một trường. Từ định lý 1.1.10 suy rằng phép chiếu nổi π xác lập sự tương ứng đơn trị một-một giữa các điểm của \mathbb{C} và các điểm của $S \setminus \{P\}$.

Hiển nhiên khi $|z| \rightarrow \infty$ thì điểm $A(z)$ sẽ dần đến điểm $P(0, 0, 1)$. Thật vậy, từ tính đồng dạng của hai tam giác zOP và APO suy rằng

$$\overline{AP} = \frac{1}{\sqrt{1+|z|^2}}$$

và do đó $\overline{AP} \rightarrow 0$ khi $|z| \rightarrow \infty$.

Từ sự lý luận đó ta rút ra kết luận rằng phép chiếu nổi $\pi : \mathbb{C} \mapsto S \setminus \{P\}$ có thể thác triển vào $\overline{\mathbb{C}}$ thành

$$\pi^* : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow S$$

bằng cách đặt

$$\pi^*|_{\mathbb{C}} = \pi, \quad z \in \mathbb{C}$$

và

$$\pi(\infty) = P(0, 0, 1).$$

Do đó, một cách tự nhiên ta có thể cho rằng điểm $z = \infty$ tương ứng với “cực bắc” P của mặt cầu S và mọi điểm trên mặt cầu S có thể xem như là mô tả điểm tương ứng của mặt phẳng $\overline{\mathbb{C}}$. Phương pháp biểu diễn hình học các số phức như trên được gọi là *phương pháp biểu diễn cầu* của các số phức. Mặt cầu S , vì lý do đó, được gọi là *mặt cầu số phức* Riemann. Tính ưu việt của mặt cầu Riemann là ở chỗ trên mặt cầu Riemann điểm vô cùng duy nhất của mặt phẳng phức được mô tả một cách khá trực quan. Sau này khi nghiên cứu một vấn đề nào đó nếu muốn xét cả điểm $z = \infty$ thì ta sẽ tiến hành các lập luận trên mặt cầu Riemann.

1.1.9 Khoảng cách trên \mathbb{C}

Tương ứng với hai phương pháp biểu diễn hình học số phức đã được mô tả, ta sẽ đưa vào trong \mathbb{C} hai mêtric. Trong mêtric thứ nhất khoảng cách giữa hai điểm $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ được giả thiết bằng $d_{\mathbb{C}} = d_{\mathbb{C}}(z_1, z_2) \stackrel{\text{def}}{=} |z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$. Mêtric này là *mêtric Euclide* thông thường trong mặt phẳng \mathbb{R}^2 . Trong mêtric thứ hai (gọi là *mêtric cầu*) khoảng cách giữa hai điểm z_1 và $z_2 \in \overline{\mathbb{C}}$ được hiểu là khoảng cách (trong không gian ξ, η, ζ) giữa các ảnh cầu của chúng. Khoảng cách này được gọi là *khoảng cách cầu* hay *khoảng cách Jordan* giữa hai điểm z_1 và $z_2 \in \overline{\mathbb{C}}$:

$$d_{\overline{\mathbb{C}}} \stackrel{\text{def}}{=} d_{\overline{\mathbb{C}}}(z_1, z_2).$$

Định lý 1.1.11. *Giả sử $d_{\overline{\mathbb{C}}} = d_{\overline{\mathbb{C}}}(z_1, z_2)$ là khoảng cách cầu giữa các điểm $z_1 = x_1 + iy_1$ và $z_2 = x_2 + iy_2$. Khi đó*

1.

$$d_{\overline{\mathbb{C}}}(z_1, z_2) = \frac{|z_1 - z_2|}{(1 + |z_1|^2)^{1/2} \cdot (1 + |z_2|^2)^{1/2}}; \quad (1.13)$$

2. Nếu $z_2 = \infty$ thì

$$d_{\overline{\mathbb{C}}}(z_1, \infty) = \frac{1}{\sqrt{1 + |z_1|^2}}; \quad (1.14)$$

3. Khoảng cách cầu thỏa mãn các tiên đề thông thường của một mêtric.

Chứng minh. 1. Thật vậy, từ công thức (1.11) ta có

$$\begin{aligned}
 d_{\overline{\mathbb{C}}}(z_1, z_2) &= [(\xi_1 - \xi_2)^2 + (\eta_1 - \eta_2)^2 + (\zeta_1 - \zeta_2)^2]^{1/2} \\
 &= [\zeta_1 + \zeta_2 - 2(\xi_1 \xi_2 + \eta_1 \eta_2 + \zeta_1 \zeta_2)]^{1/2} = \\
 &= \left\{ \frac{|z_1|^2}{1 + |z_1|^2} + \frac{|z_2|^2}{1 + |z_2|^2} - 2 \left[\frac{x_1 x_2}{(1 + |z_1|^2)(1 + |z_2|^2)} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{y_1 y_2}{(1 + |z_1|^2)(1 + |z_2|^2)} + \frac{|z_1|^2 |z_2|^2}{(1 + |z_1|^2)(1 + |z_2|^2)} \right] \right\}^{1/2} \\
 &= \frac{\{|z_1|^2(1 + |z_2|^2) + |z_2|^2(1 + |z_1|^2) - 2(x_1 x_2 + y_1 y_2) - 2|z_1|^2 |z_2|^2\}^{1/2}}{\sqrt{1 + |z_1|^2} \sqrt{1 + |z_2|^2}} \\
 &= \frac{[|z_1|^2 + |z_2|^2 - 2x_1 x_2 - 2y_1 y_2]^{1/2}}{\sqrt{1 + |z_1|^2} \sqrt{1 + |z_2|^2}} = \frac{[(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2]^{1/2}}{\sqrt{1 + |z_1|^2} \sqrt{1 + |z_2|^2}} \\
 &= \frac{|z_1 - z_2|}{\sqrt{1 + |z_1|^2} \sqrt{1 + |z_2|^2}}.
 \end{aligned}$$

Công thức (1.13) được chứng minh.

2. Trong trường hợp khi $z_2 = \infty$ ta có

$$\begin{aligned}
 d_{\overline{\mathbb{C}}}(z_1, \infty) &= \sqrt{\xi_1^2 + \eta_1^2 + (1 - \zeta_1)^2} = (\text{vì } z_2 = \infty \text{ nên } \zeta_2 = 1) \\
 &= \sqrt{1 - \zeta_1} = \frac{1}{(1 + |z_1|^2)^{1/2}}.
 \end{aligned}$$

3. Hiển nhiên rằng $d_{\overline{\mathbb{C}}}(z_1, z_2) \geq 0$ và $d_{\overline{\mathbb{C}}}(z_1, z_2) = 0 \Leftrightarrow z_1 = z_2$ và $d_{\overline{\mathbb{C}}}(z_1, z_2) = d_{\overline{\mathbb{C}}}(z_2, z_1)$. Ta còn phải chứng minh rằng $d_{\overline{\mathbb{C}}}(z_1, z_3) \leq d_{\overline{\mathbb{C}}}(z_1, z_2) + d_{\overline{\mathbb{C}}}(z_2, z_3)$.

Đối với z_1, z_2 và z_3 ta có đồng nhất sau

$$(z_1 - z_2)(1 + z_3 \bar{z}_3) = (z_1 - z_3)(1 + z_2 \bar{z}_3) + (z_3 - z_2)(1 + z_1 \bar{z}_3).$$

Từ đó

$$|z_1 - z_2|(1 + |z_3|^2) \leq |z_1 - z_3|(|1 + z_2 \bar{z}_3|) + |z_3 - z_2|(|1 + z_1 \bar{z}_3|). \quad (1.15)$$

Nhưng để ý rằng

$$(1 + uv)(1 + \overline{u} \overline{v}) \leq (1 + |u|^2)(1 + |v|^2)$$

cho nên

$$|1 + z_2 \overline{z}_3|^2 = (1 + z_2 \overline{z}_3)(1 + \overline{z}_2 z_3) \leq (1 + |z_2|^2)(1 + |z_3|^2) \quad (1.16)$$

và

$$|1 + \overline{z}_1 z_3|^2 \leq (1 + |z_1|^2)(1 + |z_3|^2). \quad (1.17)$$

Từ các hệ thức (1.13) và (1.15) - (1.17) ta thu được điều phải chứng minh. \square

Ta nhận xét rằng trên các tập hợp bị chặn $M \subset \mathbb{C}$ (tức là những tập hợp được chứa trong hình tròn cố định nào đó $\{|z| \leq R, R < \infty\}$) hai metric Euclide và metric - cầu là tương đương với nhau.

Thật vậy, nếu $M \subset \{|z| \leq R\}$ thì từ (1.13) ta có

$$\frac{|z_1 - z_2|}{1 + R^2} \leq d_{\overline{\mathbb{C}}}(z_1, z_2) \leq |z_1 - z_2|, \quad \forall z_1, z_2 \in M.$$

Do đó metric cầu thường được áp dụng khi xét các tập hợp không bị chặn. Và nói chung, khi tiến hành các lập luận trên \mathbb{C} ta sử dụng metric Euclide $d_{\mathbb{C}}$, còn trên $\overline{\mathbb{C}}$ thì sử dụng metric - cầu $d_{\overline{\mathbb{C}}}$.

Từ điều vừa chứng minh trên đây cũng suy ra rằng việc đưa vào mỗi metric trên đây đều biến \mathbb{C} thành không gian metric.

1.2 Các khái niệm tôpô cơ bản trên mặt phẳng phức

Trên \mathbb{C} và $\overline{\mathbb{C}}$ ta đã đưa vào các metric tương ứng biến \mathbb{C} và $\overline{\mathbb{C}}$ thành những không gian metric. Bây giờ ta đưa vào các tập hợp được xét những tôpô tương ứng với các metric ấy và qua đó trình bày vắn tắt những *tính chất tôpô cơ bản của mặt phẳng phức*.

1.2.1 Tôpô trên \mathbb{C}

Định nghĩa 1.2.1. 1) Tập hợp những điểm $z \in \mathbb{C}$ thỏa mãn hệ thức

$$U(z_0, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \varepsilon\}.$$

trong đó ε là số dương cho trước, được gọi là ε - lân cận của điểm z_0 . Đó là hình tròn với tâm tại z_0 và bán kính ε .

2) Tập hợp những điểm $z \in \overline{\mathbb{C}}$ thỏa mãn hệ thức $d_{\overline{\mathbb{C}}}(z, z_0) < \varepsilon$, $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$, được gọi là ε - lân cận của điểm z_0 .

Từ hệ thức (1.14) suy ra rằng

$$d_{\overline{\mathbb{C}}}(z, \infty) < \varepsilon \Leftrightarrow |z| > \sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} - 1}.$$

Do đó ta sẽ hiểu ε - lân cận của điểm ∞ là tập hợp

$$U(\infty, \varepsilon) = \left\{z \in \overline{\mathbb{C}} : |z| > \frac{1}{\varepsilon}\right\}.$$

Đó là phần ngoài hình tròn với tâm tại gốc tọa độ và bán kính $r = \frac{1}{\varepsilon}$.

Trong nhiều trường hợp ta còn dùng thuật ngữ “lân cận thủng”. Theo định nghĩa, ε -lân cận thủng của điểm $z_0 \in \mathbb{C}$ được hiểu là

$$\dot{U}(z_0, \varepsilon) = U(z_0, \varepsilon) \setminus \{z_0\} = \{z : 0 < |z - z_0| < \varepsilon\}.$$

Tương tự, ε -lân cận thủng của điểm $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ là tập hợp

$$\dot{U}(z_0, \varepsilon) = \{z : 0 < d_{\overline{\mathbb{C}}}(z, z_0) < \varepsilon\}.$$

Định nghĩa 1.2.2. Giả sử tập hợp con $M \subset \mathbb{C}$ (hoặc $\overline{\mathbb{C}}$). Điểm z_0 được gọi là điểm trong của M nếu $\exists \varepsilon > 0$ sao cho ε - lân cận của điểm z_0 là thuộc M .

Định nghĩa 1.2.3. Tập con $A \subset \mathbb{C}$ (hoặc $\overline{\mathbb{C}}$) được gọi là tập hợp mở nếu mọi điểm $z \in A$ đều là điểm trong của nó.

Định lý 1.2.1. *Họ các tập con mở của \mathbb{C} thỏa mãn các tính chất sau đây (các tiên đề cấu trúc tôpô):*

1. \emptyset và \mathbb{C} là những tập hợp mở.
2. Hợp của một số hữu hạn hay vô hạn bất kỳ các tập hợp mở là một tập hợp mở.
3. Giao của một số hữu hạn tập hợp mở là tập hợp mở.

Chứng minh. 1. Hiển nhiên.

2. Giả sử $\{U_\lambda\}$ là họ các tập con mở nào đó. Nếu $z_0 \in U_\mu$ nào đó thì $\exists r > 0$ sao cho $U(z_0, r) \subset U_\mu \subset U = \bigcup_\lambda U_\lambda$.

3. Giả sử U_1, \dots, U_n là những tập hợp mở. Nếu $U_0 = \bigcap_{i=1}^n U_i = \emptyset$ thì U mở (theo 1.). Giả sử $U_0 \neq \emptyset$ và $z_0 \in U_0$. Khi đó, với mỗi giá trị i ($i = 1, 2, \dots, n$) sẽ tồn tại $\varepsilon_i > 0$ sao cho

$$U(z_0, \varepsilon_i) \subset U_i.$$

Hiển nhiên rằng $U(z_0, \varepsilon) \subset U_0$, trong đó

$$\varepsilon = \min_{i=1, n} |\varepsilon_i| > 0.$$

□

Với cách đưa vào khái niệm tập hợp mở như vậy \mathbb{C} và $\overline{\mathbb{C}}$ trở thành không gian tôpô.

Định lý 1.2.2. (tiên đề tách Hausdorff). *Giả sử z_1 và z_2 là những điểm khác nhau của $\overline{\mathbb{C}}$. Khi đó tồn tại những lân cận³ $U(z_1, \cdot)$ và $U(z_2, \cdot)$ sao cho $U(z_1, \cdot) \cap U(z_2, \cdot) = \emptyset$.*

Chứng minh. 1. Giả sử $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Đặt $\varepsilon = \frac{1}{4}|z_1 - z_2|$ và $U(z_i, \cdot) = U(z_i, \varepsilon)$, $i = 1, 2$. Giả sử $\exists z \in U(z_1, \varepsilon) \cap U(z_2, \varepsilon)$. Khi đó

$$4\varepsilon = |z_1 - z_2| \leq |z_1 - z| + |z - z_2| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

³Ở đây ta ký hiệu $U(z; \cdot)$ là hình tròn với tâm tại điểm z và với bán kính “.” sẽ được xác định trong quá trình chứng minh

Điều này vô lý. Vậy

$$U(z_1, \varepsilon) \cap U(z_2, \varepsilon) = \emptyset.$$

2. Bây giờ giả sử $z_1 \in \mathbb{C}$, $z_2 = \infty$. Ta sẽ chứng minh rằng lân cận $U(z_1; 1)$ và $U\left(\infty, \frac{1}{|z_1|+2}\right)$ không giao nhau. Giả sử $z \in U(z_1, 1) \cap U\left(\infty, \frac{1}{|z_1|+2}\right)$. Vì $z \in U(z_1, 1)$ nên

$$\rho(z, 0) \leq \rho(z, z_1) + \rho(z_1, 0) < 1 + |z_1|.$$

Mặt khác vì $z \in U\left(\infty, \frac{1}{|z_1|+2}\right)$ nên $\rho(z, 0) > |z_1| + 2$. Đó là điều mâu thuẫn. \square

Định nghĩa 1.2.4. Tập hợp con $A \subset \mathbb{C}$ (hoặc $\overline{\mathbb{C}}$) được gọi là *tập đóng* nếu phần bù $C_{\mathbb{C}}A$ của nó là tập mở.

Định lý 1.2.3. Hệ các tập hợp đóng thỏa mãn các tính chất sau đây:

1. \mathbb{C} và \emptyset là những tập đóng.
2. Hợp của một số hữu hạn tập hợp đóng là tập hợp đóng.
3. Giao của một số hữu hạn hay vô hạn bất kỳ các tập hợp đóng là tập hợp đóng.

Chứng minh. Suy trực tiếp từ định lý 1.2.1 và các quy tắc lấy phần bù. \square

Nhận xét 1.2.1. Từ định lý 1.2.1 và 1.2.3 suy ra rằng trên mặt phẳng phức \mathbb{C} chỉ có chính \mathbb{C} và tập hợp \emptyset là đồng thời vừa đóng vừa mở trong \mathbb{C} .

1.2.2 Phần trong và phần ngoài

Định nghĩa 1.2.5. Giả sử $A \subset \mathbb{C}$, $A \neq \emptyset$. Tập hợp các điểm trong của A được gọi là *phần trong* của A và được ký hiệu là $\overset{\circ}{A}$.

Từ định lý 1.2.1 suy ra rằng $\overset{\circ}{A}$ là tập hợp mở.

Định nghĩa 1.2.6. Phần trong $\overset{\circ}{C_{\mathbb{C}}A}$ được gọi là *phần ngoài* của tập hợp A .

Ta có

Định lý 1.2.4. Điểm $z_0 \in \mathbb{C}$ là điểm ngoài của tập hợp A khi và chỉ khi $d(z_0, A) > 0$, trong đó khoảng cách

$$d(z_0, A) = \inf_{z' \in A} d(z_0, z').$$

Chứng minh. 1. Vì $d(z_0, A) > 0 \Rightarrow U(z_0, d(z_0, A)) \subset CA$, do đó z_0 là điểm trong của CA , tức là điểm ngoài của A .

2. Nếu z_0 là điểm ngoài của A thì tồn tại hình tròn $U(z_0, r)$, $r > 0$, nằm trong CA . Như vậy đối với điểm $z \in A$ bất kỳ ta có $d(z_0, z) > r$ và do đó $d(z_0, A) \geq r$. \square

1.2.3 Điểm tụ

Ta xét điểm tụ của tập hợp và của dãy điểm trên \mathbb{C} .

Định nghĩa 1.2.7. Điểm $z_0 \in \mathbb{C}$ được gọi là *điểm tụ* (hay *điểm giới hạn*) của tập hợp $A \subset \mathbb{C}$ nếu trong lân cận bất kỳ của nó có vô số điểm của A .

Tập hợp các điểm tụ của tập hợp A thường được ký hiệu là A' . Từ định nghĩa 1.2.7 suy rằng lân cận bất kỳ của điểm z giao với A khi và chỉ khi hoặc $z \in A$, hoặc z là điểm tụ của A . Vì vậy, có thể mô tả khái niệm tập hợp đóng theo ngôn ngữ lân cận như sau:

Định nghĩa 1.2.4'. Tập hợp $A \subset \mathbb{C}$ được gọi là đóng nếu nó chứa mọi điểm tụ của nó.

Hợp của tập hợp $A \subset \mathbb{C}$ với tập hợp mọi điểm tụ của nó được gọi là *bao đóng* của tập hợp A và ký hiệu là \overline{A} .

Như vậy $\overline{A} = A \cup A'$.

Định nghĩa 1.2.8. Ánh xạ $z_n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ được gọi là một *dãy điểm* trên \mathbb{C} và ký hiệu là $\{z_n\}_{n \geq 0}$. Dãy $\{z_n\} \subset \mathbb{C}$ được gọi là *hội tụ* tới điểm z (hay z là *giới hạn* của dãy $\{z_n\}$) nếu: với mỗi lân cận V của z , đều $\exists m_0 \in \mathbb{N} : \forall m \in \mathbb{N}, m > m_0$ thì $z_m \in V$.

Từ định lý 1.2.2 (tiên đề Hausdorff) ta có

Định lý 1.2.5. Trong \mathbb{C} mọi dãy hội tụ đều có giới hạn duy nhất.

Chứng minh. Nếu dãy hội tụ z_n có hai giới hạn z_0 và \tilde{z}_0 ($z_0 \neq \tilde{z}_0$) thì tìm được hai lân cận U và V của z_0 và \tilde{z}_0 tương ứng sao cho $U \cap V = \emptyset$.

Theo định nghĩa giới hạn thì $\exists m_0 \in \mathbb{N}; n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho: $z_n \in U, \forall n \geq m_0, z_n \in V, \forall n \geq n_0$, vì vậy $z_n \in U \cap V$ khi $n \geq \max(m_0, n_0)$. Nhưng điều này không thể xảy ra. \square

Nhận xét 1.2.2. Giữa các khái niệm điểm tụ của dãy $\{z_n\}$ và của tập hợp các giá trị $\{z_n\}$ có sự khác nhau. Ví dụ, dãy $x_n = 1, n = 0, 1, 2, \dots$ có điểm tụ $x = 1$, còn tập $\{z_n\}$ chỉ gồm một điểm $z_n = 1$ không có điểm tụ.

1.2.4 Biên của tập hợp

Định nghĩa 1.2.9. Tập hợp những điểm của \mathbb{C} không thuộc phần trong và không thuộc phần ngoài của tập hợp $A \subset \mathbb{C}$ được gọi là *biên* của A và ký hiệu là ∂A .

Vì $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{CA}$ là tập hợp mở nên ∂A là tập hợp đóng.

Định lý 1.2.6. Điểm $a \in \partial A$ khi và chỉ khi lân cận bất kỳ của điểm a đồng thời chứa điểm của A và của CA .

Chứng minh. Giả sử lân cận V bất kỳ của điểm a đồng thời giao với A và CA :

$$V \cap A \neq \emptyset; \quad V \cap CA \neq \emptyset.$$

Khi đó $V \not\subset A$ và $V \not\subset CA$. Suy ra $a \notin \overset{\circ}{A}$ và $a \notin \overset{\circ}{CA}$. Vậy $a \in \partial A$.

Ngược lại, giả sử $a \in \partial A$ và V là lân cận nào đó của a . Khi đó $V \cap A \neq \emptyset$ vì nếu $V \cap A = \emptyset$ thì $V \subset CA$ suy ra a thuộc phần ngoài của A . Tương tự $V \cap CA \neq \emptyset$. \square

1.2.5 Tập hợp compact

Định nghĩa 1.2.10. 1. Tập hợp $A \subset \mathbb{C}$ được gọi là *tập hợp compact* nếu nó đóng và bị chặn.

2. Tập hợp $A \subset \overline{\mathbb{C}}$ được gọi là tập compact nếu A là tập hợp đóng trong $\overline{\mathbb{C}}$.

Giả sử $\{U\}$ là họ tùy ý các tập hợp mở phủ tập hợp compact A , tức là mỗi điểm $z \in A$ đều thuộc ít nhất là một tập hợp của họ $\{U\}$. Người ta cũng nói rằng họ $\{U\}$ là một *phủ mở* của A . Đối với các tập hợp $A \subset \overline{\mathbb{C}}$ hai điều kiện sau đây là tương đương với nhau:

(I) A là tập hợp compact;

(II) từ mọi phủ mở của A đều có thể trích ra một phủ con hữu hạn, tức là có một số hữu hạn chỉ số i_1, i_2, \dots, i_n sao cho

$$A \subset U_{i_1} \cup U_{i_2} \cup \dots \cup U_{i_n}, \quad U_{i_k} \in \{U\}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Đó chính là nội dung của bổ đề Heine - Borel - Lebesgue.

Một trong những hệ quả quan trọng nhất của bổ đề Heine - Borel - Lebesgue là nguyên lý Bolzano - Weierstrass.

Định lý 1.2.7. (nguyên lý Bolzano - Weierstrass). *Dãy vô hạn bất kỳ*

$$\{z_n\}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.18)$$

các điểm của tập hợp compact $K \subset \overline{\mathbb{C}}$ có ít nhất một điểm tụ.

Chứng minh. Giả thiết rằng không một điểm nào của K là điểm giới hạn của dãy (1.18). Điều đó có nghĩa là $\forall z \in K, \exists \delta > 0$ sao cho $U(z, \delta)$ chứa không quá một số hữu hạn điểm của dãy (1.18). Ta ký hiệu U là họ các tập hợp mở $U(z, \delta)$ khi z chạy trên K . Đó là phủ mở của K và theo bổ đề Heine - Borel - Lebesgue có thể trích phủ con hữu hạn phủ K :

$$[U(z'_1, \delta_1), U(z'_2, \delta_2), \dots, U(z'_n, \delta_n)].$$

Vì mỗi $U(z'_k, \delta_k)$ chứa không quá một số hữu hạn điểm của dãy (1.18) nên dãy (1.18) không thể là dãy vô hạn. Nghĩa là giả thiết của chúng ta không đúng. Do đó nguyên lý Bolzano - Weierstrass được chứng minh. \square

CÁC VÍ DỤ

1. Tập hợp một điểm là tập hợp compact.
2. Tập hợp hữu hạn điểm là tập hợp compact.
3. Tập hợp \mathbb{C} không phải là tập hợp compact. Thật vậy, nếu ta xét phủ mở với tâm tại gốc tọa độ và bán kính > 0 thì rõ ràng là một số hữu hạn bất kỳ các hình tròn này nằm trọn trong một hình tròn bán kính hữu hạn. Do đó nó không phủ toàn \mathbb{C} được.
4. Tập hợp $\overline{\mathbb{C}}$ là tập hợp compact. Để chứng minh điều này ta cụ thể hóa tôpô đã trang bị cho $\overline{\mathbb{C}}$ ở đầu mục như sau:
 - a) Tập hợp U không chứa điểm ∞ là mở trong $\overline{\mathbb{C}}$ nếu nó mở trong \mathbb{C} ;
 - b) Tập hợp $U(\infty)$ chứa điểm ∞ là mở trong $\overline{\mathbb{C}}$ nếu phần bù $\mathbb{C}_{\mathbb{C}}U(\infty)$ là compact trong \mathbb{C} .

Bạn đọc có thể tự kiểm chứng rằng tôpô này chính là tôpô đã xác định ở trên. Với tôpô đã cụ thể hóa này ở trong $\overline{\mathbb{C}}$ ta dễ dàng chứng minh được rằng $\overline{\mathbb{C}}$ là compact. Thật vậy, nếu $\{U_i\}$ là một phủ mở của $\overline{\mathbb{C}}$, thì một trong các U_i sẽ chứa điểm ∞ . Ta ký hiệu đó là $U(\infty)$. Khi đó phần bù của nó là compact $K \subset \mathbb{C}$ nào đó. Vì K compact nên nó được phủ bởi một số hữu hạn tập hợp $U_{i_1}, U_{i_2}, \dots, U_{i_n}$. Từ đó suy ra rằng các tập hợp $U_{i_1}, U_{i_2}, \dots, U_{i_n}$ và $U(\infty)$ là phủ con hữu hạn của $\overline{\mathbb{C}}$.

Vì mặt phẳng phức $\overline{\mathbb{C}}$ là tập hợp compact, nên từ nguyên lý Bolzano - Weierstrass suy ra: *trong $\overline{\mathbb{C}}$ dãy vô hạn bất kỳ có ít nhất là một điểm tụ.*

Hiển nhiên rằng trong \mathbb{C} tồn tại những dãy điểm không có điểm giới hạn thuộc \mathbb{C} . Chẳng hạn dãy $1, 2, \dots, n, \dots$ không có điểm giới hạn trong \mathbb{C} .

1.2.6 Tập hợp liên thông

Giả sử A là tập hợp con của mặt phẳng phức \mathbb{C} . Ta có:

Định nghĩa 1.2.11. Tập hợp $A \subset \mathbb{C}$ được gọi là *tập hợp liên thông* nếu không tồn tại hai tập hợp mở A_1 và A_2 trong \mathbb{C} sao cho:

1. $A \cap A_1 \neq \emptyset, A \cap A_2 \neq \emptyset$;
2. $A \cap A_1 \cap A_2 = \emptyset$;

3. $A \subset A_1 \cup A_2$.

Bây giờ ta xét tập hợp A trong tôpô cảm sinh⁴ bởi tôpô của \mathbb{C} . Như ta đã biết, khi đó tập hợp A sẽ trở thành không gian tôpô con của \mathbb{C} . Do đó giả sử $A = A_1^* \cup A_2^*$, trong đó A_1^* và A_2^* là những tập hợp mở không trống và không giao nhau đối với A . Khi đó, tồn tại những tập hợp mở không giao nhau A_1 và A_2 của \mathbb{C} sao cho:

$$A_1^* = A_1 \cap A, \quad A_2^* = A_2 \cap A.$$

Vì tập hợp A_1^* và A_2^* là những tập hợp bù nhau một cách tương hỗ đối với A nên A_1^* và A_2^* là những tập hợp đồng thời đóng và mở trong A . Từ đó ta có định nghĩa tương đương sau đây:

Định nghĩa 1.2.12. Tập hợp $A \subset \mathbb{C}$ được gọi là tập hợp liên thông nếu trong A không tồn tại một tập hợp con nào đồng thời vừa đóng vừa mở trong A trừ chính tập hợp A và tập hợp \emptyset .

CÁC VÍ DỤ

1. Tập hợp trống và tập hợp gồm một điểm là những tập hợp liên thông.
2. Tập hợp \mathbb{C} là tập hợp liên thông.
3. Tập hợp $\mathbb{C} \setminus \{\text{một số hữu hạn điểm}\}$ là tập hợp liên thông.
4. Đoạn thẳng $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ là tập hợp liên thông.

Đối với tập hợp mở không trống của mặt phẳng \mathbb{C} ta có:

Định lý 1.2.8. Giả sử U là tập hợp mở trong \mathbb{C} . Hai điều kiện sau đây là tương đương

1. Tập hợp U liên thông.
2. Qua hai điểm tùy ý của tập hợp U có thể nối chúng bằng một đường gấp khúc nằm trọn trong U .

⁴Tôpô của tập hợp $A \subset \mathbb{C}$, trong đó lân cận của các điểm là giao của A với các lân cận của chính các điểm ấy trong tôpô của \mathbb{C} được gọi là tôpô cảm sinh

Chứng minh. Ta chứng minh từ (1) suy ra (2). Giả sử $a \in U$ là điểm bất kỳ cho trước. Ta ký hiệu E là tập hợp những điểm của U mà ta có thể nối chúng với điểm a bằng những đường gấp khúc trong U . Tập hợp E có các tính chất sau đây:

a) Tập hợp $E \neq \emptyset$ vì nó chứa ít nhất là điểm a .

b) Tập E là mở. Thật vậy, vì U mở nên với mỗi điểm $c_0 \in U$ tồn tại một lân cận hình tròn với tâm là c_0 nằm trọn trong U . Mỗi điểm của hình tròn này đều có thể nối với c_0 bằng một đường gấp khúc (chẳng hạn, nối theo bán kính). Như vậy, nếu điểm c_0 có thể nối với điểm a bằng đường gấp khúc nằm trọn trong U thì tồn tại một lân cận của điểm c_0 mà mọi điểm của nó đều có thể nối với a bằng đường gấp khúc $\in U$. Do đó E là tập hợp mở.

c) E là tập hợp đóng. Thật vậy, giả sử điểm $c_0 \in U$ là điểm tụ của E . Ta sẽ chứng minh rằng $c_0 \in E$. Với $r > 0$ nào đó, hình tròn $S = S(c_0, r)$ với bán kính r và với tâm tại c_0 được chứa trong U . Vì điểm c_0 là điểm giới hạn của E nên tìm được điểm $c \in S(c_0, r) \cap E$. Điểm c có thể nối với điểm a vì $c \in E$ và điểm c cũng có thể nối với c_0 bởi đoạn thẳng trong U . Như vậy tồn tại đường gấp khúc nằm trong U với gốc tại a và điểm cuối tại c_0 . Từ đó suy ra $c_0 \in E$ và E là tập hợp đóng.

Như vậy, E là tập hợp không trống, đồng thời vừa đóng vừa mở trong U , do đó

$$E \equiv U.$$

Bây giờ ta chứng minh từ (2) suy ra (1). Giả sử điều kiện (2) xảy ra và tập hợp mở U không liên thông, tức là theo định nghĩa 1.2.11 tồn tại hai tập mở U_1, U_2 sao cho:

$$U \cap U_1 \neq \emptyset, \quad U \cap U_2 \neq \emptyset; \quad U \cap U_1 \cap U_2 = \emptyset; \\ U \subset U_1 \cup U_2.$$

Giả sử $z_1 \in U_1, z_2 \in U_2$. Ta chứng minh rằng các điểm z_1 và z_2 không thể nối với nhau bằng đường gấp khúc nằm trong U . Giả sử ngược lại, không giảm tổng quát ta có thể cho rằng z_1 và z_2 được nối với nhau bởi một đoạn

thẳng I nằm trọn trong U .

$$z = z_1 + t(z_2 - z_1), \quad t \in [0, 1].$$

Khi đó theo trên ta có $I \subset U_1 \cup U_2$, $I \cap U_1 \cap U_2 = \emptyset$, $I \cap U_1 \neq \emptyset$, $I \cap U_2 \neq \emptyset$. Nhưng điều này phi lý vì đoạn thẳng I là tập hợp liên thông. \square

Ta có định nghĩa quan trọng sau đây.

Định nghĩa 1.2.13. Tập hợp $D \subset \mathbb{C}$ được gọi là một *miền* nếu nó thỏa mãn hai điều kiện sau đây:

1. D là tập hợp mở;
2. D là tập hợp liên thông.

Trong trường hợp khi D là tập hợp đóng liên thông thì D được gọi là một *continuum*.

Bây giờ giả sử D là tập hợp mở tùy ý và z_0 là một điểm nào đó của nó. Giả sử E là tập tất cả các điểm của D mà có thể nối chúng với điểm z_0 bằng những đường gấp khúc nằm trong D . Từ chứng minh định lý 1.2.8 suy ra rằng tập hợp $E = E(z_0)$ đó có ba tính chất:

- a) $E(z_0) \neq \emptyset$;
- b) $E(z_0)$ là tập hợp mở;
- c) Qua hai điểm tùy ý của $E(z_0)$ đều có thể nối chúng bằng một đường gấp khúc nằm trong $E(z_0)$.

Do đó $E(z_0)$ là tập hợp liên thông. Tập hợp $E(z_0)$ được gọi là *thành phần liên thông* (chứa điểm z_0) của tập hợp mở D . Thành phần liên thông của tập hợp mở D cũng có thể đặc trưng như một miền lớn nhất được chứa trong D và chứa điểm z_0 cho trước.

Hiển nhiên hai thành phần liên thông của một tập hợp mở D cùng chứa một điểm chung phải trùng nhau. Do đó hai thành phần liên thông của một tập hợp hoặc không giao nhau, hoặc trùng nhau hoàn toàn.

1.2.7 Hàm phức biến thực. Tuyến và đường cong

Bây giờ ta chuyển sang làm quen với khái niệm hàm phức biến thực (đầy đủ hơn là: hàm giá trị phức biến thực).

Định nghĩa 1.2.14. Giả sử $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$. Một hàm phức biến thực

$$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$$

là một quy tắc cho ứng mỗi $t \in [a, b]$ với một số phức $z = \gamma(t)$.

Nói cách khác, một hàm phức biến thực là một ánh xạ từ tập hợp con nào đó của \mathbb{R} vào \mathbb{C} .

Việc cho một hàm phức biến thực $z = \gamma(t)$ tương đương với việc cho hai hàm thực $x = x(t)$, $y = y(t)$ sao cho

$$z = \gamma(t) = (x(t), y(t)) = x(t) + iy(t); \quad t \in [a, b].$$

Ta nói rằng z_0 là giới hạn của hàm $z(t)$ khi $t \rightarrow t_0$: $z_0 = \lim_{t \rightarrow t_0} z(t)$ nếu: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall t \in \{t \in [a, b] : |t - t_0| < \delta\}$ đều có bất đẳng thức $|z(t) - z_0| < \varepsilon$.

Trong trường hợp

$$\lim_{h \rightarrow 0} z(t_0 + h) = z(t_0)$$

thì ta nói rằng hàm $z(t)$ liên tục tại điểm $t = t_0$, nghĩa là $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall t \in \{t \in [a, b] : |t - t_0| < \delta\}$ thì $|z(t) - z(t_0)| < \varepsilon$.

Xét tỷ số

$$\delta(h) = \frac{z(t+h) - z(t)}{h}.$$

Ta có định nghĩa sau đây:

Định nghĩa 1.2.15. Nếu tồn tại giới hạn

$$\lim_{h \rightarrow 0} \delta(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{x(t+h) - x(t)}{h} + i \frac{y(t+h) - y(t)}{h} \right\} \quad (1.19)$$

thì giới hạn đó được gọi là *đạo hàm* của hàm $z(t)$ tại điểm t và ký hiệu là

$$\frac{dz(t)}{dt} = z'(t) = x'(t) + iy'(t).$$

Ta lưu ý thêm rằng đạo hàm của hàm $z(t)$ tại các đầu mút của đoạn $[a, b]$ được hiểu là giới hạn (1.19) tương ứng được lấy từ phía phải điểm a và phía trái tại điểm b .

Bây giờ ta chuyển sang xét khái niệm về tuyến.

Định nghĩa 1.2.16. Ánh xạ liên tục

$$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}, \quad [a, b] \subset \mathbb{R}$$

được gọi là một *tuyến* (hay *tuyến tham số hóa*) trong mặt phẳng phức \mathbb{C} , điểm $\gamma(a)$ gọi là điểm đầu, $\gamma(b)$ gọi là điểm cuối. Nếu $\gamma(a) = \gamma(b)$ thì tuyến được gọi là *tuyến đóng*.

Từ định nghĩa ta thấy rằng tuyến - đó là hàm giá trị phức $z = \gamma(t)$ của biến thực t liên tục tại mọi điểm $t \in [a, b]$.

Không nên nhầm lẫn ánh xạ nói trong định nghĩa 1.2.16 với ảnh của đoạn $[a, b] \subset \mathbb{R}$ - là ảnh của tuyến qua ánh xạ đó.

Nếu ánh xạ γ là hằng ánh ($\gamma(t) \equiv \text{const}$) thì ảnh của tuyến chỉ là một điểm. Trong trường hợp này ta có thể nói: tuyến γ *co thành một điểm*. Nhưng ta nhấn mạnh rằng: tuyến là cái gì đó khác với tập hợp điểm thu được trong ánh xạ. Tương tự như vậy, lemniscat Bernoulli có thể “vòng quanh” theo hai hướng khác nhau trong khi nó chỉ là một tập hợp điểm trên mặt phẳng phức trong cả hai trường hợp. Hai phương pháp vòng quanh sẽ tương ứng với hai tuyến khác nhau, nghĩa là tương ứng với hai ánh xạ khác nhau từ đoạn thẳng của \mathbb{R} vào \mathbb{C} .

Cần phải nói rằng trong số những tuyến thỏa mãn định nghĩa 1.2.16 ta cũng gặp những tuyến rất ít phù hợp với biểu tượng trực giác thông thường của chúng ta. Chẳng hạn, người ta đã chứng minh rằng có thể xây dựng ánh xạ liên tục đoạn thẳng của trục thực \mathbb{R} lên một hình vuông (tuyến Peano!). Do đó, về sau ta sẽ tách ra những tuyến có tính chất trực quan hơn bằng những điều kiện bổ sung.

Định nghĩa 1.2.17. 1. Nếu ánh xạ $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ liên tục và đơn trị một - một thì tuyến $z = \gamma(t)$, $t \in [a, b]$ được gọi là *tuyến Jordan (tuyến đơn!)*.

2. Tuyến $z = \gamma(t)$, $t \in [a, b]$ được gọi *tuyến trơn* nếu tại mọi điểm $t \in [a, b]$ đều tồn tại đạo hàm liên tục $\gamma'(t)$ (tại các đầu mút của $[a, b]$ - tồn tại đạo hàm một phía) và $\gamma'(t) \neq 0$.

3. Tuyến $z = \gamma(t)$ được gọi là *trơn từng khúc* nếu hàm $z = \gamma(t)$ liên tục trên $[a, b]$ và $[a, b]$ có thể chia thành một số hữu hạn đoạn thẳng sao cho hạn chế của $\gamma(t)$ trên mỗi đoạn đó đều xác định tuyến trơn (nghĩa là hàm $\gamma(t)$ liên tục, khả vi từng khúc trên $[a, b]$ và $\gamma'(t) \neq 0$).

4. Tuyến $z = \gamma(t)$, $t \in [a, b]$ gọi là *đo được* nếu hàm $\gamma(t)$ có biến phân bị chặn.

CÁC VÍ DỤ

1. Tuyến $z = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ là tuyến trơn Jordan đo được.

2. Tuyến

$$\gamma(t) = \begin{cases} e^{it}, & -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi, \\ \frac{3t}{4} - 4, & \pi < t \leq 2\pi, \end{cases}$$

là tuyến trơn từng khúc đo được (không Jordan).

3. Tuyến

$$\gamma(t) = t \left(1 + i \sin \frac{1}{t} \right), \quad t \in \left[-\frac{1}{\pi}, \frac{1}{\pi} \right]$$

là tuyến Jordan không đo được.

Định nghĩa 1.2.18. Hai tuyến $z = \gamma_1(t) : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ và $z = \gamma_2(\tau) : [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$ được gọi là *tương đương* với nhau ($\gamma_1 \sim \gamma_2$) nếu tồn tại hàm $\tau = g(t)$ liên tục và đơn điệu tăng trên $[a, b]$ và ánh xạ (đơn trị một - một!) $[a, b]$ lên $[c, d]$ sao cho $\gamma_1(t) = \gamma_2[g(t)]$, $\forall t \in [a, b]$.

Dễ dàng thấy rằng đối với tuyến $z = \gamma(t) : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ bất kỳ luôn luôn có thể tìm được tuyến $z = \beta(t) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ tương đương với nó được xác

định bởi hệ thức $\beta(t) = \gamma[a + t(b - a)]$, $t \in [0, 1]$. Do đó về sau ta sẽ xem mọi tuyến đều được tham số hóa bởi đoạn $[0, 1]$.

CÁC VÍ DỤ

1. Hai tuyến $\gamma_1(t) = t$, $t \in [0, 1]$ và $\gamma_2(t) = \sin t$, $t \in [0, \pi/2]$ là hai tuyến tương đương.

2. Hai tuyến $\gamma_1(t) = t$, $t \in [0, 1]$ và $\gamma_2(t) = \sin \pi t$, $t \in [0, 1]$ không tương đương với nhau vì không tồn tại phép biến đổi tham số thỏa mãn điều kiện của định nghĩa 1.2.18 biến hàm này thành hàm kia. Thật vậy, nếu tồn tại phép biến đổi như vậy, thì hàm đơn điệu $\gamma_1 = t$ sau khi biến đổi cũng là hàm đơn điệu trong khi đó hàm $\sin \pi t$ không đơn điệu trong khoảng $[0, 1]$.

Bạn đọc có thể dễ dàng kiểm tra rằng quan hệ được xác định trong định nghĩa 1.2.18 là một quan hệ tương đương, tức là quan hệ có các tính phản xạ, đối xứng và bắc cầu (dùng định lý về hàm ngược và hàm hợp). Quan hệ tương đương này đã chia tập hợp các tuyến thành các tập hợp con gọi là các lớp tương đương - mỗi lớp gồm tất cả các tuyến tương đương với nhau.

Định nghĩa 1.2.19. Lớp các tuyến tương đương được gọi là một *đường cong*.

CÁC VÍ DỤ

1. Hai tuyến $z = \gamma_1(t) = t$, $0 \leq t \leq 1$ và $z = \gamma_2(t) = t^2$, $0 \leq t \leq 1$, xác định một đường cong liên tục được tham số hóa bởi đoạn $[0, 1] \subset \mathbb{R}$.

2. Ta xét tập hợp

$$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1, y \geq 0\}.$$

Về mặt hình học Γ là nửa trên của đường tròn đơn vị. Giả sử $I = [-1, 1]$. Khi đó hệ thức $\gamma(t) = (-t, \sqrt{1 - t^2})$, $t \in I$ sẽ là ánh xạ liên tục đoạn thẳng I vào \mathbb{R}^2 và $\gamma(-1) = (1, 0)$, và $\gamma(+1) = (-1, 0)$ và $\gamma(I) = \Gamma$.

Như vậy ánh xạ γ cho phép ta xem Γ như là tuyến tham số hóa. Bây giờ ta xét hệ thức $\tilde{\gamma}(t^*) = (\cos t^*, \sin t^*)$, $t \in I^* = [0, \pi]$. Rõ ràng $\tilde{\gamma}(t^*)$ cũng là phép tham số hóa của Γ . Hai tuyến $\gamma(t)$ và $\tilde{\gamma}(t)$ tương đương với nhau vì $g(t^*) = -\cos t^*$ là phép biến đổi tham số từ I^* đến I và $\tilde{\gamma} = \gamma \circ g$.

3. Hai tuyến $z = \gamma_1(t)$, $0 \leq t \leq 1$ và $z = \gamma_2(t) = \sin \pi t$, $0 \leq t \leq 1$ xác định hai đường cong khác nhau vì không tồn tại phép biến đổi tham số chuyển đường cong này thành đường cong kia.

Bây giờ ta muốn đề cập đến hướng trên đường cong. Từ định nghĩa 1.2.18 và 1.2.19 ta thấy rằng các phép biến đổi tham số khác nhau $g(t)$ sẽ tương ứng với các phép tham số hóa khác nhau của cùng một đường cong. Giả sử $z = \gamma(t)$, $t \in [0, 1]$ là một phép tham số hóa (còn gọi là phương trình tham số) của đường cong Γ . Từ lý luận ở trên ta thấy rằng điểm $z = \gamma(t)$, $t \in [0, 1]$ sẽ lập thành hợp điểm $M(\gamma)$ khác với bản thân đường cong. Điều khác biệt thứ nhất là: đường cong Γ là tập hợp điểm sắp được. Điều khác biệt thứ hai là các điểm khác nhau của đường cong có thể tương ứng với chỉ một điểm của mặt phẳng: cụ thể nếu $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ khi $t_1 \neq t_2$ thì điểm $z_1 = \gamma(t_1)$ và $z_2 = \gamma(t_2)$ là những điểm khác nhau trên đường cong Γ nhưng lại là những điểm trùng nhau trên mặt phẳng. Những điểm đó gọi là những *điểm tự cắt*. (Ở đây ta sẽ không xem sự trùng nhau giữa điểm đầu và điểm cuối là tự cắt).

Trên đường cong Γ ta sẽ xác định một hướng bằng cách cho rằng điểm với giá trị tham số bé là đứng trước điểm với giá trị tham số lớn, tức là điểm $\gamma(t_1)$ đứng trước điểm $\gamma(t_2)$ (hay $\gamma(t_2)$ đứng sau $\gamma(t_1)$) $\forall t_1, t_2, t_1 < t_2$. Bằng cách định hướng như vậy, đường cong mà trên đó được xác lập một hướng gọi là *đường cong được định hướng* hay *đường cong có hướng*. Hướng chuyển động của điểm $z = \gamma(t)$ theo đường cong Γ tương ứng với hướng tăng của tham số t được gọi là *hướng dương*.

Bây giờ ta đề cập đến đường cong có hướng ngược lại. Đối với đoạn $I \subset \mathbb{R}$ bất kỳ, ta xác định đoạn $-I = \{t \in \mathbb{R} : -t \in I\}$. Nếu $\gamma : I \rightarrow \mathbb{C}$ là một tuyến tham số hóa nào đó thì ta sẽ xác định tuyến tham số hóa $\gamma^- : -I \rightarrow \mathbb{C}$ bởi điều kiện $\gamma^-(t) = \gamma(-t)$. Ta có $\gamma^-(-I) = \gamma(I)$. Do đó γ^- và γ có cùng ảnh. Nếu $I = [a, b]$ thì $-I = [-b, -a]$ và $\gamma^-(-b) = \gamma(b)$, $\gamma^-(-a) = \gamma(a)$. Như vậy khi chuyển từ γ đến γ^- thì điểm đầu và điểm cuối đổi vai trò cho nhau. Có thể chứng minh rằng nếu γ chạy suốt một lớp tương đương Γ nào đó của các tuyến thì tất cả các tuyến γ^- cũng sẽ nằm trong

một lớp tương đương ký hiệu là Γ^- . Ta nói rằng đường cong Γ^- thu được từ Γ bằng phép đổi hướng.

Trong nhiều vấn đề ta cũng sử dụng sự giải thích hình học đối với đường cong và khi đó hiểu đường cong là tập hợp điểm

$$\Gamma = \{z \in \mathbb{C} : z = \gamma(t), t \in [0, 1]\}$$

trùng với ảnh liên tục của đoạn $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ còn $z = \gamma(t)$, $t \in [0, 1]$ được xem như là một trong các phép tham số hóa của Γ . Với quan điểm đó ta có thể nói về tính Jordan, tính trơn, tính trơn từng khúc và tính đo được của đường cong tương ứng trong các trường hợp tuyến Jordan, tuyến trơn, tuyến trơn từng khúc và tuyến đo được tham số hóa đường cong ấy.

Chẳng hạn ta có:

Định nghĩa 1.2.20. Đường cong Γ gọi là *đường cong Jordan (đường cong đơn)* nếu tồn tại phép tham số hóa $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ của nó sao cho $\gamma(t)$ đơn điệu một - một trên đoạn $[0, 1]$ (đường cong không tự cắt nhưng các đầu mút có thể trùng nhau). Nếu $\gamma(0) = \gamma(1)$ thì Γ là đường cong đóng Jordan.

Định nghĩa 1.2.21. 1. Đường cong được gọi là *trơn* nếu tồn tại phép tham số hóa khả vi liên tục của nó $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ sao cho đạo hàm $\gamma'(t) \neq 0$ $\forall t \in [0, 1]$.

2. Đường cong được gọi là *trơn từng khúc* nếu tồn tại phép tham số hóa $\gamma(t) : t \in [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ của nó sao cho đoạn $[0, 1]$ có thể chia thành n đoạn con bởi các điểm t_k , $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ mà trong mỗi đoạn con đó hàm $\gamma(t)$ có đạo hàm $\gamma'(t)$ liên tục và $\neq 0$, còn tại các điểm chia t_k thì tồn tại đạo hàm bên phải và bên trái khác 0.

Định nghĩa các loại đường cong một cách chặt chẽ dựa trên định nghĩa các tuyến tương đương với các hạn chế bổ sung đối với ánh xạ $\tau = g(t)$ xin mời xem giáo trình của B. V. Sabat “Nhập môn giải tích phức”, phần I, trang 20-23, Hà Nội 1979. Ở đây chúng tôi muốn đặc biệt lưu ý bạn đọc rằng khái niệm trơn không phải là bất biến đối với phép biến đổi tham số $\tau = g(t)$ (xem định nghĩa 1.2.18). Chẳng hạn, ta xét ánh xạ $\gamma(t) = (t, t)$, $I = [-1, +1]$. Đó

là phép tham số hóa đường cong trơn $\Gamma = \{(x, y) : x = y, |x| \leq 1\}$ và rõ ràng $\gamma(t)$ là tuyến trơn (xem định nghĩa 1.2.17). Xét phép biến đổi tham số $\tau = g(t) = t^3$ ánh xạ đoạn thẳng I lên chính nó. Khi đó ánh xạ $\gamma^* = \gamma \circ g$ là tuyến không trơn. Thật vậy $\gamma^*(t) = (t^3, t^3)$, $\gamma^{*'}(t) = (3t^2, 3t^2)$ và do đó $\gamma^{*'}(0) = (0, 0)$.

Những điểm của đường cong mà tại đó tính trơn bị phá vỡ được gọi là những *điểm góc*; những điểm còn lại được gọi là *điểm chính quy*. Tại mọi điểm chính quy của đường cong Jordan trơn từng khúc đều tồn tại tiếp tuyến. Tại các điểm góc, đường cong Jordan trơn từng khúc không có tiếp tuyến: các tiếp tuyến một phía tại những điểm này tạo nên một góc với độ lớn nào đó. Đó cũng là lý do tại sao ta gọi các điểm mà tính trơn của đường cong bị phá vỡ là những điểm góc.

Để kết thúc tiết này ta nói vài lời về độ dài của đường cong Γ . Giả sử $R = (0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = 1)$ là một phép phân hoạch đoạn $[0, 1]$. Ta lập tổng

$$L_R(\Gamma) = \sum_{j=0}^{n-1} |\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j)|,$$

trong đó $z = \gamma(t)$, $t \in [0, 1]$ là một phép tham số hóa nào đó của Γ . Hiển nhiên $L_R(\Gamma)$ là độ dài của đường gấp khúc nội tiếp trong đường cong Γ . Số

$$L(\Gamma) = \sup_R L_R(\Gamma)$$

được gọi là *độ dài* của đường cong Γ . Đường cong Γ gọi là *đo được* nếu $L(\Gamma) < \infty$. Có thể chứng minh rằng (xem H. Grauert, I. Lieb và W. Fisher. Phép tính vi phân và tích phân, phần I, trang 332-339, Hà Nội 1977) độ dài của đường cong định nghĩa như vậy không phụ thuộc vào việc chọn phép tham số hóa của đường cong ấy. Nếu đường cong Γ có phép tham số hóa khả vi liên tục $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ thì Γ đo được và

$$L(\Gamma) = \int_0^1 |\gamma'(t)| dt.$$

Về sau, độ dài của đường cong Γ thường được ký hiệu là $|\Gamma|$.

1.2.8 Phép đồng luân

Ý nghĩa của khái niệm đồng luân đối với giải tích (đặc biệt đối với lý thuyết hàm chỉnh hình) là ở chỗ nhiều đại lượng được xác định như một hàm của tuyến nhưng trên thực tế lại không phụ thuộc vào tuyến mà chỉ phụ thuộc vào lớp các tuyến đồng luân.

Về phép biến dạng liên tục một tuyến vào một tuyến khác, ta có thể tưởng tượng một cách khá trực quan về mặt hình học. Sau đây sẽ nêu ra định nghĩa khái niệm này một cách chặt chẽ về mặt giải tích.

Định nghĩa 1.2.22. 1. Giả sử hai tuyến

$$\left. \begin{array}{l} \gamma_0 : I \rightarrow D \\ \gamma_1 : I \rightarrow D \end{array} \right\}, \quad I = [0, 1]$$

có chung điểm đầu và điểm cuối, nghĩa là

$$\gamma_0(0) = \gamma_1(0); \quad \gamma_0(1) = \gamma_1(1).$$

Hai tuyến γ_0 và γ_1 được gọi là *đồng luân với nhau* trong miền D như là những tuyến có đầu mút bất động nếu tồn tại ánh xạ liên tục δ :

$$I \times I \ni (t, u) \mapsto \delta(t, u) \in D$$

sao cho

$$\begin{cases} \delta(t, 0) = \gamma_0(t), \\ \delta(0, u) = \gamma_0(0) = \gamma_1(0), \\ \delta(t, 1) = \gamma_1(t), \\ \delta(1, u) = \gamma_0(1) = \gamma_1(1). \end{cases}$$

2. Hai tuyến đóng

$$\gamma_0 : I \rightarrow D, \quad \gamma_1 : I \rightarrow D$$

được gọi là *đồng luân với nhau* trong miền D , nếu tồn tại ánh xạ liên tục δ :

$$I \times I \ni (t, u) \mapsto \delta(t, u) \in D,$$

sao cho

$$\delta(t, 0) = \gamma_0(t); \quad \delta(t, 1) = \gamma_1(t); \quad \delta(0, u) = \delta(1, u), \quad \forall u \in I.$$

Trong trường hợp khi tuyến γ_1 là một hằng ánh $\gamma_1(t) = \text{const}$ (tức là: γ_1 ánh xạ đoạn $I = [0, 1]$ thành một điểm) và γ_0 đồng luân với γ_1 thì ta nói rằng γ_0 được co về một điểm, hay là: γ_0 đồng luân với không.

Ta chỉ tính đồng luân giữa các tuyến bởi ký hiệu “ \approx ”.

Để làm cho định nghĩa này dễ hiểu hơn, ta tưởng tượng rằng hình vuông $I \times I$ được cấu thành bởi các đoạn thẳng nằm ngang S_{u_0} mà mỗi giá trị $u_0 \in I$ sẽ tương ứng với một đoạn như thế (hình I.2). Hạn chế của ánh xạ δ trên S_{u_0} sẽ xác định tuyến

$$\gamma_{u_0} : [0, 1] \rightarrow D$$

bởi điều kiện

$$\gamma_{u_0}(t) = \delta(t, u_0).$$

Như vậy, ta thu được một họ các tuyến mà mỗi tuyến sẽ tương ứng với giá trị $u_0 \in [0, 1]$.

Hình I.2

Do đó, nếu cho rằng đại lượng biến thiên là thời gian thì họ các tuyến này có thể xem như là các vị trí khác nhau của một tuyến di động duy nhất.

Điều này cũng giải thích vì sao người ta gọi phép đồng luân là *phép biến dạng*.

Như vậy, mỗi điểm của tuyến γ_0 dịch chuyển theo tuyến liên tục đến điểm của tuyến γ_1 . Tuyến liên tục này có thể biểu diễn nhờ tham số u , như $\delta(t, u)$, $u \in [0, 1]$. Ta đòi hỏi $\delta(t, u)$ liên tục theo hai biến t và u , và với mỗi giá trị cố định u_0 nó cho ta tuyến nối $\gamma_0(0) = \gamma_1(0)$ với $\gamma_0(1) = \gamma_1(1)$.

CÁC VÍ DỤ

1. Hàm $\delta(t, u) = [x_0(t) + iy_0(t)](1 - u) + [x_1(t) + iy_1(t)]u$ là phép đồng luân trong \mathbb{C} biến tuyến

$$\gamma_0(t) = x_0(t) + iy_0(t)$$

vào tuyến $\gamma_1(t) = x_1(t) + iy_1(t)$ với các đầu mút chung bất động. Do đó $\gamma_0 \approx \gamma_1$.

2. Nếu $\gamma_1 \approx \gamma_2$ với các đầu mút chung thì $(\gamma_1 \cup \gamma_2) \approx 0$.

3. Giả sử cho vành tròn

$$V = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 3\}$$

và giả sử rằng γ_1 là tuyến thuộc V nằm trọn trong nửa vành tròn trên ($\text{Im } z > 0$) và nối hai điểm $z = 2$ và $z = -2$. Nếu γ_2 là tuyến cũng có các tính chất đó thì $\gamma_1 \approx \gamma_2$. Nếu γ_2 nằm trong nửa vành tròn dưới ($\text{Im } z < 0$) và nối hai điểm $z = 2$ và $z = -2$ thì γ_1 không đồng luân với γ_2 trong V vì γ_1 không thể biến dạng vào γ_2 mà không cắt đường tròn đơn vị $|z| = 1$.

Quan hệ đồng luân giữa hai tuyến $\gamma_1 \approx \gamma_2$ là quan hệ tương đương. Ta sẽ chứng minh điều đó.

1. $\gamma \approx \gamma$ với phép biến dạng đồng nhất $\delta(t, u) = \gamma(t)$.

2. Nếu $\gamma_1 \approx \gamma_2$ thì $\gamma_2 \approx \gamma_1$.

3. Nếu $\gamma_1 \approx \gamma_2$, $\gamma_2 \approx \gamma_3$ thì $\gamma_1 \approx \gamma_3$. Thật vậy, nếu $\delta(t, u)$ biến dạng γ_1

vào γ_2 , còn $\delta_2(t, u)$ biến dạng γ_2 vào γ_3 thì

$$\delta(t, u) = \begin{cases} \delta_1(t, 2u), & 0 \leq u \leq \frac{1}{2} \\ \delta_2(t, 2u - 1), & \frac{1}{2} \leq u \leq 1 \end{cases}$$

sẽ biến dạng γ_1 vào γ_3 .

Do đó, trong miền cho trước, mọi tuyến với đầu mút chung hay là các tuyến đóng có thể chia thành các lớp mà mỗi lớp bao gồm các tuyến đồng luân với nhau. Những lớp này được gọi là những *lớp đồng luân*.

Nhận xét 1.2.3. Vì tính đồng luân của hai tuyến không bị phá vỡ trong các phép thay tham số nên khái niệm đồng luân cũng được chuyển sang cho đường cong. Cụ thể là: hai đường cong với đầu mút chung, hoặc là đóng được gọi là đồng luân với nhau trong miền D nếu trong miền D các tuyến γ_1 và γ_2 - đại diện lần lượt cho các đường cong này, là đồng luân với nhau.

1.2.9 Miền đơn liên và đa liên

Bây giờ, dựa vào khái niệm đồng luân ta sẽ phân loại các miền trên \mathbb{C} .

Định nghĩa 1.2.23. Miền $D \subset \mathbb{C}$ được gọi là *miền đơn liên* nếu mọi tuyến đóng γ ở trong D đều đồng luân với không ($\gamma \approx 0$).

Những miền không có tính chất này được gọi là *miền đa liên*.

Đối với miền đơn liên, hai tuyến bất kỳ với đầu mút chung là đồng luân với nhau.

Hiển nhiên rằng biên của miền đơn liên là một tập hợp liên thông, còn biên của miền đa liên là tập hợp không liên thông. Số thành phần liên thông của biên của miền đã cho được gọi là *cấp liên thông* của miền đó. Nếu số thành phần liên thông của miền là vô hạn thì miền được gọi là vô hạn - liên thông.

CÁC VÍ DỤ

1. Miền lồi D bất kỳ là miền đơn liên. Vì D lồi nên nó chứa mọi đoạn thẳng nối hai điểm bất kỳ của nó. Giả sử $a \in D$ và $0 \leq k \leq 1$. Khi đó phép vị tự với tâm tại a và hệ số k biến miền D vào nó và khi k biến thiên từ 1 đến 0, phép vị tự đó sẽ là phép đồng luân biến đường cong thành một điểm.

2. Miền nằm giữa hai đường tròn tiếp xúc trong là miền đơn liên (biên của nó là tập hợp liên thông!). Thật vậy, ta có thể xem hai đường tròn γ_1 và γ_2 tiếp xúc trong tại điểm S nào đó là hai đường cong có chung điểm đầu và điểm cuối (đều tại điểm S) nên từ $n^\circ 8$ suy ra $\gamma_1 \approx \gamma_2$ và do đó

$$\gamma_1 \cup \gamma_2^{-1} \approx 0.$$

3. Mặt phẳng \mathbb{C} là miền đơn liên. Thật vậy, hàm

$$\delta(t, u) = \gamma_0(t)u + \gamma_1(t)(1 - u)$$

sẽ thực hiện phép đồng luân hai tuyến γ_0 và γ_1 .

4. Tập hợp $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ là miền nhị liên.

5. Vành tròn

$$V = \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}$$

là miền nhị liên.

6. Giả sử có các đường cong Jordan $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n$ thỏa mãn các điều kiện sau đây:

a) γ_0 là đường cong đóng;

b) Các đường cong γ_k ($k = 1, 2, \dots, n$) nằm bên trong γ_0 ;

c) Mỗi đường cong γ_k , $k = 1, \dots, n$ đều nằm ngoài nhau và không giao nhau. Tập hợp các điểm nằm bên trong γ_0 và nằm bên ngoài mọi γ_k , $k = 1, 2, \dots, n$ là miền $(n+1)$ -liên thông D . Các đường cong γ_k , $k = 0, 1, \dots, n$ là các thành phần của biên ∂D của miền D . Một đôi khi biên của miền còn được gọi là *chu tuyến* của miền.

Hiển nhiên rằng miền $D = \overline{\mathbb{C}} \setminus \gamma$, trong đó γ là một đường cong Jordan đóng. Ta có định lý quan trọng sau đây:

Định lý Jordan. Mọi đường cong đóng Jordan đều chia mặt phẳng phức mở rộng $\overline{\mathbb{C}}$ thành hai miền đơn liên mà nó là biên của mỗi miền: một miền là phần trong (không chứa điểm vô cùng) và miền kia là miền ngoài chứa điểm vô cùng.

Để kết thúc mục này ta sẽ đề cập đến biên có hướng của một miền bất kỳ mà ta sẽ xét sau.

Định nghĩa 1.2.24. Giả sử D là miền của mặt phẳng phức \mathbb{C} được giới hạn bởi tập hợp $\{\Gamma_i\}_0^n$ gồm một số hữu hạn đường cong Γ_i , $i = 0, 1, \dots, n$. Tập hợp $\{\Gamma_i\}_0^n$ được gọi là *biên có định hướng* (gọi tắt là *biên có hướng*) của miền D nếu nó thỏa mãn các điều kiện sau đây:

1. Đường cong Γ_0 là đường cong đóng và mọi đường cong Γ_i , $i = 1, 2, \dots, n$ đều thuộc phần trong của Γ_0 .
2. Mọi đường cong Γ_k đều nằm trong phần ngoài của miền giới hạn bởi Γ_j , $k \neq j$; $k, j = 1, 2, \dots, n$.
3. Các đường cong Γ_i , $i = 0, 1, \dots, n$ được định hướng sao cho khi vòng quanh theo Γ_i phần trong của miền D luôn luôn nằm bên trái. Phép định hướng đó được gọi là *phép định hướng dương*. Biên của miền với phép định hướng dương được ký hiệu là ∂D .

Ta giải thích điều kiện 3. Nếu $\gamma = \gamma_i(t)$, $i = 0, 1, \dots, n$, $0 \leq t \leq 1$ là phương trình của đường cong Γ_i được định hướng như vậy thì tại mọi điểm $z = \gamma_i(t)$ mà tại đó tồn tại đạo hàm $\gamma'_i(t) \neq 0$ thì vector $\gamma'_i(t)$ có tính chất là: nếu quay vector ấy một góc $\frac{\pi}{2}$ ngược chiều kim đồng hồ thì vector sẽ hướng vào trong miền.

Ta lưu ý rằng nếu miền D bị chặn thì chu tuyến ngoài Γ_0 (nghĩa là chu tuyến mà một phần bù của nó là miền chứa điểm $z = \infty$ và không chứa các điểm của D) có định hướng dương là hướng ngược chiều kim đồng hồ, còn các chu tuyến trong (các chu tuyến còn lại) có định hướng dương là hướng theo chiều kim đồng hồ. Nếu miền $D \ni \infty$ thì tất cả các chu tuyến biên có định hướng dương là hướng theo chiều kim đồng hồ.

1.3 Hàm biến phức

Khái niệm hàm biến phức là một trường hợp riêng của khái niệm về hàm. Phần trước (xem 1.2) ta xét các hàm phức biến thực $\gamma : (a, b) \rightarrow \mathbb{C}$, $(a, b) \subset \mathbb{R}$.

Nói chung ta sẽ gọi ánh xạ

$$f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

là hàm phức một biến phức (hay một cách đơn giản là một hàm biến phức). Khái niệm hàm còn được mở rộng nếu ta xét các ánh xạ từ tập hợp nào đó của \mathbb{C} vào \mathbb{C} .

Trong mục này, ta sẽ trình bày khái niệm hàm biến phức, tính \mathbb{C} -liên tục cùng các tính chất cơ bản của nó.

1.3.1 Định nghĩa hàm biến phức

Trên mặt phẳng phức mở rộng của biến z và w (đều được ký hiệu là $\overline{\mathbb{C}}$) ta xét lần lượt các tập hợp D và D^* (có thể chứa cả điểm vô cùng).

Định nghĩa 1.3.1. Giả sử $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ là một tập hợp tùy ý cho trước. Một hàm biến phức

$$f : D \rightarrow \mathbb{C}$$

là một quy tắc cho ứng mỗi điểm $z \in D$ với một điểm duy nhất $w = f(z) \in \mathbb{C}$.

Để chỉ một hàm biến phức, ta còn dùng các ký hiệu sau đây:

$$\begin{aligned} z &\mapsto f(z), \\ w &= f(z), \dots \end{aligned}$$

CÁC VÍ DỤ

Ánh xạ $z \mapsto f(z) = az + b$ xác định một hàm *nguyên tuyến tính* trong \mathbb{C} .

Ánh xạ $z \mapsto f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, $c \neq 0$ xác định một hàm *phân tuyến tính* trên tập hợp $D = \mathbb{C} \setminus \left\{ -\frac{d}{c}, \infty \right\}$ (giả thiết $bc - ad \neq 0$).

Ánh xạ $z \mapsto \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ xác định một hàm thường gọi là *hàm Jukovski* trên tập $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Trong trường hợp khi $w = f(z) \in D^*$, $\forall z \in D$ thì ta viết $f : D \rightarrow D^*$, và nói rằng điểm $w \in D^*$ là ảnh của điểm $z \in D$, còn z là nghịch ảnh của điểm w . Để chỉ nghịch ảnh, ta dùng ký hiệu $z = f^{-1}(w)$.

Theo định nghĩa hàm đã trình bày ở trên, mọi hàm đều là *hàm đơn trị*: nghĩa là với mỗi giá trị của z ta có tương ứng một giá trị duy nhất của $f(z)$. Khái niệm hàm đa trị sẽ được trình bày trong chương V.

Giả sử tập hợp $D \subset \mathbb{C}$ và $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ là hàm được cho trên D . Hiển nhiên rằng phần thực, phần ảo của f là những số thực phụ thuộc vào z , $z \in D$. Đó là những hàm thực biến phức z :

$$\left. \begin{array}{l} u(z) : D \rightarrow \mathbb{R}, \\ v(z) : D \rightarrow \mathbb{R}, \end{array} \right\} \quad D \subset \mathbb{C}$$

và do đó có thể viết $f(z) = u(z) + iv(z)$.

Vì mặt phẳng \mathbb{C} được đồng nhất với mặt phẳng \mathbb{R}^2 nên mỗi $z \in D$ được đồng nhất với $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Như vậy:

$$f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y).$$

Ngược lại, nếu trên tập D cho hai hàm nhận giá trị thực độc lập với nhau: $u = u(x, y)$; $v = v(x, y)$ thì cũng có nghĩa là đã cho một hàm phức

$$w = u + iv = u(x, y) + iv(x, y) = f(x, y) = f(z).$$

Do đó, việc cho hàm f trên D tương đương với việc cho hai hàm thực hai biến thực:

$$\begin{array}{l} u = u(z) = u(x, y) : D \rightarrow \mathbb{R}, \\ v = v(z) = v(x, y) : D \rightarrow \mathbb{R}. \end{array}$$

Từ nhận xét trên đây, toàn bộ lý thuyết hàm biến phức có thể giải thích như là lý thuyết các cặp hàm của hai biến thực x và y .

Định nghĩa 1.3.2. Một hàm

$$f : D \rightarrow D^*$$

được gọi là đơn trị một-một hay *đơn diệp* nếu các ảnh của những điểm khác nhau của D là khác nhau. Cụ thể hơn: $f(z)$ là đơn diệp nếu hai điểm bất kỳ $z_1, z_2 \in D$, $z_1 \neq z_2$, thì ảnh $f(z_1) \neq f(z_2)$. Điều đó tương đương với điều kiện nghịch ảnh của mỗi điểm thuộc D^* chỉ gồm đúng một điểm.

Từ định nghĩa 1.3.2 ta thấy rằng ánh xạ $w = f(z)$ là ánh xạ đơn diệp nếu không những điểm z_1 có một ảnh duy nhất w_1 mà điểm $w_1 \in D^*$ bất kỳ cũng chỉ là ảnh của một điểm $z_1 \in D$.

Trong ánh xạ đơn diệp $w = f(z)$, nghịch ảnh $z = f^{-1}(w)$ có thể xem như là một hàm đơn trị biến w . Hàm này được gọi là *hàm ngược* đối với hàm $w = f(z)$. Hiển nhiên đối với hàm đơn trị (nhưng không đơn diệp) ta cũng có thể nói về hàm ngược $z = f^{-1}(w)$, nhưng khi đó hàm ngược này không đơn trị. Rõ ràng là ánh xạ $w = f(z)$ là ánh xạ đơn diệp khi và chỉ khi cả hai hàm f và f^{-1} đều đơn trị.

Định nghĩa 1.3.3. Giả sử các hàm

$$f : D \rightarrow D^*; \quad g : D^* \rightarrow D^{**}$$

được cho theo sơ đồ

$$D \xrightarrow{f} D^* \xrightarrow{g} D^{**} \quad (f(D) \subseteq D^*).$$

Khi đó ta có thể xác định được một hàm

$$h : D \rightarrow D^{**}$$

bằng cách cho ứng mỗi điểm $z \in D$ với điểm

$$h(z) = g[f(z)] \in D^{**}.$$

Hàm h này được gọi là *hàm hợp* của các hàm f và g đã cho và được ký hiệu là

$$h = g \circ f : D \rightarrow D^{**}.$$

Chẳng hạn, nếu ánh xạ $w = f(z)$ đơn diệp và $f^{-1}(w) = \varphi(w)$ là hàm ngược của nó thì

$$\varphi[f(z)] = z.$$

1.3.2 Các ví dụ về ánh xạ đơn diệp

Bây giờ ta sẽ làm sáng tỏ những khái niệm đưa ra ở trên bằng một số ví dụ.

a. Ánh xạ phân tuyến tính. Ánh xạ

$$w = \frac{az + b}{cz + d}, \quad (1.20)$$

$$ad - bc \neq 0, \quad (1.21)$$

trong đó a, b, c, d là những số phức xác định thỏa mãn điều kiện $ad - bc \neq 0$, được gọi là ánh xạ phân tuyến tính.

Ánh xạ (1.20) đơn diệp khi và chỉ khi các hệ số a, b, c, d thỏa mãn hệ thức (1.21). Thật vậy, giả sử $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $z_1 \neq z_2$. Khi đó

$$w_1 = \frac{az_1 + b}{cz_1 + d}, \quad w_2 = \frac{az_2 + b}{cz_2 + d}$$

và do đó

$$w_2 - w_1 = \frac{(bc - ad)(z_1 - z_2)}{(cz_1 + d)(cz_2 + d)}.$$

Từ đó suy ra điều cần khẳng định.

Vì vậy, hệ thức (1.21) là điều kiện cần và đủ để tồn tại ánh xạ ngược của (1.20), trong đó:

$$z = \frac{dw - b}{-cw + a}.$$

Đặc biệt, khi $c = 0$, $d = 1$, từ (1.21) ta có

$$a \neq 0. \quad (1.22)$$

Điều kiện (1.22) đảm bảo tính đơn diệp của ánh xạ tuyến tính $w = az + b$ với ánh xạ ngược là

$$z = \frac{w}{a} - \frac{b}{a}.$$

Khi xét ánh xạ (1.20), ta loại trừ trường hợp $d = c = 0$. Trong các trường hợp còn lại, điều kiện $ad - bc \neq 0$ tương đương với điều kiện

$$w = \text{const}$$

và do đó nó không có miền đơn diệp.

b. Ánh xạ $w = z^n$, $n \in \mathbb{N}$. Để tìm miền đơn diệp của ánh xạ này, ta xét các giá trị:

$$z_1 = |z_1|e^{i\varphi_1} \quad \text{và} \quad z_2 = |z_1|e^{i\varphi_2}.$$

Khi đó

$$w_1 - w_2 = |z_1|^n(e^{in\varphi_1} - e^{in\varphi_2}).$$

Rõ ràng là ánh xạ $w = z^n$ đơn diệp trong mỗi góc với độ mở $\frac{2\pi}{n}$ với đỉnh tại gốc tọa độ.

c. Ánh xạ Jukovski. Ánh xạ

$$w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \quad (1.23)$$

được gọi là ánh xạ Jukovski. Nó đơn diệp trong miền D nào đó khi và chỉ khi miền D không chứa những cặp điểm khác nhau z_1, z_2 liên hệ với nhau bởi hệ thức

$$z_1 z_2 = 1. \quad (1.24)$$

Thật vậy, giả sử

$$\frac{1}{2}\left(z_1 + \frac{1}{z_1}\right) = \frac{1}{2}\left(z_2 + \frac{1}{z_2}\right)$$

khi đó

$$(z_1 - z_2)\left(1 - \frac{1}{z_1 z_2}\right) = 0.$$

Từ đó: hoặc $z_1 = z_2$ hoặc $z_1 z_2 = 1$.

Về mặt hình học, đẳng thức (1.24) chứng tỏ rằng điểm $z_2 = \frac{1}{z_1}$ thu được bằng phép đối xứng kép qua đường tròn đơn vị và trục thực:

$$w = \frac{1}{\bar{z}}; \quad w = \overline{w_1}.$$

Như vậy, ánh xạ (1.23) đơn diệp trong miền D khi và chỉ khi D không chứa những cặp điểm khác nhau mà điểm này thu được từ điểm kia nhờ phép đối xứng kép: qua đường tròn đơn vị và trục thực.

Ánh xạ (1.23) đơn diệp trong các miền sau đây:

$\{|z| > 1\}$ - phần ngoài hình tròn đơn vị,

$\{|z| < 1\}$ - hình tròn đơn vị.

1.3.3 Giới hạn của hàm

Bây giờ ta chuyển sang xét khái niệm cơ bản của giải tích - khái niệm giới hạn.

Giả sử cho hàm

$$f : D \rightarrow \mathbb{C}$$

và z_0 là điểm giới hạn của tập hợp D .

Định nghĩa 1.3.4. Số w_0 được gọi là *giới hạn* của hàm f khi $z \rightarrow z_0$ nếu:

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall z \in D \cap \dot{U}(z_0, \delta) \\ \Rightarrow |f(z) - w_0| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Ký hiệu

$$w_0 = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z), \quad (1.25)$$

(trong đó $\mathcal{U}(z_0, \delta)$ là δ - lân cận thủng của điểm z_0).

Ta có định lý sau đây:

Định lý 1.3.1. *Giả sử $w_0 = u_0 + iv_0 \in \mathbb{C}$ và $f(z) = u(z) + iv(z)$. Khi đó giới hạn $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ tồn tại khi và chỉ khi tồn tại hai giới hạn*

$$\begin{aligned} u_0 &= \lim_{z \rightarrow z_0} \operatorname{Re}[f(z)] = \lim_{z \rightarrow z_0} u(z), \\ v_0 &= \lim_{z \rightarrow z_0} \operatorname{Im}[f(z)] = \lim_{z \rightarrow z_0} v(z). \end{aligned}$$

Nói cách khác, đẳng thức

$$w_0 = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \quad (1.26)$$

tương đương với hai đẳng thức:

$$u_0 = \lim_{z \rightarrow z_0} u(z), \quad v_0 = \lim_{z \rightarrow z_0} v(z). \quad (1.27)$$

Chứng minh. Thật vậy, giả sử f thỏa mãn (1.26), khi đó với $\varepsilon > 0$ bất kỳ, $\exists \delta(\varepsilon) > 0$ sao cho

$$|f(z) - w_0| < \varepsilon$$

khi $|z - z_0| = [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]^{1/2} < \delta(\varepsilon)$.

Nhưng

$$\begin{aligned} |u(z) - u_0| &= |\operatorname{Re}[f(z) - w_0]| \leq |f(z) - w_0| < \varepsilon, \\ |v(z) - v_0| &= |\operatorname{Im}[f(z) - w_0]| \leq |f(z) - w_0| < \varepsilon, \end{aligned}$$

và từ đó suy ra (1.27).

Bây giờ, giả sử (1.27) được thỏa mãn. Khi đó $\forall \varepsilon > 0$:

$$|u(z) - u_0| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}, \quad |v(z) - v_0| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}.$$

Nếu $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = |z - z_0| < \delta'(\varepsilon)$ thì

$$|f(z) - w_0| = [(u - u_0)^2 + (v - v_0)^2]^{1/2} < \varepsilon.$$

□

Từ tính tương đương vừa được chứng minh giữa (1.26) và (1.27) suy rằng những định lý sơ cấp về giới hạn của hàm trong giải tích thực được chuyển sang cho giải tích phức không một sự thay đổi nào. Cụ thể là, nếu

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0, \quad \lim_{z \rightarrow z_0} \varphi(z) = \tilde{w}_0$$

thì tồn tại các giới hạn của $f(z) \pm \varphi(z)$, $f(z) \cdot \varphi(z)$, $f(z)/\varphi(z)$ (khi $\varphi(z) \neq 0$) khi $z \rightarrow z_0$ và:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} [f(z) \pm \varphi(z)] = w_0 \pm \tilde{w}_0,$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} [f(z) \cdot \varphi(z)] = w_0 \tilde{w}_0,$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{\varphi(z)} = \frac{w_0}{\tilde{w}_0}, \quad \tilde{w}_0 \neq 0.$$

Nhận xét 1.3.1. Ta cần lưu ý rằng định nghĩa 1.3.4 về giới hạn vẫn đúng cả trong các trường hợp: hoặc z_0 , hoặc w_0 hoặc cả z_0 và w_0 bằng vô cùng.

Chẳng hạn, khi $z_0 \neq \infty$, $w_0 = \infty$ thì hàm f thỏa mãn (1.25) nếu từ bất đẳng thức

$$0 < |z - z_0| < \delta(\varepsilon)$$

suy ra

$$|f(z)| > \varepsilon.$$

Ví dụ. Chứng minh rằng

$$\lim_{z \rightarrow \infty} [a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n] = \infty, \quad n \geq 1$$

với $a_n \neq 0$.

Thật vậy, ta có

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n = z^n \left[\frac{a_0}{z^n} + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \cdots + a_n \right].$$

Hiển nhiên rằng

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \left[\frac{a_0}{z^n} + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{z} \right] = 0.$$

Điều đó có nghĩa rằng: $\forall \varepsilon > 0, \exists R > 0 : \forall z : |z| > R$

$$\Rightarrow \left| \frac{a_0}{z^n} + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{z} \right| < \varepsilon.$$

Ta lấy $\varepsilon < |a_n|$. Do đó khi $|z| > R$ ta có

$$\begin{aligned} \left| a_n + \left(\frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_0}{z^n} \right) \right| &\geq |a_n| - \left| \frac{a_{n-1}}{z} + \frac{a_{n-2}}{z^2} + \cdots + \frac{a_0}{z^n} \right| \\ &> |a_n| - \varepsilon. \end{aligned}$$

Từ đó suy ra rằng

$$|a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n| > |z|^n (|a_n| - \varepsilon), \quad |z| > R$$

và do đó vế phải tăng vô hạn khi $z \rightarrow \infty$ và hiển nhiên khi đó vế trái tăng vô hạn, tức là

$$\lim_{z \rightarrow \infty} [a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n] = \infty.$$

1.3.4 Tính liên tục và liên tục đều

Giả sử hàm $w = f(z)$ được cho trên tập hợp $D \subset \overline{\mathbb{C}}$.

Định nghĩa 1.3.5. 1. Hàm $f(z)$ được gọi là *liên tục* (hay \mathbb{C} - *liên tục*) tại điểm $z_0 \in D$ nếu

$$f(z_0) \neq \infty \quad \text{và} \quad \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0), \quad z \in D.$$

2. Nếu hàm $f(z)$ liên tục tại mọi điểm $z \in D$ thì hàm $f(z)$ được gọi là *liên tục trên tập hợp* D .

Tập hợp mọi hàm liên tục trên tập hợp $D \subset \mathbb{C}$ được ký hiệu là $\mathcal{C}(D)$.

Định nghĩa 1.3.5 còn có thể phát biểu dưới dạng tương đương sau đây. Hàm $f(z)$ được gọi là *liên tục* tại điểm $z_0 \in D$ nếu $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon, z_0) > 0$:

$$\forall z \in \{|z - z_0| < \delta(\varepsilon, z_0)\} \quad (1.28)$$

thì

$$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon. \quad (1.29)$$

Tương tự như vậy, ta cũng có thể nói đến tính \mathbb{C} - liên tục theo một tuyến (hoặc đường cong) và hiểu như sau: những hệ thức (1.28) - (1.29) chỉ được thỏa mãn tại những điểm thuộc tuyến (hoặc đường cong) ấy mà không để ý đến các giá trị của hàm tại các điểm khác.

CÁC VÍ DỤ

1. Hàm $f(z) = \frac{z+a}{z+b}$ ($a \neq b$) liên tục tại mọi điểm $z_0 \neq -b$ trong mặt phẳng z .

Thật vậy, giả sử cho trước $\varepsilon > 0$. Ta đặt $|z_0 + b| = 2d$. Giả sử thêm rằng $|z - z_0| < d$. Ta có

$$\begin{aligned} z + b &= z_0 + b + z - z_0 \\ \Rightarrow |z + b| &\geq ||z_0 + b| - |z - z_0|| > 2d - d = d \\ &\Rightarrow |z + b| > d. \end{aligned}$$

Từ đó suy ra

$$\left| \frac{z+a}{z+b} - \frac{z_0+a}{z_0+b} \right| = \frac{|a-b| |z-z_0|}{|z+b| |z_0+b|} \leq \frac{|a-b| |z-z_0|}{2d^2}.$$

Nếu $\frac{|a-b||z-z_0|}{2d^2} < \varepsilon$ (nghĩa là $|z-z_0| < \frac{2\varepsilon d^2}{|a-b|}$) và $|z-z_0| < d$ thì ta sẽ có

$$\left| \frac{z+a}{z+b} - \frac{z_0+a}{z_0+b} \right| < \varepsilon.$$

Do đó hệ thức

$$\left| \frac{z+a}{z+b} - \frac{z_0+a}{z_0+b} \right| < \varepsilon$$

được thỏa mãn nếu

$$|z-z_0| < \min \left(\frac{1}{2}|z_0+b|, \frac{|z_0+b|^2}{2|a-b|} \right).$$

2. Hàm $f(z) = z^n$, $n \in \mathbb{N}$ liên tục với mọi $z = a$ hữu hạn. Ta có

$$z^n - a^n = (z-a)(z^{n-1} + az^{n-2} + \dots + a^{n-1})$$

do đó

$$|z^n - a^n| \leq |z-a|(|z|^{n-1} + \dots + |a|^{n-1}).$$

Ta xét hình tròn $\{|z| \leq r\}$ và giả sử z và a thuộc hình tròn đó, $|z| < r$, $|a| < r$. Khi đó

$$|z^n - a^n| \leq nr^{n-1}|z-a|.$$

và ta có thể chọn số $\delta(\varepsilon)$ là bằng

$$\min \left(\frac{\varepsilon}{nr^{n-1}}, r+|a| \right).$$

Điều đó chứng tỏ rằng z^n là hàm liên tục $\forall z \in \{|z| \leq r\}$, trong đó r có thể lớn tùy ý. Và như vậy z^n là hàm liên tục $\forall z \in \mathbb{C}$.

Định lý 1.3.2. 1. Hàm $f(z)$ liên tục tại điểm $z_0 = x_0 + iy_0$ khi và chỉ khi $u(x, y)$ và $v(x, y)$ liên tục tại điểm (x_0, y_0) .

2. Nếu hàm $f(z)$ liên tục thì hàm $|f(z)|$ cũng liên tục.

Chứng minh. Trước hết ta lưu ý rằng

$$\left. \begin{array}{l} |u(x, y) - u(x_0, y_0)| \\ |v(x, y) - v(x_0, y_0)| \end{array} \right\} \leq |f(z) - f(z_0)| \leq |u(x, y) - u(x_0, y_0)| + |v(x, y) - v(x_0, y_0)|$$

1. Giả sử hàm $f(z)$ liên tục tại điểm z_0 . Ta có

$$|u(x, y) - u(x_0, y_0)| \leq |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$$

khi $|z - z_0| < \delta$.

Nhưng $|z - z_0| < \delta$ khi đồng thời có $|x - x_0| < \frac{\delta}{\sqrt{2}}$ và $|y - y_0| < \frac{\delta}{\sqrt{2}}$, do đó hàm $u(x, y)$ liên tục. Tương tự $v(x, y)$ liên tục.

Ngược lại, nếu u và v là các hàm liên tục thì hàm f liên tục (bạn đọc có thể suy luận dễ dàng).

2. Phần thứ hai của định lý được suy từ bất đẳng thức

$$||f(z)| - |f(z_0)|| \leq |f(z) - f(z_0)|.$$

□

Từ định lý 1.3.2 suy ra rằng những định lý sơ cấp về các phép tính đối với các hàm liên tục tại một điểm vẫn đúng trong giải tích phức, tính liên tục ở đây là tính \mathbb{C} - liên tục.

Định nghĩa 1.3.6. Hàm $f(z)$ được gọi là *liên tục đều* trên tập hợp $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ nếu

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall z \in D, \forall z' \in D : d(z, z') < \delta(\varepsilon), \\ \Rightarrow |f(z) - f(z')| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Từ tính liên tục đều của $f(z)$ suy ra rằng f là liên tục. Điều khẳng định ngược lại, nói chung là không đúng. Điều đó được chứng tỏ bởi ví dụ sau đây.

Giả sử $f(z) = \frac{1}{z}$ và $D = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$.

Hàm $f(z)$ liên tục trong D , nhưng không liên tục đều trong đó. Thật vậy, giả sử ngược lại: hàm $f(z)$ liên tục đều trong D . Khi đó với $\varepsilon = 1$, phải tồn tại số $\delta = \delta_1 > 0$ sao cho mọi cặp điểm z' và z'' ta có

$$\left| \frac{1}{z'} - \frac{1}{z''} \right| < \varepsilon, \quad 0 < |z' - z''| < \delta_1.$$

Từ dãy số $n = 2, 3, \dots$ ta sẽ chọn số n_0 sao cho

$$\left| \frac{1}{n_0} - \frac{1}{2n_0} \right| < \delta_1.$$

Khi đó, đặt $z' = \frac{1}{n_0}$, $z'' = \frac{1}{2n_0}$ ta thu được

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{z'} - \frac{1}{z''} \right| &= \left| \frac{1}{1/n_0} - \frac{1}{1/2n_0} \right| = n_0 > 1. \\ 0 < |z' - z''| &< \delta_1. \end{aligned}$$

Đó là điều mâu thuẫn.

Tuy nhiên, ta cũng nhận xét rằng hàm đã cho liên tục đều trong miền

$$\tilde{D} = \{z \in \mathbb{C} : 0 < R \leq |z| < 1\}.$$

Thật vậy, với cặp điểm z' và $z'' \in \tilde{D}$ bất kỳ ta có

$$\left| \frac{1}{z'} - \frac{1}{z''} \right| = \frac{|z' - z''|}{|z'| |z''|} \leq \frac{|z' - z''|}{R^2}.$$

Giả sử $\varepsilon > 0$ là số tùy ý. Khi đó nếu lấy $\delta = \varepsilon R^2$, thì từ bất đẳng thức vừa viết suy ra rằng với cặp điểm $z', z'' \in \tilde{D}$ bất kỳ thỏa mãn hệ thức

$$|z' - z''| < \delta \quad (\delta = \varepsilon R^2)$$

ta có

$$\left| \frac{1}{z'} - \frac{1}{z''} \right| < \varepsilon. \quad \text{'đ.p.c.m.}$$

Định nghĩa 1.3.7. Ánh xạ f được gọi là một *đồng phôi* (ánh xạ tôpô) nếu:

1. f đơn điệu;
2. f và f^{-1} liên tục.

CÁC VÍ DỤ

1. Ánh xạ $w = \frac{z}{1+|z|}$ là một phép đồng phôi biến mặt phẳng \mathbb{C} lên hình tròn đơn vị $\{|w| < 1\}$.
2. Ánh xạ

$$w = \frac{2R}{\pi} \left. \begin{array}{l} \frac{z}{|z|} \operatorname{arctg} |z|, \\ w(0) = 0 \end{array} \right\}$$

là một phép đồng phôi biến \mathbb{C} lên hình tròn mở $\{|w| < R\}$.

Về sau ta thường sử dụng các tính chất sau đây của hàm liên tục.

1. Ảnh liên tục của tập hợp compact là tập hợp compact.
2. Ảnh liên tục của tập hợp liên thông là tập hợp liên thông.
3. Giả sử compact $K \subset \overline{\mathbb{C}}$ và f là hàm liên tục trên K . Khi đó
 - a) f bị chặn, nghĩa là $|f(z)| < A, \forall z \in K, A = \text{const}$
 - b) Đạt sup và inf của nó trên K , tức là $\exists z_1, z_2 \in K$ sao cho

$$|f(z)| \leq |f(z_1)|, \quad |f(z)| \geq |f(z_2)|, \quad \forall z \in K.$$

4. Giả sử f liên tục trên tập hợp compact $D \subset \mathbb{C}$. Khi đó f liên tục đều trên D (định lý Cantor trong miền phức).

1.4 Lý thuyết dãy và chuỗi trong miền phức

1.4.1 Giới hạn của dãy điểm

Trong mục 1.1.5 ta đã đề cập đến giới hạn của dãy điểm trong miền phức. Ở đây ta sẽ nói đến giới hạn của dãy một cách cụ thể hơn.

Định nghĩa 1.4.1. 1. Giả sử trong \mathbb{C} cho dãy

$$z_1, z_2, \dots, z_n, \dots \quad (1.30)$$

Điểm $z_0 (\in \mathbb{C})$ được gọi là *giới hạn* của dãy (1.30) nếu $\forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon)$ sao cho $z_n \in U(z_0, \varepsilon) \forall n \geq N$.

Dãy có giới hạn thuộc \mathbb{C} được gọi là dãy *hội tụ*. Dãy không có giới hạn hoặc có giới hạn bằng ∞ được gọi là dãy *phân kỳ*. Trong trường hợp dãy phân kỳ có giới hạn duy nhất là ∞ ta viết

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty. \quad (1.31)$$

Đẳng thức (1.31) có nghĩa là: $\forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon) (N \in \mathbb{N})$: sao cho $z_n \in \overline{CU(0, \varepsilon)}$ với mọi $n \geq N$.

Sự minh họa Riemann đối với các số phức cho phép ta hiểu đẳng thức (1.31) một cách rất trực quan. Thật vậy, theo công thức (1.11), **1.1.8**, ảnh cầu của dãy (1.30) là dãy $\{A_k(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\}$ với các tọa độ:

$$\xi_k = \frac{x_k}{1 + |z_k|^2}, \quad \eta_k = \frac{y_k}{1 + |z_k|^2}, \quad \zeta_k = \frac{|z_k|^2}{1 + |z_k|^2} \quad (*)$$

Từ công thức (*) và các hệ thức $|x_k| \leq |z_k|, |y_k| \leq |z_k|$ ta suy ra rằng dãy $\{A_k\}$ hội tụ đến cực bắc P của mặt cầu Riemann.

Từ định nghĩa giới hạn của dãy suy ra rằng nếu dãy $\{z_n\}$ và $\{z'_n\}$ hội tụ thì dãy $\{z_n \pm z'_n\}; \{z_n \cdot z'_n\} \left\{ \frac{z_n}{z'_n} \right\} (z'_n \neq 0, \lim_{n \rightarrow \infty} z'_n \neq 0)$ hội tụ và:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (z_n \pm z'_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} z'_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} z_n, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (z_n \cdot z'_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} z_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} z'_n, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z_n}{z'_n} &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} z_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} z'_n}. \end{aligned} \right\} \quad (1.32)$$

Việc chứng minh các hệ thức (1.32) không có gì khác biệt với việc chứng minh các điều khẳng định tương ứng trong giải tích thực. (Đề nghị bạn đọc tự thực hiện).

Trong nhiều trường hợp, khi khảo sát sự hội tụ của dãy ta cũng thường sử dụng *tiêu chuẩn Cauchy* đặc trưng cho dãy hội tụ:

Dãy $\{z_n\}$ hội tụ khi và chỉ khi

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon) : \forall m, n \in \mathbb{N} : m, n > N \Rightarrow |z_n - z_m| < \varepsilon.$$

Phép chứng minh định lý này hoàn toàn dựa trên chứng minh định lý “thực” tương ứng. Cũng như trong trường hợp thực, dãy thỏa mãn điều kiện này được gọi là *dãy cơ bản* hay *dãy Cauchy*.

Thông thường việc tìm giới hạn của dãy (1.30) được đưa về tìm giới hạn của dãy các số thực $\{x_n\}$ và $\{y_n\}$. Điều khẳng định này dựa trên cơ sở định lý sau đây:

Định lý 1.4.1. *Giả sử $z_0 = x_0 + iy_0$. Khi đó $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0$ khi và chỉ khi*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y_0.$$

Chứng minh. Thật vậy, kết luận của định lý 1.4.1 được suy trực tiếp từ các bất đẳng thức

$$\begin{aligned} |x - x_0| &\leq |z_n - z_0|, & |y_n - y_0| &\leq |z_n - z_0|; \\ |z_n - z_0| &\leq |x_n - x_0| + |y_n - y_0| \end{aligned}$$

và định nghĩa giới hạn của dãy. □

Nhận xét 1.4.1. Giả sử $z_n = r_n \cdot e^{i\varphi_n}$, trong đó $|r_n| = |z_n|$, $\varphi_n = \arg z_n$. Nếu $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = \rho$ và $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = \alpha$ thì $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \rho e^{i\alpha}$.

Điều kết luận này được suy từ định lý 1.4.1 và hệ thức

$$z_n = r_n(\cos \varphi_n + i \sin \varphi_n).$$

Ví dụ 1. Giả sử $z = x + iy$ là một số phức tùy ý, xác định. Ta sẽ chứng minh rằng dãy

$$a_n = \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \quad \text{có giới hạn.}$$

Ta có:

$$|a_n| = \left| 1 + \frac{z}{n} \right|^n = \left(1 + \frac{2x}{n} + \frac{x^2 + y^2}{n^2} \right)^{n/2},$$

$$\arg a_n = n \arg \left(1 + \frac{z}{n} \right) = n \arctg \frac{\frac{y}{n}}{1 + \frac{x}{n}}.$$

Hiển nhiên rằng

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2x}{n} \right)^{n/2} = e^x$$

và

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \arg a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ny}{n+x} = y.$$

Do đó

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n} \right)^n = e^x (\cos y + i \sin y).$$

1.4.2 Chuỗi số phức và sự hội tụ của nó

Giả sử ta có dãy số phức hoàn toàn xác định và khác ∞ :

$$z_1, z_2, \dots, z_n, \dots, \quad z_n = x_n + iy_n.$$

Biểu thức

$$\sum_{n \geq 1} z_n = z_1 + z_2 + \dots + z_n + \dots \quad (1.33)$$

được gọi là một *chuỗi số trên \mathbb{C}* , còn biểu thức

$$S_n = \sum_{1 \leq k \leq n} z_k \quad (1.34)$$

được gọi là *tổng riêng (thứ n)* của chuỗi (1.33).

Ta có định nghĩa sau đây.

Định nghĩa 1.4.2. Chuỗi (1.33) được gọi là *hội tụ* nếu tồn tại giới hạn hữu hạn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S.$$

Nghĩa là: $\forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon), N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N$

$$\Rightarrow |S_n - S| < \varepsilon.$$

Số S được gọi là tổng của chuỗi (1.33). Nếu $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ không tồn tại hoặc bằng ∞ thì ta nói chuỗi (1.33) *phân kỳ*.

Điều kiện cần đối với sự hội tụ của chuỗi (1.33) thu được từ việc chuyển qua giới hạn đẳng thức

$$S_n - S_{n-1} = z_n$$

và nó có dạng

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0. \quad (1.35)$$

Điều kiện đó chỉ là điều kiện cần chứ không phải là điều kiện đủ: nghĩa là nếu điều kiện (1.35) không được thỏa mãn thì chuỗi không thể hội tụ. Nhưng có những chuỗi (ví dụ $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$) thỏa mãn điều kiện (1.35) nhưng lại phân kỳ.

Để khảo sát sự hội tụ của chuỗi trong \mathbb{C} ta có:

Định lý 1.4.2. Chuỗi số phức $\sum_{n \geq 1} z_n, \quad z_n = x_n + iy_n$ hội tụ khi và chỉ khi các chuỗi

$$\sum_{n \geq 1} x_n; \quad \sum_{n \geq 1} y_n$$

đồng thời hội tụ.

Chứng minh. Thật vậy, ta đặt

$$S_n = \sigma_n + i\tau_n = \sum_{1 \leq k \leq n} x_k + i \sum_{1 \leq k \leq n} y_k.$$

Từ đó suy ra kết luận của định lý. □

Định lý 1.4.2 cho phép ta đưa việc khảo sát sự hội tụ của chuỗi trong miền phức về khảo sát các chuỗi số thực đã quen biết.

Chẳng hạn, bằng cách áp dụng tiêu chuẩn Cauchy cho dãy S_n ta thu được *tiêu chuẩn Cauchy đối với các chuỗi*: Chuỗi số phức (1.33) hội tụ khi và chỉ khi $\forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon) : \forall n > N(\varepsilon)$ và $\forall p \in \mathbb{N} \Rightarrow |S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$. Cùng với việc xét chuỗi (1.33) người ta còn xét chuỗi lập nên từ các môđun của các số hạng của chuỗi ấy

$$\sum_{k \geq 1} |z_k|. \quad (1.36)$$

Vì

$$\left| \sum_{1 \leq k \leq m} z_{N+k} \right| \leq \sum_{1 \leq k \leq m} |z_{N+k}|$$

nên theo tiêu chuẩn hội tụ Cauchy ta kết luận rằng nếu chuỗi (1.36) hội tụ thì chuỗi (1.33) cũng hội tụ.

Định nghĩa 1.4.3. Chuỗi (1.33) được gọi là *hội tụ tuyệt đối* nếu chuỗi (1.36) hội tụ.

Từ tiêu chuẩn hội tụ Cauchy suy ra:

Định lý 1.4.3. Giả sử $z_n = x_n + iy_n$. Chuỗi (1.33) hội tụ tuyệt đối khi và chỉ khi các chuỗi

$$\sum_{n \geq 1} x_n \quad \text{và} \quad \sum_{n \geq 1} y_n$$

đồng thời hội tụ tuyệt đối.

Chứng minh. Thật vậy, điều kết luận của định lý được suy trực tiếp từ bất đẳng thức kép sau đây:

$$\left. \begin{array}{l} |x_n| \\ |y_n| \end{array} \right\} \leq |z_n| \leq |x_n| + |y_n|.$$

□

Giống như chuỗi số thực sự hoán vị tùy ý các số hạng của chuỗi hội tụ tuyệt đối không làm thay đổi tổng của chuỗi.

Nhận xét. Để khảo sát sự hội tụ tuyệt đối của chuỗi (1.33) ta có thể sử dụng tiêu chuẩn hội tụ đã biết đối với các chuỗi với số hạng không âm.

Ví dụ 2. Khảo sát sự hội tụ của chuỗi

$$\sum_{n \geq 1} \frac{n(2+i)^n}{3^n}.$$

Ta xét chuỗi các môđun

$$\sum_{n \geq 1} \frac{n|2+i|^n}{3^n} = \sum_{n \geq 1} \frac{n\sqrt{5}^n}{3^n}.$$

Áp dụng dấu hiệu hội tụ D’Alambert, ta có

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{(n+1)\sqrt{5}^{n+1}}{3^{n+1}} : \frac{n\sqrt{5}^n}{3^n} \right] = \frac{\sqrt{5}}{3} < 1.$$

Vậy chuỗi đã cho hội tụ.

Ví dụ 3. Khảo sát sự hội tụ của chuỗi:

$$\sum_{n \geq 1} \frac{i^n}{n}.$$

Ta có

$$\sum_{n \geq 1} \frac{i^n}{n} = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^k}{2k} + i \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^k}{2k+1}.$$

Vì vậy chuỗi đã cho hội tụ.

Xét chuỗi các môđun

$$\sum_{n \geq 1} \frac{|i|^n}{n} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}.$$

Chuỗi này là chuỗi điều hòa và như ta biết, nó là chuỗi phân kỳ. Do đó chuỗi đã cho hội tụ song không hội tụ tuyệt đối.

Ví dụ 4. Khảo sát sự hội tụ của chuỗi

$$\sum_{n \geq 0} z^n.$$

Ta có $S_n = 1 + z + \dots + z^{n-1}$,

$$S_n = \frac{1 - z^n}{1 - z} \quad \text{khi } z \neq 1.$$

Do đó

$$\left| S_n - \frac{1}{1 - z} \right| = \frac{|z|^n}{|1 - z|},$$

và

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{1 - z} \quad \text{khi } |z| < 1.$$

Khi $|z| > 1$ thì vì

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |z|^n = \begin{cases} 1, & \text{nếu } |z| = 1, \\ \infty, & \text{nếu } |z| > 1 \end{cases}$$

nên chuỗi phân kỳ.

Như vậy, chuỗi $\sum_{n \geq 0} z^n$ hội tụ với $|z| < 1$ và phân kỳ với $|z| \geq 1$.

1.4.3 Dãy và chuỗi hàm

Trong nhiều chứng minh ở nhiều phần của lý thuyết hàm biến phức, người ta sử dụng rất rộng rãi những tính chất đặc biệt của dãy hàm hội tụ. Nhờ những tính chất này mà các chứng minh đó trở nên rất đơn giản và đẹp đẽ.

Giả sử ta có dãy hàm

$$f_1(z), f_2(z), \dots, f_n(z), \dots \quad (1.37)$$

xác định trên tập hợp $D \subset \mathbb{C}$ nào đó.

Dãy (1.37) được gọi là *hội tụ tại điểm* $z_0 \in D$ nếu dãy số $\{f_n(z_0)\}$ hội tụ.
Dãy hàm (1.37) được gọi là *hội tụ trên* D nếu nó hội tụ tại mọi điểm của D .
Trong trường hợp này ta có thể nói đến hàm giới hạn xác định trên D :

$$f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z).$$

Định nghĩa hội tụ của dãy hàm tới hàm giới hạn $f(z)$ có thể phát biểu bằng ngôn ngữ ε, δ .

Định nghĩa 1.4.4. Dãy (1.33) *hội tụ* đến hàm $f(z)$ nếu $\forall \varepsilon > 0$, và với $z \in D$ bất kỳ, tồn tại số tự nhiên $N = N(\varepsilon)$ sao cho với mọi $n \geq N$ ta có

$$|f(z) - f_n(z)| < \varepsilon.$$

Cần nhấn mạnh rằng: với một $\varepsilon > 0$, số hiệu N mà khi $n > N$ thì có $|f(z) - f_n(z)| < \varepsilon$ có thể khác nhau với các điểm khác nhau của D .

Định nghĩa 1.4.5. Dãy hàm (1.37) được gọi là *hội tụ đều* trên D đến hàm $f(z)$ nếu:

$\forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon)$ (chỉ phụ thuộc vào ε): $\forall n \geq N \forall z \in D \Rightarrow |f(z) - f_n(z)| < \varepsilon$.

Dễ dàng chứng minh rằng dãy hàm (1.37) hội tụ đều đến hàm $f(z)$ khi và chỉ khi $\forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon) : \forall m, n \geq N, \forall z \in D \Rightarrow |f_m(z) - f_n(z)| < \varepsilon$.

Nếu dãy hàm (1.37) hội tụ đều đến hàm $f(z)$ trên D thì nó hội tụ đến hàm $f(z)$. Điều ngược lại nói chung là không đúng.

Ví dụ 5. Khảo sát sự hội tụ của dãy hàm

$$f(z) = \frac{1 - z^n}{1 - z}; \quad n = 1, 2, \dots, \quad |z| < 1. \quad (1.38)$$

Trong ví dụ 3 mục trước, ta đã chứng minh rằng dãy (1.38) hội tụ trong hình tròn đơn vị và hàm giới hạn là

$$f(z) = \frac{1}{1 - z}.$$

Ta sẽ chứng minh rằng dãy (1.38) hội tụ đến $f(z)$ không đều trong hình tròn đơn vị.

Thật vậy, nếu dãy (1.38) hội tụ đều đến hàm $f(z)$ thì theo định nghĩa suy ra rằng:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon) : \forall n > N, \forall z \in \{|z| < 1\}$$

ta có:

$$\left| \frac{1}{1-z} - \frac{1-z^n}{1-z} \right| = \left| \frac{z^n}{1-z} \right| < \varepsilon.$$

Đặc biệt là khi $\varepsilon = 1$, với mọi z thực:

$$z = x; \quad 0 < x < 1$$

ta có:

$$\frac{x^n}{1-x} < 1, \quad n = 2, 3, \dots$$

Nhưng ta nhận xét rằng

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n}{1-x} = \infty \quad (n = 2, 3, \dots)$$

Hai hệ thức này không thể đồng thời thỏa mãn. Do đó dãy hàm hội tụ không đều.

Dễ dàng chứng minh rằng dãy (1.38) hội tụ đều trong hình tròn $\{|z| \leq R < 1\}$. Thật vậy, trong hình tròn này ta có:

$$\left| \frac{z^n}{1-z} \right| \leq \frac{R^n}{1-R}$$

và với $\varepsilon > 0$ tùy ý, số hiệu N được xác định từ bất đẳng thức

$$\frac{R^n}{1-R} < \varepsilon, \quad n > \left\lceil \frac{\ln[\varepsilon(1-R)]}{\ln R} \right\rceil$$

Do đó, nếu đặt

$$N = N(\varepsilon) = E\left(\left\lceil \frac{\ln[(1-R)]}{\ln R} \right\rceil\right),$$

trong đó $E(t)$ là phần nguyên của t , thì với $n > N(\varepsilon)$ và với mọi $z \in \{|z| \leq R < 1\}$ ta có:

$$\left| \frac{1}{1-z} - \frac{1-z^n}{1-z} \right| < \varepsilon.$$

Định lý 1.4.4. *Giả sử các hàm $f_n(z)$ của dãy (1.37) là những hàm liên tục trên D và dãy hàm (1.37) hội tụ đều trên D đến hàm $f(z)$. Khi đó hàm $f(z)$ liên tục trên D .*

Chứng minh. Thật vậy, giả sử $z_0 \in D$; với $\varepsilon > 0$ cho trước, tồn tại số hiệu n sao cho với mọi $z \in D$ ta có

$$|f_n(z) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Tiếp theo, tồn tại số $\delta > 0$ sao cho với mọi $z \in D \cap U(z_0, \delta)$ ta có:

$$|f_n(z) - f_n(z_0)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Do đó với mọi $z \in D \cap U(z_0, \delta)$ ta có

$$\begin{aligned} |f(z) - f(z_0)| &\leq |f(z) - f_n(z)| + |f_n(z) - f_n(z_0)| + |f_n(z_0) - f(z_0)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Bây giờ ta xét chuỗi hàm:

$$f_0(z) + f_1(z) + \cdots + f_n(z) + \cdots = \sum_{n \geq 0} f_n(z). \quad (1.39)$$

Vì tại điểm $z_0 \in D$ cố định thì chuỗi (1.39) là một chuỗi số nên theo định nghĩa, sự hội tụ của nó đến tổng $S(z_0)$ có nghĩa là

$\forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon, z_0) : \forall n \geq N$ ta có

$$|S(z_0) - S_n(z_0)| < \varepsilon, \quad S_n(z_0) = \sum_{0 \leq k \leq n} f_k(z_0).$$

Chuỗi (1.39) được gọi là *chuỗi hội tụ trên tập D* nếu nó hội tụ tại mọi điểm $z \in D$. Hiển nhiên tổng S của nó là hàm của biến z , xác định tại mọi điểm $z \in D$.

Định nghĩa 1.4.6. Chuỗi hàm (1.39) được gọi là *hội tụ đều* trên tập hợp D nếu:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon) : \forall n \geq N, \forall z \in D \text{ và} \\ \forall p \in \mathbb{N} \Rightarrow |S_{n+p}(z) - S_n(z)| < \varepsilon.$$

Từ định nghĩa này ta suy ra rằng chuỗi hội tụ đều trên tập hợp D thì hội tụ tại mọi điểm của tập hợp đó. Điều ngược lại nói chung không đúng.

Ví dụ 6. Xét chuỗi

$$1 + z + z^2 + \dots + z^n + \dots \quad (1.40)$$

Trong ví dụ 3 ở mục trước ta đã chứng minh rằng chuỗi (1.40) hội tụ trong hình tròn đơn vị và tổng của nó bằng $\frac{1}{1-z}$.

Tuy nhiên, chuỗi (1.40) hội tụ không đều trong hình tròn đơn vị. Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned} |S_{n+p}(z) - S_n(z)| &= |z^{n+1}(1 + z + \dots + z^{n-1})| \\ &= \frac{|z|^{n+1}|1 - z^p|}{|1 - z|} \geq \frac{|z|^{n+1}(1 - |z|^p)}{|1 - z|}. \end{aligned}$$

Ta lấy số $n \in \mathbb{N}$ tùy ý và đặt $p = n$, $z_n = \frac{n}{n+1}$. Khi đó:

$$\begin{aligned} |S_{2n}(z_n) - S(z_n)| &\geq \frac{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} \left[1 - \left(\frac{n}{n+1}\right)^p\right]}{\frac{1}{1+n}} \\ &= n \cdot \frac{1 - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-p}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \rightarrow \infty \quad (\text{khi } n \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

Như vậy, với n đủ lớn tùy ý, tồn tại những số $p (= n)$ và những điểm $z_n \in \{|z| < 1\}$ mà: $|S_{2n}(z_n) - S(z_n)|$ lớn bao nhiêu tùy ý.

Từ đó suy rằng chuỗi đã cho hội tụ không đều trong hình tròn đơn vị.

Weierstrass đã chứng minh dấu hiệu đơn giản về sự hội tụ đều sau đây.

Định lý 1.4.5. Giả sử bắt đầu từ số hiệu k_0 nào đó và với mọi $z \in D$:

1. $|f_n(z)| \leq a_n, \quad a_n \geq 0, \quad \forall n \geq k_0.$
 2. Chuỗi số $\sum_{n \geq 1} a_n$ hội tụ.
- (1.41)

Khi đó chuỗi (1.39) hội tụ đều (và tuyệt đối) trên tập hợp D .

Chứng minh. Vì chuỗi (1.41) hội tụ nên $\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \geq k_0$ sao cho

$$\left| \sum_{1 \leq k \leq m} a_{N+k} \right| < \varepsilon \text{ với } m \in \mathbb{N} \text{ bất kỳ.}$$

Do đó ta có

$$\left| \sum_{1 \leq k \leq m} f_{N+k}(z) \right| \leq \sum_{1 \leq k \leq m} |f_{N+k}(z)| \leq \sum_{1 \leq k \leq m} a_{N+k} < \varepsilon.$$

Vì vậy, theo định nghĩa, chuỗi (1.39) hội tụ đều trên D . □

Định lý 1.4.6. Giả sử chuỗi (1.39) hội tụ đều trên D và mỗi số hạng của nó đều là những hàm liên tục trên D . Khi đó tổng $S(z)$ của chuỗi cũng là hàm liên tục trên D .

Chứng minh. Giả sử $z_0 \in D$ là điểm cố định bất kỳ. Ta cần chứng minh rằng:

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(z_0, \varepsilon),$ sao cho $\forall z \in D \cap U(z_0, \delta)$ đều có:

$$|S(z) - S(z_0)| < \varepsilon.$$

Thật vậy, vì chuỗi (1.39) hội tụ đều nên

$\forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon), N \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|S(z) - S_N(z)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad z \in D.$$

Vì hàm $S_N(z)$ liên tục nên với $\varepsilon > 0$ đã chọn, tồn tại số $\delta = \delta(z_0, \varepsilon)$ sao cho

$$|S_N(z) - S_N(z_0)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall z \in D \cap U(z_0, \delta).$$

Từ các hệ thức này thu được:

$$\begin{aligned} |S(z) - S(z_0)| &\leq |S(z) - S_N(z)| + |S_N(z) - S_N(z_0)| + |S(z_0) - S_N(z_0)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Lớp các chuỗi hàm đơn giản nhất và là công cụ có ý nghĩa đặc biệt quan trọng để nghiên cứu các hàm biến phức là các chuỗi lũy thừa.

1.4.4 Chuỗi lũy thừa

Chuỗi hàm dạng

$$\sum_{k \geq 0} a_k (t - z_0)^k, \quad (1.42)$$

trong đó $z_0, a_k, k = 0, 1, 2, \dots$ là những số phức cho trước, được gọi là *chuỗi lũy thừa*. Số z_0 được gọi là tâm của chuỗi, $a_k, k = 0, 1, 2, \dots$ được gọi là những hệ số của chuỗi lũy thừa.

Nếu đặt $z = t - z_0$ thì có thể viết chuỗi (1.42) dưới dạng

$$\sum_{n \geq 0} a_n z^n. \quad (1.43)$$

Đầu tiên ta sẽ nghiên cứu cấu trúc của tập hợp điểm hội tụ của chuỗi (1.43). Hiển nhiên tập hợp đó không trống vì trong mọi trường hợp chuỗi (1.43) hội tụ tại điểm $z = 0$ với tổng bằng a_0 .

Tồn tại những chuỗi lũy thừa với tập hợp điểm hội tụ gồm một điểm $z = 0$ duy nhất. Chẳng hạn, ta xét chuỗi

$$1 + \sum_{n \geq 1} n^n \cdot z^n.$$

Với mỗi $z \neq 0$ cố định, tồn tại số hiệu n_0 mà bắt đầu từ đó $|nz| > 2$ và do đó $|n^n \cdot z^n| > 2^n$. Vì vậy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^n \cdot z^n \neq 0$$

tức là điều kiện cần cho sự hội tụ không thỏa mãn.

Bây giờ ta xét chuỗi

$$1 + \sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n^n}.$$

Với mỗi z hữu hạn, bắt đầu từ số hiệu n_0 xác định, ta có

$$\left| \frac{z}{n} \right| \leq \frac{1}{2}$$

tức là

$$\left| \frac{z^n}{n^n} \right| < \frac{1}{2^n}.$$

Vì chuỗi $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{2^n}$ hội tụ nên chuỗi lũy thừa hội tụ trong toàn mặt phẳng.

Tồn tại những chuỗi lũy thừa hội tụ tại những điểm này, phân kỳ tại những điểm khác. Chẳng hạn chuỗi đã xét trong Ví dụ 6 hội tụ trong hình tròn và phân kỳ ngoài hình tròn đơn vị.

Để nghiên cứu cấu trúc của tập hợp điểm hội tụ, ta chứng minh:

Định lý 1.4.7. (N. Abel) *Nếu chuỗi lũy thừa (1.43) hội tụ tại điểm $z_0 \neq 0$ thì nó hội tụ tuyệt đối trong hình tròn $\{|z| < |z_0|\}$.*

Chứng minh. Vì chuỗi (1.43) hội tụ tại điểm z_0 nên

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n z_0^n = 0.$$

Nhưng mọi dãy hội tụ đều bị chặn, nên tồn tại hằng số dương M sao cho

$$|a_n z_0^n| \leq M, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Để ý đến bất đẳng thức này ta có:

$$|a_n z^n| = \left| a_n z_0^n \cdot \left(\frac{z}{z_0} \right)^n \right| \leq M \cdot q^n; \quad \left| \frac{z}{z_0} \right| = q < 1.$$

Vì chuỗi số $\sum_n q^n$ hội tụ nên từ đó suy ra kết luận của định lý. \square

Hệ quả 1.4.1. Nếu chuỗi (1.43) phân kỳ tại điểm $z = z_1$ thì nó cũng phân kỳ tại mọi điểm z mà $|z| > |z_1|$.

Chứng minh. Thật vậy, nếu chuỗi (1.43) hội tụ tại điểm \tilde{z} , $|\tilde{z}| > |z_1|$ thì theo định lý Abel, chuỗi đó hội tụ trong hình tròn $\{|z| < |\tilde{z}|\}$ và do đó cả tại điểm z_1 . \square

Trên cơ sở định lý Abel, ta sẽ chứng minh rằng tồn tại số $R \geq 0$ sao cho chuỗi (1.43) hội tụ khi $|z| < R$ và phân kỳ khi $|z| > R$.

Hiển nhiên, đối với các chuỗi lũy thừa hội tụ tại một điểm duy nhất $z = 0$ hoặc trên toàn mặt phẳng thì số R tương ứng bằng 0 hoặc ∞ . Vấn đề còn lại là xét trường hợp khi chuỗi (1.43) hội tụ tại những điểm này và phân kỳ tại những điểm kia.

Ta có định lý sau đây:

Định lý 1.4.8. Miền hội tụ của chuỗi lũy thừa (1.43) là hình tròn

$$S = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$$

với bán kính R xác định, phụ thuộc vào các hệ số của chuỗi. Số R gọi là bán kính hội tụ của chuỗi.

Chứng minh. Theo định lý Abel, trên nửa trục dương \mathbb{R}^+ tồn tại đoạn thẳng $[a_1, b_1]$ mà a_1 là điểm hội tụ, b_1 là điểm phân kỳ của chuỗi (1.43). Do đó, chuỗi (1.43) sẽ hội tụ khi $|z| < a_1$ và phân kỳ khi $|z| > b_1$. Vấn đề còn lại là xét sự hội tụ trong vành tròn

$$V_1 = \{a_1 < |z| < b_1\}.$$

Ta ký hiệu $[a_2, b_2]$ là nửa đoạn thẳng của $[a_1, b_1]$ mà đầu mút bên trái là điểm hội tụ của chuỗi (1.43), còn đầu mút bên phải là điểm phân kỳ. Theo định lý Abel, chuỗi (1.43) hội tụ khi $|z| < a_2$ và phân kỳ khi $|z| > b_2$ và ta tiếp tục xét sự hội tụ trong vành

$$V_2 = \{a_2 < |z| < b_2\} \subset V_1.$$

Bằng cách tiếp tục quá trình này vô hạn lần, ta thu được một dãy đoạn thẳng lồng nhau

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots \supset [a_n, b_n] \supset \cdots$$

với $b_n - a_n \rightarrow 0$ khi $n \rightarrow \infty$.

Theo nguyên lý Cantor về các đoạn thẳng lồng nhau, tồn tại suy nhất một điểm a thuộc mọi đoạn thẳng $[a_n, b_n]$ $n = 1, 2, \dots$

Ta đặt $R = a$ và chứng minh rằng chuỗi (1.43) hội tụ trong hình tròn $\{|z| < R\}$ và phân kỳ ở ngoài hình tròn đó.

Thật vậy, giả sử $|z| < R$. Vì a_n là dãy tăng dần đến R nên tìm được a_p sao cho:

$$|z| < a_p < a = R.$$

Do đó, theo định lý Abel, chuỗi hội tụ tại điểm z . Bây giờ giả sử $z' : |z'| > R$. Vì b_n là dãy giảm dần đến R nên tìm được số b_q sao cho

$$|z'| > b_q > R.$$

Do đó chuỗi phân kỳ tại điểm z' . Định lý hoàn toàn được chứng minh. \square

Bây giờ, từ các hệ số a_n của chuỗi ta thành lập dãy:

$$|a_1|, |a_2|^{1/2}, \dots, |a_n|^{1/n}, \dots$$

và đặt

$$\rho = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n}.$$

(Hiển nhiên số ρ bao giờ cũng tồn tại, có thể bằng ∞)

Định lý 1.4.9. (Cauchy - Hadamard) Bán kính hội tụ R của chuỗi lũy thừa (1.43) được tính theo công thức

$$R = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n}}, \quad (1.44)$$

trong đó ta đặt $R = 0$ nếu $\rho = +\infty$ và $R = +\infty$ nếu $\rho = 0$.

Công thức (1.44) được gọi là công thức *Cauchy - Hadamard*.

Chứng minh. Ta lưu ý rằng giới hạn trên của dãy số thực u_n được định nghĩa như sau:

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{p \rightarrow \infty} \left(\sup_{n \geq p} u_n \right).$$

Để chứng minh công thức (1.44) ta sẽ sử dụng dấu hiệu hội tụ của Cauchy. Đặt $u_n = |a_n| \cdot r^n$. Khi đó $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} u_n^{1/n} = r \cdot \left(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n} \right)$, và chuỗi $\sum_n u_n = \sum_n |a_n| r^n$ hội tụ khi $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} u_n^{1/n} = r \cdot \left(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n} \right) < 1$, tức là $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n} < \frac{1}{r}$.

Từ đó suy ra kết luận của định lý. \square

Định lý 1.4.10. *Chuỗi lũy thừa (1.43) hội tụ đều trong hình tròn đóng $\{|z| \leq r < R\}$, trong đó R là bán kính hội tụ của chuỗi.*

Chứng minh. Vì điểm $z = r$ nằm trong hình tròn hội tụ nên chuỗi số $\sum_n |a_n| r^n$ hội tụ. Ngoài ra, khi $|z| \leq r$ ta có

$$|a_n z^n| \leq |a_n| r^n, \quad \forall n,$$

và vì vậy kết luận của định lý được suy từ dấu hiệu hội tụ của Weierstrass. \square

Hệ quả 1.4.2. *Tổng của chuỗi lũy thừa là hàm liên tục tại mọi điểm z nằm trong hình tròn hội tụ của nó.*

Để kết thúc mục này, ta xét các phép toán số học cơ bản đối với các chuỗi lũy thừa.

Giả sử bán kính hội tụ R của chuỗi (1.43) khác 0 và r là số tùy ý thỏa mãn điều kiện

$$0 < r < R.$$

Ta có định lý sau đây (gọi là định lý về tính duy nhất của chuỗi lũy thừa).

Định lý 1.4.11. Nếu tổng $S(z)$ của chuỗi lũy thừa (1.43) bằng 0 khắp nơi trong hình tròn $\{|z| < r\}$ thì $a_n = 0, \forall n = 0, 1, 2, \dots$

Chứng minh. Ta chứng minh định lý bằng phương pháp phản chứng. Giả sử a_m là hệ số $\neq 0$ đầu tiên của chuỗi (1.43). Khi đó

$$\begin{aligned} S(z) &= a_m z^m + a_{m+1} z^{m+1} + \dots = z^m [a_m + a_{m+1} z + \dots] \\ &= z^m \sum_{k \geq 0} a_{m+k} z^k = z^m \cdot S_0(z). \end{aligned}$$

Theo giả thiết, tổng $S_0(z)$ của chuỗi $\sum_{k \geq 0} a_{m+k} z^k$ bằng 0 khắp nơi trong vành tròn $\{|z| < r\} \setminus \{0\}$. Ta đặt:

$$\tilde{S}_0(z) = \sum_{k \geq 1} a_{m+k} z^k.$$

Hàm $\tilde{S}_0(z)$ liên tục khi $|z| \leq r$ và $\tilde{S}_0(0) = 0$. Do đó tồn tại số $\delta > 0$ sao cho khi $|z| \leq \delta$ ta có:

$$|\tilde{S}_0(z)| = \left| \sum_{k \geq 1} a_{m+k} z^k \right| < \frac{1}{2} |a_m|$$

và từ đó:

$$\begin{aligned} |S_0(z)| &= |a_m + \tilde{S}_0(z)| = \left| a_m + \sum_{k \geq 1} a_{m+k} z^k \right| \\ &\geq |a_m| - \left| \sum_{k \geq 1} a_{m+k} z^k \right| \geq |a_m| - \frac{1}{2} |a_m| = \frac{1}{2} |a_m|. \end{aligned}$$

Nhưng điều này mâu thuẫn với đẳng thức

$$S_0(z) = 0, \quad \forall z \in \{0 < |z| \leq \delta\}.$$

□

Bây giờ giả sử $R_1 > 0$, $R_2 > 0$ là bán kính hội tụ tương ứng của chuỗi lũy thừa

$$S_1(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n, \quad (1.45)$$

$$S_2(z) = \sum_{n \geq 0} b_n z^n. \quad (1.46)$$

Đặt $\rho = \min(R_1, R_2)$. Vì hình tròn $\{|z| < \rho\}$ là hình tròn hội tụ chung của các chuỗi (1.45), (1.46) nên tại mỗi điểm z của nó ta có thể nói về tổng và hiệu của hai chuỗi (1.45) và (1.46).

$$\sum_{n \geq 0} a_n z^n + \sum_{n \geq 0} b_n z^n = \sum_{n \geq 0} (a_n \pm b_n) z^n = \sum_{n \geq 0} c_n z^n. \quad (1.47)$$

Theo định lý Abel, bán kính hội tụ R của chuỗi (1.47) lớn hơn hoặc bằng ρ , $R \geq \rho$.

Thật vậy, ta đặt

$$\gamma_n = |a_n| + |b_n|.$$

khi đó $|c_n| < \gamma_n$. Nếu $r < \rho$ thì các chuỗi

$$\sum |a_n| r^n \quad \text{và} \quad \sum |b_n| r^n$$

đều hội tụ và do đó $\sum_{n \geq 0} \gamma_n r^n < +\infty$. Do đó chuỗi $\sum_{n \geq 0} (a_n \pm b_n) z^n$ hội tụ.

Vậy mọi $r < \rho$ đều bé hơn bán kính hội tụ của chuỗi (1.47). Do đó $R \geq \rho$.

Vì hai chuỗi (1.45) và (1.46) hội tụ tuyệt đối khi $|z| < \rho$ nên có thể nhân hai chuỗi với nhau và thu được chuỗi lũy thừa

$$\sum_{n \geq 0} d_n z^n, \quad d_n = \sum_{0 \leq k \leq n} a_k \cdot b_{n-k}. \quad (1.48)$$

Ta sẽ chứng minh rằng bán kính hội tụ của chuỗi (1.48) không bé hơn ρ . Thật vậy, ta đặt

$$\delta_n = \sum_{0 \leq k \leq n} |a_k| \cdot |b_{n-k}|.$$

Khi đó $|d_n| \leq \delta_n$.

Nếu $r < \rho$ thì các chuỗi $\sum_{n \geq 0} |a_n| r^n$ và $\sum_{n \geq 0} |b_n| r^n$ hội tụ và do đó

$$\sum_{n \geq 0} \delta_n \cdot r^n = \left(\sum_{p \geq 0} |a_p| r^p \right) \left(\sum_{q \geq 0} |b_q| r^q \right) < +\infty.$$

Như vậy, không một số r nào, $r < \rho$ có thể vượt quá bán kính hội tụ của chuỗi (1.48). Do đó bán kính hội tụ của chuỗi (1.48) lớn hơn hoặc bằng ρ .

Ta nhận xét rằng khi $b_0 \neq 0$, ta có thể xét thương của hai chuỗi (1.45) và (1.46) và thu được chuỗi lũy thừa $\sum_{n \geq 0} \tilde{d}_n z^n$. Do $b_0 \neq 0$ nên các hệ số \tilde{d}_n của chuỗi đó được xác định đơn trị từ các hệ thức truy hồi sau:

$$\sum_{0 \leq k \leq n} b_k \tilde{d}_{n-k} = a_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

và có thể chứng minh rằng khi $b_0 \neq 0$ thì bán kính hội tụ của chuỗi

$$\sum_{n \geq 0} \tilde{d}_n z^n$$

là khác 0 nếu $R_1 \neq 0$, $R_2 \neq 0$.

1.4.5 Sự hội tụ đều trên từng compắc

Giả sử D là miền của mặt phẳng phức \mathbb{C} . Ta sẽ ký hiệu $\mathcal{C}(D)$ là tập hợp các hàm liên tục trong D . Trong lý thuyết các hàm chỉnh hình, sự hội tụ đều của dãy (chuỗi) trên mỗi tập hợp đóng và bị chặn thuộc D là rất quan trọng. Ta sẽ gọi sự hội tụ đó là *sự hội tụ đều trên từng compắc* của miền D để phân biệt với sự hội tụ đều trong miền D .

Định nghĩa 1.4.7. Giả sử cho dãy hàm $f_n \in \mathcal{C}(D)$. Dãy hàm f_n được gọi là dãy *hội tụ đều trên từng compắc* của miền D nếu với mọi compắc $K \subset D$ dãy các hạn chế $\{f_n|_K\}$ hội tụ đều.

Ta nhận xét rằng mọi dãy hội tụ đều trong miền D thì hội tụ đều trên từng compắc của miền đó. Điều khẳng định ngược lại, nói chung, là không đúng.

Ta sẽ chứng tỏ điều đó bằng ví dụ sau đây. Ta xét dãy hàm

$$f_n(z) = 1 + z + \cdots + z^n.$$

1. Dãy đã cho hội tụ trong hình tròn đơn vị (xem ví dụ 4 mục trước).
2. Dãy f_n hội tụ đều trên từng compắc của hình tròn đơn vị. Thật vậy, giả sử $K \subset U = \{|z| < 1\}$ là compắc nào đó và $\delta > 0$ là khoảng cách từ K đến ∂U . Khi đó, với mọi $z \in K$ ta có

$$|z| \leq 1 - \delta,$$

và

$$\begin{aligned} |f_{n+p} - f_n| &= |z^{n+1} + \cdots + z^{n+p}| = \left| z^{n+1} \frac{1 - z^{p+1}}{1 - z} \right| \\ &\leq |z|^{n+1} \frac{1 + |z|^{p+1}}{1 - |z|} \leq (1 - \delta)^{n+1} \frac{2}{\delta}. \end{aligned}$$

Hiển nhiên rằng đại lượng $(1 - \delta)^{n+1} \frac{2}{\delta}$ dần đến 0 khi $n \rightarrow \infty$ nên có thể làm cho nó bé hơn $\varepsilon > 0$ khi $n \geq N(\varepsilon)$.

3. Dãy hàm đã cho không hội tụ đều trong hình tròn đơn vị. Điều này được chứng minh trong ví dụ 6 mục trước.

Định lý 1.4.12. *Nếu dãy hàm $f_n \in \mathcal{C}(D)$ hội tụ đều trên từng compắc của miền D thì hàm giới hạn $f \in \mathcal{C}(D)$.*

Chứng minh. Nếu dãy hàm liên tục f_n hội tụ đều trên từng compắc K thì hàm giới hạn f có hạn chế $f|_K$ trên từng compắc $K \subset D$ liên tục. Vì D là miền $\subset \mathbb{C}$ nên mọi điểm $z_0 \in D$ đều có lân cận compắc $\overline{U(z_0, \varepsilon)}$ nằm trong D . Từ đó suy ra tính liên tục của hàm f trong D . \square

Ta sẽ chứng minh tiêu chuẩn sau đây về sự hội tụ đều trên từng compắc.

Định lý 1.4.13. *Dãy hàm $f_n \in \mathcal{C}(D)$ hội tụ đều trên từng compắc của miền D khi và chỉ khi đối với mỗi điểm $z_0 \in D$ tồn tại lân cận mà tại đó dãy hội tụ đều.*

Chứng minh. 1. *Điều kiện cần.* Điều kiện cần ở đây là hiển nhiên vì nếu $\{|z - z_0| \leq \rho\} \subset D$ thì dãy phải hội tụ đều trên đó và vì vậy nó sẽ hội tụ đều trong lân cận $\{|z - z_0| < \rho\}$.

2. *Điều kiện đủ.* Ta sẽ chứng minh điều kiện đủ bằng phương pháp phản chứng. Giả sử điều kiện của định lý được thỏa mãn nhưng dãy hội tụ không đều trên compact $K \subset D$ nào đó. Khi đó cần phải tồn tại số dương ε_0 , những số tự nhiên n_k ($n_k < n_{k+1}$) lớn bao nhiêu tùy ý và những điểm $z_k \in K$ sao cho

$$|f(z_k) - f_{n_k}(z_k)| \geq \varepsilon_0,$$

trong đó f là hàm giới hạn của dãy.

Từ dãy điểm $\{z_k\}$ ta có thể chọn dãy con $\{z'_k\}$ hội tụ đến điểm $z_0 \in K$ nào đó. Vì z_0 là điểm của miền D nên theo điều kiện của định lý, tồn tại lân cận $U(z_0, \delta) \subset D$ mà trong đó dãy hội tụ đều. Do đó tại mọi điểm $z \in U(z_0, \delta)$ ta có

$$|f(z) - f_n(z)| < \varepsilon_0$$

với n đủ lớn.

Mặt khác, từ giả thiết của chúng ta suy ra rằng tồn tại những chỉ số n_k , lớn tùy ý sao cho tại các điểm z'_k nằm trong $U(z_0, \delta)$ (mọi điểm z'_k bắt đầu từ một số hiệu nào đó đều thuộc $U(z_0, \delta)$), ta có bất đẳng thức ngược lại

$$|f(z'_k) - f_{n_k}(z'_k)| \geq \varepsilon_0.$$

Từ mâu thuẫn đó suy ra rằng giả thiết của chúng ta là không đúng. Định lý được chứng minh. \square

Nhận xét. 1. Từ sự phân tích trên đây suy ra rằng tính hội tụ đều của dãy hàm trên từng compact có đòi hỏi yếu hơn so với tính hội tụ đều trong miền D .

2. Vì có thể xem dãy hàm như là dãy các tổng riêng của một chuỗi nên các kết quả đã trình bày trên đây được chuyển sang cho các chuỗi hội tụ đều một cách tự nhiên.

1.5 Hàm $\arg z$

1.5.1 Tính liên tục của hàm $\arg z$

Giả sử

$$\Gamma = \{0, \infty e^{i\alpha}\}$$

là nhất cắt theo tia lập với hướng dương của trục thực góc α và đi từ gốc tọa độ đến điểm ∞ , và $D_\alpha = \overline{\mathbb{C}} \setminus \Gamma$. Rõ ràng D_α là miền đơn liên. Khi đó hàm $\varphi(z) = \arg z$ được xác định một cách đơn trị bởi hệ phương trình $x = r \cos \varphi(z)$, $y = r \sin \varphi(z)$ (vì $\alpha < \varphi(z) < \alpha + 2\pi$, $\forall z \in D_\alpha$).

Ví dụ 1. Giả sử $D_\alpha = \overline{\mathbb{C}} \setminus \Gamma(0, \infty e^{i\alpha})$. Khi đó hàm argumen $\varphi = \arg z$ là hàm liên tục $\forall z \in D_\alpha$.

Chứng minh. Thật vậy, ta cố định điểm $z_0 \in \overline{\mathbb{C}} \setminus (0, \infty e^{i\alpha})$ tùy ý và giả sử $\varepsilon > 0$ cho trước. Ta xét δ -lân cận thuộc D_α của điểm z_0 :

$$U(z_0, \delta) = \{z \in D_\alpha : |z - z_0| < \delta\}.$$

Dễ dàng thấy rằng $\forall z \in U(z_0, \delta)$ ta có

$$|\varphi(z) - \varphi(z_0)| < \arcsin \frac{\delta}{|z_0|}.$$

Nhưng vì khi $x > 0 \Rightarrow \arcsin x < 2x$ nên

$$|\varphi(z) - \varphi(z_0)| < \frac{2\delta}{|z_0|} < \varepsilon, \quad \forall z \in U(z_0, \delta).$$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh. \square

Ta lưu ý rằng trên nhất cắt Γ hàm $\varphi(z)$ có gián đoạn. Hiệu các giá trị giới hạn của $\varphi(z)$ khi z dần đến điểm trên bờ bên phải và bờ bên trái là bằng 2π .

Trong trường hợp nhất cắt dạng phức tạp hơn, $\varphi(z)$ không thể xác định nhờ bất đẳng thức $\alpha < \varphi < \alpha + 2\pi$ được. Không đi sâu vào chi tiết, ta chỉ lưu ý rằng trong trường hợp này $\varphi(z)$ cũng được xác định đơn trị và là một hàm liên tục của z .

1.5.2 Số gia của argumen dọc theo đường cong

Định nghĩa 1.5.1. Giả sử đường cong γ không đi qua gốc tọa độ $z = 0$. Khi đó góc quay của vector z khi điểm z chuyển động theo đường cong γ từ điểm đầu đến điểm cuối được gọi là số gia của argumen z dọc theo đường cong γ và ký hiệu là $\Delta_\gamma \arg z$.

Ví dụ 2

1. Nếu γ là đoạn thẳng với điểm đầu $1-i$ và điểm cuối $1+i$ thì $\Delta_\gamma \arg z = \frac{\pi}{2}$.
2. Nếu $\gamma^+ = \{z : |z| = 1, \operatorname{Im} z \geq 0\}$ với hướng ngược chiều kim đồng hồ thì $\Delta_{\gamma^+} \arg z = \pi$.
3. Nếu $\gamma^- = \{z : |z| = 1, \operatorname{Im} z \leq 0\}$ với hướng cùng chiều kim đồng hồ thì $\Delta_{\gamma^-} \arg z = -\pi$.

Bây giờ ta nêu ra công thức biểu diễn đối với $\Delta_\gamma \arg z$. Vì

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi,$$

nên

$$dx = \cos \varphi dr - r \sin \varphi d\varphi,$$

$$dy = \sin \varphi dr + r \cos \varphi d\varphi.$$

Do đó

$$rd\varphi = -\sin \varphi dx + \cos \varphi dy$$

và

$$d\varphi = d(\arg z) = \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2}. \quad (1.49)$$

Bây giờ ta xét $\int_\gamma d(\arg z)$. Tích phân này bằng hiệu giữa giá trị argumen z tại điểm đầu và điểm cuối của đường cong γ , nghĩa là bằng $\Delta_\gamma \arg z$. Như

vậy

$$\Delta_{\gamma} \arg z = \int_{\gamma} \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2}. \quad (1.50)$$

Số gia $\Delta_{\gamma} \arg z$ có các tính chất sau đây.

(I) Giả sử $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ (tức là $D = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < \infty\}$) và γ_1, γ_2 là những đường cong đồng luân với nhau ($\gamma_1 \approx \gamma_2$) trong D . Khi đó

$$\Delta_{\gamma_1} \arg z = \Delta_{\gamma_2} \arg z. \quad (1.51)$$

Chứng minh. Giả sử γ_1 và γ_2 đi từ điểm A đến điểm B . Đặt $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$. Vì $\gamma_1 \approx \gamma_2$ trong D và

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{-y}{x^2 + y^2} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right)$$

nên⁵ tích phân của $\frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2}$ lấy theo đường cong nối điểm A với điểm B không phụ thuộc vào dạng của đường cong. Do đó

$$\int_{\gamma_1} \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2} = \int_{\gamma_2} \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2}. \quad (1.52)$$

Từ (1.50) và (1.52) suy ra (1.51). \square

Đặc biệt từ tính chất (I) rút ra

(II) Nếu $\gamma \subset D$ là đường cong đóng và $\gamma \approx 0$ trong D thì

$$\Delta_{\gamma} \arg z = 0. \quad (1.53)$$

Nhận xét. 1. Ta lưu ý rằng đẳng thức (1.51) được thỏa mãn không phải với γ_1 và γ_2 bất kỳ (với các đầu mút chung) trong D . Thật vậy, với γ^+ và γ^- đã xét trong các ví dụ 2) và 3) ta có $\Delta_{\gamma_1} \arg z \neq \Delta_{\gamma_2} \arg z$. Hiển nhiên trong trường hợp này γ_1 không đồng luân với γ_2 trong D .

⁵Xem G. M. Fichtengon. Cơ sở giải tích toán học, tập II, trang 230-232. Nhà xuất bản Đại học và Trung học Chuyên nghiệp, Hà Nội 1972.

2. Cũng như vậy, đẳng thức (1.53) được thỏa mãn không phải đối với đường cong đóng γ bất kỳ trong D . Chẳng hạn nếu $\gamma = \{|z| = 1\}$ có hướng ngược chiều kim đồng hồ thì $\Delta_\gamma \arg z = 2\pi$. Hiển nhiên ở đây γ không đồng luân với 0.

(III) Nếu đường cong γ không đi qua điểm $z = 0$ thì

$$\Delta_\gamma \arg z = -\Delta_{\gamma^-} \arg z. \quad (1.54)$$

Đẳng thức (1.54) được suy từ (1.50) và tính định hướng của tích phân đường.

(IV) Nếu đường cong γ không đi qua điểm $z = 0$ và được biểu diễn dưới dạng $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$, trong đó γ_1, γ_2 là các cung của nó thì

$$\Delta_{\gamma_1 \cup \gamma_2} \arg z = \Delta_{\gamma_1} \arg z + \Delta_{\gamma_2} \arg z.$$

Điều đó được suy từ (1.50) và tính cộng tính của tích phân đường.

1.5.3 Nhánh đơn trị liên tục của hàm $\arg z$

Giả sử miền $D \subset \mathbb{C}$. Theo định nghĩa, hàm đơn trị liên tục $f(z)$ trong miền D được gọi là *một nhánh đơn trị liên tục* của hàm đa trị $F(z)$ nếu tại mọi điểm $z \in D$ giá trị $f(z)$ trùng với một trong các giá trị của $F(z)$ tại điểm đó. Nếu đối với hàm $F(z)$ tồn tại dù chỉ một nhánh đơn trị liên tục trong miền D cho trước thì người ta nói rằng $F(z)$ *cho phép tách các nhánh đơn trị liên tục* trong D .

Về sau ta thường xét đến miền $D_0 = \overline{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{R}^-$ (tức là trường hợp nhất cắt đi theo bán trục thực âm). Giả sử z_0 là điểm cố định tùy ý thuộc D , $\gamma(z_0, z) \subset D_0$ là đường cong đơn liên tục đi từ z_0 đến z , $z \in D_0$ (nếu $z = z_0$ thì $\gamma(z_0, z)$ là đường cong đóng). Tại điểm z_0 ta cố định một trong các giá trị của $\arg z_0$ và ký hiệu $\varphi_0 = \arg z_0$. Ta xét hàm

$$\varphi_*(z) = \begin{cases} \arg z_0, & z = z_0, \\ \Delta_{\gamma(z_0, z)} \arg z, & z \in D, z \neq z_0. \end{cases} \quad (1.55)$$

Hàm $\varphi_*(z)$ có các tính chất sau đây:

1. $\varphi_*(z)$ là hàm đơn trị trong D_0 . Thật vậy, giả sử $\gamma_1(z_0, z)$ và $\gamma_2(z_0, z)$ là hai đường cong đơn liên tục thuộc D_0 . Vì cả γ_1 và γ_2 đều không bao điểm 0 nên từ tính chất (I) và (II) suy ra $\Delta_{\gamma_1(z_0, z)} \arg z = \Delta_{\gamma_2(z_0, z)} \arg z$. Do đó $\varphi_*(z)$ đơn trị tại điểm $z \in D_0$ bất kỳ. Do đó nó đơn trị trong D_0 .

2. $\varphi_*(z)$ là hàm liên tục trong D_0 . Chứng minh hết như trong n°1 của mục này.

Từ điều vừa chứng minh suy ra rằng với giá trị được chọn φ_0 , hàm $\varphi_*(z)$ là một nhánh đơn trị liên tục của hàm đa trị $\arg z$ và nhánh đơn trị liên tục của hàm $\arg z$ trong D_0 hoàn toàn được xác định bởi giá trị của nó tại một điểm $z_0 \in D_0$.

Tiếp theo ta xét các hàm

$$\varphi_m(z) = \begin{cases} \arg z_0 + 2m\pi, & z = z_0, m \in \mathbb{Z}, \\ \Delta_{\gamma(z_0, z)} \arg z, & z \in D, z \neq z_0. \end{cases} \quad (1.56)$$

Đó là những nhánh đơn trị liên tục của hàm đa trị $\arg z$ trong D_0 (khi $m = 0$ ta có $\varphi_0(z) = \varphi_*(z)$).

Từ công thức (1.56) ta thấy rằng để hàm (1.56) là đơn trị trong miền D nào đó, điều kiện cần và đủ là số gia của acgumen $\Delta_\gamma \arg z$ không phụ thuộc vào đường cong γ , nghĩa là đối với đường cong đóng $\tilde{\gamma} \subset D$ bất kỳ ta có $\Delta_{\tilde{\gamma}} \arg z = 0$.

Nói cách khác, miền D không chứa những đường cong đóng Jordan bao gốc tọa độ. Ví dụ về một miền như vậy là

$$D_\alpha = \overline{\mathbb{C}} \setminus [0, \alpha e^{i\alpha}].$$

Ta đã nói rõ vì sao khi miền $D \supset \{z = 0\}$ thì trong D không thể tách nhánh đơn trị liên tục của hàm $\arg z$.

Giả sử ngược lại, trong D tồn tại nhánh đơn trị liên tục $\tilde{\varphi}(z)$ của hàm $\arg z$. Giả sử tại điểm cố định $z_0 \in D$ ta có $\tilde{\varphi}(z_0) = \arg z_0 + 2k_0\pi$, $k_0 \in \mathbb{Z}^+$ là số cố định nào đó. Giả sử γ là đường cong đóng qua z_0 và bao gốc tọa độ $z = 0$. Khi điểm z vòng quanh γ theo hướng dương từ điểm z_0 thì

$\tilde{\varphi}(z)$ sẽ biến thiên liên tục và khi z trở về điểm z_0 thì $\tilde{\varphi}(z)$ sẽ nhận giá trị $2k_0\pi + \arg z + 2\pi = \tilde{\varphi}(z) + 2\pi$. Điều đó có nghĩa là nhánh được tách $\varphi(z)$ không đơn trị. Điều đó chứng tỏ rằng trong miền D bất kỳ chứa gốc tọa độ không thể tách nhánh đơn trị liên tục của hàm $\arg z$.

1.6 Bài tập

1. Cho định thức

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & z_{11} & \dots & z_{1n} & \bar{z}_{11} & \dots & \bar{z}_{1n} \\ a_2 & z_{21} & \dots & z_{2n} & \bar{z}_{21} & \dots & \bar{z}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{2n+1} & z_{2n+1,1} & \dots & z_{2n+1,n} & \bar{z}_{2n+1,1} & \dots & \bar{z}_{2n+1,n} \end{vmatrix}$$

trong đó a_i là số thực, z_{ij} là số phức. Chứng minh rằng D_n là số thực nếu n là số chẵn và D_n là số thuần ảo nếu n là số lẻ.

2. Chứng minh các đẳng thức sau:

- 1) $|a| + |b| = \left| \frac{1}{2}(a+b) - \sqrt{ab} \right| + \left| \frac{1}{2}(a+b) + \sqrt{ab} \right|$, $a, b \in \mathbb{C}$.
- 2) $|ab+1|^2 + |a-b|^2 = (1+|a|^2)(1+|b|^2)$, $a, b \in \mathbb{C}$.
- 3) $|a+b|^2 + |a-b|^2 = 2(|a|^2 + |b|^2)$, $a, b \in \mathbb{C}$.
- 4) Nếu $a = Re^{i\alpha}$, $b = Re^{i\beta}$, $0 \leq \alpha < \beta < 2\pi$ thì $b-a = |b-a|e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}$.
- 5) Nếu $|z_1| = |z_2| = |z_3|$ thì $\arg \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1} = \frac{1}{2} \arg \frac{z_2}{z_1}$.

3. Chứng minh rằng nếu $0 \leq \arg z < 2\pi$ và $-\frac{\pi}{2} < \arctg x \leq \frac{\pi}{2}$ là những giá trị chính thì

$$\arg(a+ib) = \begin{cases} \arctg \frac{b}{a} & \text{nếu } a > 0, b > 0, \\ \arctg \frac{b}{a} + 2\pi & \text{nếu } a > 0, b < 0, \\ \arctg \frac{b}{a} + \pi & \text{nếu } a < 0. \end{cases}$$

4. Chứng minh các bất đẳng thức sau

$$1) \left| \frac{a}{|a|} - 1 \right| \leq |\arg z|, \quad a \in \mathbb{C}.$$

$$2) |a + b| \geq \frac{1}{2}(|a| + |b|) \left| \frac{a}{|a|} + \frac{b}{|b|} \right|, \quad a, b \in \mathbb{C}, a \neq 0, b \neq 0.$$

$$3) |z - 1| \leq ||z| - 1| + |z| |\arg z|, \quad z \in \mathbb{C}.$$

4) Giả sử $a \in \mathbb{C}$ và $|a| < 1$. Chứng minh rằng các bất đẳng thức $|z| \leq 1$, $\left| \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right| \leq 1$ là tương đương với nhau và trong cả hai trường hợp dấu bằng đạt được với cùng một giá trị z .

$$5) \text{ Nếu } \operatorname{Re} z \geq 0 \text{ thì } |1 + z| \geq \frac{1 + |z|}{\sqrt{2}}.$$

5. Chứng minh rằng

$$\sqrt{a + ib} = \pm \left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}} + i \operatorname{sign} b \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}} \right).$$

6. Gọi $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{n-1}$ là các căn bậc n của đơn vị,

$$\varepsilon_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}$$

và giả sử p là số nguyên dương. Tính tổng

$$S = \varepsilon_0^p + \varepsilon_1^p + \dots + \varepsilon_{n-1}^p$$

trong hai trường hợp p là bội của n và p không là bội của n .

[Trả lời: $S = n$ nếu p là bội của n ; $S = 0$ nếu p không là bội của n].

7. Chứng minh rằng phương trình đường tròn đi qua ba điểm cho trước z_1, z_2 và z_3 không nằm trên một đường thẳng có thể biểu diễn dưới dạng

$$\begin{vmatrix} z\bar{z} & z & \bar{z} & 1 \\ z_1\bar{z}_1 & z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ z_2\bar{z}_2 & z_2 & \bar{z}_2 & 1 \\ z_3\bar{z}_3 & z_3 & \bar{z}_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

8. Xác định quỹ tích những điểm $z \in \mathbb{C}$ thỏa mãn các điều kiện

$$\operatorname{Im} \left(\frac{z-a}{z-b} \right)^n = 0, \quad n \in \mathbb{N}, a, b \in \mathbb{C}.$$

9. Với giá trị nào của tham số a các đường tròn trên mặt phẳng phức sau đây sẽ tương ứng với đường tròn lớn trên mặt cầu Riemann:

1. $|z - a| = a, \quad a > 0;$
2. $\left|z + \frac{a}{2}\right| = a, \quad a > 0;$
3. $|z - i| = a, \quad a > 0;$
4. $|z - 2ai| = a, \quad a > 0.$

[*Trả lời:* 1) $a = \infty$; 2) $a = \frac{2}{\sqrt{3}}$; 3) $a = \sqrt{2}$; 4) không tồn tại giá trị a nào].

10. Chứng minh rằng hai điểm $M(z_1)$ và $M(z_2)$ không trùng với hai cực Nam và Bắc của mặt cầu Riemann là đối kính với nhau khi và chỉ khi các điểm z_1 và z_2 liên hệ với nhau bởi hệ thức $z_1 z_2 = -1$.

11. Hãy mô tả hình học các điểm z trên mặt phẳng phức thỏa mãn các điều kiện:

1. $d(z, 0) < R, \quad 0 < R < 1;$
2. $d(z, \infty) < R, \quad 0 < R < 1;$
3. $d(z, i) > \frac{1}{\sqrt{2}};$
4. $\frac{1}{2} < d(z, 1) < \frac{1}{\sqrt{2}},$

trong đó d là khoảng cách cầu.

[*Trả lời:* 1) Hình tròn với tâm $z = 0$ và bán kính $\frac{R}{\sqrt{1-R^2}}$; 2) Phần ngoài hình tròn với tâm $z = 0$ và bán kính $\frac{1}{R}\sqrt{1-R^2}$; 3) Nửa mặt phẳng nằm ở phía trên trục thực; 4) Nửa mặt phẳng nằm ở bên phải trục ảo cắt bỏ hình tròn với tâm $z = 2$ và bán kính $\sqrt{5}$].

12. Tìm ảnh trên mặt cầu Riemann của họ đường thẳng song song trên mặt phẳng phức \mathbb{C} qua phép chiếu nổi.

Chi 'dẫn. Giả sử xét họ đường thẳng song song có phương trình là $y = kx + b, \quad k = \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{const.}$ Từ công thức phép chiếu nổi thu được

$\eta = k\xi + b(1 - \zeta)$ và do vậy

$$\begin{aligned} k\xi - \eta - b\zeta &= -b, \\ \xi^2 + \eta^2 + \left(\zeta - \frac{1}{2}\right)^2 &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Đó là phương trình đường tròn qua điểm $P(0, 0, 1)$.

13. Chứng minh rằng trong phép chiếu nổi, các đường tròn trên mặt cầu Riemann tương ứng với các đường tròn hoặc đường thẳng trên mặt phẳng. Những đường tròn nào trên mặt cầu sẽ tương ứng với đường thẳng trên mặt phẳng.

Chỉ dẫn. Xét đường tròn trên mặt cầu Riemann

$$\begin{aligned} A\xi + B\eta + C\zeta + D &= 0, \\ \xi^2 + \eta^2 + \left(\zeta - \frac{1}{2}\right)^2 &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Từ phương trình này và các công thức của phép chiếu nổi hãy rút ra phương trình tương ứng

$$(D + C)(x^2 + y^2) + Ax + By = -D.$$

Từ đó suy ra đpcm.

14* Giả sử cho dãy a, a_0, a_1, \dots và $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. Chứng minh rằng

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k = a.$$

15* Chứng minh rằng $\forall z \in \mathbb{C}$ và m nguyên dương ta có

$$\left| a^z - \left(1 + \frac{z}{m}\right)^m \right| \leq e^{|z|} - \left(1 + \frac{|z|}{m}\right)^m \leq \frac{|z|^2 e^{|z|}}{2m}.$$

16* Nếu $0 < a_0 < a_1 < \dots < a_n$ thì các nghiệm của phương trình

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

nằm ngoài miền $|z| \leq 1$.

17* Giả sử các nghiệm α_k ($k = 1, 2, \dots, n$) của đa thức

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n \quad (a_0 \neq 0)$$

nằm trong miền $\{|z| \leq r\}$ và các nghiệm β^k , $k = 1, 2, \dots, n$ của đa thức

$$Q(z) = b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_n \quad (b_0 \neq 0)$$

nằm trong miền $\{|z| \geq r + 2\}$.

Chứng minh rằng các nghiệm của đa thức $P(z) + Q(z)$ nằm trong miền $\{|z| \geq 1\}$ nếu $|a_0| \leq |b_0|$.

18* Chứng minh rằng hàm

$$w = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0,$$

trong đó a_0, a_1, \dots, a_n là những hằng số, $a_1 \neq 0$ là đơn điệu trong miền $|z| < r$ nếu r thỏa mãn điều kiện

$$|a_1| - 2|a_2|r - \dots - (n-1)|a_{n-1}|r^{n-2} - n|a_n|r^{n-1} > 0.$$

Chương 2

Hàm chỉnh hình

2.1	Hàm khả vi	106
2.1.1	Hàm \mathbb{R}^2 - khả vi	106
2.1.2	Đạo hàm theo phương	108
2.1.3	Hàm \mathbb{C} - khả vi	110
2.1.4	Mối liên hệ giữa \mathbb{C} - khả vi và \mathbb{R}^2 - khả vi	114
2.1.5	Hàm chỉnh hình	115
2.1.6	Không gian các hàm chỉnh hình	121
2.2	Một số hàm chỉnh hình sơ cấp	122
2.2.1	Đa thức và hàm hữu tỷ	122
2.2.2	Hàm $w = z^n$ và $z = \sqrt[n]{w}$, $n \in \mathbb{N}$	122
2.2.3	Hàm e^z	124
2.2.4	Hàm lôgarit	126
2.2.5	Hàm lũy thừa z^α , $\alpha \in \mathbb{R}$	130
2.2.6	Các hàm sơ cấp khác	131
2.2.7	Nhánh chỉnh hình của hàm đa trị	134
2.3	Hàm chỉnh hình và ánh xạ bảo giác	138

2.3.1	Ý nghĩa hình học của argumen của đạo hàm . . .	138
2.3.2	Ý nghĩa hình học của môđun đạo hàm	140
2.3.3	Ánh xạ bảo giác	141
2.3.4	Ánh xạ liên tục và ánh xạ chỉnh hình	143
2.4	Các đẳng cấu sơ cấp	146
2.4.1	Đẳng cấu phân tuyến tính	147
2.4.2	Ánh xạ $w = e^z$ và $z = \log w$	160
2.4.3	Hàm Jukovski	164
2.4.4	Các đẳng cấu sơ cấp khác	172
2.4.5	Một số ví dụ	175
2.5	Bài tập	183

Sự thu hẹp tập hợp các hàm biến phức bằng điều kiện \mathbb{C} - khả vi sẽ đưa đến lớp các hàm chỉnh hình. Định nghĩa tính \mathbb{C} - khả vi của hàm biến phức sẽ được trình bày hoàn toàn tương tự như định nghĩa tính khả vi trong giải tích thực. Tuy có sự “giống nhau” bề ngoài đó, giữa hai khái niệm này tồn tại những sự khác nhau rất cốt yếu mà ta sẽ thấy rõ trong chương II này.

2.1 Hàm khả vi

2.1.1 Hàm \mathbb{R}^2 - khả vi

Giả sử D là miền của mặt phẳng \mathbb{R}^2 và $f(x, y)$ là hàm giá trị thực hoặc phức xác định trong D , $z_0 = x_0 + iy_0 \in D$.

Ta có định nghĩa sau đây.

Định nghĩa 2.1.1. Hàm f được gọi là \mathbb{R}^2 - khả vi tại điểm $(x_0, y_0) \in D$ nếu tồn tại hàm tuyến tính $Ah + Bk$ của các biến thực h và k sao cho với h và k đủ bé số gia của f thỏa mãn hệ thức

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = Ah + Bk + \varepsilon(h, k)\rho,$$

trong đó A, B thực hoặc phức, $\rho = \sqrt{h^2 + k^2}$ và $\varepsilon(h, k) \rightarrow 0$ khi $\rho \rightarrow 0$.

Nếu f là hàm \mathbb{R}^2 - khả vi tại điểm $z_0 = x_0 + iy_0 \in D$ thì các hằng số A và B (thực hoặc phức) được xác định duy nhất và tương ứng bằng

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \quad B = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

và biểu thức

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k \quad (2.1)$$

được gọi là *vi phân* của hàm f tại điểm (x_0, y_0) .

Bằng cách sử dụng ký hiệu có tính chất truyền thống đối với h và k : $h = dx$, $k = dy$, từ (2.1) ta có

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)dy.$$

Ta lưu ý rằng nếu các đạo hàm riêng tồn tại trong một lân cận nào đó của điểm (x_0, y_0) và liên tục tại điểm ấy thì f là hàm \mathbb{R}^2 - khả vi tại điểm đó. Hàm f có các đạo hàm riêng liên tục trong miền D được gọi là *khả vi liên tục* trong miền đó.

Bây giờ ta xét vi phân

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy. \quad (2.2)$$

Đối với các hàm $z = x + iy$ và $\bar{z} = x - iy$ ta có

$$dz = dx + idy, \quad d\bar{z} = dx - idy$$

và do đó

$$dx = \frac{1}{2}(dz + d\bar{z}), \quad dy = \frac{1}{2i}(dz - d\bar{z}). \quad (2.3)$$

Thế (2.3) vào (2.2) ta thu được hệ thức

$$df = \frac{1}{z} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right) dz + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right) d\bar{z}.$$

Bằng cách đặt

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right) \quad (2.4)$$

ta có

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = i \left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right)$$

và có thể viết biểu thức vi phân của hàm \mathbb{R}^2 - khả vi dưới dạng

$$df = \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \cdot d\bar{z}. \quad (2.5)$$

Định lý 2.1.1. *Phép biểu diễn vi phân (2.5) của hàm \mathbb{R}^2 - khả vi f là duy nhất, tức là nếu có*

$$df = Adz + Bd\bar{z} \quad \text{thì} \quad A = \frac{\partial f}{\partial z}; \quad B = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}.$$

Chứng minh. Vì $dz = dx + idy$, $d\bar{z} = dx - idy$ nên

$$df = (A + B)dx + i(A - B)dy.$$

Từ đó thu được

$$A + B = \frac{\partial f}{\partial x}; \quad i(A - B) = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Giải hệ phương trình này ta thu được điều phải chứng minh. \square

2.1.2 Đạo hàm theo phương

Giả sử $f(z)$ là hàm \mathbb{R}^2 - khả vi tại điểm $z_0 \in D$ và Δf là số gia của nó tại điểm z_0 ứng với $\Delta z = \Delta r e^{i\alpha}$.

Ta thành lập tỷ số $\frac{\Delta f}{\Delta z}$ và xét giới hạn của nó khi $\Delta z \rightarrow 0$ sao cho

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \alpha = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} (\arg \Delta z) = \varphi$$

trong đó φ là một số cố định cho trước.

Định nghĩa 2.1.2. Giới hạn của tỷ số $\frac{\Delta f}{\Delta z}$ khi $\Delta z \rightarrow 0$ mà $\varphi = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} (\arg \Delta z)$ được gọi là đạo hàm của hàm f theo phương φ tại điểm z_0 .

Đạo hàm theo phương φ được ký hiệu là $\frac{\partial f}{\partial z_\varphi}$ và như vậy

$$\frac{\partial f}{\partial z_\varphi} = \lim_{\substack{\varphi = \text{const} \\ \Delta z \rightarrow 0}} \frac{\Delta f}{\Delta z}.$$

Ta có định lý sau đây:

Định lý 2.1.2. Giả sử f là hàm \mathbb{R}^2 - khả vi. Khi đó tập hợp các giá trị đạo hàm theo phương tại điểm z_0 cho trước lập thành đường tròn với tâm tại điểm $\frac{\partial f}{\partial z}$ và bán kính bằng $\left| \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right|$.

Chứng minh. Theo giả thiết ta có f là hàm \mathbb{R}^2 - khả vi, nên

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial z} \Delta z + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \Delta \bar{z} + o(\Delta z), \quad (2.6)$$

trong đó $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{o(\Delta z)}{\Delta z} = 0$ khi $\Delta z \rightarrow 0$. Do đó

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} e^{-2i\alpha} + \varepsilon(\Delta z),$$

trong đó $\varepsilon(\Delta z) = \frac{o(\Delta z)}{\Delta z}$, và ta thu được

$$\frac{\partial f}{\partial z_\varphi} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} e^{-2i\varphi}. \quad (2.7)$$

Công thức (2.7) chứng tỏ rằng các giá trị đạo hàm của hàm f theo phương tại điểm z_0 lấp đầy đường tròn với tâm tại điểm $\frac{\partial f}{\partial z}$ và bán kính bằng $\left| \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right|$. \square

Trường hợp đặc biệt quan trọng là trường hợp khi đạo hàm theo mọi phương trùng nhau. Khi đó, đường tròn đã nói trong định lý 2.1.2 sẽ suy biến thành một điểm $\frac{\partial f}{\partial z}(z_0)$.

2.1.3 Hàm \mathbb{C} - khả vi

Giả sử D là miền của mặt phẳng phức \mathbb{C} và f là hàm biến phức $z = x + iy$ xác định trong D . Ta có định nghĩa quan trọng sau đây:

Định nghĩa 2.1.3. Hàm f được gọi là \mathbb{C} - khả vi tại điểm $z_0 \in D$ nếu tồn tại giới hạn

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

và ta nói rằng hàm f có đạo hàm theo biến phức tại điểm z_0 và ký hiệu là $f'(z_0)$ hay $\frac{df}{dz}(z_0)$:

$$f'(z_0) = \frac{df(z_0)}{dz} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}. \quad (2.8)$$

Định nghĩa 2.1.3 đòi hỏi rằng giới hạn (2.8) phải tồn tại đối với mọi cách cho z dần đến z_0 . Nói chính xác hơn, hệ thức (2.8) có nghĩa rằng: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sao cho khi $0 < |h| < \delta$ thì bất đẳng thức

$$\left| \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} - f'(z_0) \right| < \varepsilon \quad (2.9)$$

được thỏa mãn. Như vậy ta đòi hỏi rằng khi $h \rightarrow 0$ (tức là $z \rightarrow z_0$) theo bất cứ đường nào tỷ số

$$\frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

phải dần tới cùng một giới hạn.

Từ hệ thức (2.9) cũng suy ra rằng nếu hàm $f(z)$ có đạo hàm tại điểm z_0 thì nó liên tục tại điểm đó. Điều khẳng định ngược lại là không đúng.

Từ định nghĩa đạo hàm (2.8) và các tính chất của giới hạn trong miền phức suy rằng các quy tắc cơ bản để tính đạo hàm của tổng, tích và thương

của hai hàm. của hàm hợp và hàm ngược đối với các hàm biến thực đều được bảo toàn đối với các hàm biến phức.

Bây giờ ta chuyển sang xét vấn đề tự nhiên là: tính \mathbb{C} - khả vi đã nêu tương ứng với tính chất đơn giản nào của các hàm $u(x, y)$ và $v(x, y)$ là phần thực và phần ảo của hàm $f(z)$.

Định lý 2.1.3. *Giả sử hàm*

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

là \mathbb{C} - khả vi tại điểm $z = x + iy$. Khi đó tại điểm (x, y) hàm $u(x, y)$ và $v(x, y)$ có các đạo hàm riêng theo biến x và y thỏa mãn điều kiện

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x}.\end{aligned}\tag{2.10}$$

Các hệ thức (2.10) được gọi là các điều kiện Cauchy - Riemann.

Chứng minh. Giả sử hàm $w = f(z)$ xác định trong miền $D \subset \mathbb{C}$ và có đạo hàm tại điểm $z \in D$:

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}.\tag{2.11}$$

Như vậy với mọi cách cho $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ dần đến 0 giới hạn (2.11) phải tồn tại và đều bằng một giá trị là $f'(z)$. Do đó giới hạn ấy phải tồn tại trong hai trường hợp riêng sau

a) $\Delta z = \Delta x + i0 = \Delta x$ và $\Delta x \rightarrow 0$.

b) $\Delta z = 0 + i\Delta y = i\Delta y$ và $\Delta y \rightarrow 0$.

Trong trường hợp thứ nhất ta có

$$\begin{aligned}f'(z) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} + i \frac{v(x + \Delta x, y) - v(x, y)}{\Delta x} \right] \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} + i \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x + \Delta x, y) - v(x, y)}{\Delta x} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x, y).\end{aligned}\tag{2.12}$$

Trong trường hợp thứ hai:

$$\begin{aligned}
 f'(z) &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \left[\frac{u(x, y + \Delta y) - u(x, y)}{i\Delta y} + i \frac{v(x, y + \Delta y) - v(x, y)}{i\Delta y} \right] \\
 &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{u(x, y + \Delta y) - u(x, y)}{i\Delta y} + \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{v(x, y + \Delta y) - v(x, y)}{\Delta y} \\
 &= -i \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) + \frac{\partial v}{\partial y}(x, y).
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

Từ (2.12) và (2.13) ta thu được

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} \Leftrightarrow \left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned} \right\}$$

Định lý được chứng minh. \square

Rõ ràng là các hệ quả thu được từ tính \mathbb{C} - khả vi là ấn tượng hơn nhiều so với các hệ quả thu được từ tính \mathbb{C} - liên tục. Ngoài việc các hàm $u(x, y)$ và $v(x, y)$ có các đạo hàm riêng cấp 1, các đạo hàm này còn phải liên hệ với nhau bởi các phương trình vi phân (2.10).

Như vậy, thậm chí nếu $u(x, y)$ và $v(x, y)$ có các đạo hàm riêng cấp 1 thì nói chung hàm $u + iv$ không phải là hàm khả vi của z .

Từ đó, các hệ thức Cauchy - Riemann (2.10) lập thành điều kiện cần để hàm $f(z)$ là \mathbb{C} - khả vi. Tuy nhiên đó không phải là điều kiện đủ. Ta xét một vài ví dụ.

Ta xét hàm $f(z) = \sqrt{|xy|}$. Hàm này triệt tiêu trên cả hai trục và do đó khi $z = 0$ ta có

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

và điều kiện Cauchy - Riemann thỏa mãn. Nhưng hàm $f(z)$ không \mathbb{C} khả vi tại điểm $z = 0$. Thật vậy, ta có $\frac{f(z)}{z} = \frac{\sqrt{|xy|}}{x + iy}$ và nếu $x = \alpha r$, $y = \beta r$ trong

đó α, β là những hằng số còn $r > 0$ thì hệ thức đó dần tới $\frac{\sqrt{|\alpha\beta|}}{\alpha + i\beta}$ khi $r \rightarrow 0$.

Như vậy giới hạn không duy nhất và hàm không \mathbb{C} - khả vi.

Ví dụ này chứng tỏ rằng hàm $f(z)$ có thể không \mathbb{C} - khả vi nếu hệ tỷ số $\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ dần đến giới hạn dọc theo hai đường thẳng vuông góc. Và nói chung, hàm f có thể không \mathbb{C} - khả vi cho dù tỷ số trên dần đến giới hạn theo một lớp các đường đặc biệt nào đó. Chẳng hạn, ta xét hàm

$$f(z) = \begin{cases} \frac{xy^2(x + iy)}{x^4 + y^4} & \text{nếu } z \neq 0, \\ 0 & \text{nếu } z = 0. \end{cases}$$

Dễ dàng thấy rằng $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z) - f(0)}{z} = 0$ nếu $z \rightarrow 0$ dọc theo bất cứ đường thẳng nào qua gốc tọa độ. Nhưng trên đường cong $x = y^2$ ta có

$$\frac{f(z) - f(0)}{z} = \frac{y^4}{y^4 + y^4} = \frac{1}{2}.$$

Do đó hàm $f(z)$ không \mathbb{C} - khả vi tại điểm $z = 0$.

Các hệ thức (2.10) sẽ là điều kiện đủ để $f(z)$ là \mathbb{C} - khả vi nếu giả thiết thêm rằng cả bốn đạo hàm riêng cấp 1 của hàm $u(x, y)$ và $v(x, y)$ đều tồn tại trong lân cận điểm (x, y) và liên tục tại điểm (x, y) . Ta có

Định lý 2.1.4. *Nếu tại điểm (x, y) các hàm $u(x, y)$ và $v(x, y)$ có các đạo hàm riêng liên tục thỏa mãn các điều kiện Cauchy - Riemann thì hàm biến phức $f(z) = u + iv$ có đạo hàm tại điểm $z = x + iy$.*

Chứng minh. Giả sử các hàm u và v có các đạo hàm riêng liên tục tại điểm (x, y) . Khi đó u và v khả vi tại điểm đó, tức là số gia Δu và Δv tương ứng với các số gia Δx và Δy có thể biểu diễn dưới dạng

$$\Delta u = u(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + o_1(\rho), \rho \rightarrow 0$$

$$\Delta v = v(x + \Delta x, y + \Delta y) - v(x, y) = \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y + o_2(\rho), \rho \rightarrow 0$$

trong đó $\rho = |\Delta z| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$, $o_1(\rho)$ và $o_2(\rho)$ ($\rho \rightarrow 0$) là những vô cùng bé cấp cao hơn so với ρ , tức là

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{o_j(\rho)}{\rho} = 0, \quad j = 1, 2.$$

Do đó, nếu lưu ý rằng $o_1(\rho) + io_2(\rho) = o(\rho)$ ($\rho \rightarrow 0$) ta có

$$\begin{aligned}\frac{\Delta f}{\Delta z} &= \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x + i\Delta y} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + i\left(\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y\right)}{\Delta x + i\Delta y} + \frac{o(\rho)}{\Delta z} \\ &= \frac{\frac{\partial u}{\partial x}(\Delta x + i\Delta y) + \frac{\partial v}{\partial x}(-\Delta y + i\Delta x)}{\Delta x + i\Delta y} + \frac{o(\rho)}{\rho} \cdot \frac{\rho}{\Delta z} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{o(\rho)}{\rho} \cdot \frac{\rho}{\Delta z}.\end{aligned}$$

Vì $\left|\frac{\rho}{\Delta z}\right| = \frac{\rho}{|\Delta z|} = 1$ và $\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{o(\rho)}{\rho} = 0$ nên từ đó suy rằng

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$

tức là tại điểm z hàm f có đạo hàm $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$. □

2.1.4 Mối liên hệ giữa \mathbb{C} - khả vi và \mathbb{R}^2 - khả vi

Các điều kiện Cauchy - Riemann (2.10) có thể biểu diễn dưới dạng gọn gàng hơn nếu ta sử dụng khái niệm đạo hàm hình thức trong 1. và 2.

Từ định lý 2.1.2 suy ra rằng nếu f là hàm \mathbb{C} - khả vi tại điểm $z_0 \in D$ thì đạo hàm theo mọi phương tại điểm đó đều trùng nhau và bằng $\frac{\partial f}{\partial z}$.

Chính xác hơn ta có

Định lý 2.1.5. *Hàm \mathbb{R}^2 - khả vi f trong miền D là hàm \mathbb{C} - khả vi trong miền đó khi và chỉ khi nó thỏa mãn điều kiện*

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0. \quad (2.14)$$

Chứng minh. 1. Giả sử f là hàm \mathbb{C} - khả vi. Khi đó, theo định nghĩa 2.1.3 giới hạn (2.8) tồn tại không phụ thuộc vào phương pháp dần Δz đến 0, và ta có

$$\Delta f = f'(z_0)\Delta z + \varepsilon(\Delta z),$$

trong đó $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \varepsilon(\Delta z) = 0$. Từ đó rút ra

$$df = f'(z_0)dz,$$

tức là

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0.$$

2. Giả sử $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$. Từ công thức (2.6) ta thu được

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{\partial f}{\partial z} + \varepsilon(\Delta z),$$

trong đó $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \varepsilon(\Delta z) = 0$. Từ đó thấy rõ là giới hạn (2.8) tồn tại và

$$f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}.$$

□

Điều kiện (2.9) chính là điều kiện khả vi phức Cauchy - Riemann. Điều kiện Cauchy - Riemann còn có thể biểu diễn dưới dạng

$$\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad (2.15)$$

và như vậy ta có định lý sau đây.

Định lý 2.1.6. *Hàm f là \mathbb{C} - khả vi tại một điểm nào đó khi và chỉ khi nó là \mathbb{R}^2 - khả vi tại điểm đó và các đạo hàm riêng của nó tại điểm ấy liên hệ với nhau bằng hệ thức (2.15).*

2.1.5 Hàm chỉnh hình

Từ tính \mathbb{C} - khả vi đã được định nghĩa ta chưa thể rút ra những kết luận mà chúng ta mong muốn khi nói đến tầm quan trọng của khái niệm này.

Để thu được những kết quả đó, đòi hỏi hàm f phải là \mathbb{C} - khả vi tại một lân cận nào đó của điểm z_0 . Vì thế ta có

Định nghĩa 2.1.4. 1) Hàm f được gọi là hàm *chỉnh hình tại điểm* z_0 nếu nó là \mathbb{C} - khả vi tại một lân cận nào đó của điểm z_0 . Hàm f được gọi là *chỉnh hình trong miền* D nếu nó chỉnh hình tại mọi điểm của miền ấy. Tập hợp mọi hàm chỉnh hình trong miền D được ký hiệu là $\mathcal{H}(D)$.

2) Hàm $f(z)$ *chỉnh hình tại điểm vô cùng* nếu hàm $\varphi(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$ chỉnh hình tại điểm $z = 0$.

Phần 2) của định nghĩa 2.1.4 cho phép ta xét các hàm chỉnh hình trên các tập hợp của mặt phẳng đóng $\overline{\mathbb{C}}$.

Ta nhận xét rằng cùng với thuật ngữ “hàm chỉnh hình” người ta còn dùng những thuật ngữ tương đương khác sau đây:

“hàm chỉnh hình” \equiv “hàm chính quy” \equiv “hàm giải tích đơn trị”.

Từ điều kiện Cauchy - Riemann và định nghĩa 2.1.4 dễ dàng suy ra

Định lý 2.1.7. *Giả sử miền $D \subset \mathbb{C}$ và $\mathcal{H}(D)$ tập hợp mọi hàm chỉnh hình trong miền D .*

Khi đó

1. $\mathcal{H}(D)$ là một vành;
2. nếu $f \in \mathcal{H}(D)$ và $f(z) \neq 0 \forall z \in D$ thì $\frac{1}{f} \in \mathcal{H}(D)$;
3. nếu $f \in \mathcal{H}(D)$ và f chỉ nhận giá trị thực thì f là hằng số.

Chứng minh. Bằng cách tính toán trực tiếp ta thu được

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(f + g) &= \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial g}{\partial \bar{z}}, \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}}(f \cdot g) &= \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \cdot g + f \cdot \frac{\partial g}{\partial \bar{z}}.\end{aligned}$$

Từ đó suy ra 1) và 2).

Để chứng minh 3) ta nhận xét rằng $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ cũng chỉ nhận giá trị thực. Nhưng mặt khác:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = i \frac{\partial f}{\partial y}$$

nên suy ra $\frac{\partial f}{\partial x} \equiv \frac{\partial f}{\partial y} \equiv 0$. Vậy f là hằng số. □

Định lý 2.1.8. (về hàm hợp). Nếu $f(w)$ là hàm chỉnh hình trong D^* và nếu $g : D \rightarrow D^*$ là hàm chỉnh hình trong D thì hàm hợp $f[g(z)]$ chỉnh hình trong D ,

Chứng minh. Thật vậy, dễ thấy rằng

$$\frac{\partial[f(g)]}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial f}{\partial w} \cdot \frac{\partial g}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial f}{\partial \bar{w}} \cdot \frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{z}}.$$

Theo giả thiết $\frac{\partial f}{\partial \bar{w}} = 0$, $\frac{\partial g}{\partial \bar{z}} = 0$ nên suy ra $f[g(z)]$ là hàm chỉnh hình trong D . \square

Tiếp theo, giả sử $w = f(z)$, $z \in D$ là hàm chỉnh hình ánh xạ đơn trị một - một miền D lên miền D^* . Điều đó có nghĩa là theo hàm đã cho mỗi $z \in D$ đều tương ứng với một giá trị $w \in D^*$ và đồng thời theo quy luật đó mỗi $w \in D^*$ chỉ tương ứng với một giá trị $z \in D$. Từ đó xác định được hàm đơn trị $z = \varphi(w)$, $w \in D^*$ có tính chất là $f[\varphi(w)] = w$, $w \in D^*$. Như ta biết hàm $z = \varphi(w)$ được gọi là *hàm ngược* với hàm $w = f(z)$, $z \in D$.

Ta sẽ chứng minh rằng nếu $f'(z) \neq 0$, $z \in D$ thì hàm $z = \varphi(w)$ là hàm chỉnh hình trên D^* .

Thật vậy, giả sử w , $w + \Delta w \in D^*$. Nhờ hàm ngược, các điểm này tương ứng với điểm z , $z + \Delta z$. Theo giả thiết hàm f có đạo hàm tại điểm z nên $f(z)$ liên tục tại đó: $\Delta w \rightarrow 0$ nếu $\Delta z \rightarrow 0$. Do tính đơn trị một - một ta có cả điều khẳng định ngược lại: $\Delta z \rightarrow 0$ nếu $\Delta w \rightarrow 0$. Nhưng khi đó

$$\lim_{\Delta w \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta w} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\Delta w}{\Delta z}} = \frac{1}{f'(z)}, \quad (f'(z) \neq 0).$$

Điều đó chứng tỏ rằng đạo hàm của hàm ngược $z = \varphi(w)$ tồn tại tại điểm w và bằng

$$\varphi'(w) = \frac{1}{f'(z)}, \quad w \in D^*.$$

Vì w là điểm tùy ý của D^* , $f'(z)$ liên tục và $f'(z) \neq 0$ nên hàm $\varphi(w)$ chỉnh hình trong D^* .

Ta xét ví dụ hàm $w = az + b$, $a \neq 0$ là hàm tuyến tính nguyên. Hàm này ánh xạ đơn trị một - một mặt phẳng phức z lên mặt phẳng phức w . Hàm ngược của nó có dạng

$$z = \frac{w - b}{a}.$$

Dễ dàng thấy rằng hàm $w = az + b$ và hàm ngược của nó $z = \frac{w - b}{a}$ chỉnh hình khắp nơi trên mặt phẳng z và w tương ứng $\left(w'_z = a, z'_w = \frac{1}{a}\right)$.

Định lý 2.1.9. *Giả sử cho chuỗi lũy thừa*

$$\sum_{n \geq 0} a_n z^n. \quad (2.16)$$

Nếu bán kính hội tụ của chuỗi (2.16) khác 0 thì tổng $S(z)$ của nó là một hàm chỉnh hình trong hình tròn hội tụ $\{|z| < R, R > 0\}$ của nó, tức là khi $|z| < R$ ta có

$$S'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(z+h) - S(z)}{h}. \quad (2.17)$$

Chứng minh. 1. Đầu tiên ta chứng minh rằng nếu bán kính hội tụ của chuỗi đã cho (2.16) là R thì bán kính hội tụ R^* của chuỗi đạo hàm

$$S_0(z) = \sum_{n \geq 1} n a_n z^{n-1} \quad (2.18)$$

cũng bằng R . Thật vậy, hiển nhiên rằng bán kính R^* bằng bán kính hội tụ của chuỗi

$$\sum_{n \geq 0} n a_n z^n.$$

Nhưng

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{n}} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

và do đó

$$R^* = \left(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n|a_n|} \right)^{-1} = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \right)^{-1} = R.$$

2. Giả sử z là điểm cố định tùy ý nằm trong hình tròn $|z| < R$. Khi đó có thể chỉ ra số R_1 ($0 < R_1 < R$) sao cho $|z| < R_1 < R$. Giả sử Δz là số gia tùy ý của z mà $|z + \Delta z| < R_1 < R$. Vì

$$\frac{(z + \Delta z)^n - z^n}{\Delta z} = (z + \Delta z)^{n-1} + z(z + \Delta z)^{n-2} + \dots + z^{n-1}$$

cho nên

$$\begin{aligned} & \left| \frac{S(z + \Delta z) - S(z)}{\Delta z} - S_0(z) \right| \leq \\ & \leq \left| \sum_{n=1}^m a_n [(z + \Delta z)^{n-1} + z(z + \Delta z)^{n-2} + \dots + z^{n-1} - nz^{n-1}] \right| + \\ & + \left| \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n [(z + \Delta z)^{n-1} + z(z + \Delta z)^{n-2} + \dots + z^{n-1}] \right| \\ & + \left| \sum_{n=m+1}^{\infty} na_n z^{n-1} \right|. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Xét điểm $z^* = R_1$. Vì điểm $z^* = R_1$ nằm trong hình tròn hội tụ $|z| < R$ của chuỗi (2.18) nên từ sự hội tụ tuyệt đối của chuỗi (2.18) trong hình tròn $|z| < R$ suy rằng: $\forall \varepsilon > 0, \exists M = M(\varepsilon)$ sao cho $\forall m > M$ thì phần dư

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} n|a_n|R_1^{n-1} < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (2.20)$$

Do đó với $m > M$, từ (2.20) thu được

$$\left| \sum_{n=m+1}^{\infty} na_n z^{n-1} \right| < \sum_{n=m+1}^{\infty} n|a_n|R_1^{n-1} < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (2.21)$$

và

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n [(z + \Delta z)^{n-1} + z(z + \Delta z)^{n-2} + \dots + z^{n-1}] \right| \leq \\ & \leq \sum_{n=m+1}^{\infty} n|a_n|R_1^{n-1} < \frac{\varepsilon}{3}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Tiếp theo, từ hệ thức

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \sum_{n=1}^m a_n [(z + \Delta z)^{n-1} + z(z + \Delta z)^{n-2} + \dots + z^{n-1}] = \sum_{n=1}^m n a_n z^{n-1}$$

suy rằng với số $\varepsilon > 0$ đã chọn, tìm được số $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sao cho với $|\Delta z| < \min(\delta, |R_1 - z|)$ thì

$$\left| \sum_{n=1}^m a_n [(z + \Delta z)^{n-1} + z(z + \Delta z)^{n-2} + \dots + z^{n-1} - n z^{n-1}] \right| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (2.23)$$

Bằng cách thay $n > M$ trong (2.19), từ (2.21) - (2.23) suy rằng khi $|\Delta z| < \min(\delta, |R_1 - z|)$ ta có

$$\left| \frac{S(z + \Delta z) - S(z)}{\Delta z} - S_0(z) \right| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Do đó

$$S_0(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{S(z + \Delta z) - S(z)}{\Delta z} = S'(z).$$

Vì z là điểm tùy ý của hình tròn hội tụ $|z| < R$ nên định lý được chứng minh. \square

Nhận xét. Vì bằng phép đổi biến theo công thức $t = z - z_0$, $z_0 \neq 0$ chuỗi $\sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n$ được quy về chuỗi $\sum_{n \geq 0} a_n t^n$ nên ta có định lý sau:

Định lý 2.1.9*. Tổng $f(z)$ của chuỗi lũy thừa $\sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n$ là hàm chỉnh hình trong hình tròn hội tụ $|z - z_0| < R$ của chuỗi đó và đạo hàm $f'(z)$ được tìm theo công thức

$$f'(z) = \sum_{n \geq 1} n a_n (z - z_0)^{n-1}.$$

2.1.6 Không gian các hàm chỉnh hình

Giả sử miền $D \subset \mathbb{C}$, $\mathcal{C}(D)$ là tập hợp các hàm liên tục trong D và $\mathcal{H}(D)$ là tập hợp các hàm chỉnh hình trong D .

Không đi sâu vào chi tiết (việc đó dành cho bộ môn tôpô học), ở đây chỉ phác qua việc xác định tôpô trong $\mathcal{C}(D)$. Đối với tập hợp compact $K \subset D$ bất kỳ và số $\varepsilon > 0$ bất kỳ, đặt

$$V(K, \varepsilon) = \{f \in \mathcal{C}(D) : |f(z)| < \varepsilon, \forall z \in K\}.$$

Rõ ràng là tập hợp $V(K, \varepsilon)$ là lân cận của $f \equiv 0$ trong $\mathcal{C}(D)$. Người ta đã chứng minh rằng (xem [10], trang 188-191) nếu $\{K_n\}$ là dãy các tập hợp compact của miền $D : K_i \subset K_{i+1}, \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i = D$ sao cho mỗi compact $K \subset D$ đều thuộc một K_n nào đó thì các tập hợp $V(K_i, \varepsilon)$ đối với mọi K_i và ε như vậy là hệ lân cận cơ sở của phần tử 0 (tức là $f \equiv 0$) và sẽ xác định một tôpô mà với tôpô đó $\mathcal{C}(D)$ là một không gian tôpô. Rõ ràng là dãy hàm $f_n \in \mathcal{C}(D)$ hội tụ đều trên từng compact của miền D khi và chỉ khi $\forall K \subset D, \forall \varepsilon > 0, \forall n$ đủ lớn suy ra

$$f_n - f \in V(K, \varepsilon).$$

Điều đó có nghĩa rằng dãy $f_n \in \mathcal{C}(D)$ có giới hạn là một điểm trong tôpô mà $V(K, \varepsilon)$ lập thành hệ lân cận cơ sở của $f \equiv 0$.

Vì $\mathcal{H}(D)$ là không gian con của không gian $\mathcal{C}(D)$ nên trên $\mathcal{H}(D)$ ta xét tôpô cảm sinh bởi tôpô của không gian $\mathcal{C}(D)$. Với tôpô đó, $\mathcal{H}(D)$ là không gian tôpô. Đối với không gian $\mathcal{C}(D)$ cũng như $\mathcal{H}(D)$ ta có thể xác định tôpô bởi metric hóa. Do đó có thể áp dụng cho không gian $\mathcal{C}(D)$ và $\mathcal{H}(D)$ những định lý quen thuộc về không gian metric. Chẳng hạn, tập hợp con A của không gian E là đóng khi và chỉ khi giới hạn của dãy điểm bất kỳ của A thuộc A .

2.2 Một số hàm chỉnh hình sơ cấp

2.2.1 Đa thức và hàm hữu tỷ

Để ý đến các đẳng thức $\frac{d(\text{const})}{dz} = 0$, $\frac{dz}{dz} = 1$ và các quy tắc tính đạo hàm ta có thể kết luận rằng đa thức $P_n(z)$ là hàm chỉnh hình $\forall z \in \mathbb{C}$ và

$$P_n(z) = \left(\sum_{k=0}^n a_k z^{n-k} \right)' = \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) a_k z^{n-k-1}.$$

Các hàm hữu tỷ $\mathcal{R}(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$, trong đó $P(z)$ và $Q(z)$ là các đa thức, chỉnh hình $\forall z \in \mathbb{C} \setminus N(Q)$, trong đó $N(Q) = \{z \in \mathbb{C} : Q(z) = 0\}$. Chẳng hạn, hàm phân tuyến tính $w = \frac{az+b}{cz+d}$ chỉnh hình $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\}$ nếu $c \neq 0$ và chỉnh hình trong \mathbb{C} nếu $c = 0$ và $d \neq 0$; hàm Jukovski $w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$ chỉnh hình $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

2.2.2 Hàm $w = z^n$ và $z = \sqrt[n]{w}$, $n \in \mathbb{N}$

Ta xét các giá trị $z_1 = |z_1|e^{i\varphi_1}$, $z_2 = |z_1|e^{i\varphi_2}$. Từ đó

$$\begin{aligned} w_1 - w_2 &= |z_1|^n [e^{in\varphi_1} - e^{in\varphi_2}] \\ &= |z_1|^n e^{in\varphi_2} [e^{in(\varphi_1 - \varphi_2)} - 1]. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Hệ thức (2.24) chứng tỏ rằng z_1 và z_2 có cùng một ảnh khi và chỉ khi

$$\varphi_1 - \varphi_2 = k \cdot \frac{2\pi}{n}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Do vậy, hàm $w = z^n$ đơn điệu trong miền D nào đó khi và chỉ khi D không chứa những cặp điểm khác nhau z_1 và z_2 mà

$$\begin{cases} |z_1| = |z_2| \\ \arg z_1 = \arg z_2 + \frac{2\pi}{n}k, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Ví dụ về miền đơn điệu của hàm $w = z^n$ là các hình quạt vô hạn

$$D_k = \left\{ z \in \mathbb{C} : k \frac{2\pi}{n} < \arg z < \frac{2\pi}{n}(k+1), k = \overline{0, n-1} \right\}.$$

Ta chia mặt phẳng phức \mathbb{C} thành n hình quạt bởi các tia đi ra từ gốc tọa độ

$$\theta = \theta_k = \frac{2\pi}{n}k, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Giả sử D_k là hình quạt

$$\theta_k < \theta < \theta_{k+1}, \quad \rho > 0.$$

tức là

$$D_k = \left\{ z \in \mathbb{C} : z = \rho e^{i\theta}, \rho > 0, \theta_k < \theta = \arg z < \theta_{k+1} \right\}.$$

Hiển nhiên D_k là miền. Ta ký hiệu

$$D_k^* = \left\{ z \in \mathbb{C} : z = \rho e^{i\theta}, \theta_k \leq \theta < \theta_{k+1}, \rho > 0 \right\}.$$

Tiếp theo ta đặt

$$\theta = \theta_k + \psi, \quad \theta_k \leq \theta < \theta_{k+1}.$$

Từ đó nếu $0 \leq \psi < \theta_1 = \frac{2\pi}{n}$ thì $\theta_k \leq \theta < \theta_{k+1}$ và ngược lại.

Ta chứng minh rằng: hàm $w = z^n$ ánh xạ đơn trị một - một miền D_k^* lên toàn bộ mặt phẳng

$$\mathbb{C}^* = \mathbb{C}_w^* = \left\{ w \in \mathbb{C} : w = re^{i\varphi}, 0 \leq \varphi < 2\pi \right\}.$$

Thật vậy, ta có

$$re^{i\varphi} = \rho^n e^{in\theta} = \rho^n e^{in(\frac{2\pi}{n}k + \psi)} = \rho^n e^{in\psi}.$$

Do đó

$$r = \rho^n, \quad \varphi = n\psi \quad \left(0 \leq \psi < \theta_1 = \frac{2\pi}{n} \right).$$

và từ đó ta thu được ảnh của D_k^* là mặt phẳng \mathbb{C}_w^* .

Từ chứng minh trên ta cũng thu được

$$\begin{aligned}\rho &= r^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{r}, \\ \psi &= \frac{\varphi}{n}\end{aligned}$$

và từ đó suy rằng trên miền D_k^* hàm $w = z^n$ có hàm ngược

$$z = (z)_k = \rho e^{i\theta} = r^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\varphi+2k}{n}}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1; \quad w \in \mathbb{C}_w^*. \quad (2.25)$$

Nói chung: hàm $w = z^n$ có hàm ngược n -trị

$$z = \sqrt[n]{w}$$

là n nhánh liên tục (2.25) tương ứng với các số $k = 0, 1, \dots, n-1$. Các nhánh (2.25) xác định bởi các số $k = 0, 1, \dots, n-1$ ánh xạ \mathbb{C}^* lên $D_0^*, D_1^*, \dots, D_n^*$ tương ứng.

Để tính đạo hàm của nhánh thứ k ta phải xét miền $D_k \subset D_k^*$. Ta ký hiệu

$$\mathbb{C}_w^+ = \mathbb{C}_w^* \setminus \mathbb{R}_+.$$

Rõ ràng là hàm chỉnh hình $w = z^n$ ánh xạ đơn trị một - một D_k lên \mathbb{C}_w^+ , đồng thời hàm ngược tương ứng được xác định theo công thức (2.25).

Áp dụng quy tắc đạo hàm hàm ngược ta có ($z \in D_k$)

$$\begin{aligned}(\sqrt[n]{w})' &= (\sqrt[n]{w})'_k = \frac{1}{(z^n)'} = \frac{1}{nz^{n-1}} = \frac{z}{nw} \\ &= \frac{1}{n} \cdot \frac{r^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{n}}}{r e^{i(\varphi+2k\pi)}} = \frac{1}{n} r^{\frac{1}{n}-1} e^{i(\frac{1}{n}-1)(\varphi+2k\pi)} = \frac{1}{n} w^{\frac{1}{n}-1}.\end{aligned}$$

2.2.3 Hàm e^z

Giả sử $z = x + iy$. Khi đó

$$e^z \stackrel{\text{def}}{=} e^x (\cos y + i \sin y).$$

Nếu $z = x$ là số thực thì $e^z = e^x$, tức là khi z nhận các giá trị thực thì hàm biến phức e^z trùng với hàm mũ biến thực thông thường. Điều nhận xét này cùng với một số tính chất được nêu dưới đây sẽ chứng tỏ tính hợp lý của định nghĩa hàm mũ biến phức vừa nêu.

Ta lưu ý một số tính chất của hàm e^z .

1) $e^z \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$. Điều đó được suy ra từ định nghĩa và hệ thức $e^x \neq 0$, $|e^{iy}| = 1$.

2) $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$.

Chứng minh. Giả sử $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$. Khi đó

$$\begin{aligned} e^{z_1} \cdot e^{z_2} &= e^{x_1}(\cos y_1 + i \sin y_1) e^{x_2}(\cos y_2 + i \sin y_2) \\ &= e^{x_1+x_2} [\cos(y_1 + y_2) + i \sin(y_1 + y_2)] = e^{x_1+x_2+i(y_1+y_2)} \\ &= e^{z_1+z_2}. \end{aligned}$$

□

3) $\frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1-z_2}$. Điều này được suy ra từ định nghĩa và tính chất 2).

4) Đẳng thức $e^{z+\alpha} = e^z \Leftrightarrow \alpha = 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$.

Chứng minh. Giả sử $\alpha = 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$. Khi đó ta có

$$e^{z+\alpha} = e^{z+2k\pi i} = e^z \cdot e^{2k\pi i} = e^z.$$

Ngược lại, nếu $e^{z+\alpha} = e^z$, $\alpha = \lambda + i\nu$ thì

$$e^{z+\lambda+i\nu} = e^z \Rightarrow e^z(e^{\lambda+i\nu} - 1) = 0.$$

Vì $e^z \neq 0$ nên $e^{\lambda+i\nu} = 1$. Ta sẽ chứng minh rằng khi đó $\lambda = 0$, $\nu = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Thật vậy, từ đẳng thức $e^{\lambda+i\nu} = 1$ suy rằng $e^\lambda \cdot e^{i\nu} = 1$ và do đó $e^\lambda = 1$, $\nu = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; tức là $\lambda = 0$, $\nu = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Như vậy $\alpha = 0 + i2k\pi = 2k\pi i$. □

Các số $2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$ mà với $z \in \mathbb{C}$ bất kỳ ta có đẳng thức $e^{z+2k\pi i} = e^z$ được gọi là *các chu kỳ* của hàm e^z và số $2\pi i$ gọi là *chu kỳ cơ bản* của nó.

5) e^z không có giới hạn khi $z \rightarrow \infty$ vì $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = \infty$.

6) Hàm e^z đơn điệu trong miền $D \subset \mathbb{C}$ khi và chỉ khi miền D không chứa những cặp điểm khác nhau z_1 và z_2 mà

$$z_1 - z_2 = 2n\pi i, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Chứng minh. Thật vậy, giả sử z_1, z_2 ($z_1 \neq z_2$) cùng có một ảnh. Khi đó từ hệ thức $w_1 = w_2$ suy ra

$$e^{z_1} = e^{z_2} \Leftrightarrow e^{z_1 - z_2} = 1 \Leftrightarrow z_1 - z_2 = 2k\pi i.$$

□

Ví dụ về miền đơn điệu của hàm mũ biến phức là các *băng vô hạn* nằm ngang

$$D_k = \left\{ z \in \mathbb{C} : -\infty < \operatorname{Re} z < +\infty; 2k\pi < \operatorname{Im} z < 2(k+1)\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

7) Hàm e^z liên tục trên \mathbb{C} . Thật vậy vì các hàm $\operatorname{Re}(e^z) = u(x, y) = e^x \cos y$, $\operatorname{Im}(e^z) = e^x \sin y$ đều liên tục nên theo định lý ta có hàm e^z liên tục.

8) Hàm $e^z \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$. Thật vậy các hàm phần thực $u(x, y) = e^x \cos y$ và phần ảo $v(x, y) = e^x \sin y$ đều là những hàm khả vi và thỏa mãn điều kiện Cauchy - Riemann, nên theo định lý 2.1.4 ta có $e^z \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$.

2.2.4 Hàm lôgarit

Giả sử cho số phức $z \in \mathbb{C}$. Khi đó mọi số phức $\zeta \in \mathbb{C}$ thỏa mãn phương trình $e^\zeta = z$ được gọi là lôgarit của số $z \in \mathbb{C}$ và được ký hiệu là

$$\operatorname{Ln} z = \zeta.$$

Như vậy

$$\operatorname{Ln} z = \zeta \Leftrightarrow e^\zeta = z. \quad (2.26)$$

Giả sử $\zeta = x + iy$, $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, $r = |z|$, $\varphi = \arg z$, $-\pi < \varphi \leq \pi$.
Ta có

$$\begin{aligned} e^\zeta = z &\Leftrightarrow e^{x+iy} = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \\ &\Leftrightarrow e^x(\cos y + i \sin y) = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} e^x &= r > 0, \\ y &= \varphi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}; \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x &= \ln r \\ y &= \varphi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases} \end{aligned}$$

Như vậy

$$\operatorname{Ln} z = \zeta = x + iy = \ln r + i(\varphi + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z},$$

hay là

$$\operatorname{Ln} z = \ln |z| + i \arg z + 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (2.27)$$

Ta ký hiệu

$$\ln z = \ln |z| + i \arg z$$

và gọi đó là *giá trị chính* của $\operatorname{Ln} z$. Từ đó

$$\operatorname{Ln} z = \ln z + 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Từ hệ thức (2.27) suy ra rằng: mỗi số phức $z \neq 0, \infty$ đều có vô số giá trị lôgarit, trong đó hai giá trị lôgarit bất kỳ là khác nhau một bội nguyên của $2\pi i$. Nếu z là số thực dương thì giá trị chính của lôgarit trùng với $\ln |z|$ và do đó nó biểu diễn số thực trùng với lôgarit cổ điển: Chẳng hạn $\ln 1 = 0$, $\ln e = 1, \dots$

Nhưng, ngoài các giá trị thực đó, lôgarit của các số thực dương còn có vô số các lôgarit phức được tính theo công thức (2.27). Chẳng hạn: $\operatorname{Ln} 1 = 2k\pi i$, $\operatorname{Ln} e = 1 + 2k\pi i, \dots$

Ta lưu ý hai tính chất đặc biệt của lôgarit số phức

$$\text{a) } \operatorname{Ln}(z_1 z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2,$$

$$\text{b) } \operatorname{Ln} \frac{z_1}{z_2} = \operatorname{Ln} z_1 - \operatorname{Ln} z_2.$$

Các đẳng thức này cần được hiểu một cách ước lệ: đó là đẳng thức giữa các tập hợp. Nói cách khác; vế trái có thể sai khác vế phải một bội nguyên của $2\pi i$ hoặc vế phải bằng vế trái với việc chọn số hạng $2k\pi i$ trong vế trái một cách thích hợp.

Bây giờ ta xét lôgarit với tư cách là một hàm.

Ta đặt

$$\mathbb{C}_0 = \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

và đưa vào xét hàm

$$\operatorname{Ln}_k : \mathbb{C}_0 \rightarrow \mathbb{C},$$

$$\operatorname{Ln}_k z = \ln |z| + i \arg z + 2k\pi i.$$

Đó là hàm đơn trị. Mặt khác vì $-\pi < \arg z \leq \pi$ nên

$$\operatorname{Ln}_k \mathbb{C}_0 \subset D_k = \left\{ w \in \mathbb{C} : (2k+1)\pi < \operatorname{Im} w \leq (2k+1)\pi \right\}$$

là băng vô hạn nằm ngang có bề rộng 2π .

Ta sẽ chứng tỏ rằng

$$\operatorname{Ln}_k \mathbb{C}_0 = D_k,$$

tức là chứng minh rằng $\forall w \in D_k \exists z \in \mathbb{C}_0$ sao cho

$$\operatorname{Ln}_k z = w.$$

Giả sử $w = u + iv \in D_k$. Khi đó

$$v = v_0 + 2k\pi, \quad -\pi < v_0 \leq \pi.$$

Ta đặt $z = e^w = e^u(\cos v_0 + i \sin v_0)$. Khi đó ta thu được

$$\begin{aligned} \operatorname{Ln}_k z &= \ln |z| + i \arg z + 2k\pi i \\ &= u + i(v_0 + 2k\pi) = u + iv = w. \end{aligned}$$

Như vậy

$$\operatorname{Ln}_k : \mathbb{C} \xrightarrow{(\text{lên})} D_k.$$

Vì D_k là miền đơn diệp của Ln_k nên tại đó nó có hàm ngược

$$\operatorname{Ln}_k^{-1} : D_k \longrightarrow \mathbb{C}_0.$$

đó là hàm

$$\operatorname{Ln}_k^{-1}(w) = e^w.$$

Hàm này đơn trị.

Ta nhận xét rằng hàm $\operatorname{Ln}_k z$ không liên tục trong \mathbb{C}_0 , mà cụ thể là nó không liên tục trên phần âm trục thực \mathbb{R}^- . Thật vậy vì $\forall z = x_0 < 0$ và $\forall \mathcal{U}(x_0, \varepsilon)$ là ε - lân cận của x_0 , $\exists z \in \mathcal{U}(x_0, \varepsilon)$ sao cho $\operatorname{Im}(\operatorname{Ln}_k z)$ sẽ gần với $(2k+1)\pi$ và $\exists z \in \mathcal{U}(x_0, \varepsilon)$ sao cho $\operatorname{Im}(\operatorname{Ln}_k z)$ sẽ gần với $(2k-1)\pi$. Nói chính xác hơn khi $z \rightarrow x_0 \in \mathbb{R}^-$ mà $\operatorname{Im} z > 0$ (tương ứng: $\operatorname{Im} z < 0$) thì $\operatorname{Ln}_k z$ dần đến $\ln|x_0| + (2k+1)\pi$ (tương ứng: dần đến $\ln|x_0| + (2k-1)\pi$).

Các hàm $\operatorname{Ln}_k z$ được gọi là *các nhánh (đơn trị)* của hàm đa trị $\operatorname{Ln} z$.

Một cách tự nhiên ta đưa vào tập hợp

$$\mathbb{C}^* = \left\{ z \in \mathbb{C} : -\pi < \arg z < \pi \right\}$$

là mặt phẳng phức \mathbb{C} cắt bỏ phần âm trục thực và xét hàm

$$\operatorname{Ln}_k^0 = \operatorname{Ln}_k|_{\mathbb{C}^*}.$$

Rõ ràng là

$$\operatorname{Ln}_k^0 \mathbb{C}^* = D_k^0 = \left\{ w \in \mathbb{C} : (2k-1)\pi < \operatorname{Im} w < (2k+1)\pi \right\}$$

Hàm Ln_k^0 liên tục trên \mathbb{C}^* . Để chứng minh điều đó ta chỉ cần chứng minh rằng

$$\ln z = \ln|z| + i \arg z$$

liên tục trên \mathbb{C}^* . Nhưng điều đó là hiển nhiên vì phần thực $\ln|z|$ liên tục trên \mathbb{C}^* (thậm chí nó liên tục cả trong \mathbb{C}_0) và phần ảo $\arg z$ liên tục trên \mathbb{C}^* như ta đã chứng minh trong chương trước. Như vậy: *hàm $\text{Ln}_k z$ liên tục trên $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$. Đó là các nhánh đơn trị liên tục trên \mathbb{C}^* của hàm lôgarit $\text{Ln } z$.*

Trong miền \mathbb{C}^* ta thu được vô số nhánh đơn trị liên tục. Mọi nhánh $\text{Ln}_k z$ hoàn toàn được đặc trưng bởi điều là: Các giá trị của nó thuộc một băng vô hạn nằm ngang D_k xác định.

Từ lập luận trên cũng suy ra rằng hàm $w = \text{Ln}_k z$ ánh xạ đơn trị một - một và liên tục miền \mathbb{C}^* lên D_k và hàm ngược của nó $z = e^w$ có đạo hàm $\neq 0$ tại mọi điểm $w \in D_k$. Do đó theo quy tắc đạo hàm của hàm ngược ta có

$$\left(\text{Ln}_k z\right)'_z = \frac{1}{(e^w)'_w} = \frac{1}{e^w} = \frac{1}{z}. \quad (2.28)$$

Ta nhấn mạnh rằng ở đây ta tính đạo hàm không phải của hàm đa trị $\text{Ln } z$ mà là của nhánh đơn trị của nó tương ứng với giá trị k nào đó.

2.2.5 Hàm lũy thừa z^α , $\alpha \in \mathbb{R}$

Hàm lũy thừa z^α , $\alpha \in \mathbb{R}$ được định nghĩa theo công thức

$$\begin{aligned} w = z^\alpha &= e^{\alpha \ln z} = e^{\alpha[\ln|z| + i(\arg z + 2k\pi)]} \\ &= |z|^\alpha e^{i\alpha(\arg z + 2k\pi)}, \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned} \quad (2.29)$$

hay là

$$w = \rho^\alpha e^{i\alpha(\theta + 2k\pi)}, \quad k \in \mathbb{Z}; z = \rho e^{i\theta}. \quad (2.30)$$

Ta xét các trường hợp sau đây.

1⁺. Nếu α là số nguyên thì $e^{i\alpha 2k\pi} = 1$ và

$$w = (\rho e^{i\theta})^\alpha = z^\alpha$$

trong đó z^α được hiểu theo nghĩa thông thường là tích của α thừa số z .

2⁺. Nếu $\alpha = \pm \frac{p}{q}$, trong đó $p > 0$, $q > 0$ là những số nguyên, thì giữa các số ở vế phải của (2.30) chỉ có các giá trị tương ứng với $k = 0, 1, \dots, q-1$ là khác nhau:

$$w = \rho^\alpha e^{i\alpha(\theta+2k\pi)}, \quad k = 0, 1, \dots, q-1.$$

Đặc biệt là khi $\alpha = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ thì hàm $w = z^{\frac{1}{n}}$ đã được xét trong 2).

3⁺. Nếu α là số vô tỷ thì đối với các giá trị k khác nhau các hàm xác định bởi (2.29) hay (2.30) là khác nhau. Thật vậy giá trị argumen của các giá trị z^α bằng

$$\theta_k = \alpha\theta + 2k\pi\alpha$$

và trong các giá trị đó không có các giá trị nào khác nhau một bội nguyên của 2π vì nếu với k_1, k_2 nguyên và $k_1 \neq k_2$ mà $\theta_{k_1} - \theta_{k_2} = 2k_1\pi\alpha - 2k_2\pi\alpha = 2n\pi$, trong đó n -nguyên thì

$$\alpha = \frac{n}{k_1 - k_2}$$

là số hữu tỷ. Vô lý. Điều đó chứng tỏ rằng z^α là hàm *vô số trị*. Đó là *Các nhánh liên tục của hàm vô số trị* $w = z^\alpha$.

Tiếp theo ta có ($z = \rho e^{i\theta}$)

$$\begin{aligned} (z^\alpha)' &= (e^{\alpha \ln z})' = e^{\alpha \ln z} \cdot \frac{\alpha}{z} = \alpha \frac{e^{\alpha[\ln \rho + i(\theta+2k\pi)]}}{e^{[\ln \rho + i(\theta+2k\pi)]}} \\ &= \alpha e^{(\alpha-1)[\ln \rho + i(\theta+2k\pi)]} = \alpha z^{\alpha-1} \end{aligned}$$

tức là đẳng thức $(z^\alpha)' = \alpha z^{\alpha-1}$ đúng đối với mọi nhánh của z^α .

2.2.6 Các hàm sơ cấp khác

Các hàm chỉnh hình sơ cấp đã xét: hàm phân tuyến tính, hàm e^z và $\ln z$, hàm Jukovski đóng một vai trò cơ bản trong việc khảo sát các hàm sơ cấp cơ bản khác.

Thật vậy, khi biết hàm $f(z)$ và $\varphi(z)$ ta cũng sẽ biết cả hàm $f[\varphi(z)]$ và $\varphi[f(z)]$. Có thể khẳng định rằng mọi hàm sơ cấp cơ bản khác đều có thể biểu diễn dưới dạng hợp một số nào đó các hàm sơ cấp mà ta đã nghiên cứu. Chẳng hạn ta xét các hàm lượng giác biến phức

$$\sin z \stackrel{\text{def}}{=} \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad (2.31)$$

$$\cos z \stackrel{\text{def}}{=} \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad (2.32)$$

$$\operatorname{tg} z \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sin z}{\cos z}, \quad (2.33)$$

$$\operatorname{cotg} z \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\cos z}{\sin z}. \quad (2.34)$$

Nếu $z = x$ là số thực thì theo định nghĩa và công thức Euler ta có

$$\sin z = \frac{1}{2i} [(\cos x + i \sin x) - (\cos(-x) + i \sin(-x))] = \sin x, \quad \cos z = \cos x.$$

Như vậy khi $z = x$ là số thực hàm biến phức $\sin z$ trùng với hàm $\sin x$ quen thuộc. Tương tự như vậy đối với hàm $\cos z$ và $\operatorname{tg} z$.

Lưu ý rằng các hàm lượng giác (2.31) bảo toàn nhiều tính chất của hàm lượng giác biến thực *nhưng không phải mọi tính chất đều được bảo toàn*. Chẳng hạn $\cos i = \frac{e + e^{-1}}{2} \approx 1,54$; $\sin i = \frac{e - e^{-1}}{2i} \approx -1,17i$, nghĩa là *không thể nói $\cos z$ và $\sin z$ có môđun bị chặn*.

Hàm $w = \cos z$ được xét như là hợp của ba hàm sau đây:

$$z_1 = iz; \quad z_2 = e^{z_1}; \quad w = \frac{1}{2} \left(z_2 + \frac{1}{z_2} \right).$$

Do đó việc khảo sát hàm $\cos z$ được đưa về khảo sát các hàm đã được nghiên cứu.

Từ hệ thức (2.32) và các tính chất của hàm e^z ta rút ra tính \mathbb{C} -khả vi của hàm $\cos z$.

Tương tự, hàm $w = \sin z$ là hợp của bốn hàm sau đây:

$$z_1 = iz; \quad z_2 = e^{z_1}; \quad z_3 = \frac{z_2}{i}, \quad w = \frac{1}{2} \left(z_3 + \frac{1}{z_3} \right)$$

nên việc khảo sát hàm $w = \sin z$ cũng được đưa về khảo sát các hàm đã xét ở trên.

Từ hệ thức (2.31) và (2.32) suy ra rằng hàm $\cos z$ và $\sin z$ là những hàm tuần hoàn với chu kỳ 2π và là những hàm \mathbb{C} - khả vi:

$$(\cos z)' = -\sin z; \quad (\sin z)' = \cos z.$$

Đối với hàm $\operatorname{tg} z$, theo định nghĩa ta có:

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad z \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Đó là hàm tuần hoàn với chu kỳ cơ sở π . Bằng cách sử dụng (2.31) và (2.32) ta có

$$\operatorname{tg} z = \frac{1}{2} \cdot \frac{e^{2iz} - 1}{e^{2iz} + 1}. \quad (2.35)$$

Do đó việc khảo sát hàm $\operatorname{tg} z$ được đưa về khảo sát các hàm “trung gian” đã được xét sau đây

$$z_1 = 2iz; \quad z_2 = e^{z_1}; \quad w = -i \cdot \frac{z_2 - 1}{z_2 + 1}.$$

Bây giờ, ta chuyển sang xét hàm lũy thừa tổng quát

$$w = z^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}^+.$$

một cách chi tiết hơn.

Ta đặt

$$z^\alpha = e^{\alpha \log z}.$$

Hàm này là hợp của ba hàm trung gian sau đây

$$z_1 = \log z; \quad z_2 = \alpha z_1; \quad w = e^{z_2}.$$

Cũng như ở các phần trên, ta có thể định nghĩa khái niệm nhánh liên tục của hàm z^α trong miền D . Mỗi nhánh liên tục của hàm $\log z$ trong miền D sẽ xác định một nhánh liên tục của hàm z^α trong miền đó.

Dễ dàng thấy rằng ảnh của góc

$$D = \{z \in \mathbb{C} : a < \arg z < b, b - a \leq 2\pi, b, a \in \mathbb{R}\} \quad (2.36)$$

qua ánh xạ $w = z^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}^+$ là một trong các góc sau:

$$D^* = \{w : \alpha a + 2\pi\alpha k < \arg w < \alpha b + 2\pi\alpha k, \quad k \in \mathbb{Z}\}. \quad (2.37)$$

Thật vậy, qua ánh xạ $z_1 = \log z$ ảnh của D sẽ là một trong các băng vô hạn sau:

$$D(z_1) = \{z_1 \in \mathbb{C} : a + 2k\pi < \operatorname{Im} z_1 < b + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\},$$

trong đó số nguyên k được xác định bằng việc chọn nhánh liên tục của $\log z$ trong góc (2.36). Qua ánh xạ $z_2 = \alpha z_1$ thì ảnh của $D(z_1)$ sẽ là băng vô hạn

$$D(z_2) = \{z_2 \in \mathbb{C} : \alpha a + 2k\pi\alpha < \operatorname{Im} z_2 < \alpha b + 2k\pi\alpha\}$$

với điều kiện $\alpha(b - a) \leq 2\pi$.

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

2.2.7 Nhánh chỉnh hình của hàm đa trị

Theo định nghĩa, hàm chỉnh hình f trong miền D được gọi là một *nhánh chỉnh hình* của hàm đa trị $F(z)$ nếu tại mọi điểm $z \in D$ giá trị của hàm $f(z)$ trùng với một trong các giá trị của $F(z)$ tại điểm ấy.

Ta sẽ giải thích khái niệm nhánh chỉnh hình đối với một vài hàm đơn giản.

Trước hết ta xét hàm $w = \sqrt[n]{z}$ trong miền $D = \mathbb{C} \setminus \{[0, \infty e^{i\alpha}]\}$, trong đó $\{0, \infty e^{i\alpha}\}$ là tia $\arg z = \alpha$. Ta đã thấy rằng nhánh đơn trị liên tục của hàm $\sqrt[n]{z}$ có thể tách được trong miền D nếu trong đó hàm $\arg z$ có thể tách các nhánh đơn trị liên tục (xem 1.5). Giả sử z_0 là điểm cố định nào đó thuộc D và $\varphi_0 = \arg z_0$ là một trong các giá trị của $\arg z$ tại z_0 . Ta xét hàm

$$\varphi_*(z) = \begin{cases} \arg z_0, & z = z_0, \\ \Delta_{\gamma(z_0, z)} \arg z, & z \in D, z \neq z_0 \end{cases} \quad (2.38)$$

như đã làm trong **1.5**. Ta ký hiệu $w_*(z)$ là giá trị của hàm căn $\sqrt[n]{z}$ tại điểm z tương ứng với giá trị $\varphi_*(z)$ tại điểm ấy. Khi đó

$$w_*(z) = \sqrt[n]{|z|} \left[\cos \frac{\varphi_*(z)}{n} + i \sin \frac{\varphi_*(z)}{n} \right]. \quad (2.39)$$

Hiển nhiên, vì $\sqrt[n]{|z|}$ và $\varphi_*(z)$ là những hàm đơn trị liên tục nên $w_*(z)$ đơn trị liên tục.

Ta chứng minh rằng $w_*(z)$ là hàm chỉnh hình trong D (xem **2.2.2**).

Thật vậy, ta ký hiệu $r = |z|$, $\varphi = \varphi_*(z)$. Khi đó

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} w_*(z) &= u_*(r, \varphi) = \sqrt[n]{r} \cos \frac{\varphi}{n}, \\ \operatorname{Im} w_*(z) &= v_*(r, \varphi) = \sqrt[n]{r} \sin \frac{\varphi}{n}, \end{aligned}$$

và dễ dàng thấy rằng

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_*}{\partial \varphi} &= \frac{1}{n \sqrt[n]{r^{n-1}}} \cos \frac{\varphi}{n}, & \frac{\partial v_*}{\partial r} &= \frac{1}{n \sqrt[n]{r^{n-1}}} \sin \frac{\varphi}{n}, \\ \frac{\partial u_*}{\partial \varphi} &= -\frac{\sqrt[n]{r}}{n} \sin \frac{\varphi}{n}, & \frac{\partial v_*}{\partial \varphi} &= \frac{\sqrt[n]{r}}{n} \cos \frac{\varphi}{n}. \end{aligned}$$

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_*}{\partial r} &= \frac{1}{r} \frac{\partial v_*}{\partial \varphi}, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial u_*}{\partial \varphi} &= -\frac{\partial v_*}{\partial r}. \end{aligned}$$

Đó chính là điều kiện Cauchy - Riemann. Như vậy hàm u và v thỏa mãn điều kiện Cauchy - Riemann trong D . Vì u và v khả vi liên tục trong D theo r và φ nên $w_*(z)$ là một nhánh chỉnh hình của hàm $\sqrt[n]{z}$ trong D .

Ta xét các hàm $w_m(z)$ xác định bởi đẳng thức

$$w_m(z) = \sqrt[n]{|z|} \left(\cos \frac{\varphi_m(z)}{n} + i \sin \frac{\varphi_m(z)}{n} \right) \quad m = 0, 1, \dots, n-1, \quad (2.40)$$

trong đó hàm $\varphi_m(z)$ được xác định như (5.8), **1.5**. Khi $m = 0$ ta thu được hàm $\varphi_*(z)$ trong (2.38). Dễ dàng thấy rằng các hàm này đều là những nhánh chỉnh hình của hàm $\sqrt[n]{z}$.

Từ lý luận trên đây và mục **1.5.3** ta có thể kết luận rằng trong miền D không chứa điểm $z = 0$ hàm đa trị $\sqrt[n]{z}$ có thể tách n nhánh chỉnh hình được xác định bởi (2.40).

Cũng tương tự như ở mục 5, dễ dàng chứng tỏ rằng trong miền D bất kỳ có chứa gốc tọa độ ta không thể tách nhánh chỉnh hình của hàm đa trị $\sqrt[n]{z}$.

Nếu từ tập hợp các nhánh chỉnh hình của hàm đa trị $F(z)$ ta muốn tách một nhánh xác định thì cần đặt ra điều kiện bổ sung. Điều kiện đó thông thường được cho bởi giá trị của nhánh cần tách tại một điểm nào đó của miền D .

Ví dụ 1. Cho hàm $w = \sqrt[3]{z}$, $D = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$. Hãy tách nhánh chỉnh hình $w_m(z)$ mà $w_m(-1) = -1$. Tìm giá trị của nhánh đó tại điểm $z = 8i$.

Vì $w_m(-1) = -1$ nên ta có thể đặt

$$\varphi_0 = \arg z_0 = \arg(-1) = 3\pi.$$

Khi đó hàm $\varphi_m(z)$ là

$$\varphi_m(z) = \begin{cases} 3\pi, & z = -1, \\ \Delta_{\gamma(-1,z)} \arg z, & z \in D, z \neq -1 \end{cases}$$

và nhánh chỉnh hình cần tách là

$$w_m(z) = \sqrt[3]{|z|} \left(\cos \frac{\varphi_m(z)}{3} + i \sin \frac{\varphi_m(z)}{3} \right).$$

Giá trị của nó tại điểm $z = 8i$ bằng

$$\begin{aligned} w_m(8i) &= \sqrt[3]{8} \left(\cos \frac{3\pi - \frac{\pi}{2}}{3} + i \sin \frac{3\pi - \frac{\pi}{2}}{3} \right) \\ &= 2 \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right) = -\sqrt{3} + i. \end{aligned}$$

Bây giờ ta chuyển sang xét việc tách nhánh chỉnh hình của hàm lôgarit. Cũng tương tự như trên, dễ dàng chứng minh rằng nhánh chỉnh hình của

hàm lôgarit có thể tách được trong miền D nếu trong đó có thể tách được nhánh đơn trị liên tục của hàm $\arg z$.

Cũng như trên, giả sử z_0 là điểm cố định của $D = \overline{\mathbb{C}} \setminus [0, \infty e^{i\alpha}]$ và $\arg z_0 = \varphi_0$ là một trong các giá trị của $\text{Arg } z_0$. Ta đặt

$$\varphi_*(z) = \begin{cases} \arg z_0, & z = z_0, \\ \Delta_{\gamma(z_0, z)} \arg z, & z \in D, z \neq z_0 \end{cases}$$

và $w_*(z)$ là giá trị của $w = \text{Ln } z = \ln|z| + i\text{Arg } z$ tương ứng với $\arg z = \varphi_*(z)$. Khi đó

$$w_*(z) = \ln|z| + i\varphi_*(z).$$

Hiển nhiên vì trong D cả $\ln|z|$ lẫn $\varphi_*(z)$ đều đơn trị liên tục nên $w_*(z)$ đơn trị liên tục trong D . Ta còn cần chứng minh rằng $w_*(z)$ là hàm chỉnh hình trong D (xem 2.2.3).

Đặt

$$\begin{aligned} \text{Re } w_*(z) &= u_*(r, \varphi) = \log r, \\ \text{Im } w_*(z) &= v_*(r, \varphi) = \varphi_*(z) = \varphi. \end{aligned}$$

Khi đó

$$\frac{\partial u_*}{\partial r} = \frac{1}{r}, \quad \frac{\partial u_*}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial v_*}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial v_*}{\partial \varphi} = 1.$$

Do đó

$$\frac{\partial u_*}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v_*}{\partial \varphi}, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial u_*}{\partial \varphi} = -\frac{\partial v_*}{\partial r}.$$

Như vậy trong D các điều kiện Cauchy - Riemann được thỏa mãn. Vì u_* và v_* khả vi liên tục trong D nên $w_*(z)$ là nhánh chỉnh hình của $w = \text{Ln } z$ trong D . Cũng tương tự các hàm

$$w_m(z) = \ln|z| + i[\varphi_*(z) + 2m\pi], \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

là những nhánh chỉnh hình của hàm lôgarit, trong đó $w_0(z) = w_*(z)$.

Cũng tương tự như đối với hàm căn, hàm lôgarit có thể tách được thành các nhánh chỉnh hình trong miền D bất kỳ không chứa gốc tọa độ $z = 0$, còn nếu miền $D \supset \{0\}$ thì việc tách đó là không thực hiện được.

2.3 Hàm chỉnh hình và ánh xạ bảo giác

Trong mục này ta sẽ làm quen với sự mô tả hình học đối với các hàm chỉnh hình. Cụ thể hơn ta sẽ làm quen với một trong những vấn đề cơ bản của lý thuyết hàm biến phức là việc nghiên cứu các hàm chỉnh hình bằng cách xuất phát từ đặc tính của các ánh xạ mà các hàm đó đã thực hiện - gọi là ánh xạ bảo giác.

Bài toán cơ bản của ánh xạ bảo giác là bài toán sau đây. Giả sử cho hai miền D và D^* . Hãy tìm hàm $f : D \rightarrow D^*$ thực hiện ánh xạ đơn trị một - một và bảo giác miền D lên miền D^* .

Từ đó cũng sẽ nảy sinh ra những vấn đề tồn tại và duy nhất đối với hàm f mà ta sẽ nghiên cứu kỹ trong chương VII.

2.3.1 Ý nghĩa hình học của argumen của đạo hàm

Giả sử hàm $w = f(z) \in \mathcal{H}(D)$, $f'(z_0) \neq 0$, $z_0 \in D$. Khi đó, theo định nghĩa, ta có:

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = A e^{i\alpha}, \quad A \neq 0 \quad (2.41)$$

và từ đó suy ra

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left(\arg \frac{\Delta w}{\Delta z} \right) = \alpha = \arg f'(z_0). \quad (2.42)$$

Giả sử $\gamma = \gamma(t)$, $t \in [a, b]$ là cung trơn Jordan đi qua điểm z_0 . Tại điểm $z_0 = z_0(t_0)$ ta có $\gamma'(t_0) \neq 0$.

Ảnh của γ qua ánh xạ $w = f(z)$ là cung $\Gamma = f(\gamma)$ đi qua điểm w_0 . Cung đó có phương trình là $w = f[\gamma(t)]$, $t \in [a, b]$.

Theo quy tắc vi phân hàm hợp, ta có:

$$w' = f'(\gamma(t_0))\gamma'(t_0) \neq 0. \quad (2.43)$$

Từ hệ thức (2.43) suy ra rằng Γ có tiếp tuyến tại điểm w_0 và

$$\arg f'(z_0) = \arg w'(t_0) - \arg \gamma'(t_0) \pmod{2\pi}. \quad (2.44)$$

Như vậy, về mặt hình học, $\arg f'(z_0)$ bằng góc quay của cung γ tại điểm z_0 qua ánh xạ $f(z)$.

Nếu hai đường cong có tiếp tuyến γ_1 và γ_2 giao nhau tại điểm z_0 thì qua ánh xạ $w = f(z)$ tiếp tuyến của những đường cong này sẽ quay một góc như nhau và bằng $\arg f'(z_0)$. Do đó nếu góc giữa γ_1 và γ_2 bằng $\varphi(\gamma_1, \gamma_2)$ thì góc $\varphi(\Gamma_1, \Gamma_2)$ giữa các ảnh $\Gamma_1 = f(\gamma_1)$ và $\Gamma_2 = f(\gamma_2)$ cũng sẽ bằng $\varphi(\gamma_1, \gamma_2)$. Như vậy, về độ lớn và hướng góc giữa hai đường cong cắt nhau tại một điểm là bằng góc giữa các đường cong ảnh tương ứng của chúng qua ánh xạ $w = f(z)$, $f'(z_0) \neq 0$.

Định nghĩa 2.3.1. Giả sử γ_1 và γ_2 là hai đường cong đi qua điểm vô cùng $z = \infty$. Khi đó góc giữa các ảnh của γ_1 và γ_2 qua ánh xạ $\zeta = \frac{1}{z}$ tại điểm $\zeta = 0$ được gọi là góc giữa hai đường cong γ_1 và γ_2 tại $z = \infty$.

Ví dụ 1. Giả sử hai tia γ_1 và γ_2 xuất phát từ điểm hữu hạn z_0 . Khi đó góc giữa γ_1 và γ_2 tại điểm $z = \infty$ bằng góc giữa hai tia đó tại điểm z_0 với dấu ngược lại.

Để đơn giản, ta đặt $z_0 = 0$. Giả sử

$$\arg z|_{z \in \gamma_i} = \varphi_i, \quad i = 1, 2.$$

Khi đó góc giữa γ_1 và γ_2 (theo hướng từ γ_1 đến γ_2) tại điểm $z = 0$ là bằng $\alpha = \varphi_2 - \varphi_1$. Ảnh của các tia γ_1 và γ_2 qua ánh xạ $\zeta = 1/z$ là $\tilde{\gamma}_1$ và $\tilde{\gamma}_2$ và $\arg \zeta|_{\zeta \in \tilde{\gamma}_i} = -\varphi_i$. Do đó góc giữa $\tilde{\gamma}_1$ và $\tilde{\gamma}_2$ tại điểm $\zeta = 0$ bằng $(-\varphi_2) - (-\varphi_1) = -\alpha$ và theo định nghĩa 2.3.1 góc giữa hai tia γ_1 và γ_2 tại điểm ∞ bằng $-\alpha$.

Bây giờ ta nêu ra một số điều kiện đủ về sự bảo toàn góc tại điểm z_0 qua ánh xạ $w = f(z)$ liên tục tại lân cận điểm z_0 khi $z_0 = \infty$ hay khi $f(z_0) = \infty$.

1. Giả sử $z_0 = \infty$ và $f(z_0) \neq \infty$. Hàm $\zeta = 1/z$ ánh xạ các đường cong xuất phát từ điểm $z_0 = \infty$ thành các đường cong xuất phát từ điểm $\zeta = 0$. Do đó, để có sự bảo toàn các góc tại điểm $z_0 = \infty$ qua ánh xạ $w = f(z)$ chỉ cần các góc tại điểm $\zeta = 0$ được bảo toàn qua ánh xạ $w = f\left(\frac{1}{\zeta}\right)$. Và để

được điều đó ta chỉ cần có sự tồn tại đạo hàm khác 0 của hàm $f(1/\zeta)$ tại điểm $\zeta = 0$, tức là

$$\lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{f(1/\zeta) - f(\infty)}{\zeta - 0} = \lim_{z \rightarrow 0} [z(f(z) - f(\infty))] \neq 0.$$

2. Giả sử $z_0 \neq \infty$ còn $f(z_0) = \infty$. Trong trường hợp này các đường cong xuất phát từ điểm z_0 được ánh xạ thành các đường cong đi qua điểm $w = \infty$. Do đó để các góc tại điểm z_0 bảo toàn qua ánh xạ $f(z)$ điều kiện đủ là các góc tại điểm z_0 được bảo toàn qua ánh xạ $\zeta = \frac{1}{w} = \frac{1}{f(z)}$. Và để có điều đó, điều kiện đủ là tồn tại giới hạn hữu hạn sau đây:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\frac{1}{f(z)} - \frac{1}{f(z_0)}}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{f(z)(z - z_0)} \neq 0.$$

3. Bây giờ giả sử $z_0 = \infty$ và $f(z_0) = \infty$. Để bảo toàn các góc tại điểm $z_0 = \infty$ qua ánh xạ $w = f(z)$ điều kiện đủ là các góc tại điểm $\zeta_0 = \frac{1}{z_0} = 0$ bảo toàn qua ánh xạ $\zeta = \frac{1}{f\left(\frac{1}{\zeta}\right)}$. Và để có điều đó, điều kiện đủ là tồn tại giới hạn hữu hạn

$$\lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{1/f(1/\zeta) - 1/f(\infty)}{\zeta - 0} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z}{f(z)} \neq 0.$$

2.3.2 Ý nghĩa hình học của môđun đạo hàm

Bây giờ từ điểm $z_0 \in D$ ta kẻ tia theo hướng vector đơn vị \vec{s} và lấy trên tia đó điểm z . Ta lập tỷ số khoảng cách giữa các ảnh $f(z_0)$ và $f(z)$ với khoảng cách giữa các điểm z_0 và z .

Giới hạn của tỷ số này khi z dần đến z_0 theo tia được gọi là *hệ số co giãn* của ánh xạ f tại điểm z_0 theo hướng vector \vec{s} và ký hiệu là $m_{\vec{s}}^f(z_0)$. Nếu $z = z_0 + \vec{s}t$, $0 < t < \infty$ thì

$$m_{\vec{s}}^f(z_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{|f(z_0 + \vec{s}t) - f(z_0)|}{|\vec{s}t|} = |f'(z_0)|.$$

Như vậy, nếu hàm f khả vi tại điểm z_0 thì độ co giãn tuyến tính tại điểm z_0 theo hướng \vec{s} qua ánh xạ f , $f'(z_0) \neq 0$ là bằng $|f'(z_0)|$, $(m_{\vec{s}}^f(z_0) = |f'(z_0)|)$ và không phụ thuộc vào hướng \vec{s} .

Bây giờ giả sử γ là đường cong Jordan như trong 1. và $\Gamma = f(\gamma)$ là ảnh của nó.

$$\begin{aligned}|dz_0| &= (dx_0^2 + dy_0^2)^{1/2} dt = ds_0, \\ |dw_0| &= (du_0^2 + dv_0^2)^{1/2} dt = d\sigma_0\end{aligned}$$

là những yếu tố độ dài lần lượt của γ và Γ tại các điểm z_0 và w_0 tương ứng nên

$$|f'(z_0)| = \frac{d\sigma_0}{ds_0}. \quad (2.45)$$

Hệ thức (2.45) chứng tỏ rằng qua ánh xạ $w = f(z)$ hệ số co giãn tuyến tính tại điểm z_0 của một cung γ bất kỳ đi qua điểm đó không phụ thuộc vào dạng và hướng của γ .

2.3.3 Ánh xạ bảo giác

Bây giờ ta có thể phát biểu định nghĩa ánh xạ bảo giác.

Định nghĩa 2.3.2. Ánh xạ tô pô

$$w = f(z) = u(z) + iv(z),$$

biến miền D của mặt phẳng phức (z) lên miền D^* của mặt phẳng phức (w) được gọi là *ánh xạ bảo giác trong miền D* nếu tại mỗi điểm $z \in D$, góc giữa các đường cong được bảo toàn (cả về độ lớn và hướng) và độ co giãn là đều.

Từ 2.3.1 và 2.3.2 ta có thể phát biểu những điều kiện mà hàm biến phức cần thỏa mãn để nó là ánh xạ bảo giác.

Định lý 2.3.1. Giả sử ánh xạ tô pô $w = f(z)$ chỉnh hình trong miền D và $f'(z) \neq 0$, $\forall z \in D$. Khi đó ánh xạ $w = f(z)$ bảo giác trong miền D .

Chứng minh. Vì $f'(z) \neq 0, \forall z \in D$ nên độ co giãn là đều qua ánh xạ đó. Ta cần chứng minh rằng góc giữa các đường cong được bảo toàn qua ánh xạ đó. Thật vậy, giả sử z_0 là điểm tùy ý thuộc D , γ_1 và γ_2 là hai cung tròn Jordan xuất phát từ z_0 , ở đây $\gamma_1 : z = z_1(t), t \in [a, b], z_0 = z_1(t_0), z'_1(t_0) \neq 0$ và $\gamma_2 : z = z_2(\tau), \tau \in [a_2, b_2], z_0 = z_2(\tau_0), z'_2(\tau_0) \neq 0$, và góc giữa γ_1 và γ_2 là $\varphi(\gamma_1, \gamma_2)$. Ta ký hiệu ảnh của γ_1 và γ_2 tương ứng qua ánh xạ f là $\Gamma_1 = f(\gamma_1), \Gamma_2 = f(\gamma_2)$. Hai cung Γ_1 và Γ_2 đều đi qua điểm $w_0 = f(z_0)$ và có phương trình tương ứng là $w_1(t) = f[z_1(t)], z_1(t_0) = z_0$ và $w_2(\tau) = f[z_2(\tau)], z_2(\tau_0) = z_0$. Theo giả thiết ta có $w'_1(t_0) \neq 0$ và $w'_2(\tau_0) \neq 0$. Điều đó chứng tỏ rằng tại điểm $w_0 = f(z_0)$ hai cung Γ_1 và Γ_2 có tiếp tuyến. Ta ký hiệu góc giữa các ảnh Γ_1 và Γ_2 là $\varphi(\Gamma_1, \Gamma_2)$. Trên cơ sở (2.45) ta có

$$\begin{aligned} \arg f(z_0) &= \arg w_1(t_0) - \arg z'_1(t_0) \pmod{2\pi}, \\ \arg f(z_0) &= \arg w_2(\tau_0) - \arg z'_2(\tau_0) \pmod{2\pi}. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Từ (2.46) suy ra rằng với sự sai khác số hạng $2k\pi$ ta có

$$\arg w'_1(t_0) - \arg w'_2(\tau_0) = \arg z'_1(t_0) - \arg z'_2(\tau_0)$$

hay là

$$\varphi(\Gamma_1, \Gamma_2) = \varphi(\gamma_1, \gamma_2).$$

□

Từ định lý vừa chứng minh suy ra rằng *tính chỉnh hình và đạo hàm khác không là điều kiện đủ để hàm f là ánh xạ bảo giác*. Điều đó được luận chứng trong định lý sau đây.

Định lý 2.3.2. *Giả sử hàm $w = f(z)$ thực hiện ánh xạ bảo giác miền D lên miền D^* . Khi đó hàm $f \in \mathcal{H}(D)$ và $f'(z) \neq 0$ với mọi $z \in D$.*

Chứng minh. Đặt $\Delta w = \Delta f = f(z + \Delta z) - f(z), \forall z, z + \Delta z \in D$. Theo điều kiện của định lý, f là bảo giác nên tại điểm $z_0 \in D$ bất kỳ ánh xạ

$w = f(z)$ có tính chất bảo toàn góc và độ co giãn đều. Do đó với mọi z_1, z_2 thuộc lân cận của z_0 , với sự sai khác đại lượng vô cùng bé, ta có:

$$\text{a)} \quad \arg \Delta w_2 - \arg \Delta w_1 = \arg \Delta z_2 - \arg \Delta z_1$$

và do đó

$$\arg \frac{\Delta w_2}{\Delta z_2} = \arg \frac{\Delta w_1}{\Delta z_1} = \alpha, \quad (2.47)$$

b)

$$\left| \frac{\Delta w_2}{\Delta z_2} \right| = \left| \frac{\Delta w_1}{\Delta z_1} \right| = A \neq 0, \quad (2.48)$$

trong đó

$$\begin{aligned} \Delta z_1 &= z_1 - z_0, & \Delta z_2 &= z_2 - z_0, \\ \Delta w_1 &= f(z_1) - f(z_0), & \Delta w_2 &= f(z_2) - f(z_0). \end{aligned}$$

Từ hệ thức (2.47), (2.48), với sự sai khác đại lượng vô cùng bé, ta có

$$\frac{\Delta w_2}{\Delta z_2} = \frac{\Delta w_1}{\Delta z_1} = A \cdot e^{i\alpha}. \quad (2.49)$$

Vì z_1, z_2 là những điểm tùy ý trong lân cận điểm z_0 nên hệ thức (2.49) chứng tỏ tồn tại

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}$$

và do đó tồn tại đạo hàm $f'(z_0)$. Vì $A \neq 0$ nên

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = f'(z_0) \neq 0.$$

Vì z_0 là điểm tùy ý thuộc D , nên f chỉnh hình trong D . □

2.3.4 Ánh xạ liên tục và ánh xạ chỉnh hình

Từ các mục 2.3.1 - 2.3.3 của tiết này, ta thấy rằng ánh xạ chỉnh hình với đạo hàm khác 0 được đặc trưng bởi hai tính chất

1. Tính chất bảo toàn góc;
2. Độ co giãn đều.

Một bài toán được đặt ra tự nhiên là:

I) Mọi ánh xạ liên tục

$$w = u + iv \quad (2.50)$$

có tính chất bảo toàn góc có phải đều là chỉnh hình không? (Nói cách khác: tính chất bảo toàn góc có kéo theo sự co giãn đều không?)

Hoặc bài toán tương tự:

II) Mọi ánh xạ liên tục có độ co giãn đều có phải là chỉnh hình hay không?

Cả hai vấn đề trên đây đều có lời giải hợp lý nếu ngay từ đầu ta giả thiết rằng đối với ánh xạ đã cho (2.50) các hàm u và v đều có đạo hàm riêng liên tục.

Định lý 2.3.3. *Giả sử phần thực $u(z)$ và phần ảo $v(z)$ của ánh xạ $f(z) = u(z) + iv(z)$ có các đạo hàm riêng cấp một liên tục và ánh xạ $f(z)$ có tính chất bảo toàn góc tại mọi điểm $z \in D$. Khi đó $f \in \mathcal{H}(D)$ và $f'(z) \neq 0$.*

Chứng minh. Ta có

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} e^{-2i\varphi},$$

trong đó $\varphi = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \arg \Delta z$.

Theo điều kiện của định lý, khi cố định z thì $\arg\left(\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}\right)$ không phụ thuộc vào φ nên

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = 0.$$

□

Định nghĩa 2.3.3. Ánh xạ \mathbb{R}^2 - khả vi f được gọi là *phản chỉnh hình (đối chỉnh hình)* trong miền D nếu

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

tại mọi điểm $z \in D$.

Hiển nhiên rằng nếu $f \in \mathcal{H}(D)$ thì hàm \overline{f} là phản chỉnh hình trong D .

Định lý 2.3.4. Giả sử $u(z)$ và $v(z)$ có các đạo hàm riêng cấp 1 liên tục trong miền D và tại mọi điểm $z \in D$ nó có độ co giãn đều, tức là $\left| \lim \frac{\Delta w}{\Delta z} \right| \neq 0$ không phụ thuộc vào φ . Khi đó ánh xạ $w = f = u + iv$ là chỉnh hình hoặc phản chỉnh hình.

Chứng minh. Từ hệ thức (2.7) ta có

$$\left| \lim \frac{\Delta w}{\Delta z} \right|^2 = \left| \frac{\partial w}{\partial z} \right|^2 + \left| \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} \right|^2 + 2\operatorname{Re} \left\{ \frac{\partial w}{\partial z} \cdot \overline{\frac{\partial w}{\partial \bar{z}}} e^{2i\varphi} \right\}.$$

Từ điều kiện của định lý ta rút ra

$$\frac{\partial w}{\partial z} \cdot \overline{\frac{\partial w}{\partial \bar{z}}} = 0.$$

Ta sẽ chứng minh rằng hoặc $\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = 0, \forall z \in D$ hoặc $\frac{\partial w}{\partial z} = 0, \forall z \in D$.

Thật vậy, nếu cả hai hệ thức vừa nói đồng thời được thỏa mãn tại một điểm nào đó thuộc D thì các đạo hàm riêng của f theo x và y đều bằng 0 tại điểm đó. Nhưng điều đó không thể xảy ra do điều kiện của định lý. Vì các hàm $\frac{\partial f}{\partial z}$ và $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ đều liên tục nên các tập hợp

$$E_1 = \left\{ z \in D : \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \right\}, \quad E_2 = \left\{ z \in D : \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = 0 \right\}$$

đều là những tập hợp đóng trong D . Như vậy miền D là hợp của hai tập hợp đóng không giao nhau E_1 và E_2 . Do D liên thông nên một trong hai tập hợp này phải là tập hợp trống. \square

Trong trường hợp nếu xét ánh xạ liên tục tùy ý nào đó thì hai vấn đề đặt ra trên đây sẽ trở nên rất khó khăn. Tuy nhiên, bằng cách ứng dụng các phương pháp của lý thuyết hàm biến thực đối với bài toán I, D. Menchoff¹ đã chứng minh được rằng

¹D. Menchoff, Sur la représentation conforme des domaines planes, Math. Ann. 1926.

Nếu ánh xạ đơn diệp liên tục $w = f(z)$ có tính chất bảo toàn góc thì $f(z)$ là hàm chỉnh hình.

Thế nhưng đến nay người ta chưa rõ tính đơn diệp trong phép chứng minh định lý trên cần thiết đến mức nào. Còn đối với bài toán II thì nó đã được giải quyết trọn vẹn. H. Bohr² đã chứng minh được rằng

Nếu ánh xạ đơn diệp liên tục $w = f(z)$ có độ co giãn đều tại mọi điểm $z \in D$ thì hoặc $f(z)$ là hàm chỉnh hình hoặc $f(z)$ là phản chỉnh hình.

Ở đây, giả thiết “đơn diệp” đóng vai trò cốt yếu. Thật vậy, xét ví dụ hàm

$$f(z) = \begin{cases} z & \text{khi } \operatorname{Im} z \geq 0, \\ \bar{z} & \text{khi } \operatorname{Im} z \leq 0. \end{cases}$$

Hàm $f(z)$ liên tục trên \mathbb{C} nhưng không đơn diệp. Hàm $f(z)$ có độ co giãn đều vì rằng

$$\begin{aligned} \lim \left| \frac{\Delta w}{\Delta z} \right| &= \lim \left| \frac{\Delta z}{\Delta z} \right| = 1 \text{ khi } \operatorname{Im} z \geq 0, \\ \lim \left| \frac{\Delta w}{\Delta z} \right| &= \lim \left| \frac{\Delta \bar{z}}{\Delta z} \right| = 1 \text{ khi } \operatorname{Im} z \leq 0. \end{aligned}$$

Thế nhưng $f(z)$ không chỉnh hình và cũng không phản chỉnh hình trong mặt phẳng phức (z).

2.4 Các đẳng cấu sơ cấp

Giả sử D là miền của mặt phẳng biến phức z , D^* là miền của mặt phẳng biến phức w . Theo định nghĩa, phép đồng phôi $f : D \rightarrow D^*$ được gọi là một phép đẳng cấu nếu cả ánh xạ f lẫn ánh xạ ngược f^{-1} đều chỉnh hình. Phép đẳng cấu miền D lên chính nó được gọi là phép tự đẳng cấu.

Về sau ánh xạ bảo giác (đơn diệp) f biến miền D lên miền D^* còn được gọi là đẳng cấu (bảo giác), còn D và D^* được gọi là những miền đẳng cấu

²H. Bohr, Über streckentreue und conforme Abbildung, Math. z., 1918, s, 403

với nhau. Trong mục này ta sẽ trình bày các đẳng cấu đơn giản nhất thực hiện bởi các hàm sơ cấp hoặc tổ hợp của các hàm ấy cùng một ví dụ để tiện làm quen với cách giải bài toán tìm các đẳng cấu biến miền này lên miền kia. Đồng thời thông qua việc trình bày đó, chúng tôi muốn đi đến một kết luận là: quá trình giải bài toán tìm đẳng cấu biến một miền cho trước lên miền khác được tiến hành gần giống như quá trình tìm nguyên hàm của một hàm cho trước mà ở đây các ánh xạ sơ cấp sẽ được trình bày có vai trò như một “bảng tích phân cơ bản”.

Khi giải các bài toán ánh xạ bảo giác ta thường sử dụng hai tính chất sau đây của ánh xạ bảo giác (sẽ được trình bày kỹ trong 7.1):

- (i) Ánh xạ ngược với ánh xạ bảo giác là ánh xạ bảo giác.
- (ii) Hợp của hai ánh xạ bảo giác là ánh xạ bảo giác.

2.4.1 Đẳng cấu phân tuyến tính

Ánh xạ phân tuyến tính đã được đề cập đến trong chương I. Ở đây, ta sẽ trình bày các tính chất cơ bản nhất của ánh xạ đó.

Ánh xạ phân tuyến tính được xác định bởi hệ thức

$$w = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc \neq 0, \quad (2.51)$$

trong đó a, b, c, d là các số phức.

Với điều kiện $ad - bc \neq 0$ ta có $w \not\equiv \text{const.}$ Trong công thức (2.51) nếu $c = 0$ còn $d \neq 0$ thì

$$w = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d} = \tilde{a}z + \tilde{b}.$$

Đó là một hàm nguyên.

Định lý 2.4.1. *Ánh xạ phân tuyến tính (2.51) là một phép đồng phôi biến $\overline{\mathbb{C}}$ lên $\overline{\mathbb{C}}$.*

Chứng minh. 1. Trường hợp $c = 0$ là hiển nhiên.

2. Ta xét trường hợp $c \neq 0$. Giải phương trình (2.51) đối với z ta có

$$z = \frac{dw - b}{-cw + a}, \quad ad - bc \neq 0. \quad (2.52)$$

Đó là hàm ngược của (2.51). Ánh xạ (2.52) đơn trị trong mặt phẳng $\overline{\mathbb{C}}$ và là ánh xạ phân tuyến tính. Do đó (2.51) đơn trị một - một trên $\overline{\mathbb{C}}$.

Tính liên tục của (2.51) tại các điểm $z \neq -\frac{d}{c}, \infty$ là hiển nhiên. Bằng cách đặt

$$w(\infty) = \frac{a}{c}, \quad w\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty$$

ta thấy rằng (2.51) liên tục trên $\overline{\mathbb{C}}$. Định lý được chứng minh. \square

Định lý 2.4.2. *Ánh xạ phân tuyến tính bảo giác khắp nơi trên $\overline{\mathbb{C}}$.*

Chứng minh. 1. Đối với $z \neq -d/c, \infty$ tính bảo giác được suy từ chỗ là tại các điểm ấy

$$\frac{dw}{dz} = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2} \neq 0.$$

2. Bây giờ giả sử hai đường cong γ_1 và γ_2 đi qua điểm $z = -d/c$ và α là góc giữa γ_1 và γ_2 tại điểm ấy. Từ **2.3.1** suy ra rằng góc giữa các ảnh γ_1^* và γ_2^* của γ_1 và γ_2 tương ứng qua ánh xạ (2.51) tại điểm $w = \infty$ (tương ứng với $z = -d/c$) là bằng α vì

$$\lim_{z \rightarrow -d/c} \frac{1}{\frac{az + b}{cz + d}(z + d/c)} = \lim_{z \rightarrow -d/c} \frac{c}{az + b} \neq 0.$$

Trường hợp $z = \infty$ cũng được chứng minh tương tự. \square

Định nghĩa 2.4.1. Ánh xạ phân tuyến tính biến miền D lên miền D^* được gọi là *đẳng cấu phân tuyến tính*, còn các miền D và D^* được gọi là những miền *đẳng cấu phân tuyến tính* với nhau.

Định lý 2.4.3. Tập hợp mọi đẳng cấu phân tuyến tính lập thành một nhóm, nghĩa là

1. Hợp (tích) các đẳng cấu phân tuyến tính là đẳng cấu phân tuyến tính.
2. Ánh xạ ngược của đẳng cấu phân tuyến tính là đẳng cấu phân tuyến tính.

Chứng minh. Điều khẳng định 2) là hiển nhiên.

Ta chứng minh 1). Giả sử

$$\begin{aligned}\zeta &= \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1}, & a_1 d_1 - b_1 c_1 &\neq 0, \\ w &= \frac{a_2 \zeta + b_2}{c_2 \zeta + d_2}, & a_2 d_2 - b_2 c_2 &\neq 0.\end{aligned}$$

Khi đó

$$\begin{aligned}w &= \frac{a_2 \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1} + b_2}{c_2 \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1} + d_2} \\ &= \frac{(a_1 a_2 + c_1 b_2)z + (b_1 a_2 + d_1 b_2)}{(a_1 c_2 + c_1 d_2)z + (b_1 c_2 + d_1 d_2)} = \frac{az + b}{cz + d},\end{aligned}$$

trong đó $ad - bc = (a_1 d_1 - b_1 c_1)(a_2 d_2 - b_2 c_2) \neq 0$. □

Nhận xét. Hiển nhiên rằng nhóm các đẳng cấu phân tuyến tính là nhóm không giao hoán. Thật vậy, giả sử $w(z) = \frac{1}{z}$, $\varphi(z) = z + 1$.

Khi đó

$$w(\varphi(z)) = \frac{1}{z+1}, \quad \varphi(w(z)) = \frac{1}{z} + 1.$$

Do đó

$$w(\varphi(z)) \neq \varphi(w(z)).$$

Vì qua phép chiếu nổi cả đường thẳng lẫn đường tròn trên $\overline{\mathbb{C}}$ đều tương ứng với đường tròn trên mặt cầu Riemann nên ta có thể quy ước gọi đường

thẳng hay đường tròn trên mặt phẳng phức đều là “đường tròn” trên $\overline{\mathbb{C}}$ (ta xem đường thẳng trên \mathbb{C} là đường tròn trên $\overline{\mathbb{C}}$ đi qua điểm ∞), và gọi hình tròn, phần ngoài hình tròn và nửa mặt phẳng (hình tròn với bán kính vô cùng) đều là “hình tròn” trên $\overline{\mathbb{C}}$.

$$S(a, R) = \{|z - a| < R\} - \text{hình tròn},$$

$$S^*(a, R) = \{|z - a| > R\} - \text{phần ngoài hình tròn},$$

$$P(R, \varphi) = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(e^{-i\varphi} z) > R\} \text{ là nửa mặt phẳng}.$$

Thật vậy, đặt $e^{+i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$, $z = x + iy$, ta có

$$P(R, \varphi) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \cos \varphi + y \sin \varphi > R\}.$$

Đó là nửa mặt phẳng;

Định lý 2.4.4. *Đẳng cấu phân tuyến tính bất kỳ biến “hình tròn” (“đường tròn”) thành “hình tròn” (tương ứng thành “đường tròn”).*

Nói cách khác: “hình tròn” và “đường tròn” đều là bất biến của nhóm các đẳng cấu phân tuyến tính.

Chứng minh. Ánh xạ phân tuyến tính có thể biểu diễn dưới dạng hợp của các ánh xạ:

$$w = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c^2} \xi; \quad \xi = \frac{1}{\zeta}; \quad \zeta = z + \frac{d}{c},$$

trong đó có hai ánh xạ tuyến tính và ánh xạ $\xi = 1/\zeta$. Đối với các ánh xạ tuyến tính định lý 2.4.4 là hiển nhiên. Ta chỉ cần xét phép nghịch đảo $w = \frac{1}{z}$.

1. Ta xét trường hợp hình tròn $S(a, R)$. Ảnh của nó sẽ là

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{w} - a \right| < R, \quad |1 - aw| < R|w|, \quad |1 - aw|^2 < R^2|w|^2 \\ \Rightarrow 1 - 2\operatorname{Re}(aw) + |a^2||w|^2 < R^2|w|^2. \end{aligned}$$

Tiếp theo ta xét ba trường hợp sau

a) $|a| > R$. Ta có

$$\begin{aligned}
 & (|a|^2 - R^2)|w|^2 - 2\operatorname{Re}(aw) + 1 < 0 \\
 \Rightarrow & |w|^2 - 2\operatorname{Re}\frac{aw}{|a|^2 - R^2} + \frac{|a|^2}{(|a|^2 - R^2)^2} \\
 & < \frac{|a|^2}{(|a|^2 - R^2)^2} - \frac{1}{|a|^2 - R^2} \\
 \Rightarrow & \left|w - \frac{\bar{a}}{|a|^2 - R^2}\right|^2 < \frac{R^2}{(|a|^2 - R^2)^2} \\
 \Rightarrow & \left|w - \frac{\bar{a}}{|a|^2 - R^2}\right| < \frac{R}{|a|^2 - R^2}.
 \end{aligned}$$

Đó là hình tròn.

b) Giả sử $|a| < R$. Tương tự như trên ta có

$$\left|w - \frac{\bar{a}}{|a|^2 - R^2}\right| > \frac{R}{R^2 - |a|^2}.$$

c) Giả sử $|a| = R$. Đặt $a = |a|e^{i\varphi}$, $\varphi = \arg a$, ta có:

$$\operatorname{Re}(aw) > \frac{1}{2} \Rightarrow \operatorname{Re}(e^{i\varphi}w) > \frac{1}{2|a|}.$$

Đó là nửa mặt phẳng.

2. Đối với phần ngoài hình tròn $A^*(a, R)$ định lý được xét tương tự.

3. Bây giờ ta xét phép ánh xạ nửa mặt phẳng $\operatorname{Re}(e^{-i\varphi}z) > -R$, $R > 0$.

Ảnh của nó sẽ là

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Re}\left(e^{-i\varphi}\frac{1}{w}\right) > -R & \Rightarrow \operatorname{Re}\left(e^{-i\varphi}\frac{\bar{w}}{|w|^2}\right) > -R \\
 & \Rightarrow \operatorname{Re}(e^{i\varphi}w) > -R|w|^2,
 \end{aligned}$$

và do đó

$$\begin{aligned}
 2R|w|^2 + 2\operatorname{Re}(e^{i\varphi}w) & > 0 \\
 \Rightarrow |w|^2 + 2\operatorname{Re}\left(\frac{e^{i\varphi}}{2R}w\right) + \frac{1}{4R^2} & > \frac{1}{4R^2} \\
 \Rightarrow \left|w + \frac{e^{-i\varphi}}{2R}\right|^2 > \frac{1}{4R^2}, \quad \left|w + \frac{e^{-i\varphi}}{2R}\right| & > \frac{1}{2R}.
 \end{aligned}$$

Đó là phần ngoài hình tròn. Phép ánh xạ nửa mặt phẳng $\operatorname{Re}(e^{-i\varphi}z) > R > 0$ được xét tương tự. \square

Nhận xét 2.4.1. Trong mọi trường hợp, điểm a được ánh xạ thành điểm $1/a$. Điểm này thuộc ảnh hình tròn $S(a, R)$ cùng với một lân cận nào đó của nó.

Định lý 2.4.5. *Ánh xạ phân tuyến tính biến miền thành miền.*

Chứng minh. Giả sử B là miền, $w = \varphi(z)$ là ánh xạ phân tuyến tính, $D = \varphi(B)$.

1. Chứng minh D là tập hợp mở. Với mọi $w_0 \in D$, tồn tại duy nhất điểm $z_0 \in B$ sao cho $\varphi(z_0) = w_0$. Giả sử $U(z_0) \subset B$ là lân cận của điểm z_0 (hình tròn với tâm z_0 nếu $z_0 \neq \infty$ hoặc phần ngoài hình tròn nếu $z_0 = \infty$). Khi đó theo định lý 2.4.4 ta có $\varphi(U(z_0))$ là “hình tròn” chứa điểm w_0 cùng với một lân cận nào đó của nó. Như vậy w_0 là điểm trong của D và do đó D là tập hợp mở.

2. Chứng minh D là tập hợp liên thông. Vì B là tập liên thông nên từ định lý 2.4.1 suy ra rằng D là tập hợp liên thông.

Như vậy D là tập hợp mở liên thông, nghĩa là: D là một miền. \square

Định lý 2.4.1, 2.4.2 và 2.4.4 là những tính chất đặc trưng của ánh xạ phân tuyến tính.

Ngoài tính bảo giác và bảo toàn đường tròn, nhóm các đẳng cấu phân tuyến tính còn có những bất biến khác nữa.

Đẳng cấu phân tuyến tính (2.51) chứa ba tham số phức là tỷ số của ba trong bốn hệ số a, b, c, d với hệ số thứ tư ($\neq 0$). Các tham số này được xác định đơn trị bởi điều kiện: ba điểm cho trước z_1, z_2, z_3 của mặt phẳng phức (z) biến thành ba điểm w_1, w_2, w_3 của mặt phẳng phức (w). Điều đó được suy ra từ định lý sau đây.

Định lý 2.4.6. *Tồn tại đẳng cấu phân tuyến tính duy nhất biến ba điểm khác nhau $z_1, z_2, z_3 \in \overline{\mathbb{C}}$ thành ba điểm khác nhau $w_1, w_2, w_3 \in \overline{\mathbb{C}}$ tương ứng. Đẳng cấu đó được xác định theo công thức*

$$\frac{w - w_1}{w - w_2} \cdot \frac{w_3 - w_2}{w_3 - w_1} = \frac{z - z_1}{z - z_2} \cdot \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1}. \quad (2.53)$$

Chứng minh. 1. *Tính duy nhất.* Giả sử ta có hai đẳng cấu $w_1(z)$ và $w_2(z)$ thỏa mãn các điều kiện của định lý. Giả sử $\zeta_2(w)$ là ánh xạ ngược của $w_2(z)$.

Ta xét ánh xạ $\zeta_2[w_1(z)]$. Đó là một đẳng cấu phân tuyến tính. Đẳng cấu này có ba điểm bất động z_1, z_2 và z_3 vì

$$\begin{aligned} w_1(z_k) &= w_k, & k &= 1, 2, 3, \\ \zeta_2(w_k) &= z_k, & k &= 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Do đó nếu đặt $\zeta_2[w_1(z)] = \frac{az+b}{cz+d}$ thì

$$\frac{az_k+b}{cz_k+d} = z_k, \quad k = 1, 2, 3,$$

hay là

$$cz_k^2 + (d-a)z_k - b = 0, \quad k = 1, 2, 3.$$

Đa thức bậc hai ở vế trái chỉ có thể có ba nghiệm khác nhau ($z_1 \neq z_2 \neq z_3$) khi mọi hệ số của nó đều bằng 0, tức là $a = d, b = c = 0$ và $\zeta_2[w_1(z)] \equiv z$ hay là $w_1(z) \equiv w_2(z)$.

2. Đẳng cấu phân tuyến tính thỏa mãn điều kiện của định lý được xác định theo công thức (2.53). Thật vậy, giải phương trình (2.53) đối với w ta thu được hàm phân tuyến tính. Ngoài ra khi thế cặp $z = z_1$ và $w = w_1$ vào (2.53) thì cả hai vế của (2.53) đều bằng 0. Thế cặp $z = z_3$ và $w = w_3$ vào (2.53) ta thu được cả hai vế đều bằng 1 và cuối cùng, thế cặp $z = z_2$ và $w = w_2$ ta thu được cả hai vế đều bằng ∞ . \square

Trong hình học, biểu thức

$$\lambda = \frac{z - z_1}{z - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}$$

được gọi là *tỷ số phi điều hòa* của bốn điểm z, z_1, z_2 và z_3 .

Nếu bốn điểm z_1, z_2, z, z_3 nằm trên một đường tròn (hoặc đường thẳng) thì tỷ số phi điều hòa là một số thực. Thật vậy

a) Nếu các điểm z_1, z_2, z, z_3 nằm trên đường thẳng $\zeta = \zeta_0 + te^{i\alpha}$, $-\infty < t < \infty$ ta có: $z_1 = \zeta_0 + t_1 e^{i\alpha}$, $z_2 = \zeta_0 + t_2 e^{i\alpha}$, $z = \zeta_0 + t_0 e^{i\alpha}$, $z_3 = \zeta_0 + t_3 e^{i\alpha}$ và từ đó

$$\begin{aligned} (z_1, z_2, z, z_3) &= \frac{z - z_1}{z - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} \\ &= \frac{t_0 - t_1}{t_0 - t_2} : \frac{t_3 - t_1}{t_3 - t_2} \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

b) Nếu các điểm z, z_1, z_2, z_3 nằm trên đường tròn $\zeta = \zeta_0 + re^{it}$, $r > 0$, $0 \leq t \leq 2\pi$, ta có $z_1 = \zeta_0 + re^{i\varphi_1}$, $z_2 = \zeta_0 + re^{i\varphi_2}$, $z_3 = \zeta_0 + re^{i\varphi_3}$ và từ đó ta có

$$\begin{aligned} (z_1, z_2, z, z_3) &= \frac{e^{i\varphi_0} - e^{i\varphi_1}}{e^{i\varphi_0} - e^{i\varphi_2}} : \frac{e^{i\varphi_3} - e^{i\varphi_1}}{e^{i\varphi_3} - e^{i\varphi_2}} \\ &= \frac{e^{i\frac{\varphi_0+\varphi_1}{2}} \left[e^{i\frac{\varphi_0-\varphi_1}{2}} - e^{-i\frac{\varphi_0-\varphi_1}{2}} \right]}{e^{i\frac{\varphi_0+\varphi_2}{2}} \left[e^{i\frac{\varphi_0-\varphi_1}{2}} - e^{-i\frac{\varphi_0-\varphi_1}{2}} \right]} : \frac{e^{i\frac{\varphi_2+\varphi_1}{2}} \left[e^{i\frac{\varphi_3-\varphi_1}{2}} - e^{-i\frac{\varphi_3-\varphi_1}{2}} \right]}{e^{i\frac{\varphi_1+\varphi_3}{2}} \left[e^{i\frac{\varphi_3-\varphi_2}{2}} - e^{-i\frac{\varphi_3-\varphi_2}{2}} \right]} \\ &= \frac{\sin \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{2}}{\sin \frac{\varphi_0 - \varphi_2}{2}} : \frac{\sin \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{2}}{\sin \frac{\varphi_3 - \varphi_2}{2}} \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Từ định lý 2.4.6 ta rút ra một tính chất quan trọng nữa của đẳng cấu phân tuyến tính.

Hệ quả 2.4.1. *Tỷ số phi điều hòa là một bất biến của nhóm các đẳng cấu phân tuyến tính.*

Định nghĩa 2.4.2. 1. Hai điểm z và z^* được gọi là *đối xứng với nhau qua đường tròn* $\Gamma = \{|z - z_0| = R\} \subset \overline{\mathbb{C}}$ nếu chúng có các tính chất sau:

- z và z^* cùng nằm trên một tia đi từ z_0 ;
- $|z - z_0| \cdot |z^* - z_0| = R^2$.

2. Mọi điểm trên đường tròn Γ được xem là đối xứng với chính nó qua Γ .

Từ định nghĩa 2.4.2 suy ra rằng các điểm đối xứng qua đường tròn Γ liên hệ với nhau bởi hệ thức

$$w = z_0 + \frac{R^2}{\overline{z - z_0}}.$$

Thật vậy, từ biểu thức vừa viết suy ra

$$|w - z_0| |z - z_0| = R^2$$

và

$$\arg(w - z_0) = \arg(z - z_0).$$

Trong hình học sơ cấp ta biết rằng hai điểm z và z^* đối xứng với nhau qua đường tròn Γ khi và chỉ khi mọi đường tròn $\gamma \subset \overline{\mathbb{C}}$ đi qua z và z^* đều trực giao với Γ .

Ta có định lý sau.

Định lý 2.4.7. *Tính đối xứng tương hỗ giữa các điểm là một bất biến của nhóm các đẳng cấu phân tuyến tính.*

Chứng minh. Kết luận của định lý được suy từ định lý 2.4.2 và 2.4.4. \square

Từ sự bất biến của tính đối xứng giữa các điểm suy ra rằng trong trường hợp khi đường tròn biến thành đường thẳng, tính đối xứng trùng với khái niệm đối xứng thông thường.

Ta minh họa việc áp dụng tính bất biến của các điểm đối xứng qua đẳng cấu phân tuyến tính bằng các định lý sau đây.

Định lý 2.4.8. *Đẳng cấu phân tuyến tính bất kỳ biến nửa mặt phẳng trên lên hình tròn đơn vị đều có dạng*

$$w = e^{i\lambda} \frac{z - \alpha}{z - \overline{\alpha}}, \quad \text{Im } \alpha > 0, \quad (2.54)$$

trong đó $\lambda \in \mathbb{R}$ là số thực tùy ý.

Chứng minh. Giả sử đẳng cấu phân tuyến tính $w = w(z)$ ánh xạ nửa mặt phẳng trên $\text{Im } z > 0$ lên hình tròn $\{|w| < 1\}$ sao cho $w(\alpha) = 0$ ($\text{Im } \alpha > 0$).

Ta nhận xét rằng điểm $w = 0$ và $w = \infty$ sẽ tương ứng với các giá trị liên hợp của z , do đó $c \neq 0$ (vì nếu $c = 0$ thì điểm ∞ sẽ tương ứng với điểm ∞).

Các điểm $w = 0$, $w = \infty$ sẽ tương ứng với các điểm $-\frac{b}{a}$ và $-\frac{d}{c}$. Do đó có thể viết $-\frac{b}{a} = \alpha$, $-\frac{d}{c} = \bar{\alpha}$ và $w = \frac{a}{c} \frac{z - \alpha}{z - \bar{\alpha}}$.

Vì các điểm của trục thực có ảnh nằm trên đường tròn đơn vị, tức là $|w| = 1$ khi $z = x \in \mathbb{R}$, cho nên

$$\left| \frac{a}{c} \frac{x - \alpha}{x - \bar{\alpha}} \right| = \left| \frac{a}{c} \right| = 1$$

và $a = ce^{i\lambda}$. Như vậy $w = e^{i\lambda} \frac{z - \alpha}{z - \bar{\alpha}}$.

Ta chứng minh rằng đó là đẳng cấu phải tìm. Thật vậy, nếu $z = x \in \mathbb{R}$ thì hiển nhiên $|w| = 1$. Nếu $\text{Im } z > 0$ thì z gần α hơn so với $\bar{\alpha}$ (tức là $|z - \alpha| < |z - \bar{\alpha}|$) và do đó $|w| < 1$. \square

Nhận xét 2.4.2. Trong ánh xạ (2.54) góc quay của các đường cong tại điểm α là bằng $\lambda - \frac{\pi}{2}$ vì từ (2.54) ta có

$$\arg w'(\alpha) = \lambda - \frac{\pi}{2}.$$

Định lý 2.4.9. Đẳng cấu phân tuyến tính bất kỳ biến hình tròn $\{|z| < 1\}$ lên hình tròn $\{|w| < 1\}$ đều có dạng

$$w = e^{i\lambda} \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z}, \quad (2.55)$$

trong đó $|\alpha| < 1$, $\lambda \in \mathbb{R}$ là số thực tùy ý.

Chứng minh. Giả sử đẳng cấu phân tuyến tính $w = w(z)$ biến hình tròn $\{|z| < 1\}$ lên hình tròn $\{|w| < 1\}$ sao cho $w(\alpha) = 0$ ($|\alpha| < 1$). Theo tính chất bảo toàn điểm đối xứng, các điểm $w = 0$, $w = \infty$ tương ứng với các điểm liên hợp $z = \alpha$ và $z = \frac{1}{\bar{\alpha}}$, $|\alpha| < 1$. Do đó:

$$-\frac{b}{a} = \alpha, \quad -\frac{d}{c} = \frac{1}{\bar{\alpha}}, \quad |\alpha| < 1,$$

và

$$\begin{aligned} w &= \frac{a}{c} \frac{z - \alpha}{z - \frac{1}{\bar{\alpha}}} = \frac{a\bar{\alpha}}{c} \cdot \frac{z - \alpha}{\bar{\alpha}z - 1} \\ &= -\frac{a\bar{\alpha}}{c} \frac{z - \alpha}{1 - \alpha\bar{z}}. \end{aligned}$$

Vì các điểm của đường tròn đơn vị phải biến thành các điểm của đường tròn đơn vị nên $|w| = 1$ khi $|z| = 1$. Vì $z \cdot \bar{z} = |z|^2$ nên $z\bar{z} = 1$ khi $|z| = 1$. Vì số $1 - \bar{\alpha}z$ và $1 - \alpha\bar{z}$ liên hợp với nhau và $|1 - \bar{\alpha}z| = |1 - \alpha\bar{z}|$ nên nếu $|z| = 1$ thì

$$|1 - \bar{\alpha}z| = |1 - \alpha\bar{z}| \cdot |z| = |z - \alpha\bar{z}z| = |z - \alpha|.$$

Do đó khi $|z| = 1$ thì ta có:

$$\left| \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z} \right| = 1.$$

Nhưng khi đó $|w| = 1$ cho nên $\left| \frac{a\bar{\alpha}}{c} \right| = 1$ và $\frac{a\bar{\alpha}}{c} = e^{i\lambda}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Như vậy ta thu được (2.55).

Ta cần chứng minh rằng đó là đẳng cấu muốn tìm. Thật vậy nếu $z = e^{i\theta}$ và $\alpha = r_1 e^{i\beta}$ thì

$$|w| = \left| \frac{e^{i\theta} - r_1 e^{i\beta}}{1 - r_1 e^{-i\beta} \cdot e^{i\theta}} \right| = \left| \frac{1 - r_1 e^{i\beta} e^{-i\theta}}{1 - r_1 e^{-i\beta} e^{i\theta}} \right| = 1.$$

Nếu $z = r e^{i\theta}$ ($r < 1$) thì

$$\begin{aligned} |z - \alpha|^2 - |1 - \bar{\alpha}z|^2 &= r^2 - 2rr_1 \cos(\theta - \beta) + r_1^2 - (r_1^2 r^2 - 2r_1 r \cos(\theta - \beta) + 1) \\ &= (r^2 - 1)(1 - r_1^2) < 0 \end{aligned}$$

và do đó $|z - \alpha|^2 - |1 - \bar{\alpha}z|^2 < 0$ và $|w| < 1$. □

Nhận xét 2.4.3. Vì

$$\left(\frac{dw}{dz} \right)_{z=\alpha} = e^{i\lambda} \frac{1}{1 - |\alpha|^2}, \quad |\alpha| < 1,$$

cho nên về mặt hình học λ bằng góc quay của ánh xạ (2.55) tại điểm α :

$$\lambda = \left[\arg \frac{dw}{dz} \right]_{z=\alpha}.$$

Từ công thức (2.55) ta còn rút ra hệ thức

$$\left(\left| \frac{dw}{dz} \right| \right)_{z=\alpha} = \frac{1}{1 - |\alpha|^2}$$

và do đó độ giãn dần đến ∞ khi điểm α dần đến biên của hình tròn đơn vị.

Nhận xét 2.4.4. Phép đẳng cấu biến hình tròn $\{|z| < R\}$ lên hình tròn $\{|w| < R'\}$ có dạng

$$w = RR' e^{i\lambda} \frac{z - \alpha}{\bar{\alpha}z - R^2}, \quad |\alpha| < R, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Ví dụ 1. Giả sử $U_1 = \{|z| < 1\}$, $U_2 = \{|z - 1| < 1\}$ và $D = U_1 \cap U_2$. Tìm đẳng cấu biến miền D lên nửa mặt phẳng trên.

Giải. Giao điểm của các cung tròn giới hạn miền D là các điểm sau:

$$a = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad a^* = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Giả sử cung tròn đi qua điểm $z = 1$ được ký hiệu là δ_1 và cung tròn đi qua điểm $z = 0$ là δ_2 . Ta áp dụng các ánh xạ trung gian sau

1. Ánh xạ

$$z_1 = \frac{z - \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{z - \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)},$$

biến miền đã cho D thành một góc trong mặt phẳng z_1 với đỉnh là $z_1 = 0$. Vì góc giữa hai cung tròn δ_1 và δ_2 tại các điểm a cũng như a^* đều bằng $\frac{2\pi}{3}$

nên độ mở của góc vừa thu được bằng $\frac{2\pi}{3}$. Dễ dàng thấy rằng

$$z_1(1) = \frac{1 - \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{1 - \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z_1(0) = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

và do đó góc - ảnh thu được có cạnh đi qua điểm $z_1(1)$ và $z_1(0)$. Ta ký hiệu góc đó là $D(z_1)$.

2. Ánh xạ quay $z_2 = e^{\frac{-2\pi i}{3}} z_1$ biến góc $D(z_1)$ thành góc có một cạnh trùng với phần dương của trục thực, còn cạnh kia đi qua điểm $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3. Ánh xạ cần tìm có dạng $w = z_2^{3/2}$

$$\left(\text{góc có độ mở } \frac{2\pi}{3} \cdot \frac{3}{2} = \pi!\right)$$

Hợp nhất 1) - 3) ta thu được

$$w = -\left(\frac{2z - 1 + i\sqrt{3}}{2z - 1 - i\sqrt{3}}\right)^{3/2}$$

và hiển nhiên đó chỉ là một trong các hàm thực hiện ánh xạ phải tìm.

Ví dụ 2. Ánh xạ miền D là góc $\{0 < \arg z < \pi\beta, 0 < \beta < 2\}$ với nhát cắt theo một cung của đường tròn đơn vị từ điểm $z = 1$ đến điểm $z = e^{i\alpha\pi}$, $0 < \alpha < \beta$ (hãy vẽ hình) lên nửa mặt phẳng trên.

Giải. Ta sử dụng các ánh xạ trung gian sau đây

1. Ánh xạ $z_1 = z^{1/\beta}$ biến góc đã cho thành góc $D(z_1)$ có độ mở bằng π với nhát cắt thuộc đường tròn đơn vị đi từ điểm $z = 1$ đến điểm $z = e^{i\frac{\alpha}{\beta}\pi}$.

2. Ánh xạ phân tuyến tính

$$z_2 = \frac{z_1 - 1}{z_1 + 1}$$

biến miền $D(z_1)$ thành nửa mặt phẳng trên với nhát cắt theo trục ảo từ gốc tọa độ đến điểm $itg\frac{\alpha}{2\beta}\pi$. Ta ký hiệu miền ảnh đó là $D(z_2)$.

3. Ánh xạ $z_3 = z_2^2$ biến miền $D(z_2)$ thành mặt phẳng với nhát cắt theo $\left(-\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2\beta} \pi, \infty\right) \subset \mathbb{R}$. Ta ký hiệu miền thu được là $D(z_3)$.

Hiển nhiên hàm cần tìm có dạng

$$w = \sqrt{z_3 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2\beta} \pi} = \sqrt{\left(\frac{z^{1/\beta} - 1}{z^{1/\beta} + 1}\right)^2 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2\beta} \pi}.$$

Để kết thúc tiết này, ta chứng minh rằng ánh xạ phân tuyến tính (2.51) $w = \frac{az+b}{cz+d}$, $ad-bc \neq 0$ biến nửa mặt phẳng trên lên chính nó khi và chỉ khi mọi hệ số a, b, c, d đều là những số thực thỏa mãn điều kiện $ad-bc > 0$. Giả sử ánh xạ (2.51) biến nửa mặt phẳng trên lên chính nó. Ta xét ba điểm khác nhau z_1, z_2 và z_3 của trục thực trong mặt phẳng z . Ảnh của ba điểm này là những điểm biên của nửa mặt phẳng $\operatorname{Im} w > 0$, tức là các số $w_k = w(z_k)$, $k = 1, 2, 3$ là những số thực. Từ đó, ta thu được hệ phương trình với các hệ số thực để xác định a, b, c, d . Do đó với sự chính xác đến một thừa số nào đó từ hệ phương trình tuyến tính vừa thu được dễ dàng suy ra rằng các hệ số của (2.51) đều là thực. Vì $w = u + iv$, $z = x + iy$ nên khi $y > 0$ ta có $v > 0$. Thay $w = u + iv$, $z = x + iy$ vào (2.51) ta có

$$v = \frac{y(ad-bc)}{(cx+d)^2 + (cy^2)}.$$

Từ đó suy ra $ad-bc > 0$.

Ngược lại, nếu các hệ số a, b, c và d đều thực thì trục thực của mặt phẳng (z) được ánh xạ lên trục thực của mặt phẳng (w) và vì $ad-bc > 0$ nên nửa mặt phẳng trên được ánh xạ lên nửa mặt phẳng trên.

2.4.2 Ánh xạ $w = e^z$ và $z = \log w$

Nếu cho trước miền D và hàm $f \in \mathcal{H}(D)$ thì ta không thể tìm ngay một thuật toán cho phép tìm ảnh D^* của miền D qua ánh xạ f .

Đối với các đường cong sự việc có giản đơn hơn. Thật vậy nếu $z = z(t)$ là phương trình của đường cong trong mặt phẳng z thì phương trình của đường cong - ảnh là $f[z(t)]$. Do đó để khảo sát ảnh của một miền cho trước

tốt hơn cả là tiến hành như sau: ta chọn một họ đường cong “phủ” miền đã cho và tìm ảnh của họ đường cong đó. Tất nhiên, việc chọn họ đường cong được xác định bởi dạng cụ thể của hàm đã cho và miền đã cho.

Bây giờ ta áp dụng phương pháp đó để khảo sát một số hàm sơ cấp.

Đối với ánh xạ $w = e^z$ và $z = \log w$ ta đã có dịp đề cập đến trong chương II. Ta lưu ý rằng ánh xạ $w = e^z$ đơn diệp trong miền D nào đó khi và chỉ khi miền này không chứa những cặp điểm khác nhau z_1 và z_2 liên hệ với nhau bởi hệ thức

$$z_1 - z_2 = 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Định lý 2.4.10. Với số nguyên n bất kỳ ($n \in \mathbb{Z}$) hàm $w = e^z$ ánh xạ bảo giác băng vô hạn

$$D_n = \{a + 2n\pi < \operatorname{Im} z < b + 2n\pi, b - a < 2\pi\}, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (2.56)$$

lên góc

$$\Delta = \{a < \arg w < b\}. \quad (2.57)$$

Hàm $z = \log w$ ánh xạ bảo giác góc $\Delta = \{a < \arg w < b\}$ lên một trong các băng vô hạn D_n (số n được xác định bởi cách chọn nhánh chính hình của hàm lôgarit trong góc Δ).

Chứng minh. 1. Để chứng minh phần thứ nhất ta xét họ các đường thẳng song song với trục thực:

$$\{\lambda\} = \{z : z = x + i\alpha, \alpha \in \mathbb{R}\}, \quad -\infty < x < +\infty.$$

Ảnh của các đường thẳng này qua ánh xạ e^z có phương trình là:

$$\begin{aligned} w &= e^{x+i\alpha} = e^x \cdot e^{i\alpha} = (\text{đặt } e^x = t) \\ &= te^{i\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad 0 < t < \infty. \end{aligned}$$

Hiển nhiên rằng $w = te^{i\alpha}$ là phương trình của tia $\{\arg w = \alpha\}$.

Bây giờ ta cho α biến thiên liên tục từ $a+2n\pi$ đến $b+2n\pi$. Khi đó, đường thẳng λ sẽ quét hết băng D_0 và tia ảnh của đường thẳng λ cũng sẽ quay liên tục ngược chiều kim đồng hồ từ vị trí $\arg w = a$ đến vị trí $\arg w = b$. Từ đó suy ra ảnh của băng (2.56) với $b-a < 2\pi$ là góc (2.57).

2. Ta chứng minh phần thứ hai của định lý.

Ta đặt $w = re^{i\varphi}$. Khi đó một trong các giá trị của z sẽ là: $\log r + i(\varphi + 2n\pi)$, $n \in \mathbb{Z}$. Do đó từ $z = x + iy$ suy ra

$$\begin{aligned}x &= \log r, \\y &= \varphi + 2n\pi.\end{aligned}$$

Khi r biến thiên từ 0 đến ∞ thì x biến thiên từ $-\infty$ đến $+\infty$. Do đó nếu $b-a \leq 2\pi$ thì như ta đã biết hàm $\log w$ có thể tách nhánh chỉnh hình trong góc $a < \arg w < b$ và mỗi nhánh này sẽ ánh xạ bảo giác góc (2.57) lên băng D_n tương ứng nào đó. \square

Nhận xét 2.4.5. Khi ánh xạ băng $a < \operatorname{Im} z < b$ lên góc của mặt phẳng w thì một phần của mặt phẳng w sẽ được phủ nhiều lần nếu $b-a > 2\pi$ và lúc này ánh xạ không đơn điệu.

Bây giờ ta xét ảnh của các đường thẳng song song với trục ảo. Phương trình của những đường thẳng này có thể biểu diễn dưới dạng

$$\lambda : z = c + iy, \quad -\infty < y < \infty.$$

Từ đó rút ra ảnh của λ qua ánh xạ e^z có phương trình

$$e^z|_{z \in \lambda} = e^{c+iy} = e^c \cdot e^{iy}; \quad -\infty < y < \infty.$$

Hiển nhiên đó là phương trình của đường tròn

$$\{|w| = e^c\}$$

được vòng quanh nhiều lần. Mỗi đoạn thẳng có độ dài 2π sẽ tương ứng với một lần vòng quanh đầy đủ. Từ đó ta rút ra

Định lý 2.4.11. Với số nguyên $n \in \mathbb{Z}$ bất kỳ, hàm $w = e^z$ ánh xạ bảo giác hình chữ nhật

$$R = \{c < \operatorname{Re} z < d, a + 2n\pi < \operatorname{Im} z < b + 2n\pi, b - a < 2\pi\} \quad (2.58)$$

lên hình quạt vòng

$$Q = \{e^c < |w| < e^d, a < \arg w < b\}. \quad (2.59)$$

Hàm $z = \log w$ ánh xạ bảo giác hình quạt vòng (2.59) lên một trong các hình chữ nhật (2.58) (số n được xác định bởi việc chọn nhánh chính hình của hàm lôgarit trong hình quạt).

Ví dụ 3. Ánh xạ băng vô hạn nằm ngang $\{0 < y < 2\pi\}$ với nhát cắt $\{-\infty \leq x \leq a, y = H\}$ lên băng $\{0 < v < 2H\}$ (hình II.1)

Hình II.1

Giải

1. Hàm $z_1 = e^{\pi z/2H}$ ánh xạ miền đã cho lên nửa mặt phẳng trên với nhát cắt theo đoạn trục ảo $[0, bi]$, $b = e^{a\pi/2H}$. Ta ký hiệu miền thu được là $D(z_1)$.

2. Hàm $z_2 = \sqrt{z_1^2 + b^2} = \sqrt{e^{\pi z/H} + e^{\pi a/H}}$ ánh xạ miền $D(z_1)$ lên nửa mặt phẳng trên.

Hàm ánh xạ cần tìm có dạng

$$w = \frac{2H}{\pi} \ln z_2 = \frac{H}{\pi} \ln[e^{\pi z/H} + e^{\pi a/H}].$$

Ví dụ 4. Ánh xạ miền giới hạn bởi đường tròn đơn vị và đường thẳng λ tiếp xúc với đường tròn tại điểm $z = i$ lên nửa mặt phẳng trên.

Giải

1. Hàm $z_1 = \frac{z+i}{z-i}$ biến điểm chung của đường tròn và đường thẳng λ thành điểm $z_1 = \infty$. Từ tính chất bảo toàn đường tròn và tính bảo giác của ánh xạ phân tuyến tính suy ra ảnh của miền $D(z)$ là băng vô hạn:

$$D(z_1) = \{0 < \operatorname{Re} z_1 < 1\}.$$

2. Hàm $z_2 = \pi z_1$ ánh xạ băng $D(z_1)$ thành băng $D(z_2) = \{0 < \operatorname{Re} z_2 < \pi\}$.

3. Hàm $z_3 = e^{\pi i/2} z_2$ quay băng vừa thu được thành băng nằm ngang

$$D(z_3) = \{0 < \operatorname{Im} z_3 < \pi\}.$$

Từ đó dễ dàng suy rằng hàm

$$w = e^{z_3} = e^{\pi i \frac{z+i}{z-i}}$$

là ánh xạ phải tìm.

2.4.3 Hàm Jukovski

Hàm

$$w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) \quad (2.60)$$

được gọi là hàm Julovski. Hàm này chỉnh hình tại mọi điểm $z \neq 0, \infty$; trong đó

$$\frac{dw}{dz} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{z^2} \right)$$

và có cực điểm đơn tại các điểm $z = 0; \infty$. Do đó hàm Jukovski đơn điệu tại mỗi điểm $z \neq \pm 1$ vì $w(z) \neq 0$ khi $z \neq \pm 1$ và không đơn điệu tại điểm $z = \pm 1$.

Ta lưu ý rằng hàm Jukovski đơn diệp trong miền D nào đó khi và chỉ khi miền D không chứa những cặp điểm khác nhau z_1, z_2 liên hệ với nhau bởi đẳng thức $z_1 z_2 = 1$.

Ta nhận xét rằng vì $w(z) \equiv w\left(\frac{1}{z}\right)$ nên ảnh của miền D và miền $\overline{D} = \left\{t = \frac{1}{z} : z \in D\right\}$ là trùng nhau. Để khảo sát ánh xạ (2.60) ta xét các họ đường cong là: họ các đường tròn $\{|z| = r\}$ và họ các tia $\{\arg z = \varphi\}$.

Đầu tiên ta tìm ảnh của họ đường tròn.

Ta đặt $z = re^{i\theta}$, $w = u + iv$ và thu được

$$u + iv = \frac{1}{2} \left(re^{i\theta} + \frac{1}{r} e^{-i\theta} \right),$$

hay là

$$\begin{cases} u = \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right) \cos \theta \\ v = \frac{1}{2} \left(r - \frac{1}{r} \right) \sin \theta. \end{cases} \quad (2.61)$$

Ta xét đường tròn

$$\gamma(\rho) = \{z = \rho e^{i\theta}, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}, \quad (2.62)$$

($\rho > 0$ là số cố định). Từ (2.61) suy ra rằng qua ánh xạ Jukovski, ảnh của đường tròn (2.62) là elip

$$\begin{cases} u = \frac{1}{2} \left(\rho + \frac{1}{\rho} \right) \cos \theta, \\ v = \frac{1}{2} \left(\rho - \frac{1}{\rho} \right) \sin \theta, \end{cases} \quad (2.63)$$

với các bán trục là

$$a(\rho) = \frac{1}{2} \left(\rho + \frac{1}{\rho} \right), \quad b(\rho) = \frac{1}{2} \left| \rho - \frac{1}{\rho} \right|$$

và với các tiêu điểm là $w = \pm 1$ (vì $a^2(\rho) - b^2(\rho) = 1$). Bằng cách khử tham số θ từ phương trình (2.63) ta thu được dạng chính tắc của phương trình

elip

$$\frac{u^2}{a^2(\rho)} + \frac{v^2}{b^2(\rho)} = 1, \quad \rho \neq 1. \quad (2.64)$$

1. Trường hợp $0 < \rho < 1$. Vì khi $\rho < 1$ đại lượng $r - \frac{1}{r} < 0$ cho nên từ (2.63) suy ra rằng khi vòng quanh đường tròn $\gamma(\rho)$ theo hướng dương thì elip tương ứng trong mặt phẳng w sẽ chạy theo hướng âm. Thật vậy khi $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ta có $u > 0$ và giảm từ $a(\rho)$ đến 0, còn $v < 0$ và giảm từ 0 đến $-b(\rho)$. Khi $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ thì u tiếp tục giảm từ 0 đến $-a(\rho)$ còn v tăng từ $-b$ đến 0. Khi $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$, u tăng từ $-a$ đến 0, còn v tăng từ 0 đến b ; cuối cùng khi $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$ ta có u tăng từ 0 đến a , còn v giảm từ b đến 0.

2. Trường hợp $r > 1$. Trong trường hợp này hướng của đường tròn (2.62) và elip - ảnh của nó trong mặt phẳng w là trùng nhau và chạy theo hướng dương.

3. Trường hợp $r = 1$. Trong trường hợp này đường tròn $\{|z| = 1\}$ cũng biến thành elip với các bán trục $a(\rho) = 1$, $b(\rho) = 0$ nghĩa là biến thành nhất cắt $[-1, +1] \subset \mathbb{R}$.

Bây giờ ta xét các tia

$$z = re^{i\alpha}, \quad 0 < r < \infty \quad (2.65)$$

(α là số cố định). Qua ánh xạ Jukovski ảnh của tia (2.65) là đường cong

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right) \cos \alpha, \\ v &= \frac{1}{2} \left(r - \frac{1}{r} \right) \sin \alpha. \end{aligned} \right\} 0 < r < +\infty \quad (2.66)$$

Bằng cách khử tham số r từ (2.66) ta thu được

$$\frac{u^2}{\cos^2 \alpha} - \frac{v^2}{\sin^2 \alpha} = 1, \quad \alpha \neq \frac{k\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (2.67)$$

Đường cong (2.67) là đường hypecbôn với tiêu điểm tại $w = \pm 1$, dễ dàng chứng minh rằng các cặp đường kính đối xứng với nhau qua các trục tọa độ

(lập nên từ các bán kính

$$z = \pm r(\cos \alpha \pm i \sin \alpha), \quad 0 \leq r < 1)$$

được ánh xạ thành các hypecbôn không kể đỉnh, với tiêu điểm ± 1 và các bán trục $|\cos \alpha|, |\sin \alpha|$.

Khi $\alpha = 0$ ta có

$$u = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right), \quad v = 0 \quad (0 \leq r < 1).$$

Do đó ảnh của đường kính nằm ngang của hình tròn đơn vị là khoảng vô hạn của trục u từ điểm -1 đến điểm $+1$ qua ∞ .

Khi $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ta có

$$u = 0, \quad v = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r} - r\right), \quad 0 \leq r < 1.$$

Từ đó dễ dàng suy ra ảnh của đường kính thẳng đứng là toàn bộ trục ảo trừ gốc tọa độ.

Hiển nhiên rằng qua ánh xạ Jukovski hai họ đường cong (2.64) và (2.67) trực giao với nhau do tính bảo giác của ánh xạ (2.60).

Ta có định lý sau đây:

Định lý 2.4.12. Hàm Jukovski $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$:

1. Ánh xạ đường tròn $\{|z| = \rho\}$ thành elip (2.64) $0 < \rho < 1$.
2. Ánh xạ bảo giác hình tròn đơn vị $\{|z| < 1\}$ lên toàn bộ mặt phẳng đóng trừ nhất cắt theo đoạn $[-1, +1] \subset \mathbb{R}$.

Chứng minh. 1. Điều khẳng định thứ nhất là hiển nhiên.

2. Vì $a(\rho) = \frac{1}{2}\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)$, $b(\rho) = -\frac{1}{2}\left(\rho - \frac{1}{\rho}\right)$, nên như ta đã nói ở trên elip (2.64) chạy theo hướng âm khi vòng quanh đường tròn theo hướng dương.

a) Khi $\rho \rightarrow 0$ ta có

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} a(\rho) = \infty, \quad \lim_{\rho \rightarrow 0} b(\rho) = \infty,$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} (a(\rho) - b(\rho)) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho = 0.$$

Từ đó suy ra rằng khi $\rho \rightarrow 0$ thì các elip to dần ra và tròn dần lại.

b) Khi $\rho \rightarrow 1 - 0$ ta có

$$\lim_{\rho \rightarrow 1-0} a(\rho) = 1, \quad \lim_{\rho \rightarrow 1-0} b(\rho) = 0.$$

Từ đó suy ra rằng các elip ảnh co - dẹt dần thành đoạn $[-1, +1] \subset \mathbb{R}$.

Ta xét sự tương ứng giữa đường tròn đơn vị và các bờ của nhát cắt $[-1, +1]$.

Khi $r \rightarrow 1 - 0$ và $0 < \theta < \pi$ thì $v \rightarrow -0$. Khi $r \rightarrow 1 - 0$ và $\pi < \theta < 2\pi$, ta có $v \rightarrow +0$. Từ đó suy ra rằng nửa đường tròn trên biến thành bờ dưới của nhát cắt, còn nửa đường tròn dưới biến thành bờ trên. \square

Định lý 2.4.13. *Hàm Jukovski (2.60) ánh xạ bảo giác phần ngoài của hình tròn đơn vị lên toàn bộ mặt phẳng w với nhát cắt theo đoạn $[-1, +1]$ của trục thực.*

Chứng minh. Hiển nhiên điều kết luận của định lý có thể suy ngay từ chỗ là $w(z) \equiv w\left(\frac{1}{z}\right)$.

Phép chứng minh trực tiếp được tiến hành như sau. Ta xét họ đường tròn $\{|z| = \rho, \rho > 1\}$. Ảnh của họ này qua ánh xạ (2.60) là những elip chạy theo hướng dương và với các bán trục là

$$a(\rho) = \frac{1}{2}\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right), \quad b(\rho) = \frac{1}{2}\left(\rho - \frac{1}{\rho}\right).$$

a) Khi $\rho \rightarrow 1 + 0$ ta có

$$\lim a(\rho) = 1, \quad \lim b(\rho) = 0.$$

Do đó các elip (2.60) co - dẹt dần thành đoạn $[-1, +1]$. Ta xét sự tương ứng giữa đường tròn và nhát cắt $[-1, +1]$. Khi $\rho \rightarrow 1 + 0$, và $0 < \theta < \pi$ ta có $v \rightarrow +0$ và khi $\rho \rightarrow 1 + 0$ và $\pi < \theta < 2\pi$ ta có $v \rightarrow -0$.

Từ đó rút ra kết luận: nửa đường tròn trên biến thành bờ trên của nhát cắt và nửa đường tròn dưới biến thành bờ dưới của nhát cắt $[-1, +1]$.

b) Khi $\rho \rightarrow \infty$ ta có

$$\begin{aligned}\lim a(\rho) &= \infty, & \lim b(\rho) &= \infty \\ \lim[a(\rho) - b(\rho)] &= \lim \frac{1}{\rho} = 0.\end{aligned}$$

Do đó các elip - ảnh to dần ra và tròn dần lại. \square

Nhận xét 2.4.6. Tại các điểm $z = \pm 1$, ánh xạ Jukovski không bảo giác. Thật vậy từ (2.60) ta có

$$\begin{aligned}\frac{w-1}{w+1} &= \frac{\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) - 1}{\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) + 1} = \frac{z^2 + 1 - 2z}{z^2 + 1 + 2z} \\ &= \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2.\end{aligned}\tag{2.68}$$

Bây giờ ta đặt

$$\zeta = \frac{z-1}{z+1}; \quad \omega = \zeta^2; \quad w = \frac{1+\omega}{1-\omega}.\tag{2.69}$$

Từ đó ta suy ra rằng ánh xạ Jukovski là hợp của ba ánh xạ (2.69). Ánh xạ thứ nhất và thứ ba bảo giác khắp nơi trên $\overline{\mathbb{C}}$, ánh xạ thứ hai không bảo giác tại điểm $\zeta = 0$ (tương ứng với điểm $z = 1$) và tại điểm $\zeta = \infty$ (tương ứng với điểm $z = -1$).

Bây giờ ta xét ánh xạ ngược với ánh xạ Jukovski. Giải phương trình (2.60) đối với z , ta tìm được

$$z = w + \sqrt{w^2 - 1}$$

như vậy hàm

$$w = z + \sqrt{z^2 - 1}\tag{2.70}$$

là hàm ngược đối với hàm Jukovski. Hàm này là hàm đa trị: mỗi điểm z sẽ tương ứng với hai giá trị w_1 và w_2 liên hệ với nhau bởi hệ thức

$$w_1 w_2 = 1.$$

Trong miền $D = \overline{\mathbb{C}} \setminus [-1, +1]$ hàm (2.70) có thể tách thành hai nhánh chỉnh hình: một nhánh sẽ ánh xạ bảo giác phần ngoài đoạn $[-1, +1]$ lên phần ngoài hình tròn đơn vị, còn nhánh kia ánh xạ phần ngoài đoạn $[-1, +1]$ lên phần trong của hình tròn đơn vị.

Ta nhận xét rằng hai nhánh chỉnh hình vừa nói trên đây không thể được đặc trưng bởi dấu của căn thức. Thật vậy, ta xét nhánh thứ nhất: nhánh ánh xạ miền $D = \overline{\mathbb{C}} \setminus [-1, +1]$ lên phần ngoài hình tròn đơn vị. Tại điểm $z = 2$ nó nhận giá trị $(2 + \sqrt{3})$, và tại điểm $z = -2$ nó nhận giá trị $-(2 + \sqrt{3})$.

Ví dụ 5. Ánh xạ nửa mặt phẳng trên cắt bỏ nửa trên của hình tròn đơn vị và tia $\{x = 0, y > 2\}$ lên nửa mặt phẳng trên (hình II.2).

Hình II.2

Giải. Ta sử dụng các ánh xạ trung gian sau đây

1. Hàm

$$z_1 = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$$

ánh xạ miền $D(z)$ lên nửa mặt phẳng trên trừ nhất cắt theo trục ảo đi từ $\frac{3}{4}i$. Ta ký hiệu miền này là $D(z_1)$.

2. Hàm $z_2 = z_1^2$ ánh xạ miền $D(z_1)$ lên toàn bộ mặt phẳng z_2 trừ nhất cắt $\left(-\infty, -\frac{9}{16}\right)$ và $[0, \infty)$. Ta chỉ miền thu được là $D(z_2)$.

3. Ánh xạ phân tuyến tính $z_3 = \frac{z_2 + 9/16}{z_2}$ biến miền $D(z_2)$ thành miền

$D(z_3) = \overline{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{R}^+$. Từ các ánh xạ 1) - 3) suy ra rằng:

$$w = \sqrt{z_3} = \frac{\sqrt{4z^4 + 17z^2 + 4}}{2(z^2 + 1)}.$$

Ví dụ 6. Ánh xạ phần ngoài elip $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ lên phần ngoài hình tròn đơn vị.

Giải. Ta sử dụng các ánh xạ trung gian sau đây:

1. Vì elip đã cho có tiêu điểm tại các điểm

$$c = \pm\sqrt{25 - 16} = \pm 3,$$

nên đầu tiên ta dùng ánh xạ $z_1 = \frac{z}{3}$ và thu được elip với tiêu điểm ± 1 .

2. Hàm $z_2 = z_1 + \sqrt{z_1^2 - 1}$ ánh xạ hình elip vừa thu được lên hình tròn $\{|z_2| < 3\}$.

3. Ánh xạ đồng dạng $w = \frac{z_2}{3}$ cho ta ảnh của miền vừa thu được là hình tròn đơn vị. Như vậy ánh xạ cần tìm là

$$w = \frac{z + \sqrt{z^2 - 9}}{3}.$$

Ví dụ 7. Ánh xạ hình quạt $Q = \left\{ |z| < 1, 0 < \arg z < \frac{\pi}{n} \right\}$ trong đó $n \in \mathbb{N}$ lên chính nó sao cho các đoạn

$$\{|z| \leq \alpha, \arg z = 0\}, \quad 0 < \alpha < 1\}$$

và

$$\left\{ |z| \leq \alpha, \arg z = \frac{\pi}{n}, 0 < \alpha < 1 \right\}$$

biến thành đoạn bán kính tương ứng.

Ta sử dụng các ánh xạ trung gian sau:

1. Hàm $z_1 = z^n$ ánh xạ hình quạt Q lên nửa trên của hình tròn đơn vị. Đoạn bán kính $[0, \alpha]$ biến thành đoạn $[0, \alpha^n]$, đoạn $[0, \alpha e^{i\pi/n}]$ thành đoạn $[0, -\alpha^n]$.

2. Hàm $z_2 = \frac{1}{2}\left(z_2 + \frac{1}{z_2}\right)$ biến miền vừa thu được thành nửa mặt phẳng dưới và đoạn $[-\alpha^n, \alpha^n]$ biến thành phần biên từ $-\frac{1}{2}(\alpha^n + \alpha^{-n})$ đến $\frac{1}{2}(\alpha^n + \alpha^{-n})$ đi qua ∞ . Ta ký hiệu phần biên đó là $\lambda(\alpha)$.

3. Hàm ngược của hàm Jukovski $z_4 = z_3 + \sqrt{z_3^2 - 1}$ biến miền vừa thu được lên nửa trên của hình tròn đơn vị và đường kính nằm ngang là ảnh của phần biên từ -1 đến $+1$ (qua ∞).

Ảnh xạ hợp trong kết quả bằng

$$w = (\alpha^n + \alpha^{-n})^{-1/n} \sqrt{z^n - z^{-n} + \sqrt{(z^n + z^{-n})^2 - (\alpha^n + \alpha^{-n})^2}}.$$

2.4.4 Các đẳng cấu sơ cấp khác

Các đẳng cấu sơ cấp được nghiên cứu trong 2.4.1, 2.4.2 và 2.4.3 mang lại cho ta một dự trữ cực kỳ quan trọng các ánh xạ cơ bản. Nhờ các đẳng cấu này ta có thể xây dựng các ánh xạ thực hiện bởi các hàm sơ cấp khác. Thật vậy, khi biết các ánh xạ $w = f(\zeta)$ và $\zeta = \varphi(z)$ ta sẽ biết cả ánh xạ $f[\varphi(z)]$ (phép hợp các ánh xạ).

Ánh xạ sơ cấp cơ bản bất kỳ đều có thể biểu diễn dưới dạng hợp một số nào đó các ánh xạ mà ta đã nghiên cứu trong 1. 2. và 3. Thật vậy, ta xét các ánh xạ sơ cấp thực hiện bởi các hàm lượng giác sau đây:

1. Hàm $w = \cos z$. Theo định nghĩa ta có

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}. \quad (2.71)$$

Ánh xạ này là hợp của ba ánh xạ

a) $\zeta = iz$; b) $\omega = e^\zeta$; c) $w = \frac{1}{2}\left(\omega + \frac{1}{\omega}\right)$, trong đó mọi ánh xạ trung gian đều đã được khảo sát ở trên.

Giả sử qua ánh xạ a) ảnh của miền D là miền D_1 , qua ánh xạ b) ảnh của miền D_1 là D_2 và qua ánh xạ c) ảnh của miền D_2 là miền D^* . Ánh xạ a) đơn điệu khắp nơi, ánh xạ b) đơn điệu trong miền D_1 khi và chỉ khi D_1 không chứa những cặp điểm ζ_1 và ζ_2 liên hệ với nhau bởi hệ thức

$$\zeta_1 - \zeta_2 = 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}$$

hay là

$$z_1 - z_2 = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ánh xạ c) đơn điệu trong miền D_2 khi và chỉ khi D_2 không chứa những cặp điểm liên hệ với nhau bởi hệ thức

$$\omega_1 \omega_2 = 1,$$

hay là D không chứa những điểm mà

$$e^{iz_1} \cdot e^{iz_2} = e^{i(z_1+z_2)} = 1$$

tức là D không chứa những điểm mà

$$z_1 + z_2 = 2k\pi.$$

Từ đó suy ra rằng ánh xạ (2.71) đơn điệu trong miền D nào đó khi và chỉ khi miền D không chứa những điểm mà $z_1 - z_2 = 2k\pi$, hoặc $z_1 + z_2 = 2k\pi$.

2. Hàm $w = \sin z$. Từ hệ thức

$$\sin z = \cos \left(z - \frac{\pi}{2} \right)$$

suy rằng ánh xạ $w = \sin z$ khác với ánh xạ $\cos z$ bởi phép dịch chuyển mặt phẳng z .

Ánh xạ $w = \sin z$ cũng có thể biểu diễn qua các ánh xạ đã nghiên cứu ở trên. Ta biết rằng, theo định nghĩa

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad (2.72)$$

và do đó ánh xạ này là hợp của bốn ánh xạ:

$$\text{a) } z_1 = iz; \quad \text{b) } z_2 = e^{z_1}; \quad \text{c) } z_3 = -iz_2; \quad \text{d) } w = \frac{1}{2} \left(z_3 + \frac{1}{z_3} \right) = \sin z,$$

trong đó mỗi ánh xạ vừa viết đều đã được nghiên cứu.

3. Ánh xạ $w = \operatorname{tg} z$. Theo định nghĩa ta có

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z} \quad (2.73)$$

và do đó từ (2.71) và (2.72) rút ra:

$$\operatorname{tg} z = -i \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}} = -i \frac{e^{2iz} - 1}{e^{2iz} + 1}.$$

Do đó ánh xạ (2.73) là hợp của ba ánh xạ quen biết sau đây

a) $z_1 = 2iz$; b) $z_2 = e^{z_1}$; c) $w = -i \frac{z_2 - 1}{z_2 + 1}$.

4. Cũng tương tự, ánh xạ $w = \cotg z$ cũng là hợp của ba ánh xạ quen biết

a) $z_1 = 2iz$; b) $z_2 = e^{z_1}$; c) $w = i \frac{z_2 + 1}{z_2 - 1}$,

trong đó mọi ánh xạ trung gian đều đã được xét.

5. Hàm $w = z^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Ta có $z^\alpha = e^{\alpha \ln z}$. Ánh xạ này là hợp của các ánh xạ trung gian sau đây:

$$\text{a) } z_1 = \ln z; \quad \text{b) } z_2 = \alpha z_1; \quad \text{c) } w = e^{z_2}. \quad (2.74)$$

Ví dụ: Ta tìm ảnh của góc

$$D(z) = \{a < \arg z < b, b - a \leq 2\pi\}$$

qua ánh xạ $w = z^\alpha$ (tức là ánh xạ (2.74)).

Qua ánh xạ a) góc $D(z)$ biến thành một trong các băng sau

$$D(z_1) = \{a + 2k\pi < \operatorname{Im} z_1 < b + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

(số k được xác định bằng việc chọn nhánh của logarit trong góc $D(z)$).

Qua ánh xạ b) băng $D(z_1)$ biến thành băng

$$D(z_2) = \{\alpha a + \alpha 2k\pi < \operatorname{Im} z_2 < \alpha b + \alpha 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

với điều kiện là $\alpha(b - a) \leq 2\pi$.

Do đó qua ánh xạ $w = z^\alpha$ góc đã cho có ảnh là một trong các góc sau

$$\{\alpha a + \alpha 2k\pi < \arg w < \alpha b + \alpha 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

nếu $b - a \leq 2\pi$ và $\alpha(b - a) \leq 2\pi$.

2.4.5 Một số ví dụ

Các ánh xạ bảo giác đã xét ở trên là những ánh xạ “mẫu”. Nhờ các ánh xạ đó, ta có thể tìm ánh xạ bảo giác các miền đơn giản khác.

Ví dụ 8. Tìm ánh xạ bảo giác hình tròn $\{|z| < 1\}$ lên hình tròn $\{|w| < 1\}$ thỏa mãn các điều kiện

$$w(z_0) = w_0; \quad \arg w'(z_0) = \alpha.$$

Giải. Hàm

$$\zeta = g(z) = e^{i\alpha} \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z}$$

ánh xạ hình tròn $\{|z| < 1\}$ lên hình tròn $\{|\zeta| < 1\}$ và thỏa mãn điều kiện z_0 biến thành 0 và $\arg g'(z_0) = \alpha$.

Hàm

$$\zeta = h(w) = \frac{w - w_0}{1 - \bar{w}_0 w}$$

ánh xạ hình tròn $\{w < 1\}$ lên hình tròn $\{|\zeta| < 1\}$ thỏa mãn điều kiện w_0 biến thành 0, $\arg h'(w_0) = 0$. Từ đó suy ra rằng hàm $w = w(z)$ xác định bởi hệ thức

$$\frac{w - w_0}{1 - \bar{w}_0 w} = e^{i\alpha} \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z}$$

sẽ là ánh xạ muốn tìm.

Ví dụ 9. Ánh xạ hình quạt $Q = \left\{ z \in \mathbb{C} : 0 < \arg z < \frac{\pi}{4} \right\}$ lên hình tròn $\{|w| < 1\}$ sao cho các điểm $z = e^{i\pi/8}$ và $z = 0$ biến thành các điểm $w = 0$ và $w = 1$ tương ứng.

Giải. Hàm $z_1 = z^4$ ánh xạ hình quạt đã cho lên nửa mặt phẳng trên $\text{Im } z_1 > 0$. Khi đó các điểm $z = e^{i\pi/8}$ biến thành $z_1 = e^{i\pi/2} = i$ và điểm $z = 0$ biến thành điểm $z_1 = 0$. Bây giờ ta ánh xạ nửa mặt phẳng trên vừa thu được lên hình tròn $\{|z_2| < 1\}$ sao cho điểm $z_1 = i$ biến thành tâm của hình tròn

$$z_2 = k \frac{z_1 - i}{z_1 + i}.$$

Số k được xác định từ điều kiện là điểm $z_1 = 0$ biến thành điểm $z_2 = 1$. Dễ dàng thấy rằng $k = -1$. Từ đó suy ra rằng hàm:

$$w = -\frac{z^4 - i}{z^4 + i} = \frac{i - z^4}{i + z^4}$$

là ánh xạ cần tìm.

Ví dụ 10. Tìm ánh xạ phân tuyến tính biến miền nhị liên giới hạn bởi hai đường tròn $\gamma = \{|z - 3| = 9\}$ và $\Gamma = \{|z - 8| = 16\}$ lên vành đồng tâm với tâm tại điểm $w = 0$ sao cho bán kính ngoài của vành bằng 1.

Giải. Điểm $w = 0$ và $w = \infty$ đồng thời đối xứng với nhau qua hai đường tròn biên của vành đồng tâm. Từ đó, theo định lý 2.4.7 các nghịch ảnh của $w = 0$ và $w = \infty$ cũng sẽ đồng thời đối xứng qua hai đường tròn Γ và γ . Ta xác định các nghịch ảnh này. Vì tâm của Γ và γ nằm trên trục thực nên các điểm cần tìm cũng nằm trên trục thực. Ta ký hiệu các điểm ấy là x_1 và x_2 . Theo định nghĩa 9.2 ta có

$$(x_1 - 3)(x_2 - 3) = 81, \quad (x_1 - 8)(x_2 - 8) = 256.$$

Giải hệ phương trình này ta có: $x_1 = -24, x_2 = 0$ (hoặc $x_1 = 0, x_2 = -24$). Một trong hai điểm vừa tìm được cần được ánh xạ lên điểm $w = 0$, còn điểm kia lên điểm $w = \infty$.

a) Giả sử $w = 0$ khi $z = -24$ và $w = \infty$ khi $z = 0$. Khi đó

$$w = k \frac{z + 24}{z}, \quad (2.75)$$

trong đó hệ số k cần được xác định. Vì ánh xạ (2.75) biến điểm $z = 0$ thành điểm $w = \infty$ nên phần trong của mỗi đường tròn trong mặt phẳng z sẽ được ánh xạ lên phần ngoài của ảnh tương ứng. Vì γ nằm trong Γ nên qua ánh xạ (2.75) bán kính của ảnh đường tròn γ sẽ lớn hơn bán kính của ảnh đường tròn Γ . Từ đó hệ số k cần được xác định sao cho $|w| = 1$ khi $z \in \gamma$. Chẳng hạn ta xét điểm $z = 12 \in \gamma$. Giá trị w tương ứng sẽ là

$$w = 3k; \quad |w| = 3k = 1 \quad \text{hay là } k = 1/3.$$

Như vậy, trong trường hợp này ta có:

$$w = \frac{1}{3} \frac{z + 24}{z} e^{i\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{R}. \quad (2.76)$$

b) Nếu ta đòi hỏi $w = 0$ khi $z = 0$ và $w = \infty$ khi $z = -24$ thì cũng tương tự như ở trên ta có:

$$w = e^{i\alpha} \frac{2z}{z + 24}. \quad (2.77)$$

Nhận xét 2.4.7. Trong điều kiện của bài toán người ta chỉ cho trước bán kính ngoài của vành tròn. Ta sẽ chứng tỏ rằng khi đó bán kính trong cũng hoàn toàn xác định.

Thật vậy, bằng cách thế vào (2.76) hoặc (2.77) một điểm bất kỳ nằm trên đường tròn có ảnh là đường tròn trong của vành tròn, dễ dàng thấy rằng bán kính trong bằng $2/3$. Từ đó suy ra rằng miền nhị liên đã cho chỉ có thể ánh xạ lên vành tròn mà tỷ số giữa bán kính trong và bán kính ngoài bằng $2/3$.

Ví dụ 11. Ánh xạ bằng vô hạn $\{0 < x < 1\}$ với các nhát cắt dọc theo các tia

$$\left\{x = \frac{1}{2}, h_1 \leq y < \infty\right\} \quad \text{và} \quad \left\{x = +\frac{1}{2}, -\infty < y \leq h_2\right\}.$$

trong đó $h_2 < h_1$ (Hình II.3) lên nửa mặt phẳng trên.

Giải. Ta sử dụng các ánh xạ trung gian sau đây:

1. Hàm $z_1 = 2\pi iz$ ánh xạ miền $D(z)$ lên miền $D(z_1)$ là băng nằm ngang $\{0 < \text{Im } z_1 < 2\pi\}$ với hai nhát cắt $(-\infty, \pi i - 2\pi h_1]$ và $[\pi i + 2\pi h_1, \infty)$.
2. Hàm $z_2 = e^{z_1}$ ánh xạ miền $D(z_1)$ lên miền

$$D(z_2) = \overline{\mathbb{C}} \setminus [(-\infty, -e^{-2\pi h_1}] \cup [e^{-2\pi h_2}, \infty).$$

Từ đó suy ra rằng ánh xạ cần tìm có dạng

$$w = \sqrt{\frac{e^{2\pi iz} + e^{-2\pi h_1}}{e^{2\pi iz} + e^{-2\pi h_2}}}.$$

Ví dụ 12. Ánh xạ miền giới hạn bởi các đường tròn $\{|z-1|=1\}; \{|z-2|=2\}$ với nhát cắt theo đoạn $\{y=0, 2 \leq x \leq a\}$ ($a < 4$) lên nửa mặt phẳng trên (hình II.4).

Hình II.3

Hình II.4

Giải. Ta sử dụng các ánh xạ trung gian sau đây:

1. $z_1 = \frac{4\pi}{z}$. Qua ánh xạ này miền $D(z)$ đã cho có ảnh là băng thẳng đứng $\{\pi < x < 2\pi\}$ với nhát cắt theo đoạn $\left[\frac{4\pi}{a}, 2\pi\right]$. Ta gọi miền đó là $D(z_1)$.

2. Hàm $z_2 = \cos z_1$ sẽ ánh xạ miền $D(z_1)$ lên toàn bộ mặt phẳng trừ hai nhát cắt theo trục thực. Thật vậy, phương trình của đường thẳng $x = \pi$, $x = 2\pi$ có thể viết dưới dạng

$$\begin{aligned}\lambda_1 : z &= \pi + it, & -\infty < t < \infty; \\ \lambda_2 : z &= 2\pi + it, & -\infty < t < \infty.\end{aligned}$$

khi z_1 biến thiên trên λ_1 thì

$$z_1|_{\lambda_1} = \cos(\pi + it) = \cos \pi \operatorname{cht} - i \sin \pi \operatorname{sht} = -\operatorname{cht}.$$

Và do đó z_2 vạch nên nhát cắt tia $(-\infty, 1]$.

Tương tự khi z_1 biến thiên trên λ_2 thì

$$z_1|_{\lambda_2} = \cos(2\pi + it) = \operatorname{cht},$$

và do đó z_2 vạch nên nhát cắt $[1, \infty)$.

Từ đó suy ra

$$w = \sqrt{\frac{1 + \cos \frac{4\pi}{z}}{\cos \frac{4\pi}{z} - \cos \frac{4\pi}{a}}}.$$

là ánh xạ muốn tìm.

Ví dụ 13. Ánh xạ nửa mặt phẳng trên cắt bỏ nửa hình elip lên nửa mặt phẳng trên (hãy vẽ hình!).

Giải. Ta sử dụng các ánh xạ trung gian sau đây:

1. Hàm $z_1 = \frac{z}{c}$, $c = \pm\sqrt{a^2 - b^2}$ biến hình elip đã cho thành elip với tiêu điểm là $+1$ và -1 . Elip cắt trục thực tại hai điểm $\pm\frac{a}{\sqrt{a^2 - b^2}}$ và cắt trục ảo tại điểm $\frac{bi}{\sqrt{a^2 - b^2}}$.

2. Hàm $z_2 = z_1 + \sqrt{z_1^2 - 1} = \frac{z + \sqrt{z^2 + b^2 - a^2}}{\sqrt{a^2 - b^2}}$ biến miền vừa thu được lên nửa mặt phẳng trên cắt bỏ nửa hình tròn tâm $z_1 = 0$ và bán kính là $R = \frac{a+b}{\sqrt{a^2 - b^2}}$.

3. Hàm $z_3 = \frac{z_2}{R}$ sẽ ánh xạ miền vừa thu được lên nửa mặt phẳng trên cắt bỏ nửa hình tròn đơn vị và

$$\begin{aligned} z_3 = \frac{z_1}{R} &= \frac{z + \sqrt{z^2 + b^2 - a^2}}{\sqrt{a^2 - b^2}} \times \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a + b} \\ &= \frac{z + \sqrt{z^2 + b^2 - a^2}}{a + b}. \end{aligned}$$

4. Tiếp theo ta sử dụng ánh xạ Jukovski

$$z_4 = \frac{1}{2} \left(z_3 + \frac{1}{z_3} \right)$$

và thu được nửa mặt phẳng trên. Thế giá trị z_3 vào biểu thức vừa viết ta

có

$$\begin{aligned}
 z_4 &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{z + \sqrt{z^2 + b^2 - a^2}}{a + b} + \frac{a + b}{z + \sqrt{z^2 + b^2 - a^2}} \right\} \\
 &= \frac{z^2 + 2z\sqrt{z^2 + b^2 - a^2} + z^2 + b^2 - a^2 + (a + b)^2}{2(a + b)(z + \sqrt{z^2 + b^2 - a^2})} \\
 &= \frac{2z(z + \sqrt{z^2 + b^2 - a^2}) + 2b(a + b)}{2(a + b)(z + \sqrt{z^2 + b^2 - a^2})} \\
 &= \frac{z}{a + b} + \frac{b}{z + \sqrt{z^2 + b^2 - a^2}}.
 \end{aligned}$$

Áp dụng ánh xạ đồng dạng và sau vài phép biến đổi ta có

$$\begin{aligned}
 w &= (a + b)z_4 = z + \frac{b(a + b)}{z + \sqrt{z^2 + b^2 - a^2}} \\
 &= \frac{az - b\sqrt{z^2 + b^2 - a^2}}{a^2 - b^2}.
 \end{aligned}$$

Đó là ánh xạ phải tìm.

Ví dụ 14. Ánh xạ miền $\{|z| > 1\}$ với các nhát cắt theo các đoạn thẳng $[a, -1]$ và $[1, b]$, trong đó $-\infty < a < -1$, $1 < b < \infty$ lên hình tròn đơn vị.

Giải

1. Hàm Jukovski $z_1 = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$ ánh xạ miền $D(z)$ lên phần ngoài đoạn thẳng $[A, B] \subset \mathbb{R}$, trong đó

$$A = \frac{1}{2} \left(a + \frac{1}{a} \right); \quad B = \frac{1}{2} \left(b + \frac{1}{b} \right).$$

2. Hàm tuyến tính $z_2 = \left(z_1 - \frac{A+B}{2} \right) \frac{2}{A+B}$ sẽ ánh xạ miền vừa thu được lên phần ngoài đoạn $[-1, 1]$. Từ đó rút ra

$$w = z_2 + \sqrt{z_2^2 - 1}$$

là ánh xạ muốn tìm.

Ví dụ 15. Ánh xạ nửa băng $\{x > 0, 0 < y < 2h\}$ với nhát cắt theo tia $\{x > h, y = h\}$ (Hình II.5) lên băng vô hạn $\{0 < \text{Im } w < 1\}$

Hình II.5

Giải. Ta sử dụng các ánh xạ trung gian sau đây:

1. Hàm $z_1 = \frac{z}{2h}$ ánh xạ miền $D(z)$ lên nửa băng với độ rộng là π .
2. Lợi dụng tính chất của hàm e^z , ta xét ánh xạ

$$z_2 = e^{z_1}$$

biến miền thu được trong mặt phẳng z_1 lên nửa mặt phẳng trên cắt bỏ nửa hình tròn đơn vị và nhất cắt $\{\operatorname{Im} z_2 \geq e^\pi, \operatorname{Re} z_2 = 0\}$. Ta gọi miền đó là $D(z_2)$.

3. Hàm

$$z_3 = \frac{1}{2} \left(z_2 + \frac{1}{z_2} \right), \quad \left(ie^{\pi/2} \rightarrow ish \frac{\pi}{2} \right)$$

biến miền $D(z_2)$ lên miền $D(z_3)$ là nửa mặt phẳng trên trừ nhất cắt theo trục ảo đi từ điểm $ish \frac{\pi}{2}$.

4. Đến đây ta thấy rõ là để có băng nằm ngang rộng 2 ta cần biến miền $D(z_3)$ lên mặt phẳng với nhất cắt theo phần dương trục thực và sau đó dùng ánh xạ logarit. Như vậy,

$$z_4 = z_3^2$$

ánh xạ $D(z_3)$ lên miền $D(z_4)$ là mặt phẳng trừ hai nhất cắt $\left(-\infty, -sh^2 \frac{\pi}{2} \right]$ và $[0, \infty)$.

5. Hàm $z_5 = \frac{z_4}{z_4 + sh^2 \frac{\pi}{4}}$ ánh xạ miền $D(z_4)$ lên mặt phẳng với nhất cắt theo phần dương trục thực. Từ các ánh xạ trung gian trên đây ta suy ra

$$w = \frac{-1}{2\pi} \log \left(1 + \frac{sh^2 \frac{\pi}{2}}{ch^2 \frac{\pi z}{2h}} \right).$$

2.5 Bài tập

1. Cho hàm

$$f(z) = \begin{cases} \frac{x^3(1+i) - y^3(1-i)}{x^2 + y^2} & \text{khi } z \neq 0, \\ 0 & \text{khi } z = 0. \end{cases}$$

Chứng minh rằng:

- 1) $f(z)$ liên tục tại điểm $z = 0$.
- 2) Hàm $f(z)$ thỏa mãn các điều kiện Cauchy - Riemann tại điểm $(0, 0)$ nhưng đạo hàm tại điểm đó không tồn tại.

2. Chứng minh rằng các hàm

$$\begin{aligned} 1) \quad f_1(z) &= \begin{cases} \frac{xy^2(x+iy)}{x^2+y^4} & \text{khi } z \neq 0 \\ 0 & \text{khi } z = 0; \end{cases} \\ 2) \quad f_2(z) &= \begin{cases} \frac{x^{4/3}y^{5/3}}{x^2+y^2} + i\frac{x^{5/3}y^{4/3}}{x^2+y^2} & \text{nếu } z \neq 0, \\ 0 & \text{khi } z = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

đều không có đạo hàm tại điểm $z = 0$.

3. Tìm miền mà tại đó hàm

$$f(z) = |x^2 - y^2| + 2i|xy|$$

chỉnh hình.

[Trả lời: Hàm chỉnh hình khi

$$0 < \arg z < \frac{\pi}{4}, \quad \pi < \arg z < \frac{5\pi}{4} (f(z) = z^2) \text{ và khi}$$

$$\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{3\pi}{4}, \quad \frac{3\pi}{2} < \arg z < \frac{7\pi}{4} (f(z) = -z^2).]$$

4. Giả sử $z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ và $f(z) = u(\rho, \varphi) + iv(\rho, \varphi)$. Khi đó hàm $f(z)$ là \mathbb{C} -khả vi khi và chỉ khi $u(\rho, \varphi)$ và $v(\rho, \varphi)$ là hàm khả vi của ρ, φ và

các đạo hàm riêng của chúng thỏa mãn hệ thức

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \rho}, \quad \frac{\partial v}{\partial \rho} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \varphi}.$$

5. Chứng minh rằng hàm dạng

$$w = \frac{\alpha z + \bar{\beta}}{\beta z + \bar{\alpha}},$$

trong đó α, β là những số phức tùy ý thỏa mãn hệ thức $\alpha\bar{\alpha} - \beta\bar{\beta} = 1$ ánh xạ đường tròn đơn vị $\{|z| = 1\}$ lên chính nó. Nếu $\beta\bar{\beta} - \alpha\bar{\alpha} = 1$ thì phần trong đường tròn đơn vị được biến thành phần ngoài.

6. Tìm những điểm trên mặt phẳng z mà

1. $\left| \frac{az + b}{cz + d} \right| = \text{const},$
2. $\arg \frac{az + b}{cz + d} = \text{const},$

trong đó a, b, c, d là những hằng số phức.

7. Chứng minh rằng ảnh của đường thẳng hay đường tròn γ qua ánh xạ phân tuyến tính $w = \frac{az + b}{cz + d}$, $c \neq 0$ là đường thẳng khi và chỉ khi điểm $z_0 = -\frac{d}{c} \in \gamma$.

8. Chứng minh rằng góc tại ∞ giữa hai đường thẳng song song là bằng 0.

9. Chứng minh rằng 4 điểm nằm trên đường thẳng hay đường tròn khi và chỉ khi tỷ số kép của chúng là một số thực.

10. Chứng minh rằng đại lượng $\frac{|dz|}{R^2 - |z|^2}$ là bất biến đối với các ánh xạ phân tuyến tính $w = w(z)$ biến hình tròn $\{|z| < R\}$ lên chính nó, nghĩa là

$$\frac{|dw|}{R^2 - |w|^2} = \frac{|dz|}{R^2 - |z|^2}, \quad w = w(z).$$

11. Chứng minh rằng đại lượng $\frac{|dz|}{\text{Im } z}$ là bất biến đối với các phép ánh xạ phân tuyến tính biến nửa mặt phẳng trên $\text{Im } z > 0$ lên chính nó.

12. Chứng minh rằng đường thẳng qua các điểm bất động của ánh xạ $w = \frac{iz+2}{z-i}$ là biến thành chính nó.

13. Tìm dạng tổng quát của ánh xạ phân tuyến tính có hai điểm bất động z_1 và z_2 .

(Trả lời : 1) $w = Az$ nếu $z_1 = 0, z_2 = \infty, A \in \mathbb{C}$;

2) $\frac{w-z_1}{w-z_2} = A \frac{z-z_1}{z-z_2}, A \in \mathbb{C}.$)

14. Dãy điểm (z_n) xác định như sau: z_0 là điểm cho trước, $z_{n+1} = f(z_n)$, $n \in \mathbb{N}$, trong đó f là hàm phân tuyến tính có hai điểm bất động. Hãy khảo sát sự hội tụ của dãy đó.

Chỉ dẫn. Giả sử $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ là hai điểm bất động của f . Áp dụng bài 13 và cách cho dãy để chứng minh rằng

$$\frac{z_{n+1} - \alpha}{z_{n+1} - \beta} = |A|^{n+1} e^{i(n+1)\theta} \frac{z_0 - \alpha}{z_0 - \beta}, \quad \theta = \arg A.$$

Tiếp đó là qua giới hạn đẳng thức khi $n \rightarrow \infty$.

Trả lời 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \begin{cases} \alpha & \text{nếu } |A| < 1, \\ \beta & \text{nếu } |A| > 1 \end{cases}$; 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n$ không tồn tại nếu

$|A| = 1$.

15. Giả sử hình tròn đơn vị được ánh xạ lên chính nó sao cho điểm z_0 của nó biến thành tâm. Chứng minh rằng khi đó nửa đường tròn đơn vị được ánh xạ thành nửa đường tròn khi và chỉ khi các đầu mút của nó nằm trên đường kính đi qua z_0 .

Chỉ dẫn. Sử dụng công thức

$$w = e^{i\theta} \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z}$$

và điều là $w(z_0) = 0, w\left(\frac{1}{\bar{z}_0}\right) = \infty$.

16. Tìm ảnh đối xứng của đường tròn $\gamma^* = \{z \in \mathbb{C} : |z-2| = 2\}$ qua đường tròn $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| = 1\}$.

Trả lời. Đó là đường tròn Apolonius đối với các điểm 1 và 2: $|w - 2| = 2|w - 1|$.

Chỉ dẫn. Phép biến đổi đối xứng qua đường tròn γ hoàn toàn được xác định bởi hàm

$$w = 1 + \frac{1}{\overline{z - 1}}.$$

17. Chứng minh rằng mọi đường tròn đi qua điểm ± 1 đều chia mặt phẳng \mathbb{C} thành hai miền đơn diệp của hàm Jukovski.

Chỉ dẫn. Xét đường tròn γ bất kỳ qua ± 1 và $z_1, z_2 \notin \gamma$ sao cho $z_1 z_2 = 1$. Tiếp theo, xét ánh xạ

$$w = \frac{z + 1}{k(z - 1)}, \quad |k| = 1$$

biến một trong hai miền của mặt phẳng z (giới hạn bởi γ) lên nửa mặt phẳng trên. Từ điều kiện $z_1 z_2 = 1$ suy ra $w_1 = -w_2$.

18. Tìm ảnh của hình chữ nhật $P = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} z < \pi, 0 < \operatorname{Im} z < b\}$ qua ánh xạ $w = \cos z$.

Trả lời. Ảnh là nửa dưới của hình elip với các bán trục ch và sh b .

19. Chứng minh rằng các cạnh của hình vuông với đỉnh $\pi\left(n + \frac{1}{2}\right)(\pm 1 \pm i)$, $n \in \mathbb{N}$ hàm $\frac{1}{|\sin z|}$ thỏa mãn điều kiện $\frac{1}{|\sin z|} < 1$.

Chỉ dẫn. Khi ước lượng hàm trên các cạnh nằm ngang $z = x \pm i\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi$ hãy sử dụng bất đẳng thức

$$\operatorname{sh}\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi \geq \operatorname{sh} \frac{\pi}{2} > 1.$$

20. Giả sử $f(z) = u(z) + iv(z) \in \mathcal{H}(D)$. Chứng minh rằng các họ đường cong $u(x, y) = C$, $v(x, y) = C$ (C là hằng số tùy ý) trực giao với nhau.

Chỉ dẫn. Chứng minh rằng $\langle \operatorname{grad} u, \operatorname{grad} v \rangle = 0$, trong đó $\operatorname{grad} u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)$, $\operatorname{grad} v = \left(\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}\right)$.

21. Giả sử $f(z) \in \mathcal{H}(D)$. Chứng minh rằng $|f(z)| = \text{const}$ khắp nơi trong miền D thì hàm $f(z) = \text{const}$ trong D .

Chỉ dẫn. Lấy đạo hàm riêng theo x , theo y đẳng thức $u^2 + v^2 = C^2$ rồi áp dụng điều kiện Cauchy - Riemann.

22. Tìm ảnh của miền $D = \left\{ z \in \mathbb{C} : -\frac{\pi}{2} < \text{Re } z < \frac{\pi}{2}, -\infty < \text{Im } z < \infty \right\}$ qua ánh xạ $w = \sin z$.

Trả lời. Ảnh D^* là toàn bộ mặt phẳng phức với nhát cắt theo trục thực từ điểm $w = -1$ đến điểm $w = +1$ qua ∞ .

23. Với giá trị nào của α thì các tập hợp giá trị sau đây trùng nhau:

1. $(a^2)^\alpha$ và $a^{2\alpha}$;

2. $(a^3)^\alpha$ và $a^{3\alpha}$.

[*Trả lời.* 1. $\alpha = \frac{k}{2m+1}$, $k, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

2. $\alpha = \frac{k}{3m-1}$, $k, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$)]

24. Chứng minh rằng

1. $i^i = e^{-\pi/2} e^{-2k\pi}$,

2. $(-1)^i = e^{(2k+1)\pi}$,

3. $(-1)^{\sqrt{2}} = \cos(2k+1)\pi\sqrt{2} + i \sin(2k+1)\pi\sqrt{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Chương 3

Lý thuyết tích phân hàm chỉnh hình

3.1	Tích phân trong miền phức	189
3.1.1	Định nghĩa tích phân	189
3.1.2	Ước lượng tích phân	193
3.1.3	Tính tích phân bằng phương pháp qua giới hạn	194
3.1.4	Dạng vi phân đúng và dạng vi phân đóng	200
3.1.5	Tích phân đường phụ thuộc tham số	213
3.2	Lý thuyết Cauchy	217
3.2.1	Nguyên hàm địa phương của hàm chỉnh hình	217
3.2.2	Nguyên hàm của hàm chỉnh hình theo tuyến	223
3.2.3	Tính bất biến của tích phân đối với các tuyến đồng luân	227
3.2.4	Công thức tích phân cơ bản thứ nhất của Cauchy	231
3.2.5	Nguyên hàm trong miền đơn liên	234
3.2.6	Công thức tích phân Cauchy (công thức cơ bản thứ hai của Cauchy)	235

3.2.7	Biểu diễn tích phân đối với đạo hàm của hàm chỉnh hình	241
3.2.8	Điều kiện đủ để hàm f chỉnh hình	250
3.2.9	Hàm điều hòa và mối liên hệ với hàm chỉnh hình	250
3.2.10	Tích phân dạng Cauchy. Công thức Sokhotski	257
3.2.11	Biểu diễn tích phân hàm điều hòa	270
3.3	Bài tập	277

Bây giờ xét sự thu hẹp lớp tổng quát các hàm biến phức bằng điều kiện khả tích. Sự thu hẹp đó sẽ đưa ta tới chính lớp các hàm chỉnh hình đã được nghiên cứu trong chương II. Toàn bộ chương này được dành cho việc trình bày định lý cơ bản trong phép tính tích phân của Cauchy cùng hai công thức cơ bản của nhà toán học nổi tiếng đó.

3.1 Tích phân trong miền phức

3.1.1 Định nghĩa tích phân

Giả sử cho tuyến tron $\gamma = \gamma(t) : I \rightarrow \mathbb{C}$, $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ và giả sử cho ánh xạ liên tục

$$f : \gamma(I) \rightarrow \mathbb{C}.$$

khi đó hàm $f[\gamma(t)]$ là một hàm liên tục trên I .

Ta có định nghĩa sau đây:

Định nghĩa 3.1.1. Tích phân

$$J(f) = \int_a^b f[\gamma(t)]\gamma'(t)dt \quad (3.1)$$

được gọi là *tích phân của hàm f theo tuyến γ* và được ký hiệu là

$$\int_{\gamma} f(z)dz.$$

Định nghĩa này phù hợp với định nghĩa tích phân đường thông thường (theo nghĩa Cauchy - Riemann) của hàm liên tục theo khoảng compac.

Cũng có thể tính tích phân đường theo tuyến trơn từng khúc. Trong trường hợp này sẽ chọn phép phân hoạch

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$$

sao cho hạn chế γ_i của tuyến γ trên đoạn $[t_i, t_{i+1}]$ là tuyến trơn với i bất kỳ, $0 \leq i \leq n-1$. Và theo định nghĩa

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \sum_i \int_{\gamma_i} f(z)dz. \quad (3.2)$$

Có thể chứng minh rằng giá trị của vế phải (3.2) không phụ thuộc vào việc chọn phép phân hoạch và trong trường hợp khi γ là tuyến trơn thì định nghĩa này của tích phân $\int_{\gamma} f(z)dz$ trùng với định nghĩa 3.1.1.

Do đó, định nghĩa tích phân (3.2) là đúng đắn.

Ví dụ 1. Giả sử γ là đường tròn

$$\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| = r\}$$

(do đó $\gamma(t) = a + e^{ir}$, $t \in [0, 2\pi]$ và $f(z) = (z - a)^n$, $n \in \mathbb{Z}$).

Theo định nghĩa 3.1.1 ta có:

$$J(f) = \int_{\gamma} (z - a)^n dz = r^{n+1} i \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t} dt.$$

Khi $n \neq -1$ thì $J(f) = 0$.

Khi $n = -1$ thì

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z-a} = i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i.$$

Như vậy:

$$J(f) = \begin{cases} 0 & \text{khi } n \neq -1, \\ 2\pi i & \text{khi } n = -1. \end{cases} \quad (3.3)$$

Nhận xét 3.1.1. Bằng cách đặt $f = u + iv$ và $dz = dx + idy$ ta thu được:

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_{\gamma} udx - vdy + i \int_{\gamma} vdx + udy. \quad (3.4)$$

Từ định nghĩa và công thức (3.4) dễ dàng suy ra các tính chất sau đây của tích phân trong miền phức.

I - Tính chất tuyến tính. Nếu $f_k(z)$, $k = 1, 2, \dots, n$ là những hàm liên tục được cho trên γ và a_k ($k = 1, 2, \dots, n$) là những hằng số cho trước thì:

$$\int_{\gamma} \left(\sum_{k=1}^n a_k f_k(z) \right) dz = \sum_{k=1}^n a_k \int_{\gamma} f_k(z) dz.$$

II - Tính chất cộng tính. Giả sử cho hai tuyến tron

$$\gamma_1(t) : [a, c] \rightarrow \mathbb{C}, \quad \gamma_2(t) : [c, b] \rightarrow \mathbb{C}$$

sao cho

$$\gamma_1(c) = \gamma_2(c).$$

Xét tuyến tron từng khúc là hợp của hai tuyến γ_1, γ_2

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t), & t \in [a, c], \\ \gamma_2(t), & t \in [c, b]. \end{cases}$$

Từ định nghĩa suy ra rằng

$$\int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz.$$

III - Tính bất biến đối với phép biến đổi tham số. Ta nhắc lại ở đây định nghĩa phép thay tham số. Giả sử cho tuyến tron

$$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$$

và $t = t(u)$ khả vi liên tục khi $u \in [a_1, b_1]$ ($a_1 < b_1$) với đạo hàm $t'(u) > 0$ khắp nơi và

$$t(a_1) = a, \quad t(b_1) = b.$$

Khi đó hợp của ánh xạ $u \mapsto t(u)$ và

$$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$$

sẽ xác định một ánh xạ $\gamma_1 : u \mapsto \gamma[t(u)]$.

Ánh xạ đó cho ta một tuyến tron và nói rằng γ_1 thu được từ γ bằng phép thay thế tham số.

Định lý 3.1.1. *Tích phân (3.1) là một bất biến đối với phép thay tham số. Nói cách khác, nếu $\gamma \sim \gamma^*$ thì*

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_{\gamma^*} f(z)dz.$$

Chứng minh. Theo định nghĩa ta có

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_a^b f[\gamma(t)]\gamma'(t)dt. \quad (3.5)$$

Thực hiện phép thay tham số ở vế phải của (3.5) và theo công thức vi phân hàm hợp, ta có

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_{a_1}^{b_1} f[\gamma_1(u)]\gamma_1'(u)du = \int_{\gamma^*} f(z)dz.$$

□

Từ định lý 3.1.1 ta rút ra kết luận quan trọng là: tích phân đã được xây dựng đối với tuyến vẫn có nghĩa cả đối với đường cong là lớp các tuyến tương đương.

Nói đúng hơn: Đối với tuyến bất kỳ xác định đường cong tron nào đó thì tích phân của hàm liên tục theo tuyến ấy có một và chỉ một giá trị.

IV - *Tính định hướng.* Đối với tuyến tron γ và tuyến ngược với nó γ^- (tuyến thu được từ γ bằng phép thay tham số $t \mapsto a+b-t$, $\gamma^-(t) = \gamma[a+b-t]$) ta có:

$$\int_{\gamma} f(z)dz = - \int_{\gamma^-} f(z)dz.$$

Tính chất này được chứng minh như định lý 3.1.1.

3.1.2 Ước lượng tích phân

Định lý 3.1.2. *Giả sử γ là một tuyến tron*

$$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$$

và giả sử $t \mapsto f[\gamma(t)]$ là ánh xạ liên tục từ tập hợp compact $\gamma[I]$ vào \mathbb{C} . Khi đó

$$\left| \int_{\gamma} f(z)dz \right| \leq \sup_{\gamma} |f(z)| \cdot |\gamma|,$$

trong đó $|\gamma|$ là độ dài của tuyến γ .

Chứng minh. Giả sử

$$J(f) = \int_{\gamma} f(z)dz = |J(f)|e^{i\theta}.$$

Ta có

$$\begin{aligned} |J(f)| &= \int_{\gamma} e^{-i\theta} f(z) dz = \int_a^b e^{-i\theta} f[\gamma(t)] \gamma'(t) dt \\ &= \int_a^b \operatorname{Re} \{ e^{-i\theta} f[\gamma(t)] \gamma'(t) \} dt. \end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned} |J(f)| &\leq \int_a^b |f(\gamma(t))| |\gamma'(t)| dt = \int_{\gamma} |f(z)| |dz| \\ &\leq \sup_{\gamma} |f(z)| \cdot \int_{\gamma} |dz| = \sup_{\gamma} |f(z)| \cdot \int_a^b \left\{ \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} dt \\ &= \sup_{\gamma} |f(z)| |\gamma|. \end{aligned}$$

□

Hệ quả 3.1.1. Nếu thêm vào các giả thiết của định lý 3.1.2 điều kiện $|f(z)| \leq M, \forall z \in \gamma$, trong đó M là hằng số nào đó thì

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq M \cdot |\gamma|.$$

3.1.3 Tính tích phân bằng phương pháp qua giới hạn

Giả sử Δ là phép phân hoạch $[a, b]$

$$\Delta : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b,$$

trong đó đặt

$$\eta = \max_i |t_{i+1} - t_i|.$$

Ta cần tính hiệu σ_n giữa tích phân (3.1) với tổng

$$\sum_{i=0}^{n-1} f[\gamma(\theta_i)](\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)), \quad \theta_i \in [t_i, t_{i+1}].$$

Vì

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} dz = \gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)$$

nên biểu thức trên có thể viết dưới dạng

$$\int_a^b \tilde{f}(t) \cdot \gamma'(t) dt,$$

trong đó $\tilde{f}(t)$ là hàm trên $[a, b]$, bằng $f[\gamma(\theta_i)]$ trên khoảng (t_i, t_{i+1}) . Như vậy

$$|\sigma_n| = \left| \int_a^b [f(\gamma(t)) - \tilde{f}(t)] \gamma'(t) dt \right|.$$

Giả sử $\varepsilon > 0$ là một số cho trước. Chọn η đủ nhỏ, sao cho với mọi cặp $t', t'' \in [a, b]$ thỏa mãn điều kiện $|t' - t''| < \eta$ ta đều có:

$$|f(\gamma(t')) - f(\gamma(t''))| < \frac{\varepsilon}{|\gamma|}.$$

(Điều đó có thể thực hiện được vì hàm $f|\gamma(t)|$ liên tục trên $[a, b]$ do đó nó liên tục đều trên đoạn đó).

Khi đó

$$|f(\gamma(t)) - \tilde{f}(t)| \leq \frac{\varepsilon}{|\gamma|}$$

và:

$$|\sigma_n| \leq \frac{\varepsilon}{|\gamma|} \cdot |\gamma| = \varepsilon.$$

Từ kết quả vừa chứng minh suy ra rằng tích phân $\int_{\gamma} f(z)dz$ là giới hạn của tổng tích phân Riemann khi $\eta \rightarrow 0$.

Từ điều vừa chứng minh và định lý 3.1.1 suy rằng tích phân đường theo tuyến không phụ thuộc phép tham số hóa tuyến đó: hai phép tham số hóa tương đương đối với tuyến chỉ cho một giá trị tích phân. Điều đặc biệt hơn nữa là các tổng Riemann có thể mô tả bởi các thuật ngữ hình học liên quan đến đường cong mà trên đó cần tính tích phân. Ta dừng lại để trình bày một cách ngắn gọn điều đó.

Giả sử $\mathcal{L}(A, B) \subset \mathbb{C}$ là đường cong có hướng với điểm đầu A và điểm cuối B và giả sử trên $\mathcal{L}(A, B)$ cho hàm $f(z)$. Thực hiện phép phân hoạch chia đường cong $\mathcal{L}(A, B)$ thành một số n tùy ý các cung nhỏ bởi các điểm $z_0 = A, z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, z_n = B$ nằm liên tiếp trên $\mathcal{L}(A, B)$ (tức là z_j đứng trước z_{j+1} , $j = 0, 1, \dots, n-1$). Trên mỗi cung nhỏ $\mathcal{L}_j = z_j \widehat{z_{j+1}}$ ta lấy điểm ξ_j tùy ý và lập tổng tích phân

$$J_n = \sum_{j=0}^{n-1} f(\xi_j) \Delta z_j, \quad \Delta z_j = z_{j+1} - z_j.$$

Giả sử $r = \max_{0 \leq j \leq n-1} (\text{diam } \mathcal{L}_j)$.

Nếu tồn tại giới hạn $\lim J_n$ khi $r \rightarrow 0$ không phụ thuộc vào cách phân hoạch $\mathcal{L}(A, B)$ thành các cung nhỏ và không phụ thuộc vào việc chọn các điểm trung gian ξ_j thì giới hạn đó được gọi là tích phân đường của hàm f theo đường cong $\mathcal{L}(A, B)$:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{n-1} f(\xi_j) \Delta z_j = \int_{\mathcal{L}(A, B)} f(z) dz.$$

Trong trường hợp khi $\mathcal{L}(A, B)$ là đường cong đóng $A \equiv B$ thì đặt

$\mathcal{L}(A, B) = \mathcal{L}$ và tích phân được ký hiệu là

$$J = \oint_{\mathcal{L}} f(z)dz \text{ hay } \int_{\mathcal{L}^+} f(z)dz \quad \text{nếu } \mathcal{L} \text{ có định hướng dương;}$$

$$J = \oint_{\mathcal{L}} f(z)dz \text{ hay } \int_{\mathcal{L}^-} f(z)dz \quad \text{nếu } \mathcal{L} \text{ có định hướng âm.}$$

Tiếp theo ta chứng minh định lý cho phép ta đưa việc tính tích phân trong miền phức về tính tích phân đường trong miền thực (xem (3.4))

Định lý 3.1.3. (Về sự tồn tại tích phân đường)

Nếu \mathcal{L} là đường cong có hướng, đo được và hàm $f(z)$ liên tục trên \mathcal{L} thì tích phân $\int_{\mathcal{L}} f(z)dz$ tồn tại. Thêm vào đó, nếu $z = x + iy$, $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ thì

$$\int_{\mathcal{L}} f(z)dz = \int_{\mathcal{L}} u(x, y)dx - v(x, y)dy + i \int_{\mathcal{L}} v(x, y)dx + u(x, y)dy. \quad (3.6)$$

Chứng minh. Giả sử $z_j = x_j + iy_j$, $\xi_j = \zeta_j + i\eta_j$, $u_j = u(\zeta_j, \eta_j)$; $v_j = v(\zeta_j, \eta_j)$, $\Delta z_j = \Delta x_j + i\Delta y_j$. Ta biến đổi tổng tích phân của tích phân $\int_{\mathcal{L}} f(z)dz$:

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{n-1} f(\xi_j)\Delta z_j &= \sum_{j=0}^{n-1} (u_j + iv_j)(\Delta x_j + i\Delta y_j) \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} (u_j\Delta x_j - v_j\Delta y_j) + i \sum_{j=0}^{n-1} (v_j\Delta x_j + u_j\Delta y_j). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Nếu f liên tục trên \mathcal{L} thì u và v liên tục trên \mathcal{L} và do đó các tích phân ở vế phải (3.6) tồn tại. Vế phải của (3.7) gồm các tổng tích phân đối với các tích phân đường ở vế phải của công thức (3.6). Do đó khi $r \rightarrow 0$ vế phải của (3.7) dần đến vế phải của (3.6). Từ đó suy rằng vế trái của (3.7) có giới hạn không phụ thuộc vào cách phân hoạch đường cong \mathcal{L} và không phụ thuộc vào cách chọn các điểm ξ_j . Như vậy tích phân ở vế trái của (3.6) tồn tại.

Qua giới hạn đẳng thức (3.7) khi $r \rightarrow 0$ ta thu được (3.6). Định lý được chứng minh. \square

Ví dụ 1. Tính tích phân

$$I = \int_{\mathcal{L}} z^p dz, \quad p = 0, 1, 2, \dots \quad (3.8)$$

trong đó \mathcal{L} là đường cong tùy ý có độ dài $|\mathcal{L}|$ với điểm đầu $z = a$ và điểm cuối $z = b$ (a và b là những số phức tùy ý).

Giải. Giả sử z_0, z_1, \dots, z_n là các điểm chia trong phép phân hoạch đường cong \mathcal{L} . Trong trường hợp đó: $z_0 \equiv a, z_n \equiv b$ và

$$\begin{aligned} b^{p+1} - a^{p+1} &= \sum_{k=1}^n (z_k^{p+1} - z_{k-1}^{p+1}) \\ &= \sum_{k=1}^n (z_k^p + z_k^{p-1} z_{k-1} + \dots + z_{k-1}^p) \Delta z_k \\ &= \sum_{k=1}^n z_k^p \Delta z_k + \sum_{k=1}^n z_k^{p-1} z_{k-1} \Delta z_k + \dots + \\ &\quad + \sum_{k=1}^n z_k^m z_{k-1}^{p-m} \Delta z_k + \dots + \sum_{k=1}^n z_{k-1}^p \Delta z_k. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Tổng đầu và tổng cuối ở vế phải của (3.9) là các tổng tích phân thông thường: trong tổng thứ nhất ta lấy điểm trung gian là $\xi_k = z_k$, còn trong tổng cuối ta đặt $\xi_k = z_{k-1}$.

$$\lim_{r \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \xi_k^p \Delta z_k = \lim_{r \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \xi_k^p \Delta z_k = I.$$

Ta xét một tổng nào đó ở giữa, chẳng hạn

$$S'_n = \sum_{k=1}^n z_k^m z_{k-1}^{p-m} \Delta z_k, \quad 1 < m < p \quad (3.10)$$

và so sánh (3.10) với tổng cuối

$$S_n = \sum_{k=1}^n z_{k-1}^p \Delta z_k.$$

Ta có

$$\begin{aligned} |S'_n - S_n| &= \left| \sum_{k=1}^n z_{k-1}^{p-m} (z_k^m - z_{k-1}^m) \Delta z_k \right| \\ &= \left| \sum_{k=1}^n z_{k-1}^{p-m} (z_k^{m-1} + z_k^{m-2} z_{k-1} + \cdots + z_{k-1}^{m-1}) \Delta z_k^2 \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^n |z_{k-1}|^{p-m} (|z_k|^{m-1} + \cdots + |z_{k-1}|^{m-1}) |\Delta z_k|^2 \\ &\leq mR^m \sum_{k=1}^n |\Delta z_k|^2, \end{aligned} \quad (3.11)$$

trong đó R là số nào đó không bé hơn khoảng cách từ điểm bất kỳ của \mathcal{L} đến gốc tọa độ.

Ta cần chứng minh rằng $\lim_{r \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n |\Delta z_k|^2 = 0$. Thật vậy, ta có

$$\sum_{k=1}^n |\Delta z_k|^2 = \sum_{k=1}^n |\Delta z_k| \cdot |\Delta z_k| \leq r \sum_{k=1}^n |\Delta z_k| \leq r|\mathcal{L}|.$$

Do đó khi $r \rightarrow 0$ thì tổng đã nêu dần đến 0.

Từ đó suy rằng

$$\lim_{r \rightarrow 0} S_n = \lim_{r \rightarrow 0} S'_n = I.$$

Qua giới hạn (3.9) khi $r \rightarrow 0$ ta thu được

$$b^{p+1} - a^{p+1} = (p+1)I \Rightarrow I = \frac{b^{p+1} - a^{p+1}}{p+1},$$

tức là

$$\int_{\mathcal{L}(a,b)} z^p dz = \frac{b^{p+1} - a^{p+1}}{p+1}.$$

Ví dụ 2. Tính tích phân

$$J = \int_{\gamma} \frac{dz}{z-a}; \quad \gamma = \{z : |z-a| = r\}.$$

Giải. Phương trình của γ có thể viết dưới dạng:

$$z = a + re^{i\varphi}, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi,$$

(xem ví dụ 1 trong trường hợp khi $n = -1$).

Ta chọn phép phân hoạch $t_k = \frac{2k\pi}{n}$ và đặt

$$\tau_k = \frac{t_k + t_{k+1}}{2} = \frac{(2k+1)\pi}{n}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Khi đó

$$z_k = a + re^{\frac{2k\pi}{n}i}, \quad \zeta_k = a + re^{\frac{2k+1}{n}\pi i}.$$

Tổng Riemann tương ứng có dạng

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{re^{\frac{2k+1}{n}\pi i}} r \cdot \left[e^{\frac{2(k+1)}{n}\pi i} - e^{\frac{2k}{n}\pi i} \right] = \\ & = \sum_{k=0}^{n-1} \left[e^{\frac{\pi i}{n}} - e^{-\frac{\pi i}{n}} \right] = n \left(e^{\frac{\pi i}{n}} - e^{-\frac{\pi i}{n}} \right) = n \cdot 2i \sin \frac{\pi}{n}. \end{aligned}$$

Do đó

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z-a} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[2n \cdot i \sin \frac{\pi}{n} \right] = 2\pi i.$$

3.1.4 Dạng vi phân đúng và dạng vi phân đóng

Trong tiết này ta lưu ý một số khái niệm về dạng vi phân. Ta bắt đầu từ dạng vi phân trong miền thực.

I. Dạng vi phân đúng

Định nghĩa 3.1.2. Giả sử $P(x, y)$ và $Q(x, y)$ là những hàm liên tục nhận giá trị thực hoặc phức trong miền $D \subset \mathbb{R}^2$. Biểu thức

$$\omega = P(x, y)dx + Q(x, y)dy = Pdx + Qdy$$

được gọi là *dạng vi phân* trong miền D .

Ví dụ. Giả sử $f(z) \in \mathcal{H}(D)$. Khi đó

$$\begin{aligned}\omega = f(z)dz &= [u(x, y) + iv(x, y)][dx + idy] \\ &= (u + iv)dx + (iu - v)dy\end{aligned}$$

là dạng vi phân trong miền D .

Định nghĩa 3.1.3. Dạng vi phân $\omega = Pdx + Qdy$ được gọi là *dạng vi phân đúng* trong miền D nếu tồn tại hàm F cho trong miền D sao cho

$$dF = \omega,$$

và khi đó hàm F được gọi là *nguyên hàm* của dạng vi phân ω .

Lưu ý rằng dạng vi phân đúng thường được gọi là *vi phân toàn phần* (hay *vi phân đủ*).

Định lý 3.1.4. Nếu $\omega = Pdx + Qdy$ là dạng vi phân đúng trong miền D và F_1, F_2 là hai nguyên hàm của nó trong D thì $F_2(x, y) = F_1(x, y) + C$ trong D , trong đó C là hằng số nào đó.

Chứng minh. Theo giả thiết ta có $dF_1 = \omega \Rightarrow \frac{\partial F_1}{\partial x} = P, \frac{\partial F_1}{\partial y} = Q$ và $dF_2 = \omega \Rightarrow \frac{\partial F_2}{\partial x} = P, \frac{\partial F_2}{\partial y} = Q$. Ta xét hàm

$$\varphi = F_2 - F_1.$$

Ta có $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$ trong D . Từ đó, áp dụng định lý ¹ khẳng định rằng nếu mọi đạo hàm riêng của hàm đều bằng 0 trong miền D thì hàm đó là

¹Nguyễn Văn Mậu, Đặng Huy Ruận, Nguyễn Thủy Thanh. Phép tính vi phân và tích phân hàm nhiều biến, Nhà xuất bản ĐHQG Hà Nội, 2001, (định lý 4, tr. 74)

hằng số trong D . Như thế $F_1 - F_2 = C \equiv \text{const}$ trong D , tức là $F_2 = F_1 + C$ trong D . \square

Định lý 3.1.5. Nếu $\omega = Pdx + Qdy$ là dạng vi phân đúng trong miền D ; P và Q liên tục trong D và $\mathcal{L} = \mathcal{L}(A, B)$ là đường cong có hướng, đo được nằm trong D với điểm đầu A và điểm cuối B thì

$$J = \int_{\mathcal{L}} \omega = F(B) - F(A) \quad (3.12)$$

trong đó F là nguyên hàm nào đó của dạng vi phân ω .

Chứng minh. Giả sử $\text{dist}(\mathcal{L}, \partial D) = \rho$. Ta ký hiệu

$$D^* = \left\{ z \in D : \text{dist}(z, \partial D) \geq \frac{\rho}{2} \right\}.$$

Rõ ràng D^* là tập hợp đóng. Ta thực hiện phép phân hoạch tùy ý T chia đường cong \mathcal{L} thành n cung tùy ý γ_j , $j = \overline{0, n-1}$ bởi các điểm chia $A_0 \equiv A$, A_1, A_2, \dots, A_{n-1} , $A_n \equiv B$ (A_j đứng trước A_{j+1} trên \mathcal{L} , $j = \overline{0, n-1}$). Ký hiệu

$$d_j = \text{diam } \gamma_j, \quad d_T = \max_{0 \leq j \leq n-1} d_j.$$

Đại lượng d_T gọi là *đường kính* của phép phân hoạch. Giả sử $d_T < \frac{\rho}{2}$. Khi đó

$$J^* = F(B) - F(A) = \sum_{j=0}^{n-1} [F(A_{j+1}) - F(A_j)], \quad A_j = (x_j, y_j)$$

Ta xét hàm

$$\varphi_j(t) = F(x_j + \Delta x_j t, y_j + \Delta y_j t), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Ta nối A_j với A_{j+1} bởi đoạn thẳng và với $d_T < \frac{\rho}{2}$ đoạn thẳng đó sẽ nằm trong D^* . Ta có

$$F(A_{j+1}) - F(A_j) = \varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\xi_j), \quad 0 < \xi_j < 1$$

$$F(A_{j+1}) - F(A_j) = \frac{\partial F}{\partial x}(x_j'', y_j'') \Delta x_j + \frac{\partial F}{\partial y}(x_j'', y_j'') \Delta y_j$$

Mặt khác tổng tích phân của $I = \int_{\mathcal{L}} \omega$ có dạng

$$J_n = \sum_{j=0}^{n-1} \left[\frac{\partial F}{\partial x}(x'_j, y'_j) \Delta x_j + \frac{\partial F}{\partial y}(x'_j, y'_j) \Delta y_j \right].$$

Từ đó theo định nghĩa với $\varepsilon > 0$ và với phép phân hoạch đủ mịn ta sẽ có

$$|J_n - J| < \varepsilon$$

Bây giờ ta xét $|J_n - J^*|$. Ta có

$$\begin{aligned} |J_n - J^*| &= \left| \sum_{j=0}^{n-1} \left\{ \left[\frac{\partial F}{\partial x}(x'_j, y'_j) - \frac{\partial F}{\partial x}(x''_j, y''_j) \right] \Delta x_j \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left[\frac{\partial F}{\partial y}(x'_j, y'_j) - \frac{\partial F}{\partial y}(x''_j, y''_j) \right] \Delta y_j \right\} \right| \\ &\leq \sum_{j=0}^{n-1} \left\{ |P(x'_j, y'_j) - P(x''_j, y''_j)| |\Delta x_j| \right. \\ &\quad \left. + |Q(x'_j, y'_j) - Q(x''_j, y''_j)| |\Delta y_j| \right\}. \end{aligned}$$

Hàm P và Q liên tục trong D và do đó theo định lý Cantor chúng liên tục đều trong D^* . Do đó với đường kính phép phân hoạch d_T đủ bé, mỗi hiệu ở vế phải không vượt quá ε và do đó

$$\begin{aligned} |J_n - J^*| &\leq \varepsilon \sum_{j=0}^{n-1} (|\Delta x_j| + |\Delta y_j|) \\ &\leq 2\varepsilon \sum_{j=0}^{n-1} \sqrt{(\Delta x_j)^2 + (\Delta y_j)^2} \leq 2\varepsilon |\mathcal{L}| \end{aligned}$$

trong đó $|\mathcal{L}|$ là độ dài của \mathcal{L} . Như vậy

$$|J - J^*| \leq |J - J_n| + |J_n - J^*| \leq \varepsilon + 2\varepsilon |\mathcal{L}|.$$

Vì $\varepsilon > 0$ bé tùy ý nên $J = J^*$ và định lý được chứng minh. \square

Định nghĩa 3.1.4. Giả sử trong miền D cho dạng vi phân ω và giả sử tích phân $\int_{\mathcal{L}} \omega$ theo mọi đường cong đo được \mathcal{L} trong D đều tồn tại.

Người ta nói rằng tích phân $\int_{\mathcal{L}} \omega$ không phụ thuộc vào đường lấy tích phân trong D nếu với hai điểm $A, B \in D$ bất kỳ và với hai đường cong đo được $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2 \subset D$ bất kỳ với điểm đầu A và điểm cuối B ta có

$$\int_{\mathcal{L}_1} \omega = \int_{\mathcal{L}_2} \omega.$$

Trong trường hợp này tích phân $\int \omega$ chỉ phụ thuộc vào điểm đầu A và điểm cuối B của đường lấy tích phân và ta ký hiệu

$$\int_A^B \omega = \int_A^B Pdx + Qdy.$$

Định lý 3.1.6. Giả sử D là miền của mặt phẳng \mathbb{R}^2 , P và Q là những hàm liên tục trong D . Khi đó $\omega = Pdx + Qdy$ là dạng vi phân đúng trong D khi và chỉ khi một trong hai điều kiện sau đây thỏa mãn:

- (I) Tích phân $\int_{\mathcal{L}} \omega = 0$ theo mọi đường cong đóng đo được $\mathcal{L} \subset D$.
- (II) Tích phân $\int \omega$ không phụ thuộc đường lấy tích phân trong D .

Định lý 3.1.6 có thể phát biểu dưới dạng khác sau đây

Định lý 3.1.6*. Giả sử D là miền của mặt phẳng \mathbb{R}^2 , P và Q là những hàm liên tục trong D . Khi đó ba điều kiện sau đây là tương đương với nhau:

- (I) $\omega = Pdx + Qdy$ là dạng vi phân đúng trong D .
- (II) Tích phân $\int_{\mathcal{L}} \omega$ theo mọi đường cong đóng đo được trong D là bằng 0.
- (III) Tích phân $\int_{\mathcal{L}} \omega$ không phụ thuộc đường lấy tích phân trong D

Chứng minh. Ta sẽ chứng minh định lý theo lược đồ:

$$(I) \Rightarrow (II) \Rightarrow (III) \Rightarrow (I).$$

a) $(I) \Rightarrow (II)$. Giả sử \mathcal{L} là đường cong đóng đo được, tức là điểm đầu A và điểm cuối B của nó trùng nhau. Vì điều kiện (I) thỏa mãn nên dạng ω có nguyên hàm F . Do đó theo định lý 3.1.5 ta có

$$\int_{\mathcal{L}} \omega = F(B) - F(A) = 0,$$

tức là điều kiện (II) thỏa mãn.

b) $(II) \Rightarrow (III)$. Ta lấy hai điểm $A, B \in D$ tùy ý và hai đường cong đo được \mathcal{L}_1 và \mathcal{L}_2 từ A đến B , \mathcal{L}_2^- là đường cong có hướng ngược với \mathcal{L}_2 . Rõ ràng là $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2^-$ là đường cong đóng đo được. Vì điều kiện (II) thỏa mãn nên $\int_{\mathcal{L}} \omega = 0$. Do đó

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{L}} \omega = 0 &\Rightarrow \int_{\mathcal{L}_1} \omega + \int_{\mathcal{L}_2^-} \omega = 0 \Rightarrow \int_{\mathcal{L}_1} \omega - \int_{\mathcal{L}_2} \omega = 0 \\ &\Rightarrow \int_{\mathcal{L}_1} \omega = \int_{\mathcal{L}_2} \omega, \end{aligned}$$

tức là tích phân $\int_{\mathcal{L}} \omega$ không phụ thuộc đường lấy tích phân.

c) $(III) \Rightarrow (I)$. Giả sử điều kiện (III) thỏa mãn, tức là tích phân $\int \omega$ không phụ thuộc đường lấy tích phân mà chỉ phụ thuộc điểm đầu và điểm cuối của đường đó. Ta lấy điểm đầu của đường lấy tích phân là điểm cố định (x_0, y_0) nào đó, còn điểm cuối là *điểm biến thiên* với tọa độ (ξ, η) . Khi đó tích phân sẽ là hàm của ξ, η :

$$F(\xi, \eta) = \int_{(x_0, y_0)}^{(\xi, \eta)} \omega = \int_{(x_0, y_0)}^{(\xi, \eta)} Pdx + Qdy.$$

Ta cần chứng minh rằng

$$\frac{\partial F}{\partial \xi} = P(\xi, \eta), \quad \frac{\partial F}{\partial \eta} = Q(\xi, \eta), \quad (\xi, \eta) \in D.$$

Ta cần tính $\frac{F(\xi + h, \eta) - F(\xi, \eta)}{h}$.

Đại lượng $F(\xi + h, \eta) - F(\xi, \eta)$ là tích phân của $Pdx + Qdy$ theo đường với điểm đầu (ξ, η) và điểm cuối $(\xi + h, \eta)$. Theo điều kiện (III) ta có thể lấy đường đó là đoạn thẳng nằm ngang nối (ξ, η) với $(\xi + h, \eta)$. Mặt khác vì

$$\int_{(\xi, \eta)}^{(\xi+h, \eta)} Qdy = 0$$

nên

$$\begin{aligned} F(\xi + h, \eta) - F(\xi, \eta) &= \int_{(x_0, y_0)}^{(\xi+h, \eta)} \omega - \int_{(x_0, y_0)}^{(\xi, \eta)} \omega = \int_{(\xi, \eta)}^{(\xi+h, \eta)} \omega \\ &= \int_{\xi}^{\xi+h} P(x, \eta) dx = hP(\xi + \theta h, \eta), \quad 0 < \theta < 1 \end{aligned}$$

theo định lý giá trị trung bình đối với tích phân. Từ đó suy ra

$$\frac{F(\xi + h, \eta) - F(\xi, \eta)}{h} = P(\xi + \theta h, \eta), \quad 0 < \theta < 1.$$

Vì $P(x, y)$ là hàm liên tục nên khi $h \rightarrow 0$ ta thu được

$$F'_\xi(\xi, \eta) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(\xi + h, \eta) - F(\xi, \eta)}{h} = P(\xi, \eta).$$

Tương tự ta chứng minh được rằng $F'_\eta(\xi, \eta) = Q(\xi, \eta)$. Định lý được chứng minh. \square

Nhận xét 3.1.2. Trong trường hợp đặc biệt khi \mathcal{L} là biên của hình chữ nhật thuộc D (cùng với \mathcal{L}) với các cạnh song song với các trục tọa độ và ω là dạng đóng trong D thì ta có

$$\int_{\mathcal{L}} \omega = 0. \quad (3.13)$$

Như vậy (3.13) là điều kiện cần để dạng ω có nguyên hàm. Nhưng điều kiện đó không phải bao giờ cũng là điều kiện đủ để dạng vi phân ω có nguyên hàm.

Nhận xét 3.1.3. Nếu D là hình tròn, P và Q là những hàm liên tục trong D và

$$\int_{\mathcal{L}} \omega = 0, \quad \omega = Pdx + Qdy$$

đối với biên \mathcal{L} của hình chữ nhật bất kỳ nằm trong D (cùng với biên của nó) với các cạnh song song với các trục tọa độ thì ω là dạng vi phân đúng.

Chứng minh. Thật vậy, ta cố định điểm $(x_0, y_0) \in D$ và $(\xi, \eta) \in D$ là điểm tùy ý. Khi đó tồn tại hai tuyến \mathcal{L}_1 và \mathcal{L}_2 với điểm đầu (x_0, y_0) và điểm cuối (ξ, η) và mỗi tuyến được tạo nên từ hai cạnh của hình chữ nhật với hai cạnh song song với trục tọa độ và (x_0, y_0) và (ξ, η) là hai đỉnh đối diện. Rõ ràng là

$$\int_{\mathcal{L}_1} \omega = \int_{\mathcal{L}_2} \omega.$$

Giả sử $F(\xi, \eta)$ là giá trị chung của các tích phân ấy. Tương ứng với điều đó ta có:

$$\begin{aligned} F(\xi, \eta) &= \int_{x_0}^{\xi} P(x, y_0)dx + \int_{y_0}^{\eta} Q(\xi, y)dy \\ &= \int_{y_0}^{\eta} Q(x_0, y)dy + \int_{x_0}^{\xi} P(x, \eta)dx. \end{aligned}$$

Tương tự như trong chứng minh định lý 10.6* ta có $F'_\xi(\xi, \eta) = P(\xi, \eta)$, $F'_\eta(\xi, \eta) = Q(\xi, \eta)$ và do vậy $F(\xi, \eta)$ là nguyên hàm của ω trong D , tức là ω là dạng vi phân đúng trong D . \square

II. Dạng vi phân đóng

Định nghĩa 3.1.5. Giả sử $D \subset \mathbb{R}^2$ là miền; P, Q là những hàm liên tục trong D . Dạng $\omega = Pdx + Qdy$ được gọi là *dạng vi phân đóng* trong D nếu đối với mỗi điểm $M_0(x_0, y_0) \in D$ đều tồn tại lân cận $\mathcal{U}(M_0) \subset D$ của điểm M_0 sao cho trong lân cận đó ω có nguyên hàm.

Nói một cách ngắn gọn: ta đòi hỏi rằng dạng vi phân có nguyên hàm địa phương.

Ta có thể giả thiết rằng lân cận nói trên là hình tròn với tâm tại điểm $M_0(x_0, y_0)$. Khi đó từ các nhận xét 10.2 và 10.3 và phương pháp chứng minh định lý 3.1.6 ta có

Định lý 3.1.7. Dạng vi phân $\omega = Pdx + Qdy$ với các hệ số P và Q liên tục trong miền D là dạng vi phân đóng khi và chỉ khi đối với hình chữ nhật đủ bé bất kỳ nằm trong D (cùng với biên của nó) với các cạnh song song với trục tọa độ đều thỏa mãn hệ thức $\int_{\mathcal{L}} \omega = 0$, trong đó \mathcal{L} là biên của hình chữ nhật đó.

Định lý 3.1.8. Giả sử $D \subset \mathbb{R}^2$ là miền; $P(x, y), Q(x, y), \frac{\partial P(x, y)}{\partial x}$ và $\frac{\partial Q(x, y)}{\partial y}$ là những hàm liên tục trong D . Dạng vi phân $\omega = Pdx + Qdy$ là đóng trong D khi và chỉ khi

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} \quad \forall (x, y) \in D.$$

Chứng minh. Điều kiện cần. Theo giả thiết ω là dạng đóng trong D . Do đó $\forall (x_0, y_0) \in D \exists F$ là hàm trong lân cận của điểm (x_0, y_0) sao cho $dF = \omega$ trong lân cận đó, tức là

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = Q.$$

Lấy đạo hàm đẳng thức thứ nhất theo y và đẳng thức thứ hai theo x ta thu được

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}.$$

Vì $\frac{\partial P}{\partial y}$ và $\frac{\partial Q}{\partial x}$ liên tục nên các đạo hàm riêng hỗn hợp ở vế phải liên tục. Do đó chúng bằng nhau và từ đó

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Điều kiện đủ. Trong lân cận điểm $(x_0, y_0) \in D$ ta xét hàm

$$F(\xi, \eta) = \int_{x_0}^{\xi} P(x, y_0) dx + \int_{y_0}^{\eta} Q(\xi, y) dy.$$

Đó là tích phân của dạng $\omega = Pdx + Qdy$ theo đường gấp khúc đi từ điểm (x_0, y_0) đến (ξ, η) với các cạnh của nó song song với các trục tọa độ và đỉnh (x_0, y_0) , (ξ, y_0) và (ξ, η) .

Lấy đạo hàm $F(\xi, \eta)$ theo ξ ta thu được

$$\frac{\partial F(\xi, \eta)}{\partial \xi} = P(\xi, y_0) + \int_{y_0}^{\eta} \frac{\partial Q(\xi, y)}{\partial \xi} dy.$$

Nhưng theo giả thiết $\frac{\partial Q}{\partial \xi}(\xi, y) = \frac{\partial P}{\partial y}(\xi, y)$ và ta có

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \xi}(\xi, \eta) &= P(\xi, y_0) + \int_{y_0}^{\eta} \frac{\partial P(\xi, y)}{\partial y} dy \\ &= P(\xi, y_0) + P(\xi, \eta) - P(\xi, y_0) \\ &= P(\xi, \eta). \end{aligned}$$

Hoàn toàn tương tự ta có $\frac{\partial F(\xi, \eta)}{\partial \eta} = Q(\xi, \eta)$. Như vậy $F(\xi, \eta)$ là nguyên hàm của ω trong lân cận của điểm (x_0, y_0) , tức là ω là dạng vi phân đóng. \square

Nhận xét 3.1.4. Từ định nghĩa và các kết quả trên đây ta thấy rằng mọi dạng đúng đều là dạng đóng. Điều khẳng định ngược lại nói chung là không đúng nếu không có những điều kiện bổ sung. Ta chứng tỏ điều đó bằng ví dụ sau

Giả sử $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ và trong D cho

$$\omega = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}.$$

Hiển nhiên ω là dạng đóng trong D vì $\omega = d\operatorname{Arctg}\frac{y}{x}$ tại lân cận nào đó của mỗi điểm $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Tuy nhiên ω không phải là dạng đúng. Thật vậy, nếu Γ là đường tròn $x = R \cos t$, $y = R \sin t$, $0 \leq t \leq 2\pi$ thì

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \omega &= \int_0^{2\pi} \frac{R \cos t \cdot R \cos t - R \sin t \cdot (-R \sin t)}{R^2 \cos^2 t + R^2 \sin^2 t} dt \\ &= \int_0^{2\pi} dt = 2\pi \neq 0. \end{aligned}$$

III. Bây giờ ta chuyển sang xét dạng vi phân trong miền phức.

Định nghĩa 3.1.6. 1. Dạng vi phân $\omega = f(z)dz$ được gọi là *dạng vi phân đúng trong miền D* nếu tồn tại hàm $F(z)$ thỏa mãn điều kiện $F'(z) = f(z)$, $\forall z \in D$.

2. Dạng vi phân $\omega = f(z)dz$ được gọi là *dạng vi phân đóng trong D* nếu $\forall z_0 \in D$ đều tồn tại lân cận $U(z_0)$ của điểm z_0 và tồn tại hàm $F(z)$ trong $U(z_0)$ là nguyên hàm đối với $f|_{U(z_0)}$.

Đặt $f(z) = u + iv$ và $dz = dx + idy$. Ta có

$$\omega = f(z)dz = udx - vdy + i(vdx + udy) = \omega_1 + i\omega_2.$$

Bổ đề 3.1.1. Dạng vi phân $\omega = f(z)dz$ là dạng đúng (dạng đóng) trong miền D khi và chỉ khi các dạng vi phân $\omega_1 = udx - vdy$ và $\omega_2 = vdx + udy$ là dạng đúng (tương ứng: dạng đóng) trong D . Đồng thời, nếu $F = U + iV$ là nguyên hàm đối với $f = u + iv$ thì U và V sẽ là nguyên hàm đối với ω_1 và ω_2 tương ứng.

Chứng minh. Ta chỉ cần chứng minh bổ đề cho trường hợp dạng vi phân đúng.

1. Giả sử $\omega = f(z)dz$ là dạng vi phân đúng trong D nghĩa là $\exists F$ là nguyên hàm đối với f . Giả sử $F = U + iV$.

Ta có

$$F'(z) = \frac{\partial U}{\partial x} + i \frac{\partial V}{\partial x} = u + iv.$$

Từ đó rút ra $\frac{\partial U}{\partial x} = u, \frac{\partial V}{\partial x} = v$. Vì hàm F chỉnh hình trong D nên

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y}; \quad \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x}.$$

Và bây giờ ta có

$$\omega_1 = udx - vdy = \frac{\partial U}{\partial x}dx - \frac{\partial V}{\partial x}dy = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy$$

và do đó ω_1 là dạng đúng trong D và U là nguyên hàm của nó.

Tương tự

$$\omega_2 = vdx + udy = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial x}dy = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy$$

nghĩa là ω_2 - dạng đúng và V là nguyên hàm đối với nó.

2. Bây giờ giả sử ω_1 và ω_2 là những dạng vi phân đúng và U, V là nguyên hàm của chúng. Ta có

$$\frac{\partial U}{\partial x} = u, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = -v, \quad \frac{\partial V}{\partial x} = v, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = u.$$

Từ đó suy ra $\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y}$ và $\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x}$, nghĩa là điều kiện Cauchy - Riemann thỏa mãn. Do đó $F = U + iV$ chỉnh hình trong D và

$$F'(z) = \frac{\partial U}{\partial x} + i \frac{\partial V}{\partial x} = u + iv = f(z).$$

Do đó F là nguyên hàm đối với f trong D .

Đối với các dạng vi phân đóng định lý cũng được chứng minh tương tự. \square

Nhờ bổ đề vừa chứng minh ta có thể chuyển một số kết quả trong lý thuyết dạng vi phân trong miền thực sang cho dạng vi phân trong miền phức. Để làm ví dụ, ta sẽ chứng minh hai định lý sau đây.

Định lý 3.1.9. *Nếu $\omega = f(z)dz$ là dạng vi phân đúng trong miền $D \subset \mathbb{C}$, F_1 và F_2 là hai nguyên hàm đối với f trong D thì*

$$F_2(z) = F_1(z) + C, \quad \forall z \in D, \quad C = \text{const.}$$

Chứng minh. Thật vậy, $F_2(z) = U_2 + iV_2$, $F_1(z) = U_1 + iV_1$, trong đó U_1, U_2 là nguyên hàm đối với $\omega_1 = udx - vdy$ ($f = u + iv$), còn V_1 và V_2 là nguyên hàm đối với $\omega_2 = vdx + udy$. Do đó $U_2 = U_1 + C_1$, $V_2 = V_1 + C_2$ trong đó C_1 và C_2 là những hằng số. Bây giờ ta có

$$\begin{aligned} F_2(z) &= U_2 + iV_2 = U_1 + iV_1 + C_1 + iC_2 = \\ &= F_1(z) + C, \quad C = C_1 + iC_2 = \text{const.} \end{aligned}$$

□

Định lý 3.1.10. *Giả sử f là hàm liên tục trong miền $D \subset \mathbb{C}$. Nếu $\int f(z)dz$ không phụ thuộc vào đường lấy tích phân trong D và F là nguyên hàm đối với f trong D thì $\forall a, b \in D$ ta có*

$$\int_a^b f(z)dz = F(b) - F(a).$$

Chứng minh. Đặt $F(z) = U(z) + iV(z)$, $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z = x + iy$ ta có

$$\begin{aligned} \int_a^b f(z)dz &= \int_a^b udx - vdy + i \int_a^b vdx + udy \\ &= U(b) - U(a) + i(V(b) - V(a)) \\ &= F(b) - F(a). \end{aligned}$$

□

3.1.5 Tích phân đường phụ thuộc tham số

Giả sử \mathcal{L} là đường cong có hướng đo được và D là tập hợp mở của mặt phẳng phức \mathbb{C} , còn $f(\zeta, z)$ là hàm xác định, đơn trị khi $z \in D$ và $\zeta \in \mathcal{L}$. Giả sử z_0 là điểm tụ của D (z_0 là điểm hữu hạn hay điểm vô cùng). Ta nhắc lại một vài định nghĩa liên quan đến sự hội tụ của họ hàm phụ thuộc tham số.

Định nghĩa 3.1.7. 1^+ . Hàm $\phi(\zeta)$, $\zeta \in \mathcal{L}$ được gọi là *giới hạn* của hàm $f(\zeta, z)$ (họ hàm!) khi $z \rightarrow z_0$ ($z_0 \neq \infty$) nếu

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0, \forall \zeta \in \mathcal{L} \exists \delta = \delta(\varepsilon, \zeta) > 0 : \forall z \in D \cap \{z : 0 < |z - z_0| < \delta\} \\ \Rightarrow |f(\zeta, z) - \phi(\zeta)| < \varepsilon. \end{aligned}$$

2^+ . Hàm $\phi(\zeta)$, $\zeta \in \mathcal{L}$ được gọi là *giới hạn* của hàm $f(\zeta, z)$ khi $z \rightarrow \infty$, $z \in D$ nếu

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0, \forall \zeta \in \mathcal{L} \exists \Delta = \Delta(\varepsilon, \zeta) > 0 : \forall z \in D \cap \{z : |z| > \Delta\} \Rightarrow \\ |f(\zeta, z) - \phi(\zeta)| < \varepsilon. \end{aligned}$$

3^+ . Hàm $f(\zeta, z)$ dần đều đối với $\zeta \in \mathcal{L}$ đến hàm $\phi(\zeta)$ khi $z \rightarrow z_0$ (khi $z \rightarrow \infty$) nếu: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ (tương ứng: $\exists \Delta = \Delta(\varepsilon) > 0$) sao cho $\forall z \in D \cap \{z : 0 < |z - z_0| < \delta\}$ (tương ứng: $z \in D \cap \{z : |z| > \Delta\}$) và $\forall \zeta \in \mathcal{L}$ thì

$$|f(\zeta, z) - \phi(\zeta)| < \varepsilon.$$

Ký hiệu:

$$f(\zeta, z) \underset{(z \rightarrow z_0)}{\Rightarrow} \phi(\zeta)$$

Tương tự như trường hợp dãy hàm (tức là khi $\mathcal{L} \equiv \mathbb{N}$, $D \equiv \mathbb{R}$) có thể chứng minh rằng giới hạn của họ hàm liên tục hội tụ đều là hàm liên tục. Áp dụng kết quả này ta chứng minh

Định lý 3.1.11. *Giả sử: 1^+ \mathcal{L} là đường cong có hướng đo được, $D \subset \mathbb{C}$ là tập hợp mở với điểm tụ là z_0 ;*

2^+ $f(\zeta, z)$, $\zeta \in \mathcal{L}$, $z \in D$ là hàm liên tục trên $\mathcal{L} \forall z \in D$ như là hàm của ζ .

$$3^+ \quad f(\zeta, z) \underset{(z \rightarrow z_0)}{\Rightarrow} \phi(\zeta).$$

Khi đó

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \int_{\mathcal{L}} f(\zeta, z) d\zeta = \int_{\mathcal{L}} \lim_{z \rightarrow z_0} f(\zeta, z) d\zeta = \int_{\mathcal{L}} \phi(\zeta) d\zeta$$

tức là phép qua giới hạn dưới dấu tích phân đường có thể thực hiện được.

Chứng minh. Theo nhận xét ở trên hàm giới hạn $\phi(\zeta)$ là hàm liên tục trên \mathcal{L} .

Vì $f(\zeta, z) \Rightarrow \phi(\zeta)$ khi $z \rightarrow z_0$ nên: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sao cho $\forall \zeta \in \mathcal{L}$

$$|f(\zeta, z) - \phi(\zeta)| < \frac{\varepsilon}{|\mathcal{L}|}, \quad z \in D \cap \{z : 0 < |z - z_0| < \delta\}$$

trong đó $|\mathcal{L}|$ là độ dài của đường cong \mathcal{L} . Áp dụng định lý 3.1.2 về ước lượng tích phân ta có

$$\left| \int_{\mathcal{L}} [f(\zeta, z) - \phi(\zeta)] d\zeta \right| \leq \int_{\mathcal{L}} |f(\zeta, z) - \phi(\zeta)| dS < \frac{\varepsilon}{|\mathcal{L}|} |\mathcal{L}| = \varepsilon.$$

Vì $\varepsilon > 0$ là số tùy ý nên từ đó suy ra kết luận của định lý. \square

Từ định lý 3.1.11 ta thu được các trường hợp riêng sau đây.

Hệ quả 3.1.2. *Giả sử \mathcal{L} là đường cong có hướng đo được, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ là dãy hàm liên tục trên \mathcal{L} và $f_n \underset{(n \rightarrow \infty)}{\Rightarrow} f(\zeta)$ trên \mathcal{L} . Khi đó*

$$\int_{\mathcal{L}} f_n(\zeta) d\zeta \xrightarrow{(n \rightarrow \infty)} \int_{\mathcal{L}} f(\zeta) d\zeta.$$

Hệ quả 3.1.3. *Giả sử \mathcal{L} là đường cong có hướng đo được, chuỗi*

$$\sum_{n \geq 1} u_n(\zeta) = u_1(\zeta) + u_2(\zeta) + \cdots + u_n(\zeta) + \cdots$$

các hàm liên tục trên \mathcal{L} hội tụ đều trên \mathcal{L} đến tổng $S(\zeta)$. Khi đó chuỗi $\sum_{n \geq 1} u_n(\zeta)$ có thể tích phân theo \mathcal{L} từng số hạng với nghĩa là

$$\int_{\mathcal{L}} \left[\sum_{n \geq 1} u_n(\zeta) \right] d\zeta = \sum_{n \geq 1} \int_{\mathcal{L}} u_n(\zeta) d\zeta = \int_{\mathcal{L}} S(\zeta) d\zeta.$$

Bổ đề 3.1.2. (Bất đẳng thức Lagrange) *Giả sử đoạn $[a, b] \subset \mathbb{R}$ và $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ là hàm liên tục trên $[a, b]$, khả vi tại mọi điểm của khoảng (a, b) . Khi đó*

$$|f(b) - f(a)| \leq |f'(\xi)|(b - a), \quad a < \xi < b.$$

Chứng minh. Giả sử $\varphi \in \text{Arg}[f(b) - f(a)]$. Khi đó

$$|f(b) - f(a)| = e^{-i\varphi}[f(b) - f(a)] = e^{-i\varphi}f(b) - e^{-i\varphi}f(a).$$

Đặt $e^{-i\varphi}f(x) = u(x) + iv(x)$, $\forall x \in [a, b]$. Ta có

$$\begin{aligned} |f(b) - f(a)| &= (u(b) + iv(b)) - (u(a) + iv(a)) \\ &= u(b) - u(a) + i(v(b) - v(a)). \end{aligned}$$

Hiển nhiên rằng vế cuối cùng phải là số thực (vì vế đầu tiên là số thực). Do đó $v(b) - v(a) = 0$. Từ đó theo định lý Lagrange đối với hàm u , tồn tại điểm $\xi \in (a, b)$ sao cho

$$|f(b) - f(a)| = u'(\xi)(b - a) \leq |f'(\xi)|(b - a)$$

□

Định lý 3.1.12. (Đạo hàm tích phân đường theo tham số)

Giả sử

1⁺ \mathcal{L} là đường cong có hướng đo được, D là tập hợp mở của mặt phẳng phức \mathbb{C} .

2⁺ $f(\zeta, z)$, $z \in D$, $\zeta \in \mathcal{L}$ là hàm liên tục theo ζ trên $\mathcal{L} \forall z \in D$ còn $f'_z(\zeta, z)$ là hàm liên tục trên $\mathcal{L} \times D$ và

$$\varphi(z) = \int_{\mathcal{L}} f(\zeta, z) d\zeta, \quad z \in D.$$

Khi đó

$$\varphi'(z) = \int_{\mathcal{L}} f'_z(\zeta, z) d\zeta \quad (3.14)$$

và $\varphi'(z)$ liên tục trên D hay là

$$\frac{d}{dz} \int_{\mathcal{L}} f(\zeta, z) d\zeta = \int_{\mathcal{L}} \frac{\partial}{\partial z} f(\zeta, z) d\zeta.$$

Chứng minh. Ta cần chứng minh rằng biểu thức

$$\frac{\varphi(z + \Delta z) - \varphi(z)}{\Delta z} = \int_{\mathcal{L}} \frac{f(\zeta, z + \Delta z) - f(\zeta, z)}{\Delta z} d\zeta$$

dẫn đến (3.14) khi $\Delta z \rightarrow 0$, hay là

$$J(\Delta z) = \int_{\mathcal{L}} \left[\frac{f(\zeta, z + \Delta z) - f(\zeta, z)}{\Delta z} - f'_z(\zeta, z) \right] d\zeta \rightarrow 0, \quad \Delta z \rightarrow 0.$$

Trước hết, theo định lý 3.1.2 về ước lượng tích phân ta có

$$|J(\Delta z)| \leq \int_{\mathcal{L}} \left| \frac{f(\zeta, z + \Delta z) - f(\zeta, z)}{\Delta z} - f'_z(\zeta, z) \right| ds.$$

Xét hàm

$$g(t) = \frac{f(\zeta, z + t\Delta z) - f(\zeta, z)}{\Delta z} - f'_z(\zeta, z)t, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Áp dụng bất đẳng thức Lagrange cho hàm $g(t)$ ta thu được

$$\begin{aligned} |g(1) - g(0)| &= \left| \frac{f(\zeta, z + \Delta z) - f(\zeta, z)}{\Delta z} - f'_z(\zeta, z) \right| \\ &\leq |g'(\tau)| \cdot 1 = \left| f'_z(\zeta, z + \tau \Delta z) - f'_z(\zeta, z) \right|, \quad 0 < \tau < 1. \end{aligned}$$

Như vậy

$$|J(\Delta z)| \leq \int_{\mathcal{L}} |f'_z(\zeta, z + \tau \Delta z) - f'_z(\zeta, z)| ds.$$

Vì $f'_z(\zeta, z)$ liên tục trên $\mathcal{L} \times D$ nên nó liên tục đều trên tập hợp đóng $\mathcal{L} \times \overline{\mathcal{U}(z)}$, trong đó $\mathcal{U}(z)$ là lân cận nào đó của điểm z : $\overline{\mathcal{U}(z)} \subset D$. Do đó $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$:

$$|f'_z(\zeta, z + \tau \Delta z) - f'_z(\zeta, z)| < \varepsilon, \quad \forall \Delta z : |\Delta z| < \delta, \quad z + \Delta z \in \overline{\mathcal{U}(z)}, \quad \forall \zeta \in \mathcal{L}.$$

Như vậy

$$|J(\Delta z)| \leq \int_{\mathcal{L}} \varepsilon ds = \varepsilon |\mathcal{L}|, \quad |\Delta z| < \delta$$

và do đó $J(\Delta z) \rightarrow 0$, khi $\Delta z \rightarrow 0$.

Tiếp theo ta có

$$\begin{aligned} |\varphi'(z_1) - \varphi'(z_2)| &\leq \int_{\mathcal{L}} |f'_z(\zeta, z_1) - f'_z(\zeta, z_2)| ds \\ &\leq \int_{\mathcal{L}} \varepsilon ds = \varepsilon |\mathcal{L}|, \quad |z_1 - z_2| < \delta, \end{aligned}$$

tức là hàm $\varphi'(z)$ liên tục trên D . □

3.2 Lý thuyết Cauchy

3.2.1 Nguyên hàm địa phương của hàm chỉnh hình

Bây giờ ta chuyển sang xét vấn đề tồn tại nguyên hàm đối với hàm chỉnh hình. Ta có

Định nghĩa 3.2.1. Giả sử hàm $f \in \mathcal{H}(D)$. Hàm $F(z) \in \mathcal{H}(D)$ được gọi là nguyên hàm của hàm $f(z)$ nếu

$$F'(z) = f(z), \quad \forall z \in D.$$

Nếu $F(z)$ là một nguyên hàm nào đó đối với hàm chỉnh hình $f(z)$ trong miền D thì tập hợp mọi nguyên hàm của nó được cho bởi công thức $F(z) + C$, trong đó C là hằng số tùy ý (xem tiết 3.1.4).

Để nghiên cứu vấn đề tồn tại nguyên hàm đối với hàm chỉnh hình, đầu tiên ta xét vấn đề tồn tại nguyên hàm địa phương tác dụng trong lân cận của một điểm nào đó. Ta bắt đầu việc đó từ việc chứng minh định lý cực kỳ quan trọng sau đây.

Định lý 3.2.1. (Cauchy) *Giả sử D là miền của mặt phẳng phức \mathbb{C} . Nếu $f \in \mathcal{H}(D)$ thì dạng vi phân $f(z)dz$ là dạng vi phân đóng trong D .*

Chứng minh. 1. Đầu tiên ta chứng minh rằng $\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0$ trong đó $\partial\Delta$ là biên của tam giác Δ tùy ý nằm trong D có định hướng ngược chiều kim đồng hồ.

Giả sử rằng

$$\left| \int_{\partial\Delta} f(z)dz \right| = \alpha(\Delta) > 0. \quad (3.15)$$

Ta chia Δ thành bốn tam giác con bởi các đường trung bình và giả thiết rằng biên của Δ và của các tam giác con này đều được định hướng ngược chiều kim đồng hồ. Giả sử bốn tam giác con được ký hiệu là Δ_i , $i = 1, 2, 3, 4$ với biên tương ứng $\partial\Delta_i$. Vì những tích phân theo các đường trung bình được lấy hai lần theo hai hướng ngược nhau nên chúng triệt tiêu lẫn nhau và ta có

$$\int_{\partial\Delta} f(z)dz = \sum_{i=1}^4 \int_{\partial\Delta_i} f(z)dz = \sum_{i=1}^4 \alpha(\Delta_i).$$

Từ đó rút ra

$$\begin{aligned} \alpha(\Delta) = \left| \int_{\partial\Delta} f(z)dz \right| &\leq \left| \int_{\partial\Delta_1} f(z)dz \right| + \left| \int_{\partial\Delta_2} f(z)dz \right| \\ &+ \left| \int_{\partial\Delta_3} f(z)dz \right| + \left| \int_{\partial\Delta_4} f(z)dz \right|. \end{aligned}$$

Do đó trong số bốn hình tam giác Δ_i , $i = 1, 2, 3, 4$ tồn tại ít nhất một hình mà $\alpha(\Delta_i) \geq \frac{\alpha(\Delta)}{4}$. Ta ký hiệu tam giác đó là Δ^1 . Như vậy

$$\left| \int_{\partial\Delta^1} f(z)dz \right| \geq \frac{\alpha(\Delta)}{4}.$$

Ta lại chia tam giác Δ^1 thành bốn tam giác bằng nhau bởi các đường trung bình như ở trên. Trong số bốn tam giác vừa thu được, tồn tại một hình, giả sử đó là hình tam giác Δ^2 , thỏa mãn điều kiện

$$\left| \int_{\partial\Delta^2} f(z)dz \right| \geq \frac{\alpha(\Delta)}{4^2}.$$

Tiếp tục quá trình này vô hạn lần, ta có thể đi đến dãy vô hạn các hình tam giác lồng nhau:

1.

$$\begin{aligned} (\Delta^1) \supset (\Delta^2) \supset \dots \supset (\Delta^k) \supset (\Delta^{k+1}) \supset \dots, \\ (\Delta^k) \subset D, \quad \forall k \end{aligned} \tag{3.16}$$

2. độ dài

$$|\partial\Delta^n| = \frac{1}{2}|\partial\Delta^{n-1}| = \frac{1}{2^n}|\partial\Delta|,$$

3.

$$\left| \int_{\partial\Delta^n} f(z)dz \right| \geq \frac{\alpha(\Delta)}{4^n}. \tag{3.17}$$

Từ tính chất (3.16) suy ra rằng tồn tại điểm z_0 duy nhất thuộc mọi tam giác Δ^n , $z_0 \in \Delta^n$, $\forall n$. Hiển nhiên $z_0 \in D$ và do đó hàm $f(z)$ chỉnh hình tại điểm z_0 . Từ đó suy ra rằng $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$:

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right| < \varepsilon; \quad \forall z \in D : |z - z_0| < \delta. \quad (3.18)$$

Rõ ràng là $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N$ thì $\partial\Delta^n$ nằm trong hình tròn $\{|z - z_0| < \delta\}$ và do đó $\forall z \in \partial\Delta^n$ ta có (3.18) hay là

$$|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| < \varepsilon|z - z_0|.$$

Ta lưu ý rằng khoảng cách $|z' - z|$ giữa hai điểm của một tam giác luôn luôn bé hơn chu vi của nó. Do đó đối với $z \in \partial\Delta^n$ ta có

$$\varepsilon|z - z_0| < \varepsilon \cdot |\partial\Delta^n| = \varepsilon \cdot \frac{|\partial\Delta|}{2^n}. \quad (3.19)$$

Tiếp theo ta có

$$\begin{aligned} & \int_{\partial\Delta^n} [f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)] dz = \\ &= \int_{\partial\Delta^n} f(z) dz - f(z_0) \int_{\partial\Delta^n} dz + f'(z_0) \int_{\partial\Delta^n} z dz - z_0 f'(z_0) \int_{\partial\Delta^n} dz. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Theo định nghĩa tích phân ta có

$$\int_{\partial\Delta^n} dz = 0; \quad \int_{\partial\Delta^n} z dz = 0$$

và từ (3.20) rút ra

$$\int_{\partial\Delta^n} [f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)] dz = \int_{\partial\Delta^n} f(z) dz.$$

Do đó từ đẳng thức vừa viết và từ (3.17) và (3.19) suy ra

$$\begin{aligned} \frac{\alpha(\Delta)}{4^n} &\leq \left| \int_{\partial\Delta^n} f(z)dz \right| \\ &= \left| \int_{\partial\Delta^n} [f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)]dz \right| \\ &\leq \varepsilon \frac{|\partial\Delta|^2}{4^n}. \end{aligned}$$

và từ đó

$$\alpha(\Delta) \leq \varepsilon |\partial\Delta|^2. \quad (3.21)$$

Vì ε là đại lượng bé tùy ý, còn $|\partial\Delta|$ và tích phân $\int_{\partial\Delta} f(z)dz$ không phụ thuộc vào ε nên từ bất đẳng thức (3.21) suy ra rằng $\alpha(\Delta) = 0$, hay là $\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0$.

2. Từ điều chứng minh trong 1) suy ra rằng $\int_{\gamma(R)} f(z)dz = 0$ đối với hình

chữ nhật bất kỳ $R \subset D$ cùng với biên $\gamma(R)$ của nó. Rõ ràng là $\int_{\gamma(R)} \omega_1 = 0$,

$\int_{\gamma(R)} \omega_2 = 0$ và do đó ω_1 và ω_2 là những dạng vi phân đóng trong lân cận

mỗi điểm của miền D (xem định lý 3.1.3), nghĩa là: ω_1 và ω_2 là những dạng vi phân đóng trong D . Từ bổ đề đã chứng minh trong 3.1.4 suy ra rằng $\omega = f(z)dz = \omega_1 + i\omega_2$ là dạng đóng trong D . Định lý được chứng minh hoàn toàn. \square

Định lý 3.2.2. Nếu hàm $f \in \mathcal{H}(D)$ thì f có nguyên hàm địa phương và nguyên hàm này chỉnh hình.

Chứng minh. Thật vậy, vì $f \in \mathcal{H}(D)$ nên $f(z)dz$ là dạng vi phân đóng trong D . Do đó sự tồn tại nguyên hàm địa phương được suy từ định nghĩa dạng

vi phân đóng. Nguyên hàm đó là hàm chỉnh hình vì hàm chỉnh hình f là đạo hàm của nó. \square

Định lý 3.2.3. *Giả sử hàm liên tục $f(z)$ chỉnh hình tại mỗi điểm của miền D có thể trừ ra những điểm nằm trên đường thẳng δ song song với trục thực. Khi đó dạng vi phân $f(z)dz$ là dạng đóng trong D .*

Trường hợp đặc biệt, nếu hàm $f(z)$ chỉnh hình tại mọi điểm của miền D , có thể trừ ra những điểm cô lập thì $f(z)dz$ là dạng vi phân đóng.

Như vậy, định lý 3.2.3 là sự khái quát hóa của định lý 3.2.1.

Chứng minh. Ta cần chứng minh tích phân

$$\int_{\partial R} f(z)dz = 0 \quad (3.22)$$

đối với biên ∂R của hình chữ nhật $R \subset D$ bất kỳ.

1. Nếu hình chữ nhật R không cắt δ thì (3.22) là hiển nhiên.
2. Giả sử một cạnh của R nằm trên δ . Giả sử hình chữ nhật R có bốn đỉnh là $u, u+a, u+ib, u+a+ib$ trong đó $u, u+a \in \delta; a, b \in \mathbb{R}$. Ta ký hiệu $R(\varepsilon)$ là hình chữ nhật với bốn đỉnh là

$$u+i\varepsilon, \quad u+a+i\varepsilon, \quad u+ib, \quad u+a+ib,$$

trong đó ε là số dương đủ bé. Khi đó

$$\int_{\partial R(\varepsilon)} f(z)dz = 0.$$

Nhưng khi $\varepsilon \rightarrow 0$ thì $\int_{\partial R(\varepsilon)} f(z)dz \rightarrow \int_{\partial R} f(z)dz$. Do đó

$$\int_{\partial R} f(z)dz = 0.$$

3. Bây giờ giả sử δ chia hình chữ nhật R thành hai hình chữ nhật R' và R'' . Từ điều chứng minh trên suy ra rằng $\int_{\partial R'} f(z)dz = 0$ và $\int_{\partial R''} f(z)dz = 0$.

Do đó

$$\int_{\partial R} f(z)dz = 0.$$

□

3.2.2 Nguyên hàm của hàm chỉnh hình theo tuyến

Trong tiết trước ta đã chứng minh rằng mọi hàm chỉnh hình trong miền D đều có nguyên hàm địa phương trong miền đó. Vấn đề về sự tồn tại nguyên hàm toàn cục trong D có phần phức tạp hơn. Trong tiết này ta sẽ nêu *phương pháp “dán”* các nguyên hàm địa phương thành nguyên hàm theo tuyến.

Định nghĩa 3.2.2. Giả sử trong miền D cho hàm f và $\gamma : I \rightarrow D$ ($I = [a, b]$) là tuyến liên tục tùy ý trong miền D . Hàm

$$F : I \mapsto \mathbb{C}$$

được gọi là nguyên hàm của hàm f dọc theo tuyến γ nếu

1. hàm F liên tục trên $[a, b]$,
2. với điểm $t_0 \in [a, b]$ tùy ý, tồn tại lân cận $U \subset D$ của điểm $\gamma(t_0)$ mà tại đó hàm f có nguyên hàm F_u sao cho $F_u(\gamma(t)) = f(t)$ với mọi t thuộc lân cận $u(t_0) \subset [a, b]$.

Định lý 3.2.4. *Giả sử hàm $f \in \mathcal{H}(D)$ và γ là tuyến (liên tục) bất kỳ thuộc D . Khi đó nguyên hàm của f dọc theo tuyến γ bao giờ cũng tồn tại và xác định đơn trị với sự sai khác một hằng số cộng.*

Chứng minh. 1. *Sự tồn tại.* Đối với mỗi giá trị $t_0 \in [a, b]$, tồn tại lân cận $v(t_0) \subset [a, b]$ sao cho ánh xạ γ biến nó vào hình tròn mở mà tại đây hàm f có

nguyên hàm (định lý 3.2.2). Vì đoạn $[a, b]$ compact nên tồn tại một phép phân hoạch hữu hạn đoạn $[a, b]$ thành các đoạn con $I_k = [t_k, t_{k+1}]$, $k = 0, 1, \dots, n$ sao cho $\gamma(I_k)$ thuộc hình tròn $U_k \subset D$, $k = 1, 2, \dots, n$ mà tại đó hàm f có nguyên hàm F_k . Trong số những nguyên hàm của f (chúng khác nhau bởi một hằng số cộng) ta sẽ chọn một nguyên hàm tùy ý. Ta ký hiệu nó là F_1 . Ta xét một nguyên hàm nào đó của f trong hình tròn U_2 . Vì $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ (vì chứa điểm $\gamma(t_1)$) và liên thông nên nguyên hàm này chỉ sai khác F_1 bởi một hằng số cộng (vì đó là nguyên hàm của cùng một hàm). Do đó, trong các nguyên hàm của f trong U_2 , tồn tại một nguyên hàm F_2 mà $F_2 \equiv F_1$ trong giao $U_1 \cap U_2$. Giả sử

$$G_1 = \begin{cases} F_1 & \text{trong } U_1, \\ F_2 & \text{trong } U_2. \end{cases}$$

Khi đó G_1 là nguyên hàm của hàm f trong $U_1 \cup U_2$.

Tiếp tục quá trình lý luận đó, tại mỗi U_k ta sẽ chọn được nguyên hàm F_k sao cho

$$F_k \equiv F_{k-1}$$

trong giao $U_{k-1} \cap U_k$ ($k = 2, 3, \dots, n$) và hàm G_{k-1} tương ứng là nguyên hàm của f trong $U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_k$.

Ta xét hàm $F(t) = F_k(\gamma(t))$, $t \in I_k$, $k = 1, 2, \dots, n$. Đó là hàm liên tục trên I (do cách xây dựng). Ta cần chứng minh rằng $F(t)$ là nguyên hàm của f dọc theo tuyến γ . Thật vậy, đối với mỗi điểm $t_0 \in [a, b]$ tồn tại một lân cận mà tại đó

$$F(t) = F_U(\gamma(t)),$$

trong đó F_U là nguyên hàm của f trong lân cận $U \subset I$ của điểm $\gamma(t_0)$.

2. *Tính duy nhất.* Giả sử F_1 và F_2 đều là những nguyên hàm của f dọc theo γ . Trong lân cận $U(t_0)$ của điểm $t_0 \in [a, b]$ ta có

$$F_1 = F^{(1)}(\gamma(t)), \quad F_2 = F^{(2)}(\gamma(t)),$$

trong đó $F^{(1)}$ và $F^{(2)}$ là hai nguyên hàm của f tại một lân cận nào đó của $\gamma(t_0)$. Vì hiệu $F_1 - F_2$ là hằng số nên suy ra rằng hàm

$$\varphi(t) = F_1(t) - F_2(t)$$

là hằng số trong lân cận $u(t_0)$. Ta cần chứng minh rằng

$$\varphi = \text{const}, \quad \forall t \in [a, b].$$

Thật vậy, xét tập hợp

$$E = \{t \in [a, b] : \varphi(t) = \varphi(t_0)\}.$$

Tập hợp E có các tính chất sau đây

- a) $E \neq \emptyset$ vì $t_0 \in E$,
- b) E là tập mở vì φ là hằng số địa phương và với mỗi điểm $t \in E$ tồn tại một lân cận $u(t) \subset E$,
- c) E là tập đóng. Vì φ liên tục (vì là hằng số địa phương) cho nên nếu $t_n \in E$ thì từ hệ thức $\varphi(t_n) = \varphi(t_0)$ ta có:

$$\lim_{t_n \rightarrow t^*} \varphi(t_n) = \varphi(t^*) = \varphi(t_0)$$

vậy $t^* \in E$. Do đó $E = I$ (vì I liên thông). □

Nhận xét 3.2.1. Nếu ánh xạ γ là hằng số thì hiển nhiên rằng nguyên hàm bất kỳ của hàm f dọc theo γ đều là hằng số.

Trong trường hợp nếu biết một nguyên hàm của hàm f dọc theo tuyến γ thì tích phân của f theo γ được tính bằng công thức Newton - Leibnitz.

Định lý 3.2.5. *Giả sử $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ là tuyến trơn từng khúc và hàm f liên tục trên γ và có nguyên hàm $F(t)$ dọc theo γ . Khi đó*

$$\int_{\gamma} f(z) dz = F(b) - F(a). \quad (3.23)$$

Chứng minh. 1. Đầu tiên giả sử γ là tuyến trơn và nằm trọn trong miền mà hàm f có nguyên hàm. Giả sử F^* là nguyên hàm của f dọc theo γ , hàm $F^*[\gamma(t)]$ khác F một hằng số cộng, tức là:

$$F(t) = F^*[\gamma(t)] + C.$$

Vì γ là tuyến trơn và $F^{*'}(z) = f(z)$ nên với mọi $t \in [a, b]$ tồn tại đạo hàm liên tục

$$F'(t) = f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t).$$

Do đó

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_a^b f[\gamma(t)]\gamma'(t)dt = \int_a^b F'(t)dt = F(b) - F(a).$$

2. Trường hợp γ là tuyến trơn từng khúc. Trong trường hợp này ta có thể chia γ thành một số hữu hạn tuyến

$$\gamma_{\nu} : [t_{\nu}, t_{\nu+1}] \rightarrow \mathbb{C}, \quad a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$$

sao cho mỗi tuyến γ_{ν} đều là trơn và đều nằm trong miền mà hàm f có nguyên hàm.

Do đó

$$\int_{\gamma_{\nu}} f dz = F(t_{\nu+1}) - F(t_{\nu}). \quad (3.24)$$

Bằng cách cộng các đẳng thức (3.24) ta thu được công thức (3.23). \square

Nhận xét 3.2.2. Giả sử hàm f chỉnh hình trong miền D . Khi đó, từ định lý 11.4 và 11.5 ta có thể định nghĩa tích phân của hàm f theo tuyến liên tục $\gamma \subset D$ bất kỳ như là số gia của nguyên hàm của nó dọc theo γ khi t biến thiên trên $[a, b]$. Tích phân (3.23), hiển nhiên là bất biến đối với phép thay tham số. Do đó, ta có thể xét tích phân của hàm chỉnh hình theo đường cong liên tục bất kỳ.

3.2.3 Tính bất biến của tích phân đối với các tuyến đồng luân

Trước khi chứng minh định lý quan trọng về tính bất biến của tích phân hàm $f \in H(D)$ theo các tuyến đồng luân, ta chứng minh định lý sau đây về sự tồn tại của nguyên hàm theo ánh xạ.

Định nghĩa 3.2.3. Giả sử $\delta : (t, u) \mapsto \delta(t, u)$ là ánh xạ liên tục hình chữ nhật

$$R = \left\{ (t, u) \in \mathbb{R}^2 : a \leq t \leq b, a' \leq u \leq b' \right\}$$

vào miền $D \subset \mathbb{R}^2$ và ω là dạng vi phân đóng ở trong D . Hàm liên tục $\phi(t, u)$ được gọi là *nguyên hàm của dạng vi phân đóng ω đối với ánh xạ $\delta(t, u)$* nếu nó thỏa mãn điều kiện: với điểm $(t_0, u_0) \in R$ bất kỳ, tồn tại lân cận $\mathcal{U}(\delta(t_0, u_0))$ của điểm $\delta(t_0, u_0)$ và trong lân cận đó tồn tại nguyên hàm F của ω sao cho

$$\phi(t, u) = F[\delta(t, u)]$$

với mọi điểm (t, u) đủ gần (t_0, u_0) .

Định lý 3.2.6. Với các giả thiết của định nghĩa 3.2.3 nguyên hàm $\phi(t, u)$ của dạng đóng ω đối với ánh xạ δ bao giờ cũng tồn tại và xác định đơn trị với sự sai khác hằng số cộng.

Chứng minh. Vì hình chữ nhật R là compact nên ta có thể chia nó thành những hình chữ nhật con bằng cách chia khoảng biến thiên của t bởi các điểm t_i và khoảng biến thiên của u bởi các điểm u_j sao cho với i và j bất kỳ qua ánh xạ δ ảnh của hình chữ nhật

$$R_{ij} = \left\{ (t, u) : t_i \leq t \leq t_{i+1}, u_j \leq u \leq u_{j+1} \right\}$$

thuộc hình tròn mở \mathcal{U}_{ij} mà tại đó dạng ω có nguyên hàm F_{ij} .

Ta cố định j . Vì các nguyên hàm khác nhau bởi hằng số cộng và vì giao $\mathcal{U}_{ij} \cap \mathcal{U}_{i+1,j} \neq \emptyset$ (và liên thông) nên có thể thêm cho mỗi nguyên hàm F_{ij} (j cố định, i biến thiên) một hằng số sao cho

$$F_{ij} = F_{i+1,j} \quad \text{trong giao} \quad \mathcal{U}_{ij} \cap \mathcal{U}_{i+1,j}.$$

Do đó đối với $u \in [u_j, u_{j+1}]$ ta thu được hàm $\phi_j(t, u)$ mà với i bất kỳ

$$\phi_j(t, u) = F_{ij}(\delta(t, u)), \quad t \in [t_i, t_{i+1}].$$

Như vậy hàm $\phi_j(t, u)$ liên tục trong hình chữ nhật

$$R_j = \left\{ (t, u) \in \mathbb{R}^2 : a \leq t \leq b, u_i \leq u \leq u_{j+1} \right\}$$

và nó là nguyên hàm của dạng ω đối với ánh xạ δ_j , trong đó

$$\delta_j = \delta|_{R_j}.$$

Mỗi nguyên hàm ϕ_j đều được xác định với sự sai khác hằng số cộng.

Bây giờ đối với mỗi j ta có thể chọn liên tiếp các hằng số cộng đó một cách thích hợp sao cho

$$\phi_j(t, u) = \phi_{j+1}(t, u) \quad \text{khi} \quad u = u_{j+1}.$$

Ta xác định hàm $\phi(t, u)$ trong hình chữ nhật R như sau: với j bất kỳ ta đặt

$$\phi(t, u) = \phi_j(t, u) \quad \text{khi} \quad u \in [u_j, u_{j+1}].$$

Hàm này liên tục trong R và thỏa mãn các điều kiện của định nghĩa 3.2.3. Do đó nó là nguyên hàm của dạng ω đối với ánh xạ δ . \square

Bây giờ ta chứng minh định lý chủ yếu của tiết này và cũng là định lý chủ yếu của toàn bộ lý thuyết hàm chỉnh hình. Đó là định lý tích phân Cauchy. Nếu $f \in \mathcal{H}(D)$ thì $\omega = f(z)dz$ là dạng vi phân đóng (định lý 3.2.1), do vậy thay vì nói “*nguyên hàm của dạng ω* ” ta sẽ nói: “*nguyên hàm của hàm f* ”. Ta có

Định lý 3.2.7. (Cauchy) Giả sử D là miền của \mathbb{C} và $f \in \mathcal{H}(D)$. Nếu γ_1 và γ_2 là hai tuyến đồng luân với nhau trong D thì

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz.$$

Chứng minh. Chứng minh định lý được chia làm hai phần:

1. Tuyến γ_1 và γ_2 có đầu mút chung bất động. Theo giả thiết γ_1 và γ_2 đồng luân với nhau trong D nên ánh xạ δ thỏa mãn điều kiện

$$\delta(t, 0) = \gamma_1(t), \quad \delta(t, 1) = \gamma_2(t).$$

Từ định lý 3.2.6 suy ra rằng tồn tại nguyên hàm $\Phi(t, u)$ của f đối với ánh xạ δ . Do đó

$$\varphi_1(t) = \Phi(t, 0)$$

là nguyên hàm của f dọc theo tuyến γ_1 . Tương tự

$$\varphi_2(t) = \Phi(t, 1)$$

là nguyên hàm của f dọc theo tuyến γ_2 .

Từ định lý 3.2.5 ta có

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1} f(z)dz &= \Phi(1, 0) - \Phi(0, 0) \\ \int_{\gamma_2} f(z)dz &= \Phi(1, 1) - \Phi(0, 1) \end{aligned}$$

và do đó

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1} f(z)dz - \int_{\gamma_2} f(z)dz &= [\Phi(1, 0) - \Phi(0, 0)] - [\Phi(1, 1) - \Phi(0, 1)] \\ &= [\Phi(0, 1) - \Phi(0, 0)] - [\Phi(1, 1) - \Phi(1, 0)]. \end{aligned}$$

Ta cần chứng minh rằng

$$\Phi(1, 1) - \Phi(1, 0) = 0, \quad \Phi(0, 1) - \Phi(0, 0) = 0.$$

Thật vậy, xét hàm $u \mapsto \Phi(0, u)$. Đó là nguyên hàm của hàm f theo tuyến

$$\gamma_u : u \mapsto \delta(0, u)$$

nhưng $\delta(0, u) = \gamma_1(0)$ nên tuyến γ_u là hằng số và do đó $\Phi(0, 1) - \Phi(0, 0) = 0$.

Tương tự, hàm $u \mapsto \Phi(1, u)$ là nguyên hàm của f dọc theo tuyến hằng số

$$\tilde{\gamma}_u : u \mapsto \delta(1, u)$$

nên $\Phi(1, 1) - \Phi(1, 0) = 0$.

2. Tuyến γ_1 và γ_2 là những tuyến đóng. Ta đã biết rằng, theo định nghĩa, nếu γ_1 và γ_2 đồng luân với nhau thì tồn tại ánh xạ liên tục hình vuông $I \times I$ vào miền D sao cho

$$\begin{aligned} \delta(t, 0) &= \gamma_1(t), \\ \delta(t, 1) &= \gamma_2(t), \quad 0 \leq t \leq 1 \\ \delta(0, u) &= \delta(1, u) \quad \forall u \in [0, 1]. \end{aligned}$$

(Điều kiện sau cùng chứng tỏ: với mỗi $u_0 \in [0, 1]$ bất kỳ, tuyến $\gamma_{u_0}(t) = \delta(t, u_0)$ là một tuyến đóng).

Bây giờ giả sử $\Phi(t, u)$ là nguyên hàm của f đối với ánh xạ δ . Ta xét hai tuyến

$$\gamma_u : u \mapsto \delta(0, u); \quad \tilde{\gamma}_u : u \mapsto \delta(1, u).$$

Vì hai tuyến này trùng nhau, cho nên

$$\Phi(0, 1) - \Phi(0, 0) = \Phi(1, 1) - \Phi(1, 0)$$

và từ đó suy ra điều phải chứng minh. □

Nhận xét 3.2.3. 1. Từ định lý vừa chứng minh ta rút ra kết luận là: tích phân của hàm chỉnh hình theo một tuyến là một bất biến của lớp đồng luân chứa tuyến ấy.

2. Trong **3.1.1** ta đã nêu ra khái niệm tích phân đối với tuyến và sau đó ta đã thấy rõ ràng trên thực tế tích phân được xác định không phải bởi tuyến mà bởi đường cong (lớp các tuyến tương đương). Với định lý Cauchy dạng tổng quát vừa chứng minh ta còn có thể đi xa hơn: đối với các hàm chỉnh hình tích phân được xác định không phải bởi đường cong mà bởi một lớp đồng luân chứa đường cong ấy.

3.2.4 Công thức tích phân cơ bản thứ nhất của Cauchy

Từ định lý Cauchy đã chứng minh trong tiết trước ta suy ra dạng cổ điển sau đây của định lý Cauchy - gọi là định lý tích phân Cauchy.

Định lý 3.2.8. (Cauchy) Nếu $f \in \mathcal{H}(D)$ và $\gamma \sim 0$ là tuyến đóng bất kỳ thuộc D thì

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0.$$

Chứng minh. Vì $\gamma \sim 0$ trong D nên ta có thể biến dạng đồng luân γ thành tuyến đóng γ_1 nằm trong hình tròn $U \subset D$. Từ định lý 3.2.2 suy ra rằng hàm f có nguyên hàm địa phương F trong U và do đó nguyên hàm của f theo tuyến γ_1 là $F(\gamma_1(t))$. Vì γ_1 là tuyến đóng nên $\gamma_1(a) = \gamma_1(b) = a^*$. Do đó

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = F(a^*) - F(a^*) = 0.$$

Nhưng vì $\gamma_1 \sim \gamma$ nên từ định lý tích phân Cauchy suy ra điều phải chứng minh. \square

Trong miền đơn liên, mọi tuyến đóng đều đồng luân với 0 và do đó hai tuyến bất kỳ với đầu mút chung là đồng luân với nhau. Do đó từ định lý

vừa chứng minh ta rút ra dạng phát biểu cổ điển của định lý Cauchy đối với miền đơn liên.

Định lý 3.2.9. (Cauchy) *Nếu hàm f chỉnh hình trong miền đơn liên $D \subset \mathbb{C}$ thì tích phân của nó theo tuyến đóng $\gamma : I \rightarrow D$ bất kỳ là bằng 0, tức là*

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0. \quad (3.25)$$

Công thức (3.25) được gọi là công thức tích phân cơ bản thứ nhất của Cauchy.

Trong miền đa liên, tích phân của hàm chỉnh hình theo tuyến đóng không nhất thiết là bằng 0. Điều đó được chứng tỏ bởi ví dụ sau đây.

Giả sử $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ và $f(z) = 1/z$ và $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : z = e^{it}, t \in [0, 2\pi]\}$. Ta có

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} i dt = 2\pi i \neq 0.$$

Bây giờ ta chứng minh sự khái quát định lý Cauchy 3.2.9 cho miền D hữu hạn liên thông.

Định lý 3.2.10. (Cauchy) *Giả sử $f \in \mathcal{H}(D)$ và D^* là miền bị chặn nằm trong D cùng với biên của nó gồm một số hữu hạn đường cong đo được. Khi đó*

$$\int_{\partial D^*} f(z)dz = 0. \quad (3.26)$$

Chứng minh. Ta biết rằng miền hữu hạn liên thông (với cấp liên thông n) chính là miền đơn liên hữu hạn nào đó mà trong đó cắt bỏ $(n-1)$ lỗ thủng (các thành phần biên bên trong). Ta vẽ trong D^* những nhát cắt λ_{ν}^{\pm} nối các thành phần của biên miền D^* sao cho D^* trở thành miền đơn liên \tilde{D}^* với biên định hướng dương $\partial \tilde{D}^*$ (ở đây ta lấy các nhát cắt từng đôi một không

giao nhau và không có điểm chung với các thành phần của biên trừ các điểm đầu và cuối các nhất cắt được mô tả bởi hai bờ λ_ν^+ và λ_ν^-). Rõ ràng là

$$\partial\tilde{D}^* = \partial D^* \cup \left(\bigcup_{\nu} \lambda_\nu^+\right) \cup \left(\bigcup_{\nu} \lambda_\nu^-\right).$$

Do đó

$$\int_{\partial\tilde{D}^*} f(z)dz = \int_{\partial D^*} f(z)dz + \sum_{\nu} \int_{\lambda_\nu^+} f(z)dz + \sum_{\nu} \int_{\lambda_\nu^-} f(z)dz = 0.$$

Ta lưu ý rằng tích phân theo các nhất cắt được lấy hai lần theo hai bờ với các hướng ngược nhau. Do đó các tích phân theo các nhất cắt đều triệt tiêu lẫn nhau và thu được

$$\int_{\partial\tilde{D}^*} f(z)dz = \int_{\partial D^*} f(z)dz = 0.$$

Định lý được chứng minh. \square

Nhận xét 3.2.4. Nếu biên ∂D^* của miền s -liên thông D^* gồm s đường cong đóng Γ_i , $i = 1, 2, \dots, s$ trong đó Γ_1 là chu tuyến ngoài, còn $\Gamma_2, \Gamma_3, \dots, \Gamma_s$ là các chu tuyến trong thì công thức (3.26) được viết như sau:

$$\int_{\Gamma_1} f(z)dz = \sum_{i=2}^s \int_{\Gamma_i} f(z)dz. \quad (3.27)$$

Tất cả các định lý 3.2.8 - 3.2.10 đều được chứng minh đối với miền con nằm trọn trong miền chỉnh hình của hàm $f(z)$, tức là chúng được chứng minh với giả thiết hàm $f(z) \in \mathcal{H}(\overline{D})$, $\overline{D} = D \cup \partial D$. Các khái quát tiếp theo đối với định lý tích phân Cauchy trình bày trong các công trình của các nhà toán học A. Pringsheim², N. Luzin³ và I. Privalov⁴ đã chứng tỏ được rằng *hàm dưới dấu tích phân $f(z)$ không nhất thiết phải chỉnh hình*

²A. Pringsheim (1850-1941) là nhà toán học Đức

³N. Luzin (1883-1950) là nhà toán học Nga

⁴I. Privalov (1891-1941) là nhà toán học Nga

trên $\overline{D} = D \cup \partial D$ mà chỉ cần nó chỉnh hình trong miền D và liên tục trên \overline{D} là đủ, tức là $f \in \mathcal{H}(D) \cap \mathcal{C}(\overline{D})$. Cụ thể người ta đã chứng minh được

Định lý Cauchy tổng quát

Giả sử hàm $f(z)$ chỉnh hình trong miền bị chặn D giới hạn bởi một số hữu hạn đường cong đóng Jordan đo được và liên tục trên \overline{D} . Khi đó tích phân của hàm $f(z)$ theo biên có hướng của miền đó là bằng 0, tức là

$$\int_{\partial D} f(z) dz = 0.$$

Bạn đọc có thể xem chứng minh định lý này trong B. V. Sabat “Nhập môn giải tích phức”, phần I, Nhà xuất bản Đại học và Trung học Chuyên nghiệp, trang 113-117, Hà Nội 1979 hoặc trong I. Privalov “Nhập môn lý thuyết hàm biến phức” §2, ch.IV, Hà Nội 1964.

3.2.5 Nguyên hàm trong miền đơn liên

Bây giờ từ định lý 3.2.9 trong tiết trước ta có thể rút ra một kết quả quan trọng mà ta chờ đợi: định lý về sự tồn tại nguyên hàm toàn cục trong miền đơn liên.

Định lý 3.2.11. *Nếu $D \subset \mathbb{C}$ là miền đơn liên và $f \in H(D)$ thì hàm f có nguyên hàm trong miền D .*

Chứng minh. Thật vậy, theo định lý 3.2.9, đối với tuyến đóng $\gamma \subset D$ bất kỳ ta có

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

Vì vậy theo định lý 10.3 và bổ đề ở **3.1.4** suy ra rằng dạng vi phân $\omega = f(z)dz$ là dạng vi phân đúng trong D . Như vậy hàm $f(z)$ có nguyên hàm trong D . □

Nhận xét 3.2.5. Đòi hỏi về tính đơn liên của miền D ở đây là rất cốt yếu. Nếu $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ và $f(z) = 1/z$ thì rõ ràng hàm f không có nguyên hàm trong miền D (xem nhận xét 3.1.4 ở **3.2.4**). Do đó đối với các miền đa liên nói chung định lý về sự tồn tại nguyên hàm toàn cục là không đúng.

3.2.6 Công thức tích phân Cauchy (công thức cơ bản thứ hai của Cauchy)

Trong tiết này ta sẽ nghiên cứu vấn đề về biểu diễn tích phân các hàm chỉnh hình. Ta sẽ thấy phép biểu diễn đó có những áp dụng quan trọng cả về mặt lý thuyết lẫn thực hành.

Ta có

Định lý 3.2.12. *Giả sử D là miền bị chặn với biên Jordan đo được ∂D . Nếu hàm $f(z)$ chỉnh hình trong D và liên tục trong \overline{D} thì với điểm $z \in D$ bất kỳ ta có công thức*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \begin{cases} f(z) & \text{nếu } z \in D; \\ 0 & \text{nếu } z \notin \overline{D}, \end{cases} \quad (3.28)$$

trong đó ∂D là biên có định hướng dương của D .

Công thức (3.28) là *công thức tích phân cơ bản thứ hai* của Cauchy (hay *công thức tích phân Cauchy*); còn vế phải của công thức đó được gọi là *tích phân Cauchy*.

Chứng minh. 1. Để chứng minh (3.28) ta xét hình tròn đủ bé $S(\rho) = \{|\zeta - z| < \rho\}$ sao cho $S(\rho) \subset D$. Ta xét miền $K = D \setminus S$. Biên có định hướng dương ∂K gồm ∂D và biên $\partial S(\rho)$ chạy theo hướng âm. Áp dụng công thức (3.27) cho miền $D \setminus S(\rho)$ và hàm $f(z)/(\zeta - z) \in \mathcal{H}(D \setminus \{z\})$ ta có

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S(\rho)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Ta cần xét tích phân ở vế phải của đẳng thức vừa viết. Ta có

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S(\rho)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta &= \frac{f(z)}{2\pi i} \int_{\partial S(\rho)} \frac{d\zeta}{\zeta - z} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S(\rho)} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta \\ &= f(z) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S(\rho)} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Vì tích phân ở vế trái (3.29) và số hạng thứ nhất của vế phải không phụ thuộc ρ nên số hạng thứ hai ở vế phải cũng sẽ không phụ thuộc ρ . Nếu ta chứng minh được rằng số hạng thứ hai dần đến 0 khi $\rho \rightarrow 0$ thì sẽ chứng minh được rằng nó bằng 0.

Ta có

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S(\rho)} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta \right| &\leq \frac{1}{2\pi} \max_{\zeta \in \partial S(\rho)} \left| \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} \right| 2\pi\rho \\ &= \max_{\zeta \in \partial S(\rho)} |f(\zeta) - f(z)| \cdot \frac{\rho}{\rho} = \max_{\zeta \in \partial S(\rho)} |f(\zeta) - f(z)|. \end{aligned}$$

Khi $\rho \rightarrow 0$, điểm $\zeta \in \partial S(\rho)$ dần đến z và do đó $\max_{\zeta \in \partial S(\rho)} |f(\zeta) - f(z)| \rightarrow 0$ vì f là hàm liên tục.

Như vậy

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = f(z), \quad z \in D.$$

2. Bây giờ ta xét trường hợp $z \notin \overline{D}$. Hiển nhiên trong trường hợp này hàm $g(\zeta) = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ là hàm chỉnh hình tại mọi điểm của \overline{D} nên theo định lý tích phân Cauchy ta có

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = 0, \quad z \notin \overline{D}.$$

□

Nhận xét 3.2.6. Công thức tích phân Cauchy biểu thị một hiện tượng hết sức đặc biệt là giá trị của hàm chỉnh hình trong miền \overline{D} hoàn toàn được xác định bởi các giá trị của nó trên biên. Thật vậy, nếu các giá trị của hàm trên biên ∂D đã biết thì ta sẽ tìm được giá trị của f tại mọi điểm $z \in D$. Về mặt nguyên tắc, sự kiện này phân biệt các hàm chỉnh hình với các hàm \mathbb{R}^2 -khả vi.

Ví dụ 1. Tính tích phân

$$J = \int_{\gamma} \frac{e^z dz}{z(z-2i)}, \quad \{|z-3i|=2\}.$$

Giải. Hiển nhiên hàm $f(z) = e^z/z$, chỉnh hình trong một lân cận nào đó của hình tròn giới hạn bởi γ . Do đó từ công thức (3.28) ta có

$$\int_{\gamma} \frac{e^z dz}{z(z-2i)} = \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-2i} dz = 2\pi i f(2i) = \pi(\cos 2 + i \sin 2).$$

Ví dụ 2. Tính tích phân

$$J = \int_{\gamma=\{|z|=5\}} \frac{dz}{z^2+16}.$$

Giải. Hàm dưới dấu tích phân chỉnh hình trong hình tròn $\{|z| \leq 5\}$ trừ ra hai điểm $z_1 = 4i$ và $z_2 = -4i$. Ta dựng các đường tròn γ_1 và γ_2 với tâm tương ứng tại $z_1 = 4i$ và $z_2 = -4i$ và với bán kính đủ bé ε_1 và ε_2 tương ứng sao cho γ_1 và γ_2 không cắt nhau và đều thuộc hình tròn $\{|z| < 5\}$. Áp dụng công thức (3.28) cho miền

$$\begin{aligned} D &= \{|z| \leq 5\} \setminus \{S(\varepsilon_1) \cup S(\varepsilon_2)\}, \\ S(\varepsilon_1) &= \{|z-4i| < \varepsilon_1\}, \\ S(\varepsilon_2) &= \{|z+4i| < \varepsilon_2\}. \end{aligned}$$

Ta có

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} \frac{dz}{z^2 + 16} &= \int_{\gamma_1^+} \frac{dz}{z^2 + 16} + \int_{\gamma_2^+} \frac{dz}{z^2 + 16} \\ &= 2\pi i \cdot \frac{1}{z + 4i} \Big|_{z=4i} + 2\pi i \frac{1}{z - 4i} \Big|_{z=-4i} \\ &= 2\pi i \left(\frac{1}{8i} - \frac{1}{8i} \right) = 0.\end{aligned}$$

Ví dụ 3. Xét tích phân

$$J = \int_0^{\infty} \frac{\cos x dx}{1 + x^2}.$$

Để tính tích phân này, ta xét tích phân

$$\tilde{J} = \int_{\Gamma} \frac{e^{i\zeta} d\zeta}{\zeta^2 + 1}$$

trong đó

$$\begin{aligned}\Gamma &= \{[-R, R] \cup [z : |z| = R, \operatorname{Im} z \geq 0, R > 1]\} \\ &= \{[-R, R] \cup C\}.\end{aligned}$$

Hiển nhiên rằng

$$J = \operatorname{Re} \tilde{J}.$$

Ta viết

$$\frac{e^{i\zeta}}{\zeta^2 + 1} = \frac{e^{i\zeta}}{\zeta + i} \left(\frac{1}{\zeta - i} \right) = \frac{f(\zeta)}{\zeta - i}; \quad f(\zeta) = \frac{e^{i\zeta}}{\zeta + i}.$$

Hàm f chỉnh hình trong và trên Γ nên

$$f(i) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - i} = \frac{e^{i^2}}{i + i} = \frac{1}{2ie}.$$

Như vậy

$$\frac{1}{2ie} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - i} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{e^{i\zeta}d\zeta}{\zeta^2 + 1}$$

và do đó:

$$\int_{\Gamma} \frac{e^{i\zeta}d\zeta}{\zeta^2 + 1} = \frac{\pi}{e}.$$

Bây giờ ta biểu diễn \tilde{J} dưới dạng:

$$\int_{\Gamma} \frac{e^{i\zeta}d\zeta}{\zeta^2 + 1} = \int_{-R}^R \frac{e^{i\zeta}d\zeta}{\zeta^2 + 1} + \int_C \frac{e^{i\zeta}d\zeta}{\zeta^2 + 1}$$

và do đó

$$\int_{-R}^R \frac{e^{i\zeta}d\zeta}{\zeta^2 + 1} = \frac{\pi}{e} - \int_C \frac{e^{i\zeta}d\zeta}{\zeta^2 + 1}.$$

Xét tích phân theo C . Khi $\zeta \in C$ thì $\zeta = Re^{i\theta}$, $0 \in [0, \pi]$, nên

$$\int_C \frac{e^{i\zeta}d\zeta}{\zeta^2 + 1} = iR \int_0^{\pi} \frac{e^{i\theta} e^{iR(\cos\theta + i\sin\theta)}}{R^2 e^{2i\theta} + 1} d\theta.$$

Nhưng

$$|e^{i\theta} e^{iR(\cos\theta + i\sin\theta)}| = e^{-R\sin\theta} \leq 1 \quad \forall \theta \in [0, \pi]$$

và

$$|R^2 e^{2i\theta} + 1| \geq R^2 - 1$$

nên

$$\left| \int_C \frac{e^{i\zeta}d\zeta}{\zeta^2 + 1} \right| \leq \frac{R}{R^2 - 1} \int_0^{\pi} d\theta = \frac{\pi R}{R^2 - 1} \rightarrow 0 \quad (R \rightarrow \infty).$$

Do đó

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix} dx}{x^2 + 1} = \frac{\pi}{e} - \lim_{R \rightarrow \infty} \int_C \frac{e^{i\zeta} d\zeta}{\zeta^2 + 1} = \frac{\pi}{e}.$$

Từ đó rút ra công thức:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 1} dx = \frac{\pi}{e}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2 + 1} dx = 0 \Rightarrow J = \frac{\pi}{2e}.$$

Định lý 3.2.12 có thể khái quát cho trường hợp khi miền D chứa điểm ∞ . Cụ thể ta có

Định lý 3.2.13. *Giả sử miền D chứa điểm ∞ với biên Jordan đo được ∂D . Nếu hàm $f(z)$ chỉnh hình trong D và liên tục trong \overline{D} thì với điểm $z \in D$ bất kỳ ta có công thức*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + f(\infty) \quad (3.30)$$

trong đó ∂D là biên có định hướng dương của miền D .

Chứng minh. Ta dựng đường tròn $\gamma(z, R)$ với tâm z và bán kính R đủ lớn sao cho toàn bộ biên ∂D của miền D nằm trong $\gamma(z, R)$. Ta xét miền B giới hạn bởi ∂D và $\gamma(z, R)$. Đó là miền bị chặn và $f \in \mathcal{H}(\overline{B})$. Áp dụng công thức tích phân Cauchy cho miền B và hàm f ta có

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D \cup \gamma(z, R)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \oint_{\gamma(z, R)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \end{aligned}$$

Từ đó

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(z, R)} \frac{f(\infty)}{\zeta - z} d\zeta \\ &\quad + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(z, R)} \frac{f(\zeta) - f(\infty)}{\zeta - z} d\zeta, \end{aligned}$$

hay là

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + f(\infty) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma, R} \frac{f(\zeta) - f(\infty)}{\zeta - z} d\zeta. \quad (*)$$

Nếu bây giờ ta chứng tỏ được rằng tích phân cuối cùng $I(R)$ ở vế phải bằng 0 thì định lý được chứng minh.

Một mặt ta có

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(z, R)} \frac{f(\zeta) - f(\infty)}{\zeta - z} d\zeta \right| &\leq \frac{1}{2\pi} \frac{\max_{\zeta \in \gamma} |f(\zeta) - f(\infty)|}{R} \cdot 2\pi R \\ &= \max_{\zeta \in \gamma} |f(\zeta) - f(\infty)|, \end{aligned}$$

và do tính liên tục $\max_{\zeta \in \gamma} |f(\zeta) - f(\infty)| \rightarrow 0$ khi $R \rightarrow \infty$. Nghĩa là tích phân $I(R)$ nói trên dần đến 0.

Mặt khác từ công thức (*) ta thấy rằng

$$f(z) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - f(\infty)$$

không phụ thuộc R .

Do đó $I(R) = 0$ và định lý được chứng minh. \square

Nhận xét 3.2.7. Nếu điểm $z \notin D$ thì vế phải của (3.30) bằng 0. Để thấy được điều đó chỉ cần theo dõi chứng minh định lý vừa trình bày.

3.2.7 Biểu diễn tích phân đối với đạo hàm của hàm chỉnh hình

Theo định nghĩa, hàm chỉnh hình trong miền D - đó là hàm biến phức có đạo hàm tại mọi điểm của miền đó. Bây giờ, bằng cách áp dụng công thức tích phân Cauchy ta sẽ chứng tỏ rằng từ tính chỉnh hình của hàm suy ra được sự tồn tại, tính chỉnh hình và biểu diễn tích phân của đạo hàm mọi cấp của hàm đó.

Định lý 3.2.14. Giả sử hàm $f(z)$ chỉnh hình trong miền D và liên tục trong miền \overline{D} . Khi đó tại mỗi điểm z_0 của miền D hàm $f(z)$ có đạo hàm mọi cấp và đạo hàm $f^{(n)}(z_0)$ chỉnh hình trong miền D và được xác định bởi giá trị của hàm $f(z)$ trên biên ∂D của miền D theo công thức

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \quad z_0 \in D, \quad (3.31)$$

trong đó D là miền hữu hạn liên thông tùy ý với biên ∂D gồm một số hữu hạn đường cong đóng Jordan đo được.

Chứng minh. I. Đầu tiên ta xét trường hợp miền D bị chặn. Phép chứng minh định lý được chia thành các bước sau.

1. Vì hàm $f(z)$ chỉnh hình trong D nên theo định nghĩa tại điểm z_0 hàm $f(z)$ có đạo hàm cấp một và ta cần chứng minh rằng

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz. \quad (3.32)$$

Theo công thức tích phân Cauchy ta có

$$\begin{aligned} f(z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)}{z - z_0} dz, \\ f(z_0 + h) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)}{z - (z_0 + h)} dz. \end{aligned}$$

Do đó

$$\delta_h = \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z) dz}{(z - z_0 - h)(z - z_0)}.$$

Nhưng

$$\begin{aligned} \frac{1}{(z - z_0 - h)(z - z_0)} &= \frac{z - z_0}{(z - z_0 - h)(z - z_0)^2} \\ &= \frac{1}{(z - z_0)^2} + \frac{h}{(z - z_0 - h)(z - z_0)^2} \end{aligned}$$

cho nên

$$\delta_h = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^2} + \frac{h}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)dz}{(z - z_0 - h)(z - z_0)^2}$$

và do đó

$$\left| \delta_h - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^2} \right| = \frac{|h|}{2\pi} \left| \int_{\partial D} \frac{f(z)dz}{(z - z_0 - h)(z - z_0)^2} \right|.$$

Vì hàm $f(z)$ chỉnh hình trên ∂D nên nó liên tục và bị chặn trên ∂D , từ đó, $\exists M$ sao cho:

$$|f(z)| \leq M, \quad \forall z \in \partial D.$$

Nếu ρ là khoảng cách từ z_0 đến ∂D , tức là

$$\rho = \inf_{z \in \partial D} |z_0 - z| \text{ thì } |z - z_0| > \frac{1}{2}\rho, \quad \forall z \in \partial D.$$

Ngoài ra, nếu số h được chọn sao cho $|h| \leq \min \left[1, \frac{1}{4}\rho \right]$ thì

$$|z - z_0 - h| \geq ||z - z_0| - |h|| \geq \frac{1}{2}\rho - \frac{1}{4}\rho = \frac{1}{4}\rho.$$

Khi đó, nếu độ dài của ∂D là L thì

$$\left| \delta_h - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^2} \right| \leq \frac{|h|}{2\pi} \cdot \frac{ML}{\left(\frac{1}{4}\rho^2\right)\left(\frac{1}{4}\rho\right)}.$$

Nếu ε là số dương bé tùy ý và chọn

$$\delta = \min \left[1, \frac{1}{4}\rho, \frac{\rho^3 \varepsilon \pi}{8ML} \right]$$

thì

$$\left| \delta_h - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^2} \right| < \varepsilon \quad \text{khi} \quad |h| < \delta.$$

Như vậy công thức (3.32) được chứng minh.

2. Bây giờ ta chứng minh đạo hàm $f'(z)$ có đạo hàm, tức là chứng minh hàm $f'(z)$ chỉnh hình trong D_0 đồng thời chứng tỏ rằng

$$f''(z) = \frac{2!}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)}{(z - z_0)^3} dz. \quad (3.33)$$

Ta có:

$$\delta_h^2 = \frac{f'(z_0 + h) - f'(z_0)}{h} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{2(z - z_0) - h}{(z - z_0)^2(z - z_0 - h)^2} f(z) dz.$$

Vì

$$\begin{aligned} \frac{2(z - z_0) - h}{(z - z_0)^2(z - z_0 - h)^2} &= \frac{[2(z - z_0) - h](z - z_0)}{(z - z_0)^3(z - z_0 - h)^2} \\ &= \frac{2}{(z - z_0)^3} + h \cdot \frac{3(z - z_0) - 2h}{(z - z_0)^3(z - z_0 - h)^2} \end{aligned}$$

cho nên

$$\delta_h^2 = \frac{2}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^3} + \frac{h}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{3(z - z_0) - 2h}{(z - z_0)^3(z - z_0 - h)^2} f(z) dz.$$

Vậy ta có ước lượng

$$\begin{aligned} \left| \delta_h^2 - \frac{2}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^3} \right| &\leq \frac{3|h|}{2\pi} \int_{\partial D} \frac{|f(z)| \cdot |dz|}{|(z - z_0)^2| \cdot |(z - z_0 - h)^2|} \\ &\quad + \frac{2|h|^2}{2\pi} \int_{\partial D} \frac{|f(z)| \cdot |dz|}{|(z - z_0)^3| \cdot |(z - z_0 - h)^2|}. \end{aligned}$$

vì rằng $|3(z - z_0) - 2h| \leq 3|z - z_0| + 2|h|$. Nhưng vì f chỉnh hình trên ∂D nên $|f| \leq M$ với mọi $z \in \partial D$.

Nếu ρ là khoảng cách từ z_0 đến ∂D thì

$$|z - z_0| \geq \rho > \frac{1}{2}\rho.$$

Do đó với h tùy ý thỏa mãn $|h| \leq \min \left[1, \frac{1}{4}\rho \right]$

$$\begin{aligned} |z - z_0 - h| &\geq |z - z_0| - |h| > \frac{1}{2}\rho - |h| \\ &\geq \frac{1}{2}\rho - \frac{1}{4}\rho = \frac{1}{4}\rho. \end{aligned}$$

Vậy

$$\left| \delta_h^2 - \frac{2}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^2} \right| < \frac{3|h|}{2\pi} \frac{ML}{\left(\frac{1}{4}\rho^2\right)\left(\frac{1}{4}\rho\right)^2} + \frac{2|h|^2}{2\pi} \cdot \frac{ML}{\left(\frac{1}{8}\rho^3\right)\left(\frac{1}{4}\rho\right)^2}.$$

Nếu ε là số dương bé bao nhiêu tùy ý và δ được chọn thỏa mãn:

$$\delta = \min \left[\frac{1}{4}\rho, 1, \rho^4 \varepsilon \pi / (192) ML \right]$$

thì

$$\left| \delta_h^2 - \frac{2}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^3} \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{6} = \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon.$$

Như vậy theo định nghĩa đạo hàm ta có

$$f''(z_0) = \frac{2!}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)}{(z - z_0)^3} dz$$

và do đó hàm $f'(z)$ chỉnh hình tại điểm $z_0 \in D$ tùy ý và đồng thời công thức biểu diễn tích phân (3.33) của đạo hàm cấp 2 của hàm $f(z)$ được chứng minh.

3. Ta chứng minh (3.31) theo quy nạp. Ta đã có kết quả đối với $n = 1$ và $n = 2$. Giả sử (3.31) đã được chứng minh cho $n = k$. Khi đó

$$\begin{aligned} &\frac{f^{(k)}(z_0 + h) - f^{(k)}(z_0)}{h} \\ &= \frac{k!}{2\pi i h} \int_{\partial D} f(z) \left[\frac{1}{(z - z_0 - h)^{k+1}} - \frac{1}{(z - z_0)^{k+1}} \right] dz. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Để biến đổi về phải đẳng thức (3.34) ta sử dụng hệ thức⁵

$$\frac{1}{b^{k+1}} - \frac{1}{a^{k+1}} = -\frac{(b-a)(k+1)}{a^{k+2}} + (b-a)^2 \sum_{\nu=1}^{k+1} \frac{\nu}{a^{\nu+1} b^{k+2-\nu}}, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Thay $b = z - z_0 - h$, $a = z - z_0$ rồi thế kết quả vào biểu thức dưới dấu tích phân ở vế phải (3.34) ta thu được

$$\begin{aligned} \frac{f^{(k)}(z_0 + h) - f^{(k)}(z_0)}{h} &= \frac{(k+1)!}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{k+2}} \\ &\quad + \frac{k!h}{2\pi i} \int_{\partial D} \sum_{\nu=1}^{k+1} \frac{\nu f(z) dz}{(z - z_0)^{\nu+1} (z - z_0 - h)^{k+2-\nu}}. \end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned} &\left| \delta_k^{(k+1)} - \frac{(k+1)!}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{k+2}} \right| \\ &\leq |h| \frac{k!}{2\pi} \int_{\Gamma} \sum_{\nu=1}^{k+1} \frac{\nu |f(z)| |dz|}{|z - z_0|^{\nu+1} |z - z_0 - h|^{k+2-\nu}}. \end{aligned}$$

Ta có $|f(z)| \leq M \forall z \in \partial D$ và nếu gọi ρ là khoảng cách từ z_0 đến ∂D thì $|z - z_0| \geq \rho > \frac{1}{2}\rho$, $\forall z \in \partial D$. Chọn h thỏa mãn điều kiện:

$$|h| < \frac{1}{2}\rho$$

thì

$$|z - z_0 - h| \geq |z - z_0| - |h| \geq \rho - |h| > \frac{1}{2}\rho;$$

⁵Xem chứng minh trong lần xuất bản thứ nhất của giáo trình này, trang 244-245

và

$$\begin{aligned}
 \left| \delta_h^{(k+1)} - \frac{(k+1)!}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{k+2}} \right| &\leq \frac{|h| \cdot k!}{2\pi} \int_{\partial D} \sum_{\nu=1}^{k+1} \frac{\nu \cdot M |dz|}{\left(\frac{1}{2}\rho\right)^{k+3}} \\
 &< |h| \cdot \frac{k! 2^{k+2}}{\pi \cdot \rho^{k+3}} \cdot M \cdot \sum_{\nu=1}^{k+1} \nu \int_{\partial D} |dz| \\
 &= |h| \cdot 2^{k+1} \cdot \frac{(k+2)!}{\pi \cdot \rho^{k+3}} \cdot ML.
 \end{aligned}$$

Nếu ε là số dương tùy ý và chọn

$$\delta = \min \left\{ \frac{1}{2}\rho; \pi \rho^{k+3} / [2^{k+1}(k+2)!ML] \right\}$$

thì

$$\left| \delta_k^{(k+1)} - \frac{(k+1)!}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{k+2}} \right| < \varepsilon \quad \text{với } |h| < \delta.$$

Do đó, theo định nghĩa đạo hàm thì:

$$f^{(k+1)}(z_0) = \frac{(k+1)!}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{k+2}}.$$

Như vậy $f^{(k+1)}(z)$ - đạo hàm cấp 1 của hàm $f^{(k)}(z)$ tồn tại trong lân cận nào đó của điểm $z_0 \in D$ và được cho bởi công thức (3.31). Định lý được chứng minh cho trường hợp miền D không chứa điểm ∞ .

II. Giả sử miền $D \ni \infty$. Đối với điểm $z_0 \neq \infty$ ta có công thức (3.32):

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)}{(z-z_0)^2} dz, \quad z_0 \in D, \quad z_0 \neq \infty. \quad (3.35)$$

Khi $z_0 \rightarrow \infty$ về phải (3.35) dần đến 0 và theo định nghĩa ta cho rằng $f'(\infty) = 0$. Đồng thời với điều đó công thức (3.35) đúng tại điểm ∞ và $f'(z_0)$ liên tục tại điểm ∞ . Lặp lại các lập luận này ta thu được các công thức liên tiếp (3.31) đối với trường hợp điểm $z_0 = \infty \in D$. \square

Nhận xét 3.2.8. Công thức (3.31) có thể thu được một cách hình thức từ công thức tích phân Cauchy bằng phép đạo hàm tích phân đường phụ thuộc tham số liên tiếp n lần.

Nhận xét 3.2.9. Giả sử hàm f chỉnh hình trong miền $D \ni \infty$. Ta xét miền D^* thu được từ miền D qua phép biến đổi $w = \frac{1}{z}$ ($z = \frac{1}{w}$) và chứng tỏ rằng hàm $f\left(\frac{1}{w}\right)$ chỉnh hình trong D^* . Đối với mọi điểm $w \neq 0$ ($w = 0$ thuộc D^*) thì điều đó là hiển nhiên theo quy tắc đạo hàm của hàm hợp. Ta cần chứng minh hàm $f\left(\frac{1}{w}\right)$ chỉnh hình tại điểm $w = 0$, tức là tồn tại đạo hàm trong lân cận $w = 0$. Trong miền D ta dựng đường tròn $\gamma(R)$ với tâm tại điểm $z = 0$ và bán kính R đủ lớn sao cho $\gamma(R) \subset D$. Hàm $w = \frac{1}{z}$ ánh xạ đường tròn $\gamma(R) \subset D$ thành đường tròn $\gamma^*\left(\frac{1}{R}\right)$ với tâm $w = 0$ và bán kính $\frac{1}{R}$. Đối với z nằm ngoài $\gamma(R)$, theo công thức tích phân Cauchy ta có

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(R)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + f(\infty).$$

và do đó đối với các điểm w nằm trong $\gamma^*\left(\frac{1}{R}\right)$ ta thu được

$$f\left(\frac{1}{w}\right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(R)} \frac{wf(\zeta)}{w\zeta - 1} d\zeta + f(\infty).$$

Từ đó bằng cách áp dụng định lý 10.10 về phép đạo hàm tích phân đường phụ thuộc tham số ta thu được

$$\frac{d}{dw} f\left(\frac{1}{w}\right) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(R)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta w - 1)^2} d\zeta.$$

Đẳng thức trên chứng tỏ rằng đạo hàm $\frac{df\left(\frac{1}{w}\right)}{dw}$ tồn tại và liên tục tại lân cận điểm $w = 0$.

Ta nêu ra điều nhận xét sau đây: Định lý vừa được chứng minh là một kết quả tuyệt vời và nó hoàn toàn mâu thuẫn với những gì mà ta đã biết trước đây về hàm biến thực.

Chẳng hạn, ta xét hàm biến thực

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Hàm này có đạo hàm với mọi x . Thật vậy, nếu $x \neq 0$ thì

$$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \sin \frac{1}{x},$$

và nếu $x = 0$ thì

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h \sin \frac{1}{h} = 0.$$

Tuy nhiên $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$ không tồn tại, tức là đạo hàm $f'(x)$ không liên tục. Do đó, đối với hàm biến thực thì sự tồn tại đạo hàm tại mỗi điểm không thể suy ra tính liên tục của đạo hàm đó.

Ví dụ 1. Tính tích phân

$$\int_{\Gamma} \frac{\cos z dz}{(z - i)^3},$$

trong đó Γ là chu tuyến đóng bao điểm i một lần.

Giải. Hàm $f(z) = \cos z$ chỉnh hình trong miền biên Γ . Do đó áp dụng công thức (3.31) với $n = 2$ ta có

$$\int_{\Gamma} \frac{\cos z dz}{(z - i)^3} = \frac{2\pi i}{2!} \frac{d^2(\cos z)}{dz^2} \Big|_{z=i} = \pi i \frac{e^{-1} + e}{2}.$$

Vậy:

$$\int_{\Gamma} \frac{\cos z dz}{(z - i)^3} = -\pi i \operatorname{ch} 1.$$

3.2.8 Điều kiện đủ để hàm f chỉnh hình

Bây giờ ta sẽ chứng minh một điều kiện đủ để hàm liên tục đã cho chỉnh hình. Nếu hàm f liên tục trong miền $D \subset \mathbb{C}$ và

$$\int_{\Omega} f dz = 0$$

đối với Ω thuộc lớp các tập hợp nào đó thuộc D thì hàm $f \in \mathcal{H}(D)$. Ta sẽ giả thiết rằng $\{\Omega\}$ là tập hợp mọi hình chữ nhật nằm trong D với các cạnh song song với các trục tọa độ.

Định lý 3.2.15. (Morera) *Giả sử f là hàm liên tục trong miền D . Nếu dạng vi phân $f(z)dz$ là dạng vi phân đóng thì hàm f chỉnh hình trong D .*

Chứng minh. Thật vậy, theo định nghĩa 10.5 hàm f có nguyên hàm địa phương $g(z)$. Nguyên hàm này là hàm chỉnh hình. Theo định lý 3.2.14 đạo hàm f của nguyên hàm này là hàm chỉnh hình. Định lý được chứng minh. \square

3.2.9 Hàm điều hòa và mối liên hệ với hàm chỉnh hình

Lớp hàm thực liên quan một cách chặt chẽ với các hàm chỉnh hình là *lớp các hàm điều hòa*.

Định nghĩa 3.2.4. Hàm thực $u(x, y)$ đơn trị trong miền D của hai biến thực x, y được gọi là *hàm điều hòa* trong miền D nếu trong miền D nó liên tục, có các đạo hàm riêng cấp hai liên tục và thỏa mãn phương trình

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \quad (3.36)$$

Phương trình vi phân đạo hàm riêng (3.36) được gọi là *phương trình Laplace*⁶ và toán tử vi phân

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

⁶P. S. Laplace (1749-1827) là nhà toán học Pháp.

gọi là *toán tử Laplace*.

Bằng cách áp dụng phép vi phân hình thức (2.1) dễ dàng thấy rằng

$$\Delta = 4 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}, \quad z = x + iy, \quad \bar{z} = x - iy.$$

Do đó phương trình (3.36) có thể viết dưới dạng

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}} = 0. \quad (3.37)$$

Định lý 3.2.16. *Mọi hàm chỉnh hình đều là hàm điều hòa.*

Chứng minh. Thật vậy, mọi hàm chỉnh hình f đều khả vi vô hạn lần và

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0.$$

Áp dụng phép vi phân $\frac{\partial}{\partial z}$ ta thu được (3.37). \square

Hệ quả 3.2.1. *Phần thực và phần ảo của hàm chỉnh hình là các hàm điều hòa.*

Chứng minh. Ta có

$$u = \operatorname{Re} f = \frac{1}{2}(f + \bar{f}), \quad v = \operatorname{Im} f = \frac{1}{2i}(f - \bar{f}).$$

Từ đó suy rằng

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}} \right) = 0$$

(ở đây ta có $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ do tính chỉnh hình của f ; còn hàm $\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}$ là phần chỉnh hình). Tương tự ta có $\frac{\partial^2 v}{\partial z \partial \bar{z}} = 0$. \square

Như vậy phần thực và phần ảo của hàm $f(z)$ chỉnh hình trong miền D là những hàm điều hòa trong D . Điều khẳng định ngược lại là không đúng nếu miền D đa liên. Để thấy rõ điều đó, bạn đọc chỉ cần xét hàm $u = \ln |z|$ và

miền $D = \{z : 0 < |z| < \infty\} = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Về mặt địa phương tại lân cận của điểm $z \neq 0$ bất kỳ ta có thể tách một nhánh liên tục nào đó của hàm đa trị $\ln z$ và hàm $u = \ln |z|$ là phần thực của nhánh đó. Trong miền $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ không thể tách nhánh chỉnh hình của hàm đa trị $\ln z$.

Ví dụ 1. Tìm hàm điều hòa dạng

$$u = \varphi(x + \sqrt{x^2 + y^2}).$$

Giải. Nếu hàm điều hòa dạng đã nêu tồn tại thì nó sẽ được tìm từ phương trình Laplace. Ta đặt $x + \sqrt{x^2 + y^2} = t$, khi đó

$$\begin{aligned} u'_x &= \varphi'(t)t'_x = \varphi'(t)\frac{t}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \\ u''_{xx} &= \varphi''(t)\frac{t^2}{x^2 + y^2} + \varphi'(t)\frac{y^2}{(\sqrt{x^2 + y^2})^3}; \\ u'_y &= \varphi'(t)t'_y = \varphi'(t)\frac{t}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \\ u''_{yy} &= \varphi''(t)\frac{y^2}{x^2 + y^2} + \varphi'(t)\frac{x^2}{(\sqrt{x^2 + y^2})^3}. \end{aligned}$$

Từ đó

$$\begin{aligned} u''_{xx} + u''_{yy} &= \varphi''(t)\frac{y^2 + t^2}{x^2 + y^2} + \varphi'(t)\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0 \\ \varphi''(t)\frac{y^2 + x^2 + 2x\sqrt{x^2 + y^2} + x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \varphi'(t) &= 0, \\ \varphi''(t)[2\sqrt{x^2 + y^2} + 2x] + \varphi'(t) &= 0, \\ 2\varphi''(t)t + \varphi'(t) &= 0, \\ \frac{2\varphi''(t)}{\varphi'(t)} + \frac{1}{t} &= 0 \\ 2\ln \varphi'(t) + \ln t &= 2\ln \frac{1}{2}C, \\ \varphi'(t) &= \frac{C}{2\sqrt{t}}, \end{aligned}$$

$$\varphi(t) = C\sqrt{t} + C_1.$$

Như vậy

$$u(x, y) = C\sqrt{x + \sqrt{x^2 + y^2}} + C_1.$$

Định nghĩa 3.2.5. Nếu các hàm điều hòa $u(x, y)$ và $v(x, y)$ thỏa mãn các điều kiện Cauchy-Riemann thì hàm $v(x, y)$ được gọi là *hàm điều hòa liên hợp* với $u(x, y)$.

Ta lưu ý rằng khi đó $u(x, y)$ là hàm điều hòa liên hợp với $-v(x, y)$ (chứ không phải với $v(x, y)$).

Từ đó ta thu được

Định lý 3.2.17. Để một hàm là chỉnh hình trong miền D điều kiện cần và đủ là phần ảo của nó là hàm điều hòa liên hợp với phần thực của nó trong miền D .

Ta sẽ chứng tỏ rằng nếu lấy $u(x, y)$ là nghiệm bất kỳ của phương trình Laplace $\Delta u = 0$ trong miền đơn liên bị chặn D thì hàm $v(x, y)$ sẽ được xác định với sự sai khác một hằng số cộng.

Thật vậy, từ các điều kiện Cauchy-Riemann ta có

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy = -\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy.$$

Dạng vi phân $\omega_1 = -\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy$ là dạng vi phân đóng trong D (theo (3.36)) và vì D là miền đơn liên nên ω_1 là dạng vi phân đúng trong D . Ta ký hiệu nguyên hàm của dạng vi phân này là v (nó xác định với sự sai khác hằng số cộng). Đồng thời ta có $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}$, tức là điều kiện Cauchy-Riemann được thỏa mãn. Mặt khác ta có

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \Rightarrow \Delta v = 0,$$

tức là hàm v thỏa mãn phương trình Laplace, và v là hàm điều hòa. Từ đó ta có

Định lý 3.2.18. Mọi hàm điều hòa trong miền đơn liên bị chặn đều có thể xem là phần thực hay phần ảo của một hàm chỉnh hình nào đó trong miền ấy.

Nhận xét 3.2.10. 1. Nếu miền D là tùy ý thì nguyên hàm v nói trên chỉ tồn tại địa phương. Điều đó có nghĩa là về mặt địa phương mọi hàm thực điều hòa trong miền D là phần thực hoặc phần ảo của hàm chỉnh hình.

2. Ta có thể chỉ ra phương pháp tích phân để xác định hàm f như sau.

Giả sử $U = \{z - z_0\} < r\} \subset D$. Từ (3.36) suy ra rằng dạng vi phân

$$\omega = -\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy$$

là dạng vi phân đóng trong U . Do đó tích phân của ω trong U không phụ thuộc tuyến lấy tích phân. Ta đặt

$$v(z) = \int_{z_0}^z -\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy$$

và từ đó dễ dàng thấy rằng

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x},$$

Các hệ thức này chính là điều kiện khả vi phức của hàm $f = u + iv$, $u = \operatorname{Re} f$.

Như vậy

$$f(z) = u(x, y) + i \int_{z_0}^z -\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy + iC.$$

Đối với hàm $if = -v + iu$ thì $u(x, y)$ là phần ảo.

Ta xét một vài ví dụ.

1) Giả sử $D = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ (tức là mặt phẳng phức \mathbb{C} trừ ra bán trục $y = 0$, $x \leq 0$) và $u(x, y) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$. Tìm hàm chỉnh hình $f(z)$ mà $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$.

Giải. Trước hết dễ dàng kiểm tra rằng $u(x, y) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$ là hàm điều hòa trong D . Ta cần tìm hàm $v(x, y)$ điều hòa liên hợp với $u(x, y)$. Ta có các phương trình

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{y}{x^2 + y^2}; \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{x^2 + y^2}.\end{aligned}$$

Do đó

$$v(x, y) = \int_{z_0}^z -\frac{y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy + C.$$

Ta lấy $z_0 = (1, 0)$, $z = (x, y)$.

Nếu điểm z thuộc nửa mặt phẳng bên phải thì ta có thể lấy tích phân theo đường gấp khúc $z_0 M z$, $M = (x, 0)$. Ta có

$$\begin{aligned}v(x, y) &= \int_{(1,0)}^{(x,y)} -\frac{y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy = \int_{z_0 M} + \int_M^z = \\ &= 0 + \int_0^y \frac{x dy}{x^2 + y^2} = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + C.\end{aligned}$$

Nếu điểm z thuộc góc phần tư thứ II (hay thuộc góc phần tư thứ III) của mặt phẳng tọa độ ($x \leq 0, y \neq 0$) thì ta có thể lấy tích phân theo đường gấp khúc $z_0 M' z$, $M' = (1, y)$, $z = (x, y) \in II$ (tương ứng: theo đường gấp khúc $z_0 M'' z$, $M'' = (1, y)$, trong đó $z = (x, y)$ thuộc góc III).

Ta có

$$\begin{aligned}v(x, y) &= \int_0^y \frac{dy}{1 + y^2} - \int_1^x \frac{y dx}{x^2 + y^2} + C \\ &= \operatorname{arctg} y - \operatorname{arctg} \frac{x}{y} + \operatorname{arctg} \frac{1}{y} + C \\ &= \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + C.\end{aligned}$$

Từ đó suy rằng $v(x, y) = \arg z + C \quad \forall z \in D$ và như vậy

$$f(z) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + i \arg z + iC = \ln |z| + i \arg z + iC.$$

2) Tìm hàm chỉnh hình trên toàn mặt phẳng phức $w = u + iv = f(z)$ mà $v(x, y) = x^3 - 3y^2x$ và $f(0) = 1$.

Giải. Bài toán có lời giải vì $v(x, y) = x^3 - 3y^2x$ là hàm điều hòa trên toàn mặt phẳng:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -6xy \Rightarrow \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 6x - 6x = 0.$$

Cũng như trên hàm $u(x, y)$ có thể tìm theo vi phân toàn phần của nó

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx - \frac{\partial v}{\partial y} dy = -6xy dx - (3x^2 - 3y^2) dy.$$

Từ đó ta có

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -6xy, \tag{3.38}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -(3x^2 - 3y^2). \tag{3.39}$$

Từ phương trình (3.38) ta có thể viết

$$u = - \int 6xy dx = -3x^2y + \varphi(y),$$

và mặt khác, theo (3.39) ta thu được

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y} &= -3x^2 + \varphi'(y) = -(3x^2 - 3y^2) \\ \Rightarrow \varphi'(y) &= 3y^2 \Rightarrow \varphi(y) = y^3 + C. \end{aligned}$$

Như vậy

$$\begin{aligned} u &= -3x^2y + y^3 + C; \\ f(z) &= -3x^2y + y^3 + C + i(x^3 - 3y^2x) \\ &= i(x^3 + 3x^2yi - 3xy^2 - iy^3) + C \\ &= i(x + iy)^3 + C = iz^3 + C. \end{aligned}$$

Nhưng vì $f(0) = C = 1$ nên $f(z) = iz^3 + 1$.

3.2.10 Tích phân dạng Cauchy. Công thức Sokhotski

1^+ *Khái niệm tích phân dạng Cauchy.* Giả sử trong mặt phẳng phức z cho đường cong đo được tùy ý đóng hoặc không đóng \mathcal{L} và trên đường cong đó cho hàm liên tục $\varphi(\zeta)$ nào đó. Khi đó hiển nhiên tích phân

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}} \frac{\varphi(\zeta)}{z - \zeta} d\zeta, \quad z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{L} \quad (3.40)$$

sẽ xác định một hàm nào đó của z . Tích phân đó được gọi là *tích phân dạng Cauchy*, hàm $\frac{1}{\zeta - z}$ được gọi là *nhân Cauchy*, hàm $\varphi(\zeta)$ được gọi là *mật độ*.

Tích phân Cauchy là trường hợp riêng của tích phân dạng Cauchy. Thật vậy, nếu \mathcal{L} là đường cong đóng đo được giới hạn một miền đơn liên hoặc \mathcal{L} gồm một số hữu hạn đường cong đo được giới hạn miền hữu hạn liên thông và $f \in \mathcal{H}(D) \cap \mathcal{C}(\overline{D})$ thì tích phân (3.40) là tích phân Cauchy.

Lập lại nguyên vẹn các lập luận trong chứng minh định lý 3.2.14 ta có thể chứng minh tính chất đặc biệt sau đây của tích phân dạng Cauchy: *tại mọi điểm z không nằm trên đường cong \mathcal{L} ($z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{L}$) tích phân dạng Cauchy (3.40) là hàm chỉnh hình của biến z và*

$$F'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}} \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta.$$

Hơn thế nữa $F(z)$ có đạo hàm mọi cấp và

$$F^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}} \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.41)$$

Nếu đường cong \mathcal{L} tách mặt phẳng phức thành một số miền thì trong các miền đó, nói chung tích phân dạng Cauchy xác định những hàm chỉnh hình khác nhau. Trong trường hợp khi \mathcal{L} là đường cong đóng Jordan đo được thì theo định lý Jordan: *mặt phẳng phức $\overline{\mathbb{C}}$ được tách thành hai miền đơn liên mà đường cong đó là biên của mỗi miền.* Và khi đó tích phân dạng Cauchy (3.40) xác định hai hàm chỉnh hình, cụ thể là:

(1) Ở phần trong D^+ của \mathcal{L} tích phân (3.40) xác định hàm chỉnh hình ký hiệu là $f^+(z)$

$$f^+(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

(2) Trong phần ngoài D^- của \mathcal{L} tích phân (3.40) xác định hàm chỉnh hình $f^-(z)$

$$f^-(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Chẳng hạn tích phân

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{d\zeta}{\zeta - z}$$

bằng 1 khắp nơi trong hình tròn $\{z : |z| < 1\}$ và bằng 0 khắp nơi ngoài hình tròn đơn vị. Rõ ràng $f^+(z) = 1$, $z \in \{z : |z| < 1\}$ và $f^-(0) = 0$, $z \in \{z : |z| > 1\}$ là hai hàm chỉnh hình khác nhau.

Ta cũng lưu ý rằng hàm $F(z)$ xác định bởi tích phân (3.40) là hàm chỉnh hình tại điểm vô cùng. Điều đó được suy ra từ nhận xét 11.9.

Vấn đề quan trọng nảy ra một cách tự nhiên là có thể xét giá trị của tích phân (3.40) khi $z = z_0$ thuộc chu tuyến \mathcal{L} hay không, tức là biểu thức

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta \quad (3.42)$$

có nghĩa hay không khi điểm $z_0 \in \mathcal{L}$?

Định nghĩa 3.2.6. Người ta nói rằng hàm đơn trị $f(z)$ cho trên tập hợp liên thông \mathcal{L} thỏa mãn điều kiện Holder⁷ nếu tồn tại các hằng số dương M (gọi là hằng số Holder) và số dương α , $0 < \alpha \leq 1$ (gọi là số mũ Holder) sao cho với mọi cặp điểm $z_1, z_2 \in \mathcal{L}$ ta đều có

$$|f(z_1) - f(z_2)| < M|z_1 - z_2|^\alpha. \quad (3.43)$$

⁷L. Holder (1859-1937) là nhà toán học Đức.

Nhận xét 3.2.11. 1) Khi $\alpha = 1$ thì điều kiện Holder còn được gọi là *điều kiện Lipschitz*⁸. Trong nhiều sách chuyên khảo điều kiện Holder được gọi là *điều kiện Lipschitz cấp α* .

2) Khi hàm $f(z)$ thỏa mãn điều kiện Holder trên \mathcal{L} thì người ta nói rằng f thuộc lớp Holder cấp α : $f \in H^\alpha(\mathcal{L})$.

3) Người ta cũng nói rằng hàm $f(\zeta)$ thỏa mãn *điều kiện Holder với số mũ* $0 < \alpha \leq 1$ tại điểm ζ_0 nếu tồn tại hằng số $M > 0$ sao cho với mọi điểm $\zeta \in \mathcal{L}$ đủ gần ζ_0 thì

$$|f(\zeta) - f(\zeta_0)| \leq M|\zeta - \zeta_0|^\alpha, \quad 0 < \alpha \leq 1.$$

2+ Tích phân với nghĩa giá trị chính theo Cauchy

Ta sẽ giả thiết rằng \mathcal{L} là đường cong Jordan trơn và điểm $z = z_0$ nằm trên \mathcal{L} .

Khi điểm $z_0 \in \mathcal{L}$ thì tích phân (3.42) không tồn tại theo nghĩa thông thường. Nhưng với một số hạn chế bổ sung đối với mật độ $\varphi(\zeta)$ người ta có thể gán cho (3.42) một ý nghĩa xác định. Giả sử γ là đường tròn: $\gamma = \gamma(z_0, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = \varepsilon\}$ trong đó ε là số dương đủ bé sao cho γ chỉ cắt \mathcal{L} tại hai điểm. Phần đường cong \mathcal{L} nằm ngoài hình tròn $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq \varepsilon\}$ được ký hiệu là $\mathcal{L}(\varepsilon)$. Khi đó tích phân

$$I(z_0, \varepsilon) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}(\varepsilon)} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta$$

tồn tại theo nghĩa thông thường.

Định nghĩa 3.2.7. Nếu tồn tại giới hạn hữu hạn

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I(z_0, \varepsilon) = I(z_0)$$

thì giới hạn đó được gọi là *tích phân với nghĩa giá trị chính theo Cauchy* (gọi tắt là giá trị chính) hay *tích phân bất thường Cauchy* và được ký hiệu là

$$I(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta. \quad (3.44)$$

⁸R. Lipschitz (1832-1903) là nhà toán học Đức.

hay

$$I(z_0) = v.p \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}} \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{\zeta - z_0}. \quad (3.45)$$

Hai chữ cái v.p ở trước tích phân trong vế phải của (3.45) là viết tắt của các từ valuer principal có nghĩa là *giá trị chính*.

Định lý 3.2.19. *Giả sử \mathcal{L} là đường cong đóng Jordan trơn và hàm $\varphi(\zeta)$ thỏa mãn điều kiện Holder*

$$|\varphi(\zeta_1) - \varphi(\zeta_2)| \leq M|\zeta_1 - \zeta_2|^\alpha, \quad 0 < \alpha \leq 1$$

khắp nơi trên \mathcal{L} . Khi đó giá trị chính theo Cauchy của tích phân dạng Cauchy tồn tại tại mọi điểm $z_0 \in \mathcal{L}$ và

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}} \frac{\varphi(\zeta) - \varphi(z_0)}{\zeta - z_0} d\zeta + \frac{1}{2} \varphi(z_0). \quad (3.46)$$

Chứng minh. Ta xét tích phân theo $\mathcal{L}(\varepsilon)$:

$$\int_{\mathcal{L}(\varepsilon)} \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{\zeta - z_0} = \int_{\mathcal{L}(\varepsilon)} \frac{\varphi(\zeta) - \varphi(z_0)}{\zeta - z_0} d\zeta + \varphi(z_0) \int_{\mathcal{L}(\varepsilon)} \frac{d\zeta}{\zeta - z_0} \quad (3.47)$$

và thực hiện phép qua giới hạn (3.47) khi $\varepsilon \rightarrow 0$.

1) *Khảo sát giới hạn*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathcal{L}(\varepsilon)} \frac{\varphi(\zeta) - \varphi(z_0)}{\zeta - z_0} d\zeta \quad (I)$$

Vì $\varphi \in H^\alpha(\mathcal{L})$ nên

$$\left| \frac{\varphi(\zeta) - \varphi(z_0)}{\zeta - z_0} \right| \leq M|\zeta - z_0|^{\alpha-1}. \quad (3.48)$$

Mặt khác vì \mathcal{L} là đường cong Jordan trơn nên nó có tính chất đặc biệt là

$$1 \geq \frac{|\zeta - z_0|}{|s - s_0|} > a > 0 \quad (3.49)$$

trong đó s và s_0 là các giá trị của độ dài cung của \mathcal{L} tương ứng với điểm ζ và z_0 . Do đó từ (3.48) và (3.49) ta có

$$\left| \frac{\varphi(\zeta) - \varphi(z_0)}{\zeta - z_0} d\zeta \right| \leq K_1 |s - s_0|^{\alpha-1} ds.$$

Như vậy

$$\left| \int_{\mathcal{L}(\varepsilon)} \frac{\varphi(\zeta) - \varphi(z_0)}{\zeta - z_0} d\zeta \right| \leq K_1 \int_{\mathcal{L}(\varepsilon)} |s - s_0|^{\alpha-1} ds$$

và từ đó suy rằng tích phân (I) hội tụ tuyệt đối và

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathcal{L}(\varepsilon)} \frac{\varphi(\zeta) - \varphi(z_0)}{\zeta - z_0} d\zeta = \int_{\mathcal{L}} \frac{\varphi(\zeta) - \varphi(z_0)}{\zeta - z_0} d\zeta. \quad (3.50)$$

2) *Khảo sát giới hạn*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathcal{L}(\varepsilon)} \frac{d\zeta}{\zeta - z_0}. \quad (II)$$

Lưu ý rằng $\gamma(z_0, \varepsilon)$ chỉ cắt \mathcal{L} tại hai điểm. Ta ký hiệu cung tròn nằm trong đường cong \mathcal{L} của $\gamma(z_0, \varepsilon)$ và nối hai giao điểm đó là $\gamma_i(\varepsilon)$. Khi đó theo định lý Cauchy ta có

$$\int_{\mathcal{L}(\varepsilon)} \frac{d\zeta}{\zeta - z_0} = \int_{\gamma_i(\varepsilon)} \frac{d\zeta}{\zeta - z_0} \quad (3.51)$$

Nhưng tích phân ở vế phải của (3.51) bằng $i\alpha(\varepsilon)$ trong đó $\alpha(\varepsilon)$ là số đo góc của cung $\gamma_i(\varepsilon)$. Khi $\varepsilon \rightarrow 0$ đại lượng $\alpha(\varepsilon)$ dần đến góc giữa các tiếp tuyến với đường cong \mathcal{L} tại điểm z_0 . Do \mathcal{L} là đường cong trơn nên $\alpha(\varepsilon) \rightarrow \pi$ khi $\varepsilon \rightarrow 0$. Qua giới hạn đẳng thức (3.47) khi $\varepsilon \rightarrow 0$ ta thu được

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}(\varepsilon)} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}} \frac{\varphi(\zeta) - \varphi(z_0)}{\zeta - z_0} d\zeta + \varphi(z_0) \cdot \frac{\pi i}{2\pi i}$$

và từ đó thu được (3.46). □

Về sau ta ký hiệu

$$F(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta, \quad z_0 \in \mathcal{L} \quad (3.52)$$

và như ta biết tích phân (3.52) là *tích phân bất thường Cauchy*

3⁺ *Giá trị giới hạn của tích phân dạng Cauchy*

Ở đây ta sẽ tìm giá trị giới hạn của tích phân dạng Cauchy

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{L}$$

khi điểm z dần đến điểm $z_0 \in \mathcal{L}$ từ phía trong và từ phía ngoài và xác lập mối liên hệ giữa các giá trị giới hạn ấy. Đó cũng chính là nội dung cơ bản của các công thức Sokhoski-Plemeli⁹.

Để thấy rõ bản chất của vấn đề, đầu tiên ta xét

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad (3.53)$$

là *tích phân Cauchy*. Khi đó tại mỗi điểm của miền D^+ (là phần trong của \mathcal{L}) hàm $F(z)$ trùng với hàm $\varphi(z)$ chỉnh hình trong miền D^* nào đó chứa cả D và \mathcal{L} . Do đó nếu z_0 là điểm nào đó thuộc \mathcal{L} thì hàm $F(z) = \varphi(z)$ dần đến giới hạn $\varphi(z_0)$ khi $z \rightarrow z_0$ từ phía trong và

$$\lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \in D^+}} F(z) = \varphi(z_0) = \varphi^+(z_0) \quad (3.54)$$

trong đó ta ký hiệu $\lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \in D^+}} F(z) = \varphi^+(z_0)$. Khi $z \notin \overline{D^+}$ thì tích phân Cauchy

$$\lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \in D^+}}$$

(3.53) bằng 0. Do đó khi $z \rightarrow z_0, z \notin \overline{D^+}$ thì tích phân Cauchy dần đến 0 và

$$\lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \in D^-}} F(z) = 0 = \varphi^-(z_0) \quad (3.55)$$

⁹Iu. V. Sokhoski (1842-1927) là nhà toán học Nga.

J. Plemeli là nhà toán học Đức.

trong đó ta ký hiệu $\lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \in D^-}} F(z) = \varphi^-(z_0)$.

Từ (3.54) và (3.55) suy ra

$$\varphi^+(z_0) - \varphi^-(z_0) = \varphi(z_0) - 0 = \varphi(z_0). \quad (3.56)$$

Như vậy đối với tích phân Cauchy tại mỗi điểm $z_0 \in \mathcal{L}$ đều tồn tại các giá trị giới hạn bằng $\varphi(z_0)$ từ phía trong và bằng 0 từ phía ngoài và các giá trị giới hạn đó thỏa mãn hệ thức (3.56).

Bây giờ giả sử (3.53) là *tích phân dạng Cauchy*. Ta sẽ thấy rằng khi $z \rightarrow z_0 \in \mathcal{L}$ thì các giá trị giới hạn của (3.53) cũng tuân theo chính quy luật như đối với tích phân Cauchy.

Để đơn giản trong trình bày ta sẽ xét tích phân (3.53) với các giả thiết sau đây

- (i) \mathcal{L} là đường cong đóng Jordan trơn;
- (ii) Hàm biên (mật độ) $\varphi(\zeta)$ là hàm chỉnh hình trong lân cận của mỗi điểm của đường cong \mathcal{L} .

Định lý 3.2.20. (Iu. Sokhoski, J. Plemeli) *Giả sử \mathcal{L} là đường cong đóng Jordan trơn và $\varphi(z)$ là hàm chỉnh hình trong lân cận của mỗi điểm của đường cong \mathcal{L} . Khi đó tích phân dạng Cauchy*

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad (3.57)$$

có các giá trị giới hạn là $F^+(z_0)$ và $F^-(z_0)$ tại mọi điểm z_0 của đường cong \mathcal{L} khi điểm z dần đến z_0 từ phía trong và phía ngoài tương ứng và các giá trị giới hạn đó được biểu diễn qua hàm biên $\varphi(\zeta)$ và tích phân bất thường bởi các công thức

$$\begin{aligned} F^+(z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta + \frac{1}{2} \varphi(z_0), \\ F^-(z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta - \frac{1}{2} \varphi(z_0). \end{aligned} \quad (3.58)$$

Các công thức (3.58) được gọi là các công thức Sokhoski - Plemeli.

Nhận xét. Lưu ý đến ký hiệu (3.52) các công thức (3.58) có thể viết lại dưới dạng

$$\begin{aligned} F^+(z_0) &= F(z_0) + \frac{1}{2}\varphi(z_0) \\ F^-(z_0) &= F(z_0) - \frac{1}{2}\varphi(z_0) \end{aligned} \quad (3.58^*)$$

Chứng minh. Giả sử z_0 là điểm tùy ý của đường cong \mathcal{L} ($z_0 \in \mathcal{L}$). Ta xét δ -lân cận $\mathcal{U}(z_0, \delta) = \mathcal{U}(z_0)$ sao cho hàm $\varphi(\zeta)$ chỉnh hình trong $\mathcal{U}(z_0)$. Ta dựng đường tròn $\gamma(z_0, \varepsilon) = \{z : |z - z_0| = \varepsilon\}$ đủ bé sao cho $\gamma(z_0, \varepsilon) \subset \mathcal{U}(z_0)$. Ta ký hiệu:

+ $\mathcal{L}(\varepsilon)$ là phần đường cong \mathcal{L} nằm ngoài hình tròn $S(z_0, \varepsilon) = \{z : |z - z_0| \leq \varepsilon\}$, còn $\sigma(\varepsilon)$ là phần đường cong \mathcal{L} nằm trong $S(z_0, \varepsilon)$;

+ $\gamma_e(\varepsilon)$ là cung tròn của $\gamma(z_0, \varepsilon)$ nằm ngoài \mathcal{L} , còn $\gamma_i(\varepsilon)$ nằm trong \mathcal{L} ;

+ $\Gamma(\varepsilon) = \mathcal{L}(\varepsilon) \cup \gamma_e(\varepsilon)$; $\gamma(\varepsilon) = \mathcal{L}(\varepsilon) \cup \gamma_i(\varepsilon)$.

Tiếp theo ta xét tích phân dạng Cauchy

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \quad (3.57^*)$$

trong hai trường hợp sau đây.

Trường hợp thứ nhất: điểm $z \in D^+$. Khi đó tích phân dạng Cauchy (3.57*) xác định hàm $F^+(z) \in \mathcal{H}(D^+)$ và

$$F^+(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Vì điểm z nằm ngoài đường cong $\sigma(\varepsilon) \cup \gamma_e(\varepsilon)$ và $\varphi(\zeta)$ chỉnh hình trong $\mathcal{U}(z_0)$ nên theo định lý tích phân Cauchy ta có

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma(\varepsilon) \cup \gamma_e(\varepsilon)} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = 0 \Rightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma(\varepsilon)} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_e(\varepsilon)} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

và từ đó suy rằng

$$\begin{aligned}
 F^+(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}(\varepsilon)} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma(\varepsilon)} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}(\varepsilon)} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_e(\varepsilon)} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}(\varepsilon) \cup \gamma_e(\varepsilon)} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,
 \end{aligned} \tag{3.59}$$

trong đó tích phân ở vế phải là tích phân dạng Cauchy. Nó xác định hàm chỉnh hình trong lân cận bất kỳ của điểm z_0 (không chứa điểm của $\mathcal{L}(\varepsilon) + \gamma_e(\varepsilon)$) đồng thời tại các điểm thuộc D^+ của lân cận đó nó trùng với hàm $F^+(z)$. Qua giới hạn (3.59) khi $z \in D^+$ dần đến $z_0 \in \mathcal{L}$ ta có

$$\lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \in D^+}} F^+(z) = F^+(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}(\varepsilon)} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_e(\varepsilon)} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta. \tag{3.60}$$

Công thức (3.60) chứng tỏ rằng giá trị giới hạn $F^+(z_0)$ của tích phân dạng Cauchy tồn tại $\forall z_0 \in \mathcal{L}$ và do (3.59) nó xác định một hàm chỉnh hình trên chu tuyến \mathcal{L} .

Để xác định sự phụ thuộc giữa hàm $F^+(z_0)$ với hàm biên $\varphi(z_0)$ ta cần chuyển qua giới hạn đẳng thức (3.60) khi $\varepsilon \rightarrow 0$.

Đầu tiên khảo sát giới hạn

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_e(\varepsilon)} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta.$$

Đặt $\zeta - z_0 = \varepsilon e^{i\theta}$ dọc theo cung $\gamma_e(\varepsilon)$. Khi đó $d\zeta = \varepsilon i e^{i\theta} d\theta$. Ngoài ra ta có thể viết

$$\varphi(\zeta) = \varphi(z_0) + \eta(\zeta, z_0)$$

trong đó $|\eta(\zeta, z_0)|_{\zeta \in \gamma_e(\varepsilon)} \longrightarrow 0$ khi $\varepsilon \rightarrow 0$ và $\zeta \in \gamma_e(\varepsilon)$. Do đó

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_e(\varepsilon)} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_e(\varepsilon)} \frac{\varphi(z_0) + \eta}{\varepsilon e^{i\theta}} \varepsilon i e^{i\theta} d\theta \\ &= \frac{\varphi(z_0)}{2\pi} \int_{\gamma_e(\varepsilon)} d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_e(\varepsilon)} \eta d\theta. \end{aligned}$$

vì $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_e(\varepsilon)} d\theta = \pi$, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_e(\varepsilon)} \eta d\theta = 0$ nên

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_e(\varepsilon)} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta = \frac{\varphi(z_0)}{2}. \quad (3.61)$$

Tiếp theo, khi $\varepsilon \rightarrow 0$ từ (3.60) ta thu được tích phân $\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}(\varepsilon)} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta$ dần đến giới hạn xác định. Ta ký hiệu giá trị giới hạn đó là

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}(\varepsilon)} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta. \quad (3.62)$$

Đó là giá trị của tích phân dạng Cauchy tại điểm $z_0 \in \mathcal{L}$.

Như vậy qua giới hạn đẳng thức (3.60), từ (3.61) và (3.62) ta có

$$F^+(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta + \frac{1}{2} \varphi(z_0). \quad (3.63)$$

Trường hợp thứ hai: điểm $z \in D^-$. Hoàn toàn tương tự như trong trường hợp thứ nhất, trong trường hợp này ta có

$$\begin{aligned} F^-(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}(\varepsilon)} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_i^-(\varepsilon)} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}(\varepsilon) \cup \gamma_i^-(\varepsilon)} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \end{aligned} \quad (3.64)$$

trong đó tích phân dạng Cauchy ở vế phải xác định hàm chỉnh hình trong lân cận điểm z_0 và trùng với $F^-(z)$ tại những điểm thuộc D^- của lân cận đó. Qua giới hạn (3.64) khi điểm $z \in D^-$ dần đến điểm $z_0 \in \mathcal{L}$ ta thu được

$$\lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \in D^-}} F^-(z) = F^-(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}(\varepsilon)} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_i(\varepsilon)} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta. \quad (3.65)$$

Như vậy ta đã chứng minh sự tồn tại giá trị giới hạn từ ngoài của tích phân dạng Cauchy tại điểm tùy ý $z_0 \in \mathcal{L}$.

Lưu ý rằng theo công thức tích phân Cauchy ta có

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_e(\varepsilon)} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_i(\varepsilon)} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta = \varphi(z_0)$$

và do đó từ (3.61) ta thu được

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_i(\varepsilon)} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta = \frac{1}{2} \varphi(z_0). \quad (3.66)$$

Từ (3.66), qua giới hạn (3.65) khi $\varepsilon \rightarrow 0$ ta có

$$F^-(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta - \frac{1}{2} \varphi(z_0).$$

Như vậy ta thu được

$$\begin{aligned} F^+(z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta + \frac{\varphi(z_0)}{2}, \\ F^-(z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta - \frac{\varphi(z_0)}{2}. \end{aligned}$$

Đó là các công thức Sokhoski - Plemeli. □

Hệ quả 3.2.2. 1. Cộng vế với vế các đẳng thức (3.58) ta thu được

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta = \frac{F^+(z_0) + F^-(z_0)}{2}. \quad (3.67)$$

Hệ thức (3.67) chứng tỏ rằng giá trị của tích phân dạng Cauchy tại điểm bất kỳ của chu tuyến tích phân là bằng trung bình cộng các giá trị giới hạn từ trong và từ ngoài của nó.

2. Lấy đẳng thức thứ nhất của (3.58) trừ đẳng thức thứ hai ta có

$$\varphi(z_0) = F^+(z_0) - F^-(z_0). \quad (3.68)$$

Hệ thức (3.68) chứng tỏ rằng giá trị của hàm biên tại điểm bất kỳ của \mathcal{L} là bằng hiệu giữa các giá trị giới hạn tại điểm đó của tích phân dạng Cauchy.

Kết quả tương tự như định lý 3.2.20 có thể chứng minh cho trường hợp \mathcal{L} là đường cong trơn từng khúc. Khi đó tại các điểm mà \mathcal{L} có tiếp tuyến các công thức (3.58) vẫn giữ nguyên. Tại các điểm góc các công thức (3.58) được thay bởi

$$\begin{aligned} F^+(z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta + \left(1 - \frac{\alpha}{2\pi}\right) \varphi(z_0), \\ F^-(z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta - \frac{\alpha}{2\pi} \varphi(z_0) \end{aligned}$$

trong đó α là góc giữa các tiếp tuyến với \mathcal{L} tại điểm góc $z_0 \in \mathcal{L}$.

Nhận xét 3.2.12. Các công thức Sokhoski-Plemeli vẫn còn đúng nếu hàm biên $\varphi(\zeta) \in H^\alpha(\mathcal{L})$ chỉ liên tục trên \mathcal{L} và \mathcal{L} là đường cong Jordan đo được.

Ví dụ

1. Xét tích phân

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Delta} \frac{dx}{x - z}$$

trong đó $\Delta = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x \leq 1\}$ và tích phân được lấy theo hướng tăng của x . Giả sử lấy $z_0 = 0$. Ở đây hàm $\varphi(\zeta) \equiv 1$ là hàm chỉnh hình $\forall z \in \mathbb{C}$. Do đó ngoại trừ điều kiện duy nhất là đường tròn $\gamma(z_0, \varepsilon)$ phải cắt Δ tại hai điểm đứng trước và đứng sau $z_0 = 0$, ta có thể chọn đường tròn $\gamma(z_0, \varepsilon)$ một

cách tùy ý. Ta lấy $\gamma(z_0, \varepsilon)$ là đường tròn đơn vị. Khi đó cung $\sigma(\varepsilon)$ là đoạn $\Delta = [-1, +1]$ và các cung $\gamma_i(\varepsilon)$, $\gamma_e(\varepsilon)$ chính là nửa trên và nửa dưới của đường tròn. Theo công thức (3.68) ta có

$$F^+(0) - F^-(0) = \varphi(0) = 1.$$

Ta xác định $F^+(0)$ và $F^-(0)$. Ta có

$$F^+(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_e(\varepsilon)} \frac{d\zeta}{\zeta} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\pi}^{2\pi} \frac{e^{i\theta} i d\theta}{e^{i\theta}} = \frac{1}{2};$$

$$F^-(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_i(\varepsilon)} \frac{d\zeta}{\zeta} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\pi}^0 \frac{e^{i\theta} i d\theta}{e^{i\theta}} = \frac{1}{2}.$$

2. Giả sử $\mathcal{L} = \{z : |z| = 1\}$, $\varphi(\zeta) = \frac{1}{\zeta}$. Ta xét tích phân dạng Cauchy

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}} \frac{d\zeta}{\zeta(\zeta - z)}.$$

Nếu điểm z nằm trong \mathcal{L} thì

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}} \frac{d\zeta}{\zeta(\zeta - z)} &= -\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{z} \int_{\mathcal{L}} \frac{d\zeta}{\zeta} + \frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{1}{z} \int_{\mathcal{L}} \frac{d\zeta}{\zeta - z} \\ &= -\frac{1}{z} + \frac{1}{z} = 0. \end{aligned}$$

Nếu điểm z nằm ngoài \mathcal{L} thì tích phân đó bằng $-\frac{1}{z}$. Như vậy

$$F^+(z_0) = 0, \quad F^-(z_0) = -\frac{1}{z_0}$$

và do đó theo công thức (3.67) ta thu được

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}} \frac{d\zeta}{\zeta(\zeta - z_0)} = -\frac{1}{2z_0}.$$

3.2.11 Biểu diễn tích phân hàm điều hòa

Bây giờ ta chuyển sang xét biểu diễn tích phân hàm điều hòa.

Định lý 3.2.21. *Giả sử hàm f chỉnh hình trong hình tròn $S(R) = \{|z| < R\}$ và liên tục trong hình tròn đóng $\overline{S(R)}$, $f(z) = u(z) + iv(z)$. Khi đó*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(Re^{it}) \frac{Re^{it} + z}{Re^{it} - z} dt + iv(0). \quad (3.69)$$

Công thức (3.69) được gọi là công thức Schwartz còn hàm $\frac{Re^{it} + z}{Re^{it} - z}$ được gọi là nhân Schwartz.

Chứng minh. Thật vậy, đối với $z \in S(R)$, theo công thức tích phân Cauchy ta có

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S(R)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(Re^{it}) \frac{Re^{it}}{Re^{it} - z} dt. \quad (3.70)$$

Đặc biệt là

$$f(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S(R)} \frac{f(\zeta)}{\zeta} d\zeta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(Re^{it}) dt. \quad (3.71)$$

Ngoài ra ta có

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S(R)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - R^2/\bar{z}} d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(Re^{it}) \frac{\bar{z}Re^{it}}{Re^{it}\bar{z} - R^2} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(Re^{it}) \frac{-\bar{z}}{Re^{-it} - \bar{z}} dt, \end{aligned} \quad (3.72)$$

vì $|R^2/\bar{z}| > R$ và do đó hàm dưới dấu tích phân chỉnh hình trong $S(R)$ và liên tục trên $\overline{S(R)}$. Từ (3.70) và (3.71) ta thu được

$$f(z) - \frac{1}{2}f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(Re^{it}) \frac{1}{2} \frac{Re^{it} + z}{Re^{it} - z} dt. \quad (3.73)$$

Bây giờ từ (3.71) và (3.72) ta có

$$\frac{1}{2}f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(Re^{it}) \frac{1}{2} \frac{Re^{-it} + \bar{z}}{Re^{-it} - z} dt,$$

và do đó

$$\frac{1}{2}\overline{f(0)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{f(Re^{it})} \frac{1}{2} \frac{Re^{it} + z}{Re^{it} - z} dt. \quad (3.74)$$

Đặt $f(z) = u(z) + iv(z)$ và cộng (3.73) với (3.74) ta thu được

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(Re^{it}) \frac{Re^{it} + z}{Re^{it} - z} dt + iv(0).$$

□

Nhận xét 3.2.13. Công thức (3.69) cho phép ta xác định hàm chỉnh hình $f(z)$ trong hình tròn $S(R)$ (với sự chính xác đến một hằng số cộng thuần ảo) khi biết các giá trị của phần thực của hàm đó trên biên $\partial S(R)$.

Từ định lý vừa chứng minh, bằng cách tách các phần thực và phần ảo, ta có

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(Re^{it}) \frac{R^2 - |z|^2}{|Re^{it} - z|^2} dt. \quad (3.75)$$

Nếu đặt $z = re^{i\theta}$, $r < R$ và để ý rằng

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left\{ \frac{Re^{it} + re^{i\theta}}{Re^{it} - re^{i\theta}} \right\} &= \frac{R^2 - r^2}{|Re^{it} - re^{i\theta}|^2} \\ &= \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(t - \theta) + r^2} \end{aligned}$$

ta có thể viết (3.75) ở dạng khác như sau:

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(Re^{it}) \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(t - \theta) + r^2} dt. \quad (3.76)$$

Công thức (3.75) hoặc (3.76) được gọi là *công thức Poisson* còn hàm $\frac{R^2 - r^2}{|Re^{it} - z|^2}$ được gọi là *nhân Poisson*.

Công thức này đúng đối với phần thực của hàm chỉnh hình trong hình tròn $S(R)$ và liên tục trong $\overline{S(R)}$. Có thể chứng minh rằng công thức ấy đúng với hàm $u(z)$ bất kỳ điều hòa trong $S(R)$ và liên tục trong $\overline{S(R)}$. Nếu $f(z) = u(z) + iv(z)$ chỉnh hình trong $S(R)$ và liên tục trong $\overline{S(R)}$ thì bằng cách biểu diễn u và v bởi công thức (3.75) (hoặc (3.76)) ta thu được

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(Re^{it}) \frac{R^2 - |z|^2}{|Re^{it} - z|^2} dt. \quad (3.77)$$

Công thức này được gọi là *công thức Poisson đối với các hàm chỉnh hình* trong hình tròn và liên tục trong hình tròn đóng.

Bây giờ ta chứng minh công thức Poisson và Schwarz đối với trường hợp khi miền là phần ngoài hình tròn.

Giả sử hàm f chỉnh hình trong miền $S^\infty(R) = \{|z| > R\}$ và liên tục trong $\overline{S^\infty(R)}$. Khi đó nhờ công thức tích phân Cauchy ta có

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial S^\infty(R)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + f(\infty) \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(Re^{it}) \frac{Re^{it}}{Re^{it} - z} dt + f(\infty). \end{aligned}$$

Ngoài ra

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S^\infty(R)} \frac{f(\zeta)}{\zeta} d\zeta + f(\infty) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(Re^{it}) + f(\infty), \\
 0 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S^\infty(R)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - \frac{R^2}{\bar{z}}} d\zeta + f(\infty) \\
 &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(Re^{it}) \frac{-\bar{z}}{Re^{it} - \bar{z}} dt + f(\infty)
 \end{aligned}$$

vì rằng

$$\left| \frac{R^2}{\bar{z}} \right| < R.$$

Bằng phương pháp lý luận như ở trên ta thu được

$$f(z) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(Re^{it}) \frac{Re^{it} + z}{Re^{it} - z} dt + v(\infty)i, \quad |z| > R.$$

Đó là công thức Schwartz đối với các hàm chỉnh hình trong $S^\infty(R)$ và liên tục trong $\overline{S^\infty(R)}$. Tiếp theo cũng như ở trên ta có

$$u(re^{i\theta}) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(Re^{it}) \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - t) + r^2} dt, \quad r > R.$$

Đó là công thức Poisson đối với các hàm điều hòa trong $S^\infty(R)$ và liên tục trong $\overline{S^\infty(R)}$. Công thức Poisson đối với các hàm chỉnh hình trong $S^\infty(R)$ và liên tục trong $\overline{S^\infty(R)}$ có dạng

$$f(re^{i\theta}) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(Re^{it}) \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - t) + r^2} dt, \quad r > R.$$

Công thức Poisson (3.75) có vai trò rất quan trọng trong khi giải bài toán Dirichlet.

Bài toán Dirichlet đặt ra như sau: Giả sử $f(\theta)$ là hàm 2π -tuần hoàn, liên tục trên đường tròn $\gamma = \{|z| = r\}$. Hãy tìm hàm biến phức $F(z)$ thỏa mãn điều kiện:

- a) điều hòa trong hình tròn $U = \{|z| < r\}$;
- b) liên tục trong $\overline{U} = \{|z| \leq r\}$; và
- c) $f(\theta_0) = \lim_{\substack{z \rightarrow e^{i\theta_0} \\ |z| < r}} F(z)$.

Ta muốn chứng minh định lý sau đây.

Định lý 3.2.22. *Bài toán Dirichlet đối với hình tròn luôn luôn có nghiệm.*

Chứng minh. Giả sử $|z| < r$. Ta đặt

$$F(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \frac{r^2 - |z|^2}{|re^{i\theta} - z|^2} d\theta. \quad (3.78)$$

Ta cần chứng minh rằng

- 1. $F(z)$ là hàm điều hòa trong U .
- 2. $f(\theta_0) = \lim_{\substack{z \rightarrow e^{i\theta_0} \\ |z| < r}} F(z)$

Chứng minh 1). Trước hết ta nhận xét rằng hàm $F(z)$ xác định bởi (3.78) là phần thực của hàm

$$\tilde{F}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \frac{re^{i\theta} + z}{re^{i\theta} - z} d\theta.$$

Do đó nếu ta chứng minh được rằng $\tilde{F}(z)$ chỉnh hình thì 1) được chứng minh. Với $z \in U$ bất kỳ ta có

$$\begin{aligned} & \frac{\tilde{F}(z + \Delta z) - \tilde{F}(z)}{\Delta z} - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \frac{re^{i\theta}}{(re^{i\theta} - z)^2} d\theta = \\ &= \frac{\Delta z}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{re^{i\theta} f(\theta) d\theta}{(re^{i\theta} - z)^2 (re^{i\theta} - z - \Delta z)} \end{aligned}$$

và do đó về trái dần đến 0 khi $\Delta z \rightarrow 0$, tức là đạo hàm $\tilde{F}'(z)$ tồn tại.

Như vậy tính điều hòa của $F(z)$ được chứng minh.

Chứng minh 2). Ta nhận xét rằng đối với hàm điều hòa hằng số $u(z) = 1$ ta có công thức

$$1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r - |z|^2}{|re^{i\theta} - z|^2} d\theta, \quad |z| \leq r,$$

và do đó

$$\begin{aligned} F(z) - f(\theta_0) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r^2 - |z|^2}{|re^{i\theta} - z|^2} [f(\theta) - f(\theta_0)] d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{|\theta - \theta_0| \leq \eta} \frac{r^2 - |z|^2}{|re^{i\theta} - z|^2} [f(\theta) - f(\theta_0)] d\theta \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{|\theta - \theta_0| > \eta} \frac{r^2 - |z|^2}{|re^{i\theta} - z|^2} [f(\theta) - f(\theta_0)] d\theta = \\ &= \Delta_1 + \Delta_2 \end{aligned} \quad (3.79)$$

trong đó η là số sẽ được xác định.

Ước lượng tích phân Δ_1 . Giả sử $\varepsilon > 0$ là số dương cho trước tùy ý. Vì $f(\theta)$ là hàm liên tục nên ta có thể xác định số $\eta(\varepsilon)$ sao cho

$$|f(\theta) - f(\theta_0)| < \varepsilon/2, \quad |\theta - \theta_0| < \eta(\varepsilon).$$

Do đó

$$|\Delta_1| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{|\theta - \theta_0| \leq \eta} \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r^2 - |z|^2}{|re^{i\theta} - z|^2} d\theta = \frac{\varepsilon}{2}. \quad (3.80)$$

Ước lượng tích phân Δ_2 . Sau khi chọn số $\eta(\varepsilon)$ ở trên, ta xét tích phân

$$\delta(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{|\theta - \theta_0| > \eta} \frac{r^2 - |z|^2}{|re^{i\theta} - z|^2} d\theta \quad (3.81)$$

và chứng tỏ rằng

$$\lim_{\substack{z \rightarrow e^{i\theta_0} \\ |z| < r}} \delta(z) = 0.$$

Ta đặt $z = \rho e^{i\alpha}$. Nếu $|\alpha - \theta_0| < \eta/2$ thì

$$|\alpha - \theta| \geq \eta/2$$

đối với θ bất kỳ thỏa mãn điều kiện $|\theta - \theta_0| > \eta$. Do đó

$$|re^{i\theta} - z| \geq r \sin \frac{\eta}{2},$$

và

$$|\delta(z)| \leq \frac{1}{r^2 \sin^2 \frac{\eta}{2}} (r^2 - \rho^2) \rightarrow 0.$$

khi $\rho \rightarrow r$.

Như vậy sau việc chọn số $\eta(\varepsilon)$ ở trên ta có

$$|\Delta_2| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{|\theta - \theta_0| > \eta} \right| \leq \frac{2M}{2\pi} \int_{|\theta - \theta_0| > \eta} \frac{r^2 - |z|^2}{|re^{i\theta} - z|^2} d\theta = 2M\delta(z),$$

trong đó $M = \sup |f(\theta)|$, và $\delta(z)$ là giá trị của tích phân (3.81). Vì $\delta(z) \rightarrow 0$ khi $z \rightarrow re^{i\theta_0}$ ($|z| < r$) nên khi z thuộc lân cận đủ bé của điểm $re^{i\theta_0}$ ta có

$$|\Delta_2| \leq \frac{\varepsilon}{2}. \quad (3.82)$$

Từ (3.79), (3.80) và (3.82) ta thu được

$$|F(z) - f(\theta_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

3.3 Bài tập

1. Chứng minh rằng nếu $f \in \mathcal{H}(D)$ và γ là chu tuyến đóng trơn từng khúc thuộc miền đơn liên D thì

$$\int_{\gamma} \overline{f(z)} d\bar{z} = 0.$$

2. Chứng minh rằng hàm

$$f(z) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \frac{z^n}{\zeta^n} d\zeta = g(z),$$

trong đó γ là chu tuyến Jordan bao điểm $\zeta = 0$ và $\zeta = z$, là đa thức bậc $n - 1$ và

$$g^{(m)}(0) = f^{(m)}(0), \quad m = 0, 1, \dots, n - 1.$$

3. Giả sử miền $D \ni \infty$ và $f \in \mathcal{H}(D)$. Khi đó

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + f(\infty), \quad z \in D.$$

4. Chứng minh rằng trung bình cộng của mọi giá trị $z^{-n} \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} z^{\nu}$ đối với các điểm z trên đường tròn $\{|z| = 1\}$ là bằng a_n nếu $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} z^{\nu}$ là hàm chỉnh hình ở trong và trên biên hình tròn $\{|z| \leq 1\}$.

5. Tìm hàm điều hòa trong nửa trên của hình tròn đơn vị nhận giá trị bằng 0 trên đường kính và bằng 1 trên nửa đường tròn.

6. Tìm hàm $u(z)$ điều hòa trong vành lệch tâm giữa hai đường tròn $\gamma_0 = \{|z - 3| = 9\}$ và $\gamma_1 = \{|z - 8| = 16\}$ và $u|_{z \in \gamma_0} = u_0$, $u|_{z \in \gamma_1} = u_1$, trong đó u_0 và u_1 là những hằng số.

7. Tìm một hàm điều hòa trong nửa mặt phẳng trên bỏ đi hình tròn $S = \{|z - 2i| < 1\}$ và có giá trị bằng 0 trên trục thực và giá trị bằng 1 trên chu vi của S .