

Chương 4

Các tính chất cơ bản của hàm chỉnh hình

4.1	Các kết quả quan trọng nhất rút ra từ tích phân Cauchy	279
4.1.1	Định lý giá trị trung bình	279
4.1.2	Định lý Liouville	280
4.1.3	Định lý Weierstrass về chuỗi hàm hội tụ đều . . .	284
4.1.4	Tính chất địa phương của hàm chỉnh hình. Chuỗi Taylor	288
4.1.5	Các quan điểm khác nhau trong việc xây dựng lý thuyết hàm chỉnh hình	305
4.2	Tính chất duy nhất của hàm chỉnh hình	310
4.2.1	Không điểm (0-điểm) của hàm chỉnh hình	310
4.2.2	Tính chất duy nhất của hàm chỉnh hình	313
4.2.3	Nguyên lý thác triển giải tích	317
4.2.4	Nguyên lý môđun cực đại	320
4.3	Điểm bất thường cô lập	326

4.3.1	Chuỗi Laurent	326
4.3.2	Điểm bất thường cô lập đơn trị	337
4.3.3	Dáng điệu của hàm tại điểm vô cùng	348
4.3.4	Phân loại hàm chỉnh hình	350
4.4	Tính bất biến của tập hợp mở	354
4.4.1	Nguyên lý acgumen	354
4.4.2	Định lý Rouché	360
4.4.3	Tính bất biến của tập hợp mở	363
4.5	Bài tập	365

Trong chương trước, ta đã chứng minh định lý cơ bản của lý thuyết hàm chỉnh hình - định lý Cauchy. Định lý này kéo theo một loạt hệ quả quan trọng. Đặc biệt là nó cho phép ta xác lập mối liên hệ nhất định giữa các giá trị của hàm chỉnh hình tại các điểm trong của miền chỉnh hình với các giá trị biên của hàm đó. Mối liên hệ đó được mô tả trong công thức tích phân cơ bản thứ hai của Cauchy. Đó là công thức trung tâm của lý thuyết hàm chỉnh hình.

4.1 Các kết quả quan trọng nhất rút ra từ tích phân Cauchy

Ở một mức độ nhất định, mọi định lý của mục này đều là hệ quả của công thức tích phân Cauchy.

4.1.1 Định lý giá trị trung bình

Đó là định lý sau đây.

Định lý 4.1.1. *Giả sử $f(z)$ là hàm liên tục trong hình tròn đóng $\overline{S(R)} = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq R\}$ và chỉnh hình trong hình tròn $S(R)$. Khi đó ta có*

đẳng thức

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt,$$

tức là giá trị của hàm tại tâm hình tròn bằng trung bình cộng các giá trị của nó trên đường tròn.

Chứng minh. Theo công thức tích phân Cauchy ta có

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S(R)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta.$$

Thực hiện phép biến đổi theo công thức

$$\zeta = z_0 + Re^{it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

ta thu được

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{it}) \frac{Re^{it} i dt}{Re^{it}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{it}) dt.$$

□

4.1.2 Định lý Liouville

Định lý 4.1.2. (Liouville¹) Nếu hàm chỉnh hình trên toàn mặt phẳng phức $f(z)$ có môđun bị chặn thì nó đồng nhất hằng số, tức là $f(z) \equiv \text{const } \forall z \in \mathbb{C}$.

Chứng minh. Giả sử $|f(z)| \leq M < \infty \quad \forall z \in \mathbb{C}$. Ta sẽ áp dụng công thức tích phân Cauchy cho đạo hàm $f'(z)$ và hình tròn $S(R)$ với tâm tại điểm z và bán kính R . Ta có

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S(R)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta.$$

¹I. Liouville (1809-1882) là nhà toán học Pháp

Từ đó

$$|f'(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{M}{R^2} 2\pi R = \frac{M}{R}.$$

Vế trái của bất đẳng thức này không phụ thuộc R , còn vế phải dần đến 0 khi R tăng vô hạn. Từ đó suy rằng $|f'(z)| = 0$ và $f'(z) = 0 \forall \mathbb{C}$. Do đó $f(z) \equiv \text{const}$ trong \mathbb{C} . \square

Như vậy lớp các hàm chỉnh hình trong toàn mặt phẳng và bị chặn chỉ gồm các hàm tầm thường (các hằng số).

Định lý Liouville vừa chứng minh có thể khái quát dưới dạng

Định lý 4.1.3. Nếu hàm $f(z)$ chỉnh hình trong toàn mặt phẳng và thỏa mãn điều kiện $|f(z)| \leq M|z|^n$, $M < \infty$ và n là số nguyên dương thì đó là đa thức bậc không cao hơn n .²

Chứng minh. Giả sử z_0 là điểm tùy ý của mặt phẳng phức. Từ công thức tích phân Cauchy đối với đạo hàm cấp cao ta có

$$f^{(n+1)}(z_0) = \frac{(n+1)!}{2\pi i} \int_{\partial S(R)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+2}} dz, \quad S(R) = \{z : |z-z_0| < R\}$$

và do đó

$$|f^{(n+1)}(z_0)| \leq \frac{M|z|^n}{R^{n+1}} (n+1)!.$$

Vì $|z| \leq |z_0| + R$ nên qua giới hạn khi $R \rightarrow \infty$ ta thu được $f^{(n+1)}(z_0) = 0$. Do z_0 là điểm tùy ý của \mathbb{C} nên $f^{(n+1)}(z) \equiv 0$. Từ đó suy rằng $f^{(n)}(z) \equiv \text{const}$ vì

$$f^{(n)}(z) - f^{(n)}(z_0) = \int_{z_0}^z f^{(n+1)}(z) dz \equiv 0,$$

tức là $f^{(n)}(z) \equiv f^{(n)}(z_0) = \text{const} \dots$ Bằng cách lập luận như vậy, dễ dàng thu được điều khẳng định của định lý. \square

²Khi $n = 0$ thì ta thu được định lý 12.1

Định lý Liouville còn có thể phát biểu dưới dạng

Định lý 4.1.2*. Nếu hàm $f(z)$ chỉnh hình trên toàn mặt phẳng mở rộng $\overline{\mathbb{C}}$ thì nó đồng nhất hằng số.

Chứng minh. Vì hàm f chỉnh hình tại điểm ∞ nên $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z)$ tồn tại và hữu hạn. Từ đó suy ra $f(z)$ bị chặn trong lân cận nào đó $\mathcal{U}(\infty) = \{z : |z| > R\}$ của điểm ∞ . Giả sử $|f(z)| \leq M_1, \forall z \in \mathcal{U}(\infty)$. Mặt khác, do hàm f chỉnh hình (và do đó nó liên tục) trong hình tròn đóng $\overline{S(R)} = \{z : |z| \leq R\}$ nên nó bị chặn trong hình tròn đó. Giả sử $|f(z)| \leq M_2, z \in \overline{S(R)}$. Nhưng khi đó hàm f bị chặn trong toàn mặt phẳng: $|f(z)| < M = \max(M_1, M_2) \quad \forall z \in \mathbb{C}$. Vì hàm f chỉnh hình trên \mathbb{C} nên theo định lý 4.1.2 ta có $f \equiv \text{const}$. \square

Bây giờ ta áp dụng định lý Liouville để chứng minh định lý Gauss - định lý cơ bản của đại số.

Định lý 4.1.4. (Gauss) Mọi đa thức đại số bậc $m \geq 1$ với hệ số phức đều có m nghiệm nếu mỗi nghiệm được tính một số lần bằng bội của nó.

Chứng minh. Giả sử

$$P_m(z) = a_m z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \cdots + a_1 z + a_0, \quad a_m \neq 0, \quad m \geq 1.$$

Ta chứng minh bằng phản chứng: giả sử $P_m(z)$ không có nghiệm trong \mathbb{C} . Ta xét hàm

$$f(z) = \frac{1}{P_m(z)}.$$

Hàm $f(z)$ có các tính chất sau đây

- (i) Hàm $f(z) \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ vì $P_m(z) \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$.
- (ii) Hàm $f(z)$ có môđun bị chặn, tức là $|f(z)| \leq M \quad \forall z \in \mathbb{C}$. Thật vậy, vì $\lim_{z \rightarrow \infty} P_m(z) = \infty$ nên $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{P_m(z)} = 0$. Từ đó $\exists R > 0$ sao cho $\forall z : |z| > R$ ta có

$$|f(z)| < 1.$$

Trong hình tròn đóng $|z| \leq R$ hàm $f(z)$ có môđun bị chặn, tức là $|f(z)| \leq m$ $\forall z \in \{|z| \leq R\}$. Từ đó suy rằng $|f(z)| < m + 1 = M$, $\forall z \in \mathbb{C}$. Như vậy hàm $f(z) \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ và $|f(z)| \leq M$ $\forall z \in \mathbb{C}$, tức là thỏa mãn các điều kiện của định lý Liouville. Do đó $f(z) \equiv \text{const}$ trên \mathbb{C} . Từ đó suy rằng $P_m(z) \equiv \text{const}$. Nhưng điều đó không thể xảy ra vì $a_m \neq 0$ và $m \geq 1$.

Như vậy tồn tại giá trị $\alpha_1 \in \mathbb{C}$ sao cho

$$P(\alpha_1) = 0.$$

Do đó $P_m(z) = (z - \alpha_1)P_{m-1}(z)$, $P_{m-1}(\alpha_1) \neq 0$. Nhưng $P_{m-1}(z)$ cũng là đa thức đại số bậc $m - 1$ nên $\exists \alpha_2 \in \mathbb{C}$ sao cho $P_{m-1}(z) = (z - \alpha_2)P_{m-2}(z)$, $P_{m-2}(\alpha_2) \neq 0$. Như vậy

$$P_m(z) = (z - \alpha_1)(z - \alpha_2)P_{m-2}(z), \dots$$

Tiếp tục lập luận như vậy ta thu được đẳng thức

$$P_m(z) = a_m(z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \cdots (z - \alpha_m).$$

Đẳng thức này chứng tỏ rằng $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ là nghiệm và ngoài chúng ra đa thức $P_m(z)$ không còn nghiệm nào khác. Thật vậy nếu β là nghiệm $\beta \neq \alpha_i$ $\forall i = \overline{1, m}$ của đa thức $P_m(z)$ thì

$$P_m(\beta) = a_m(\beta - \alpha_1)(\beta - \alpha_2) \cdots (\beta - \alpha_m) = 0.$$

Điều này chứng tỏ rằng một trong các thừa số phải bằng 0, tức là

$$\begin{aligned} \beta - \alpha_i &= 0, \quad i = 1, 2, \dots, m \\ \iff \beta &= \alpha_i, \quad i = 1, 2, \dots, m. \end{aligned}$$

□

Định lý vừa chứng minh còn có tên gọi là *định lý về trường đóng đại số*.

4.1.3 Định lý Weierstrass về chuỗi hàm hội tụ đều

Trong 1.4 ta đã trình bày khái niệm chuỗi hàm *hội tụ đều trong miền D và hội tụ đều trên từng compact* của miền D cùng một số tính chất hàm của chuỗi hội tụ đều. Bây giờ ta chứng minh định lý quan trọng của Weierstrass về sự bảo toàn tính chỉnh hình của tổng của chuỗi trong phép qua giới hạn đều và phép đạo hàm từng số hạng của chuỗi hàm chỉnh hình hội tụ đều.

Định lý 4.1.5. (Weierstrass) *Giả sử:*

- 1) $u_n(z)$ $n \in \mathbb{N}$ là những hàm chỉnh hình trong miền D ;
- 2) chuỗi hàm

$$u_1(z) + u_2(z) + \cdots + u_n(z) + \cdots \quad (4.1)$$

hội tụ đều trên từng compact của miền D đến hàm (hữu hạn) $f(z)$.

Khi đó

- 1) *Tổng $f(z)$ của chuỗi là hàm chỉnh hình trong miền D .*
- 2) *Chuỗi có thể đạo hàm từng số hạng đến cấp tùy ý*

$$u_1^{(m)}(z) + u_2^{(m)}(z) + \cdots + u_n^{(m)}(z) + \cdots = f^{(m)}(z); \quad m = 1, 2, \dots \quad (4.2)$$

3) *Mọi chuỗi (4.2) đều là chuỗi hội tụ đều trên từng compact của miền D .*

Chứng minh. 1) Lấy hình tròn $S(R)$ bất kỳ bán kính R với biên $\gamma(R)$ sao cho $\overline{S(R)} \subset D$. Trên đường tròn $\gamma(R)$ ($\gamma(R)$ là tập hợp đóng nằm trong D) chuỗi (4.1) hội tụ đều đến hàm $f(z)$. Do đó hàm

$$f(\zeta) = u_1(\zeta) + u_2(\zeta) + \cdots + u_n(\zeta) + \cdots; \quad \zeta \in \gamma(R) \quad (4.3)$$

liên tục trên $\gamma(R)$. Nhân (4.3) với hàm

$$v(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\zeta - z}, \quad \zeta \in \gamma(R), \quad z \in S(R).$$

Hàm này bị chặn trên $\gamma(R)$. Do đó chuỗi thu được sau khi nhân (4.3) với $v(\zeta)$ vẫn hội tụ đều trên $\gamma(R)$ và có thể tích phân từng số hạng theo $\gamma(R)$. Ta thu được

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(R)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(R)} \frac{u_1(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \cdots + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(R)} \frac{u_n(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \cdots$$

Tích phân ở vế trái là tích phân dạng Cauchy. Do đó vế trái là hàm chỉnh hình trong hình tròn $S(R)$. Ta ký hiệu hàm đó là $f_R(z)$. Áp dụng công thức tích phân Cauchy cho các hàm $u_n(\zeta)$ từ biểu thức trên ta thu được

$$f_R(z) = u_1(z) + u_2(z) + \cdots + u_n(z) + \cdots \quad (4.4)$$

Như vậy chuỗi được xét hội tụ đều đến hàm $f_R(z)$ chỉnh hình trong hình tròn $S(R)$. Nhưng trong $S(R)$ hàm $f_R(z)$ trùng với $f(z)$. Nghĩa là $f(z)$ là hàm chỉnh hình trong $S(R)$. Vì mỗi điểm z của miền D đều thuộc một hình tròn $S(R)$, $\overline{S(R)} \subset D$ nào đó nên hàm $f(z)$ chỉnh hình trong D .

Các lập luận trên đây chỉ đúng nếu miền D không chứa điểm ∞ . Giả sử miền $D \ni \infty$. Ta sẽ xét “hình tròn” $S_R(\infty) = \{z : |z| > R\}$ với bán kính R đủ lớn sao cho toàn bộ biên ∂D đều nằm trong đường tròn $\gamma_R(\infty) = \{z : |z| = R\}$. Lập luận như trên và thay cho chuỗi (4.4) theo định lý 3.2.13 ta thu được đẳng thức

$$\begin{aligned} f_R(z) &= [u_1(z) - u_1(\infty)] + [u_2(z) - u_2(\infty)] + \cdots \\ &\quad + [u_n(z) - u_n(\infty)] + \cdots \end{aligned}$$

hay là

$$\begin{aligned} f_R(z) &= [u_1(z) + \cdots + u_n(z) + \cdots] \\ &\quad - [u_1(\infty) + u_2(\infty) + \cdots + u_n(\infty) + \cdots]. \end{aligned}$$

Chuỗi trong dấu ngoặc vuông thứ hai ở vế phải hội tụ đến $f(\infty)$ và do đó

$$f_R(z) + f(\infty) = u_1(z) + u_2(z) + \cdots + u_n(z) + \cdots$$

Ở đây $f_R(z) + f(\infty) = f(z) \forall z \in S_R(\infty)$ và hàm $f_R(z) + f(\infty)$ chỉnh hình trong $S_R(\infty)$. Do vậy hàm f chỉnh hình trong lân cận điểm ∞ .

2) Nếu nhân chuỗi (4.3) với hàm

$$v_m(\zeta) = \frac{m!}{2\pi i} \frac{1}{(\zeta - z)^{m+1}}, \quad z \in S(R)$$

bị chặn trên $\gamma(R)$ và tích phân từng số hạng theo $\gamma(R)$ thì thay cho (4.4) ta thu được chuỗi

$$f_R^{(m)}(z) = u_1^{(m)}(z) + u_2^{(m)}(z) + \dots + u_n^{(m)}(z) + \dots$$

Vì $f_R(z) = f(z) \forall z \in D$ nên từ đó thu được (4.2).

3) Để chứng minh phần thứ ba của định lý ta phủ tập hợp đóng tùy ý $E \subset D$ bởi hệ các hình tròn S' sao cho $\overline{S'} \subset D$. Nếu tập hợp $E \ni z = \infty$ thì ta có thể lấy hình tròn là tập hợp $S'(\infty) = \{z : |z| > R > 0\}$, $\overline{S'(\infty)} \subset D$. Từ hệ các hình tròn này ta có thể chọn một phủ con gồm một số hữu hạn các hình tròn. Hợp mọi hình tròn đóng này được ký hiệu là E^* . Giả sử δ là khoảng cách từ E^* đến biên miền D : $\delta = \text{dist}\{E^*, \partial D\}$.

Đối với mỗi hình tròn S' của phủ hữu hạn ta dựng hình tròn S đồng tâm với bán kính lớn hơn bán kính của S' một đại lượng bằng $\frac{\delta}{2}$ (đối với $S'(\infty)$ thì cần lấy bán kính bé hơn $\frac{\delta}{2}$). Chu tuyến \mathcal{L} của các hình tròn này lập thành tập hợp đóng $\Gamma \subset D$. Do đó chuỗi được xét $\sum_{n \geq 1} u_n(z)$ hội tụ đều trên Γ , nghĩa là

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N, \forall p \in \mathbb{N}, \forall \zeta \in \Gamma \Rightarrow$$

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(\zeta) \right| < \varepsilon.$$

Giả sử z là điểm tùy ý của E và giả sử nó thuộc hình tròn S' của phủ

hữu hạn. Khi $\zeta \in \mathcal{L}$ và $z \in S'$ thì $|\zeta - z| \geq \frac{\delta}{2}$. Do đó

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k^{(m)}(z) \right| &= \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{m!}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}} \frac{u_k(\zeta)}{(\zeta - z)^{m+1}} d\zeta \right| \\ &\leq \frac{m!}{2\pi} \int_{\mathcal{L}} \frac{\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(\zeta) \right|}{|\zeta - z|^{m+1}} ds \\ &\leq \frac{m!}{2\pi} \cdot \frac{\varepsilon}{\left(\frac{\delta}{2}\right)^{m+1}} 2\pi R_* \end{aligned}$$

trong đó R_* là bán kính của hình tròn S tương ứng. Như vậy đối với mỗi điểm $z \in E$ ta có

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k^{(m)}(z) \right| \leq \frac{\tilde{R}m!\varepsilon}{\left(\frac{\delta}{2}\right)^{m+1}}$$

trong đó \tilde{R} là bán kính lớn nhất trong các bán kính của các hình tròn S của phủ hữu hạn. Từ đó suy ra sự hội tụ đều của chuỗi đạo hàm trên từng compắc của D . \square

Nhận xét 4.1.1. Trong giải tích thực không có định lý tương tự như định lý Weierstrass. Thật vậy, trong giải tích thực ta biết rằng tổng $S(x)$ của chuỗi hàm thực (biến thực) khả vi $\sum_{n \geq 1} u_n(x)$ hội tụ đều trên khoảng nào đó có thể là hàm không khả vi. Hơn thế nữa nếu $\exists S'(x)$ thì hoàn toàn không nhất thiết phải có đẳng thức $S'(x) = \sum_{n \geq 1} u'_n(x)$.

Nhận xét 4.1.2. Nếu có dãy hàm $(f_n(z))_{n \geq 1}$ cho trong miền D thì chuỗi

$$f_1(z) + [f_2(z) - f_1(z)] + \cdots + [f_n(z) - f_{n-1}(z)] + \cdots$$

có tổng riêng thứ n là $S_n(x) = f_n(x)$. Từ đó mọi điều khẳng định về chuỗi đều có thể phát biểu đối với dãy và ngược lại. Từ đó và định lý 4.1.3 ta rút ra

Định lý 4.1.6. (Weierstrass; về dãy hàm chỉnh hình hội tụ đều)

Nếu dãy các hàm $(f_n(z))_{n \geq 1}$ chỉnh hình trong miền D hội tụ đều trên từng compact của miền D đến hàm hữu hạn $f(z)$ thì $f(z)$ là hàm chỉnh hình trong D và dãy các đạo hàm $(f_n^{(m)}(z))_{n \geq 1}$; $m = 1, 2, \dots$ hội tụ đều trên từng compact của D đến hàm $f^{(m)}(z)$.

Từ định lý Weierstrass 4.1.3 và định lý Abel rút ra

Hệ quả 4.1.1. Tổng của chuỗi lũy thừa

$$\sum_{n \geq 0} a_n (z - a)^n$$

là hàm chỉnh hình trong hình tròn hội tụ của nó và trong hình tròn hội tụ của chuỗi ta có thể lấy tích phân và đạo hàm từng số hạng một số lần tùy ý, đồng thời phép đạo hàm và tích phân từng số hạng không làm thay đổi bán kính hội tụ của chuỗi.

4.1.4 Tính chất địa phương của hàm chỉnh hình. Chuỗi Taylor

Trong 2.1 ta đã chứng minh rằng tổng của chuỗi lũy thừa là hàm chỉnh hình trong hình tròn hội tụ của nó. Bây giờ nhờ công thức tích phân Cauchy ta có thể chứng minh một tính chất quan trọng nữa của hàm chỉnh hình - đó là tính chất địa phương: mỗi hàm chỉnh hình trong hình tròn đều biểu diễn được dưới dạng tổng của chuỗi lũy thừa. Cụ thể ta chứng minh định lý sau

Định lý 4.1.7. (Cauchy - Taylor³)

Nếu hàm $f(z)$ chỉnh hình trong miền D thì tại lân cận của mỗi điểm $z_0 \in D$ hàm $f(z)$ biểu diễn được dưới dạng chuỗi lũy thừa

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n \quad (4.5)$$

với bán kính hội tụ R không bé hơn khoảng cách d từ điểm z_0 đến biên ∂D của miền D ($d = \text{dist}(z_0, \partial D)$).

³B. Taylor (1685-1731) là nhà toán học Anh

Chứng minh. Giả sử $f \in \mathcal{H}(D)$ và z_0 là điểm tùy ý của miền D . Ta ký hiệu $S(z_0, d) = \{z \in D : |z - z_0| < d\}$ và giả sử z là điểm tùy ý của $S(z_0, d) : z \in S(z_0, d)$. Xét hình tròn $S(z_0, \delta)$ đồng tâm với hình tròn $S(z_0, d)$ với bán kính δ thỏa mãn điều kiện $0 < \delta < d$ sao cho điểm z nằm trong D . Áp dụng công thức tích phân Cauchy ta có

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(\delta)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(\rho)} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0) \left(1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)}, \quad (4.6)$$

trong đó $\gamma(\delta) = \{\zeta : |\zeta - z_0| = \delta\}$.

Đối với điểm $z \in S(z_0, \delta)$ cố định ta có bất đẳng thức

$$\left| \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right| = q < 1, \quad \zeta \in \gamma(\delta).$$

Do đó biểu thức

$$\frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}}$$

có thể xem như tổng của cấp số nhân

$$\frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = \sum_{n \geq 0} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n. \quad (4.7)$$

Chuỗi (4.7) hội tụ đều trên $\gamma(\rho)$ nên ta có thể thực hiện phép tích phân từng số hạng và từ (4.6) và (4.7) ta thu được

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(\delta)} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \right) (z - z_0)^n \\ &= \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n, \end{aligned} \quad (4.8)$$

trong đó

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(\delta)} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (4.9)$$

Để ý đến công thức tích phân Cauchy đối với đạo hàm của hàm chỉnh hình ta có

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}; \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.10)$$

Vì đối với mỗi điểm z cố định thuộc hình tròn $\{|z - z_0| < \delta\}$ chuỗi ở vế phải của (4.7) hội tụ đều đối với $\zeta \in \gamma(\delta)$ còn các hệ số a_n không phụ thuộc vào δ trong khoảng $0 < \delta < d$ nên bán kính hội tụ R của chuỗi $\sum_{n \geq 0} a_n(z - z_0)^n$ không bé hơn d . Thật vậy nếu $R < d$ thì mâu thuẫn với định nghĩa bán kính hội tụ của chuỗi đó vì có thể lấy δ là số lớn hơn R . Định lý được chứng minh. \square

Hình IV.1

Chuỗi (4.8) với hệ số biểu diễn qua hàm chỉnh hình $f(z)$ theo các công thức (4.9) hay (4.10) được gọi là *chuỗi Taylor với tâm tại điểm z_0* hay *khai triển Taylor tại lân cận điểm z_0* của hàm $f(z)$.

Hệ quả 4.1.2. Mọi chuỗi lũy thừa đều là chuỗi Taylor của tổng của nó.

Chứng minh. Thật vậy, giả sử trong hình tròn nào đó

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n. \quad (4.11)$$

Thay $z = z_0$ ta có $f(z_0) = a_0$, đạo hàm từng số hạng chuỗi (4.11) rồi thay $z = z_0$ ta tìm được $f'(z_0) = a_1$. Tính đạo hàm từng số hạng liên tiếp chuỗi (4.11) rồi thay $z = z_0$ ta có $f''(z_0) = 2!a_2$, $f^{(3)}(z_0) = 3!a_3, \dots, f^{(n)}(z_0) = n!a_n$ và do đó $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$. Do đó chuỗi (4.11) là chuỗi Taylor của hàm $f(z)$. \square

Hệ quả 4.1.3. Giả sử $M(r) = \max_{\zeta \in \gamma(r)} |f(\zeta)|$. Khi đó các hệ số a_n của chuỗi Taylor thỏa mãn các bất đẳng thức

$$|a_n| \leq \frac{M(r)}{r^n}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (4.12)$$

trong đó r là số bất kỳ bé hơn bán kính hội tụ của chuỗi. Các bất đẳng thức (4.12) được gọi là các bất đẳng thức Cauchy đối với hệ số của chuỗi Taylor.

Chứng minh. Từ các công thức (4.9) và (4.10) ta có

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta.$$

Từ đó áp dụng công thức ước lượng tích phân trong miền phức ta thu được

$$|a_n| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{M(r)}{r^{n+1}} \cdot 2\pi r = \frac{M(r)}{r^n}$$

□

Để rút ra hệ quả tiếp theo ta nêu ra

Định nghĩa 4.1.1. 1) Điểm $z = a$ được gọi là điểm *chính quy* của hàm $f(z)$ nếu hàm $f(z)$ chỉnh hình trong một lân cận nào đó của điểm a .

2) Điểm $z = a$ được gọi là điểm *bất thường* của hàm $f(z)$ nếu nó không là điểm chính quy đối với hàm $f(z)$ nhưng trong lân cận bất kỳ của nó đều có điểm chính quy của hàm.

Hệ quả 4.1.4. Bán kính hội tụ của chuỗi Taylor với tâm tại điểm $z = a$ bằng khoảng cách từ điểm a đến điểm bất thường gần nhất của hàm $f(z)$.

Chứng minh. Vì các điểm bất thường đều là điểm biên đối với miền chỉnh hình của hàm nên theo định lý Cauchy - Taylor bán kính hội tụ của chuỗi Taylor thu được không bé hơn khoảng cách d từ điểm a đến điểm bất thường gần nhất của hàm, tức là $R \geq d$. Nhưng bán kính hội tụ không thể lớn hơn khoảng cách đó vì nếu $R > d$ thì có ít nhất một điểm bất thường của hàm f rơi vào hình tròn hội tụ, mà điều đó lại không thể xảy ra do tổng của chuỗi lũy thừa là hàm chỉnh hình trong *toàn bộ* hình tròn hội tụ. Do đó $R = d$. □

Công thức tổng quát (4.9) hay (4.10) đối với hệ số Taylor thường không tiện lợi trong tính toán. Trong một số trường hợp ta có thể áp dụng các phương pháp đơn giản hơn để khai triển hàm thành chuỗi lũy thừa.

Nếu $f(z)$ là hàm hữu tỷ thực sự thì ta có thể biểu diễn nó dưới dạng tổng hữu hạn các phân thức tối giản dạng $\frac{1}{z-a}$ hay $\frac{1}{(z-a)^k}$ ($k > 1$). Khi đó

phân thức $\frac{1}{z-a}$ khai triển thành chuỗi cấp số nhân, còn phân thức $\frac{1}{(z-a)^k}$ ($k > 1$) khai triển thành chuỗi thu được bằng phép đạo hàm liên tiếp $k-1$ lần chuỗi cấp số nhân.

Nếu $f(z)$ là biểu thức vô tỷ hay siêu việt thì có thể áp dụng các khai triển Taylor đối với hàm e^z , $\sin z$, $\cos z$, $\ln(1+z)$, $(1+z)^\alpha, \dots$ (gọi là các *khai triển bảng*) thu được bằng cách tính trực tiếp các đạo hàm của các hàm ấy.

$$\text{I. } e^z = \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}, \quad z \in \mathbb{C}$$

$$\text{II. } \cos z = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}, \quad z \in \mathbb{C}$$

$$\text{III. } \sin z = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad z \in \mathbb{C}$$

$$\text{IV. } \ln(1+z) = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n, \quad |z| < 1$$

V.

$$\begin{aligned} (1+z)^\alpha &= 1 + \sum_{n \geq 1} \binom{\alpha}{n} z^n = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} z^2 + \dots \\ &\quad + \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-n+1)}{n!} z^n + \dots, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad |z| < 1, \end{aligned}$$

$$\binom{\alpha}{0} = 1, \quad \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-n+1)}{n!},$$

$$\binom{\alpha}{n} = C_n^\alpha \text{ nếu } \alpha \in \mathbb{N}$$

$$\text{VI}_1. \quad \frac{1}{1-z} = \sum_{n \geq 0} z^n, \quad |z| < 1$$

$$\text{VI}_2. \quad \frac{1}{1+z} = \sum_{n \geq 0} (-1)^n z^n, \quad |z| < 1.$$

.....

Trước khi áp dụng các khai triển bằng ta cần biến đổi sơ bộ hàm đã cho. Ta minh họa điều đó bằng một số ví dụ sau đây.

Ví dụ 1. Khai triển hàm

$$f(z) = \frac{1}{(1-z^2)(z^2+4)}$$

thành chuỗi Taylor tại lân cận điểm $z = 0$.

Giải. Hàm đã cho có thể biểu diễn dưới dạng:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{5} \left[\frac{1}{1-z^2} + \frac{1}{z^2+4} \right] \\ &= \frac{1}{5} \left[\frac{1}{1-z^2} + \frac{1}{4\left(1+\frac{z^2}{4}\right)} \right]. \end{aligned}$$

Bây giờ áp dụng khai triển VI₁

$$\frac{1}{1-t} = \sum_{n \geq 0} t^n, \quad |t| < 1$$

ta có

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{5} \left[1 + \frac{(-1)^n}{4^{n+1}} \right] z^{2n}, \quad |z| < 1.$$

Ví dụ 2. Tìm khai triển Taylor của hàm

$$f(z) = e^z \cdot \cos z.$$

Giải. Tại lân cận điểm $z = 0$ ta có thể nhân hai chuỗi với nhau. Tuy nhiên, trong trường hợp này, tiện lợi hơn cả là sử dụng đồng nhất thức

$$e^z \cdot \cos z = e^z \left[\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \right] = \frac{1}{2} [e^{(1+i)z} + e^{(1-i)z}].$$

Vì $1+i = \sqrt{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}}$; $1-i = \sqrt{2} \cdot e^{-i\frac{\pi}{4}}$ nên áp dụng khai triển (II) ta có:

$$\begin{aligned} e^z \cdot \cos z &= \sum_{n \geq 0} \frac{2^{\frac{n}{2}} \cdot e^{i\frac{\pi n}{4}} + 2^{\frac{n}{2}} \cdot e^{-i\frac{\pi n}{4}}}{2} z^n \\ &= \sum_{n \geq 0} \left(2^{\frac{n}{2}} \cos \frac{\pi n}{4} \right) \cdot z^n, \quad z \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Ví dụ 3. Khai triển hàm $f(z) = \frac{1}{1+z} + e^{-z}$ thành chuỗi Taylor với tâm $a = 0$ và chỉ ra bán kính hội tụ của chuỗi.

Giải. Ta có

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+z} &= 1 - z + z^2 - z^3 + \dots + (-1)^n z^n + \dots \\ e^{-z} &= 1 - z + \frac{z^2}{2!} - \frac{z^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{z^n}{n!} + \dots\end{aligned}$$

Từ đó bằng cách cộng các chuỗi ta thu được

$$\begin{aligned}f(z) &= [1 - z + z^2 - \dots + (-1)^n z^n + \dots] \\ &\quad + \left[1 - z + \frac{z^2}{2!} - \dots + (-1)^n \frac{z^n}{n!} + \dots\right] \\ &= 2 - 2z + \left(1 + \frac{1}{2!}\right)z^2 - \left(1 + \frac{1}{3!}\right)z^3 + \dots \\ &\quad + (-1)^{n-1} \left(1 + \frac{1}{(n-1)!}\right)z^{n-1} + \dots \\ &= \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \left(1 + \frac{1}{(n-1)!}\right)z^{n-1}.\end{aligned}$$

Điểm bất thường gần gốc tọa độ nhất là $z = -1$. Do đó bán kính hội tụ của chuỗi là $R = 1$.

Ví dụ 4. Khai triển hàm

$$f(z) = \frac{z^2 - 2z + 19}{(z-3)^2(2z+5)}$$

thành chuỗi Taylor với tâm tại điểm $a = 0$ và chỉ ra bán kính hội tụ của chuỗi thu được.

Giải. Vì $f(z)$ là phân thức hữu tỷ thực sự nên ta có thể biểu diễn nó dưới dạng tổng các phân thức tối giản:

$$f(z) = \frac{1}{2z+5} + \frac{2}{(z-3)^2}.$$

Tiếp theo ta có

$$\frac{1}{2z+5} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{1+\frac{2z}{5}} = \sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{2^n}{5^{n+1}} z^n.$$

Vì điểm $z = -\frac{5}{2}$ là điểm bất thường gần gốc tọa độ nhất nên bán kính hội tụ R_1 của chuỗi thu được là $R_1 = \frac{5}{2}$.

Để khai triển hàm $\frac{2}{(z-3)^2}$ thành chuỗi Taylor tại lân cận điểm $a = 0$ ta sẽ áp dụng hệ quả của định lý Weierstrass. Ta có

$$\left(\frac{2}{z-3}\right)' = -\frac{2}{(z-3)^2}$$

$$\frac{2}{z-3} = -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{3}} = -2 \sum_{n \geq 0} \frac{1}{3^{n+1}} z^n, \quad |z| < 3.$$

và do đó

$$\frac{2}{(z-3)^2} = 2 \sum_{n \geq 1} \frac{nz^{n-1}}{3^{n+1}} = 2 \sum_{n \geq 0} \frac{(n+1)z^n}{3^{n+2}}, \quad |z| < 3.$$

Cộng các chuỗi thu được ta có

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} \left[(-1)^n \frac{2^n}{5^{n+1}} + \frac{2(n+1)}{3^{n+2}} \right] z^n, \quad |z| < \frac{5}{2}.$$

Ví dụ 5. Khai triển nhánh logarit nhận giá trị $2\pi i$ tại điểm $z_0 = 1$ thành chuỗi Taylor trong lân cận điểm $a = 2$.

Giải. Trước hết ta cần xác định nhánh nào (trong vô số nhánh của hàm logarit) là nhánh thỏa mãn điều kiện của bài toán. Ta có

$$\begin{aligned} \ln z &= \ln[2 + (z-2)] = \ln \left\{ 2 \left[1 + \frac{z-2}{2} \right] \right\} \\ &= \ln 2 + \ln \left(1 + \frac{z-2}{2} \right). \end{aligned}$$

Từ đó suy rằng

$$\ln z = \ln 2 + \ln \left(1 + \frac{z-2}{2}\right) + 2\pi i$$

là nhánh cần tìm. Nhánh này chỉnh hình trong miền $\overline{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{R}^-$. Vì $\text{dist}(2; \partial D) = 2$ nên trong hình tròn $\{z : |z-2| < 2\}$ theo IV nhánh được chọn khai triển được thành chuỗi Taylor dạng

$$\ln z = \ln 2 + 2\pi i + \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n2^n} (z-2)^n,$$

với bán kính hội tụ $R = 2$.

Ví dụ 6. Khai triển hàm $f(z) = \sqrt[3]{z}$, $\sqrt[3]{-8} = -2$ thành chuỗi Taylor trong lân cận điểm $a = -8$.

Giải. Như trong ví dụ 5 ta có

$$\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{-8 + (z+8)} = \sqrt[3]{-8} \left[1 - \frac{z+8}{8}\right]^{1/3}$$

và do đó nhánh thỏa mãn điều kiện bài toán là

$$f(z) = -2 \left(1 - \frac{z+8}{8}\right)^{1/3}.$$

Tiếp theo, áp dụng công thức V ta có

$$f(z) = -2 \left(1 - \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{3}\right) \frac{1}{8^n} (z+8)^n\right)$$

Vì $z = 0$ là điểm bất thường của hàm gần điểm $a = -8$ nhất nên $R = \text{dist}(0; -8) = 8$.

Định lý 4.1.8. Giả sử chuỗi các hàm chỉnh hình $\sum_{k \geq 1} u_k(z)$ hội tụ đều trong hình tròn $S(a; R) = \{z : |z-a| < R\}$ đến tổng $f(z)$:

$$f(z) = \sum_{k \geq 1} u_k(z) \quad (4.13)$$

Khi đó các hệ số Taylor $a_n(f)$ của hàm $f(z)$ xác định bởi (4.13) là bằng các tổng của các hệ số Taylor cùng số hiệu $a_n(u_k)$ của các hàm $u_k(z)$, tức là

$$a_n(f) = \sum_{k \geq 1} a_n(u_k). \quad (4.14)$$

Chứng minh. Tính chỉnh hình của hàm tổng $f(z)$ được suy ra từ định lý Weierstrass (4.1.3). Cũng theo định lý Weierstrass ta có

$$f^{(n)}(z) = \sum_{k \geq 1} u_k^{(n)}(z)$$

Thay $z = a$ ta thu được

$$\frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \sum_{k \geq 1} \frac{u_k^{(n)}(a)}{n!}$$

hay là

$$a_n(f) = \sum_{k \geq 1} a_n(u_k).$$

□

Ta xét ví dụ sau đây.

Ta xét tổng của chuỗi hàm

$$F(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{1 - z^n}.$$

Trước hết ta nhận xét rằng các số hạng của chuỗi đều là những hàm chỉnh hình trong hình tròn đơn đơn vị.

Ta cần chứng minh rằng chuỗi đã cho hội tụ đều trên từng compắc của hình tròn đơn vị U . Thật vậy, nếu K là tập hợp đóng trong U và $\delta > 0$ là khoảng cách từ K đến đường tròn đơn vị thì

$$|z| \leq 1 - \delta = \rho < 1 \quad \forall z \in K.$$

Do đó

$$\left| \frac{z^n}{1-z^n} \right| \leq \frac{\rho^n}{1-\rho^n} \leq \frac{\rho^n}{1-\rho}.$$

Nhưng vì chuỗi $\sum_{n \geq 0} \frac{\rho^n}{1-\rho}$ hội tụ, nên chuỗi đã cho hội tụ đều trên K .

Để xác định hệ số Taylor của z^k trong khai triển Taylor của hàm $f(z)$ ta cần cộng các hệ số Taylor của z^k trong mọi khai triển

$$\sigma_n = \frac{z^n}{1-z^n} = z^n + z^{2n} + z^{3n} + \dots$$

Ta ký hiệu hệ số Taylor của σ_n là $A_k(\sigma_n)$. Ta có

$$A_k(\sigma_n) = \begin{cases} 1, & \text{nếu } k \text{ chia hết cho } n, \\ 0, & \text{nếu } k \text{ không chia hết cho } n. \end{cases}$$

Do đó hệ số cần tìm của z^k bằng tổng các đơn vị với số lượng bằng số các ước tự nhiên của số k . Nếu ta ký hiệu $\varphi(k)$ là số đó, thì $\varphi(1) = 1$; $\varphi(2) = 2$; $\varphi(3) = 2$; $\varphi(4) = 3, \dots$ và ta có

$$F(z) = \sum_{k \geq 1} \varphi(k) z^k$$

Đó là khai triển muốn tìm. Hàm $F(z)$ chỉnh hình trong hình tròn đơn vị (theo định lý Weierstrass) nên chuỗi đang xét hội tụ trong hình tròn đơn vị.

Định lý 4.1.9. *Giả sử $f(z)$ là hàm hợp của z*

$$f(z) = F[\varphi(z)] = F(w), \quad w = \varphi(z)$$

và các điều kiện sau đây được thỏa mãn

1⁺. hàm $w = \varphi(z)$ chỉnh hình trong lân cận điểm $z = a$;

2⁺. hàm $F(w)$ chỉnh hình trong lân cận điểm $w = b = \varphi(a)$.

Khi đó: 1) hàm $f = F \circ \varphi$ chỉnh hình tại lân cận điểm $z = a$;

2) Khai triển Taylor của hàm $f(z)$ với tâm tại điểm $z = a$ thu được bằng phép thế chuỗi theo lũy thừa của $z - a$ đối với hàm $\varphi(z)$ vào chuỗi theo lũy

thừa của $w - b$ đối với hàm $F(w)$; ở đây các hệ số Taylor của hàm $f(z)$ được tìm bằng cách thực hiện các phép nhân chuỗi và cộng các hệ số của các lũy thừa cùng bậc.

Chứng minh. Giả sử

$$\varphi(z) = b + \sum_{m \geq 1} a_m (z - a)^m, \quad |z - a| < r \quad (4.15)$$

$$F(w) = \sum_{n \geq 0} A_n (w - b)^n, \quad |w - b| < R. \quad (4.16)$$

trong đó các hệ số a_m , A_n đã biết.

Vì $\varphi(z) \rightarrow b$ khi $z \rightarrow a$ nên $\exists \rho = \rho(R)$, $0 < \rho \leq r$ sao cho khi $|z - a| < \rho$ thì

$$|\varphi(z) - b| < R.$$

Do đó khi $|z| < \rho$, điểm $w = \varphi(z)$ thuộc hình tròn hội tụ của chuỗi (4.16). Vì $F(w)$ chỉnh hình trong hình tròn $|w - b| < R$, còn $\varphi(z)$ chỉnh hình trong hình tròn $|z - a| < \rho$ và giá trị của nó thuộc hình tròn $|w - b| < R$ nên hàm hợp

$$f(z) = F[\varphi(z)]$$

chỉnh hình trong hình tròn $|z - a| < \rho$. Từ đó theo định lý Cauchy - Taylor hàm $f(z)$ khai triển được thành chuỗi lũy thừa trong hình tròn $|z - a| < \rho$. Ta cần tìm hệ số của chuỗi đó.

Xét khai triển

$$\begin{aligned} f(z) = F[\varphi(z)] &= \sum_{n \geq 0} A_n [\varphi(z) - b]^n \\ &= \sum_{n \geq 0} A_n \left\{ \sum_{m \geq 1} a_m (z - a)^m \right\}^n \end{aligned} \quad (4.17)$$

hội tụ khi $|z - a| < \rho$.

Để có thể dựa vào tính hội tụ đều của nó ta thay ρ bởi số không lớn hơn nó là $0 < \rho' \leq \rho$ sao cho trong hình tròn $|z - a| < \rho'$ thì

$$|\varphi(z) - b| < \frac{R}{2}.$$

Vì chuỗi (4.16) hội tụ đều khi $|w - b| < \frac{R}{2}$ nên chuỗi (4.17) hội tụ đều khi $|z - a| < \rho'$. Do đó hệ số của z^k trong khai triển Taylor của $f(z)$ có thể tìm được bằng cách lấy tổng các hệ số cùng số hiệu trong khai triển của mỗi hàm $u_n(z) = A_n[\varphi(z) - b]^n$. Để tìm khai triển Taylor đối với $u_n(z)$ ta cần thực hiện phép nhân liên tiếp các chuỗi $\sum_{m \geq 1} a_m(z - a)^m$ với chính nó. Chuỗi $\sum_{n \geq 0} u_n(z)$ hội tụ đều và gồm từ các hàm chỉnh hình nên có thể áp dụng định lý 4.1.6. Từ đó và từ tính duy nhất của khai triển hàm thành chuỗi lũy thừa suy ra cách xác định các hệ số Taylor của hàm f . Định lý được chứng minh. \square

Ví dụ. Tìm bốn số hạng đầu tiên của khai triển hàm $f(z) = e^{\sin z}$ thành chuỗi Taylor với tâm $a = 0$.

Giải. Thay $t = \sin z$ vào đẳng thức

$$e^t = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \cdots = \frac{t^n}{n!} + \cdots$$

ta thu được

$$e^{\sin z} = 1 + \frac{\sin z}{1!} + \frac{\sin^2 z}{2!} + \cdots + \frac{\sin^n z}{n!} + \cdots$$

Từ đó ta có

$$\begin{aligned} e^{\sin z} &= 1 + \left(z - \frac{z^3}{3!} + \cdots \right) + \frac{1}{2!} \left(z - \frac{z^3}{3!} + \cdots \right)^2 \\ &\quad + \frac{1}{3!} \left(z - \frac{z^3}{3!} + \cdots \right)^3 + \cdots = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 1 + \left(z - \frac{z^3}{3!} + \dots\right) + \frac{1}{2!}z^2\left(1 - \frac{z^2}{3!} + \dots\right)^2 \\
&\quad + \frac{1}{3!}z^2\left(1 - \frac{z^2}{3!} + \dots\right)^3 + \dots \\
&= 1 + z - \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{3!}z^3 + \dots \\
&= 1 + z + \frac{1}{2}z^2 + 0 + \dots
\end{aligned}$$

Định lý 4.1.10. *Giả sử cho hai chuỗi lũy thừa*

$$\varphi(z) = \sum_{n \geq 0} a_n(z-a)^n, \quad \psi(z) = \sum_{n \geq 0} b_n(z-a)^n$$

với bán kính hội tụ tương ứng là R_1 và R_2 . Giả sử $\psi(z)$ không triệt tiêu trong hình tròn $|z-a| < \rho$, $\rho > 0$; ký hiệu $r = \min(R_1, R_2, \rho)$. Khi đó hàm

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$$

chỉnh hình trong hình tròn $|z-a| < r$ và nếu

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n(z-a)^n$$

thì

$$\begin{aligned}
c_0 &= \frac{a_0}{b_0}, \\
c_n &= \frac{1}{b_0^{n+1}} \begin{vmatrix} b_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_0 \\ b_1 & b_0 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ b_2 & b_1 & b_0 & \dots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-3} & \dots & b_0 & a_{n-1} \\ b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & \dots & b_1 & a_n \end{vmatrix}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.18)
\end{aligned}$$

Chứng minh. Tính chỉnh hình của hàm $f(z)$ trong hình tròn đã nêu được rút ra từ quy tắc đạo hàm đối với phân thức. Ta nhận xét rằng từ điều kiện

của định lý suy rằng $b_0 \neq 0$ vì trong trường hợp ngược lại $\psi(a) = 0$ và do đó $\rho = 0$ và ta đi đến mâu thuẫn. Tiếp theo, từ đồng nhất thức $\frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = f(z)$ suy rằng

$$\sum_{n \geq 0} a_n(z-a)^n = \sum_{n \geq 0} c_n(z-a)^n \cdot \sum_{n \geq 0} b_n(z-a)^n.$$

Vì các chuỗi ở vế phải hội tụ tuyệt đối trong hình tròn $|z-a| < r$ nên trong hình tròn đó ta có thể thực hiện phép nhân các chuỗi đó. Ta thu được

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} a_n(z-a)^n &= \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{k=0}^n b_{n-k} c_k \right) (z-a)^n \\ &= c_0 b_0 + (c_0 b_1 + c_1 b_0)(z-a) \\ &\quad + (c_0 b_2 + c_1 b_1 + c_2 b_0)(z-a)^2 + \dots \\ &\quad + (c_0 b_n + c_1 b_{n-1} + \dots + c_n b_0)(z-a)^n + \dots \end{aligned}$$

Do tính duy nhất của khai triển hàm thành chuỗi lũy thừa ta có thể xác định các hệ số c_0, c_1, \dots bởi hệ sau

$$\begin{array}{rcl} b_0 c_0 & & = a_0, \\ b_1 c_0 + b_0 c_1 & & = a_1, \\ b_2 c_0 + b_1 c_1 + b_0 c_2 & & = a_2, \\ \dots & \dots & \dots \\ b_n c_0 + b_{n-1} c_1 + b_{n-2} c_2 + \dots + b_0 c_n & = & a_n, \\ \dots & \dots & \dots \end{array}$$

Đó là hệ vô hạn các phương trình tuyến tính đối với các hệ số chưa biết $c_0, c_1, \dots, c_n, \dots$. Từ hệ đó ta có thể xác định hệ số $c_0, c_1, \dots, c_n, \dots$ với số hiệu cho trước bất kỳ. Thật vậy, hệ $n+1$ phương trình đầu với các ẩn c_0, c_1, \dots, c_n có định thức bằng

$$\begin{vmatrix} b_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_1 & b_0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & \dots & b_0 \end{vmatrix} = b_0^{n+1} \neq 0 \quad (4.19)$$

Từ (4.19) và quy tắc Cramer ta thu được (4.18). \square

Ví dụ. Ta thực hiện phép chia chuỗi lũy thừa cho chuỗi lũy thừa. Xét hàm

$$f(z) = \frac{z}{e^z - 1}.$$

Vì z và $e^z - 1$ đều chỉnh hình $\forall z \in \mathbb{C}$ nên hàm $f(z)$ chỉnh hình $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0; \pm 2\pi i; \pm 4\pi i; \dots\}$. Vì

$$f(z) = \frac{z}{e^z - 1} = \frac{z}{\left(1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots\right) - 1} = \frac{1}{1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \dots} \quad (4.20)$$

nên sau khi cho $f(0) = 1$ ta có thể xem $f(z)$ chỉnh hình tại $z = 0$. Điểm bất thường gần $z = 0$ nhất là $z = 2\pi i$ (và $z = -2\pi i$). Do đó trong hình tròn $|z| < 2\pi$ hàm $f(z)$ khai triển được thành chuỗi $a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n + \dots$. Dựa vào (4.20) ta có thể viết

$$1 = \left(1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \frac{z^3}{4!} + \dots\right) (a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots)$$

Chuỗi thu được sau phép nhân chuỗi với chuỗi ở vế phải đồng nhất bằng 1 (tức là bằng $1 + 0z + 0z^2 + \dots$)

$$\begin{aligned} a_0 &= 1, \\ a_1 + \frac{1}{2!}a_0 &= 0, \\ a_2 + \frac{1}{2!}a_1 + \frac{1}{3!}a_0 &= 0, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_n + \frac{1}{2!}a_{n-1} + \dots + \frac{1}{n!}a_1 + \frac{1}{(n+1)!}a_0 &= 0, \quad n \geq 1. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Từ (4.21) suy ra:

$$a_0 = 1, \quad a_1 = -\frac{1}{2}, \quad a_2 = \frac{1}{12}, \quad a_3 = 0, \quad a_4 = -\frac{1}{720}, \dots$$

và do đó khai triển có dạng

$$\frac{z}{e^z - 1} = 1 - \frac{z}{2} + \frac{z^2}{12} - \frac{z^4}{720} + \dots \quad (4.22)$$

Ta sẽ chứng tỏ rằng trong chuỗi thu được mọi hệ số với số hiệu lẻ (trừ ra a_1) đều bằng 0. Thật vậy từ (4.22) ta có

$$\frac{z}{e^z - 1} + \frac{z}{2} = 1 + \frac{z^2}{12} - \frac{z^4}{720} + \dots$$

Vế trái là hàm chẵn vì

$$\frac{z}{e^z - 1} + \frac{z}{2} = \frac{z}{2} \frac{e^z + 1}{e^z - 1} = \frac{z}{2} \cdot \frac{e^{\frac{z}{2}} + e^{-\frac{z}{2}}}{e^{\frac{z}{2}} - e^{-\frac{z}{2}}} = \frac{z}{2} \operatorname{cth} \frac{z}{2}.$$

Do đó khai triển Taylor của nó ở vế phải chỉ chứa các lũy thừa chẵn.

4.1.5 Các quan điểm khác nhau trong việc xây dựng lý thuyết hàm chỉnh hình

Khi xây dựng lý thuyết hàm chỉnh hình ta có thể xuất phát từ các định nghĩa tương đương nhau về hàm chỉnh hình trong miền D . Điều đó dựa trên cơ sở là lớp các hàm chỉnh hình trong miền D có thể được đặc trưng bởi những tính chất đặc biệt khác nhau nhưng tương đương nhau. Do vậy hệ thống trình bày lý thuyết hàm biến phức phụ thuộc nhiều vào việc chọn tính chất nào trong số đó làm định nghĩa xuất phát.

Sau đây là những tính chất quan trọng nhất đặc trưng cho tính chỉnh hình của hàm $f(z)$ trong miền D . Ở đây ta giả thiết D là miền đơn liên và ta ký hiệu $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z = x + iy$.

Tính chất C. Hàm $f(z)$ có đạo hàm $f'(z)$ tại mọi điểm của miền D .

Tính chất R. Trong miền D phần thực $u(x, y)$ và phần ảo $v(x, y)$ có các đạo hàm riêng cấp 1 liên tục và thỏa mãn các điều kiện Cauchy - Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Tính chất J. Giả thiết hàm $f(z)$ liên tục trong miền D . Tính chất J được phát biểu bởi một trong hai dạng tương đương sau.

(J_1) Với hai điểm a và b thuộc D bất kỳ, tích phân $\int_{\mathcal{L}(a,b)} f(z)dz$ lấy theo đường cong đo được $\mathcal{L}(a, b)$ đi từ điểm a đến điểm b là không phụ thuộc vào đường lấy tích phân $\mathcal{L}(a, b)$ mà chỉ phụ thuộc vào hàm $f(z)$, điểm đầu a và điểm cuối b của \mathcal{L} .

(J_2) Với đường cong đóng đo được bất kỳ \mathcal{L} nằm trong miền D tích phân $\int_{\mathcal{L}} f(z)dz$ lấy theo đường cong đó là bằng không.

Tính chất \mathcal{W} . Với mọi điểm $a \in D$ hàm $f(z)$ khai triển được thành chuỗi lũy thừa với tâm tại a , tức là: $\forall a \in D, \exists (A_n), A_n = A_n(a)$ sao cho chuỗi

$$\sum_{n \geq 0} A_n(z - a)^n$$

hội tụ trong hình tròn $\{z : |z - a| < R\}$ nào đó (bán kính hội tụ R phụ thuộc vào a) và có tổng bằng $f(z)$.

Ta có

Định lý 4.1.11. Các tính chất \mathcal{C} , \mathcal{R} , J và \mathcal{W} là tương đương với nhau.

Chứng minh. Ta cần chứng minh lược đồ sau đây

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \implies & \mathcal{R} \\ \uparrow & & \downarrow \\ \mathcal{W} & \Longleftarrow & J \end{array}$$

1⁺ Điều khẳng định $\mathcal{C} \implies \mathcal{R}$ được chứng minh trong định lý 6.3 (về điều kiện cần để hàm $f(z)$ là \mathbb{C} - khả vi) và định lý 11.14 về sự tồn tại đạo hàm mọi cấp của hàm chỉnh hình.

2⁺ Điều khẳng định $\mathcal{R} \implies J$ được chứng minh bởi định lý 10.3.

3⁺ Điều khẳng định $J \implies \mathcal{W}$ được chứng minh bởi định lý Cauchy - Taylor.

4⁺ Sau cùng, điều khẳng định $\mathcal{W} \implies \mathcal{C}$ được chứng minh trong định lý 6.9 về tính chỉnh hình của chuỗi lũy thừa trong hình tròn hội tụ của nó. \square

Xuất phát từ các quan điểm khác nhau như vậy nên các thuật ngữ được dùng cũng khác nhau. Từ định lý 4.1.11 các thuật ngữ sau đây được xem là đồng nghĩa

$$\begin{aligned} \text{“hàm chỉnh hình”} &\equiv \text{“hàm giải tích”} \equiv \\ &\equiv \text{“hàm đều”} \equiv \text{“hàm chính quy”} \end{aligned}$$

hoặc còn dùng thuật ngữ “hàm nguyên trong miền D ”. Ở đây, thuật ngữ hàm chỉnh hình được dùng đầu tiên bởi các học trò của Cauchy. Thuật ngữ “hàm giải tích” được dùng đầu tiên bởi Lagrange và sau đó bởi Weierstrass.

Trên thực tế O. Cauchy (1784 - 1857) đã định nghĩa hàm chỉnh hình bởi tính chất \mathcal{C} (dựa vào các tính chất khả vi của hàm) mặc dù khi chứng minh định lý tích phân Cauchy (công thức tích phân cơ bản I) ông đã thêm giả thiết có tính chất kỹ thuật là đạo hàm $f'(z)$ phải liên tục trong D . Nhưng điều đó đã được khắc phục bởi Goursat và Pringsheim về sau.

Cùng thời với Cauchy, nhà toán học Đức B. Riemann (1826 - 1866) đã xuất phát từ tính chất \mathcal{R} . Phương pháp này đưa đến sự khảo sát đồng thời cặp hàm điều hòa liên hợp u và v trong miền D liên hệ với nhau bởi điều kiện Cauchy - Riemann và xác định hàm chỉnh hình dưới dạng $f(z) = u(z) + iv(z)$.

Người tiếp theo xác lập cơ sở lý thuyết hàm biến phức theo một cách khác là K. Weierstrass (1815 - 1897). Weierstrass đã sử dụng tính khai triển được của hàm thành chuỗi lũy thừa (tức là tính chất \mathcal{W}) để làm định nghĩa.

Sau cùng, để thu được các tính chất cơ bản của hàm chỉnh hình và đặc biệt là thu được nhanh công thức tích phân Cauchy người ta đã sử dụng tính chất J . Người đầu tiên khảo sát các tính chất của hàm chỉnh hình dựa trên quan điểm này là Osgood: Hàm liên tục $f(z)$ trong miền đơn liên D được gọi là hàm chỉnh hình trong miền đó nếu với đường cong đóng đo được \mathcal{L} bất kỳ thuộc miền D thì tích phân $\int_{\mathcal{L}} f(z)$ lấy theo đường cong đó là bằng 0.

Bây giờ ta nêu ra một số ví dụ chứng minh một số tính chất của hàm

bằng những phương pháp khác nhau dựa trên các định nghĩa xuất phát đã nêu.

1. *Tổng của hai hàm chỉnh hình trong miền D là hàm chỉnh hình trong miền D .*

Chứng minh. Giả sử $f_1, f_2 \in \mathcal{H}(D)$.

(C). Nếu f_1 và f_2 khả vi tại điểm $z \in D$ tùy ý thì $f_1 + f_2$ cũng khả vi tại đó và tại đó nó có đạo hàm mọi cấp.

(R). Đặt $f_1(z) = u_1(x, y) + iv_1(x, y)$; $f_2(z) = u_2(x, y) + iv_2(x, y)$. Khi đó

$$f_1(z) + f_2(z) = [u_1(x, y) + u_2(x, y)] + i[v_1(x, y) + v_2(x, y)].$$

Vì mọi đạo hàm riêng cấp 1 của hàm u_1, u_2, v_1, v_2 tồn tại và liên tục nên các hàm $u_1 + u_2$ và $v_1 + v_2$ cũng có tính chất đó. Ngoài ra từ các điều kiện

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial y} = \frac{\partial v_1}{\partial y} \\ \frac{\partial u_1}{\partial y} = -\frac{\partial v_1}{\partial x} \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} \frac{\partial u_2}{\partial x} = \frac{\partial v_2}{\partial y} \\ \frac{\partial u_2}{\partial y} = -\frac{\partial v_2}{\partial x} \end{cases}$$

suy ra

$$\frac{\partial(u_1 + u_2)}{\partial x} = \frac{\partial(v_1 + v_2)}{\partial y}, \quad \frac{\partial(u_1 + u_2)}{\partial y} = -\frac{\partial(v_1 + v_2)}{\partial x},$$

tức là $f_1(z) + f_2(z)$ chỉnh hình theo định nghĩa R.

(J). Đối với đường cong đóng đo được Γ bất kỳ trong miền D ta có

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} f_1(z) dz = 0 \\ \int_{\Gamma} f_2(z) dz = 0 \end{aligned} \quad \implies \quad \int_{\Gamma} [f_1(z) + f_2(z)] dz = 0$$

tức là hàm $f_1 + f_2$ chỉnh hình theo định nghĩa J.

(W). Nếu các chuỗi lũy thừa

$$f_1(z) = \sum_{n \geq 0} a'_n (z - a)^n$$

và

$$f_2(z) = \sum_{n \geq 0} a_n''(z-a)^n$$

hội tụ trong lân cận của điểm a tùy ý nào đó của miền D thì chuỗi

$$f_1(z) + f_2(z) = \sum_{n \geq 0} (a_n' + a_n'')(z-a)^n$$

cũng hội tụ trong lân cận đó và hàm $f_1(z) + f_2(z)$ chỉnh hình theo định nghĩa (\mathcal{W}) . \square

2. Nếu $f_1, f_2 \in \mathcal{H}(D)$ thì $f_1 f_2 \in \mathcal{H}(D)$, $\frac{f_1}{f_2} \in \mathcal{H}(D)$, $f_2 \neq 0$ trong miền D .

Chứng minh. 1⁺ Việc chứng minh $f_1 f_2 \in \mathcal{H}(D)$ theo định nghĩa \mathcal{C} là không có gì khó khăn. Phép chứng minh theo định nghĩa \mathcal{W} (phép nhân chuỗi) hay định nghĩa \mathcal{R} tuy phức tạp nhưng đều dẫn đến kết quả mong muốn. Việc chứng minh tính chỉnh hình của $f_1 \cdot f_2$ bằng định nghĩa J tỏ ra không thích hợp.

2⁺ Để chứng minh $\frac{f_1}{f_2} \in \mathcal{H}(D)$ đơn giản hơn cả là dùng định nghĩa \mathcal{C} . Phép chứng minh dựa vào định nghĩa \mathcal{W} rất phức tạp: đó là phép chia chuỗi cho chuỗi theo phương pháp hệ số bất định (định lý 4.1.10). \square

3. Nếu hàm $W = \varphi(z)$ chỉnh hình tại điểm z_0 , còn hàm $f(w)$ chỉnh hình tại $w_0 = \varphi(z_0)$ thì hàm $f(\varphi(z))$ chỉnh hình tại điểm z_0 .

Chứng minh. Phép chứng minh dựa vào định nghĩa \mathcal{C} là hiển nhiên vì nó thu được từ quy tắc đạo hàm của hàm hợp. Nếu áp dụng định nghĩa (\mathcal{W}) thì phép chứng minh phức tạp hơn do phép thế chuỗi vào chuỗi (định lý 4.1.9). \square

4.2 Tính chất duy nhất của hàm chỉnh hình

Trong 3.2 ta đã thấy rằng hàm chỉnh hình hoàn toàn được xác định bởi các giá trị của nó trên biên của miền chỉnh hình. Bây giờ ta sẽ chứng tỏ rằng hàm chỉnh hình hoàn toàn được xác định bởi giá trị của nó trên dãy điểm tùy ý hội tụ đến điểm thuộc miền chỉnh hình. Tính chất “nội tại” này của hàm chỉnh hình được gọi là *tính chất duy nhất*.

4.2.1 Không điểm (0-điểm) của hàm chỉnh hình

Định nghĩa 4.2.1. Giả sử $f(z) \in \mathcal{H}(D)$. Khi đó

1⁺ Điểm $z = a \in D$ được gọi là *không-điểm* (0-điểm) của hàm $f(z)$ nếu $f(a) = 0$.

2⁺ Điểm $z = a \in D$ được gọi là *không-điểm cấp m* của hàm $f(z)$ nếu

$$\begin{aligned} f(a) = f'(a) = \dots = f^{(m-1)}(a) = 0, \\ f^{(m)}(a) \neq 0. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Nếu $m = 1$ thì $z = a$ gọi là không-điểm cấp 1 hay *không-điểm đơn* của hàm $f(z)$.

Từ định lý Cauchy-Taylor suy rằng trong lân cận $\mathcal{U}(a, \delta)$ của không điểm a của hàm f ta có

$$f(z) = \frac{f^{(m)}(a)}{m!}(z-a)^m + \frac{f^{(m+1)}(a)}{(m+1)!}(z-a)^{m+1} + \dots$$

hay là

$$f(z) = (z-a)^m \varphi(z)$$

trong đó

$$\varphi(z) = \frac{f^{(m)}(a)}{m!} + \frac{f^{(m+1)}(a)}{(m+1)!}(z-a) + \dots$$

là hàm chỉnh hình trong lân cận $\mathcal{U}(a, \delta)$ và $\varphi(a) = \frac{f^{(m)}(a)}{m!} \neq 0$.

Ta có tiêu chuẩn sau đây để xác định không-điểm của hàm chỉnh hình.

Định lý 4.2.1. Giả sử $f \in \mathcal{H}(D)$ và $a \in D$. Khi đó điểm $z = a$ là không-điểm cấp m của hàm f khi và chỉ khi tại lân cận của điểm a hàm f thỏa mãn hệ thức

$$f(z) = (z - a)^m \varphi(z),$$

trong đó hàm φ chỉnh hình tại điểm a và $\varphi(a) \neq 0$.

Chứng minh. 1. Giả sử điểm a là không-điểm cấp m của hàm f . Theo định lý Cauchy-Taylor ta có:

$$\begin{aligned} f(z) &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(z - a) + \cdots + \frac{f^{(m-1)}(a)}{(m-1)!}(z - a)^{m-1} \\ &\quad + \frac{f^{(m)}(a)}{m!}(z - a)^m + f_1(z)(z - a)^{m+1}, \end{aligned}$$

trong đó

$$f_1(z) = \frac{f^{(m+1)}(a)}{(m+1)!} + \frac{f^{(m+2)}(a)}{(m+2)!}(z - a) + \cdots$$

chỉnh hình tại điểm a . Nhưng $z = a$ là không-điểm cấp m nên $f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(m-1)}(a) = 0$ và do đó

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{f^{(m)}(a)}{m!}(z - a)^m + f_1(z)(z - a)^{m+1} \\ &= (z - a)^m \left[\frac{1}{m!}f^{(m)}(a) + f_1(z)(z - a) \right]. \end{aligned}$$

Đặt $\varphi(z) = \left[\frac{1}{m!}f^{(m)}(a) + f_1(z)(z - a) \right]$ và nhận xét rằng $\varphi(a) = \frac{f^{(m)}(a)}{m!} \neq 0$. Từ đó suy ra điều khẳng định của định lý.

2. Bây giờ giả sử

$$f(z) = (z - a)^m \varphi(z).$$

Áp dụng công thức Leibnitz đối với đạo hàm cấp cao của tích các hàm

$$(uv)^{(m)} = u^{(m)}v + C_m^1 u^{(m-1)}v' + \cdots + C_m^{m-1} u'v^{(m-1)} + uv^{(m)}$$

và đặt $u = (z - a)^m$, $v = \varphi(z)$ ta có

$$f(z) = (z - a)^m \varphi(z) \Rightarrow f(a) = 0;$$

$$f'(z) = m(z - a)^{m-1} \varphi(z) + (z - a)^m \varphi'(z) \Rightarrow f'(a) = 0;$$

... ..

$$\begin{aligned} f^{(m-1)}(z) &= m(m-1) \cdots 2(z-a) \varphi(z) + C_{m-1}^1 m(m-1) \cdots 3(z-a)^2 + \cdots \\ &+ (z-a)^m \varphi^{(m-1)}(z), \Rightarrow f^{(m-1)}(a) = 0. \end{aligned}$$

Nhưng

$$\begin{aligned} f^{(m)}(z) &= m! \varphi(z) + C_m^1 m(m-1) \cdots 2(z-a) \varphi'(z) + \cdots \\ &+ (z-a)^m \varphi^{(m)}(z) \Rightarrow f^{(m)}(a) = m! \varphi(a) \neq 0 \end{aligned}$$

và đó là điều phải chứng minh. \square

Ví dụ

1) Mọi điểm $z_k = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ đều là không-điểm đơn của hàm $f(z) = \sin z$ vì $f(z_k) = \sin z_k = \sin k\pi = 0$ và $f'(z_k) = \cos z_k = \cos k\pi = (-1)^k \neq 0$.

2) Điểm $z = 0$ là không-điểm cấp 4 của hàm $f(z) = e^{z^2} - 1 - z^2$. Thật vậy, khai triển hàm đã cho thành chuỗi Taylor tại lân cận điểm $z = 0$

$$\begin{aligned} f(z) &= e^{z^2} - 1 - z^2 = \left(1 + \frac{z^2}{1!} + \frac{z^4}{2!} + \cdots + \frac{z^{2n}}{n!} + \cdots \right) - 1 - z^2 \\ &= \frac{z^4}{2!} + \frac{z^6}{3!} + \cdots + \frac{z^{2n}}{n!} + \cdots \\ &= z^4 \underbrace{\left[\frac{1}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \cdots + \frac{z^{2n-4}}{n!} + \cdots \right]}_{\varphi(z)} = z^4 \varphi(z). \end{aligned}$$

Từ đó suy rằng $z = 0$ là không-điểm cấp 4 của hàm đã cho.

3) Tìm cấp của không-điểm $z = 0$ đối với hàm

$$f(z) = \frac{z^8}{z - \sin z}.$$

Giải. Sử dụng khai triển hàm $\sin z$ thành chuỗi Taylor tại lân cận điểm $z = 0$, ta thu được

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{z^8}{z - \sin z} = \frac{z^8}{z - \left[z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots \right]} \\ &= \frac{z^8}{\frac{z^3}{3!} - \frac{z^5}{5!} + \dots} = z^5 \frac{1}{\frac{1}{3!} - \frac{z^2}{5!} + \dots}. \end{aligned}$$

Đặt

$$\varphi(z) = \frac{1}{\frac{1}{3!} - \frac{z^2}{5!} + \dots}$$

khi đó $f(z) = z^5 \varphi(z)$, trong đó $\varphi(z)$ là hàm chỉnh hình tại điểm $z = 0$ (tại sao?) và $\varphi(0) = 6 \neq 0$. Do vậy $z = 0$ là không-điểm cấp 5 của hàm $f(z)$.

4.2.2 Tính chất duy nhất của hàm chỉnh hình

Một hiện tượng rất đặc biệt là lớp hàm mà ta đã tách ra từ tập hợp các hàm biến phức tổng quát bằng điều kiện C -khả vi tức là lớp các hàm chỉnh hình $\mathcal{H}(D)$ mang một tính chất nội tại rất chặt chẽ. Tính chất nội tại đó cho phép ta đưa ra một kết luận xác định về dáng điệu của hàm ấy trong miền con đủ bé thuộc miền D . Ta có định lý sau đây mô tả tính chất đó gọi là *định lý duy nhất*.

Định lý 4.2.2. *Nếu hàm $f(z)$ chỉnh hình trong miền D và triệt tiêu trên tập hợp vô hạn $E \subset D$ nào đó có ít nhất một điểm tụ nằm trong D thì*

$$f(z) = 0 \quad \forall z \in D.$$

Chứng minh. I. Đầu tiên ta xét trường hợp tập hợp E có điểm tụ hữu hạn $a \in D$. Phép chứng minh được chia thành các bước sau.

1⁺ Hàm f có khai triển Taylor

$$f(z) = a_1(z - a) + a_2(z - a)^2 + \dots \quad (4.24)$$

Thật vậy, vì hàm f liên tục tại điểm a nên $f(a) = 0$. Tiếp đó, vì f chỉnh hình tại điểm a nên nó khai triển được thành chuỗi Taylor tại lân cận điểm a và do $f(a) = 0$ nên ta có (4.24).

2^+ Ta chứng minh rằng $a_k = 0 \quad \forall k = 1, 2, \dots$. Giả sử ngược lại: tồn tại những hệ số khác 0. Giả sử a_m là hệ số khác 0 với số hiệu nhỏ nhất, tức là $a_1 = a_2 = \dots = a_{m-1} = 0, a_m \neq 0$. Khi đó

$$f(z) = (z - a)^m [a_m + a_{m+1}(z - a) + \dots], \quad a_m \neq 0. \quad (4.25)$$

Từ (4.25) suy rằng trong lân cận thủng đủ bé của điểm $z = a$ cả hai thừa số của vế phải (4.25) đều khác 0. Nhưng điều đó lại mâu thuẫn với giả thiết rằng $z = a$ là điểm tụ của 0-điểm của hàm chỉnh hình f . Như vậy giả thiết của ta là sai và $a_k = 0 \quad \forall k \geq 1$. Nhưng khi đó $f(z) \equiv 0$ trong lân cận nào đó của điểm a với bán kính bằng khoảng cách từ điểm a đến biên của miền D .

3^+ Bây giờ ta chứng minh rằng $f(z) \equiv 0$ trong toàn miền D . Giả sử ngược lại: tại điểm $z = b$ hữu hạn nào đó $f(b) \neq 0, b \in D$. Ta nối điểm a với điểm b bởi đường cong $\ell = \ell(a, b) \subset D$ và ký hiệu $\delta = \text{dist}(\ell, \partial D)$ là khoảng cách từ đường cong ℓ đến biên $\partial D, \delta > 0$. Ta phủ đường cong ℓ bởi các hình tròn bán kính δ sao cho hình tròn thứ nhất có tâm tại a , hình tròn tiếp theo có tâm tại giao điểm của đường tròn thứ nhất với đường cong ℓ, \dots . Theo chứng minh trong 2^+ ta có $f(z) \equiv 0$ trong hình tròn thứ nhất và tâm của hình tròn thứ hai là điểm tụ của các không-điểm của hàm $f(z)$. Do vậy $f(z) \equiv 0$ trong hình tròn thứ hai. Lập luận tương tự ta thu được $f(z) \equiv 0$ trong mọi hình tròn và đặc biệt là $f(b) = 0$. Trái với giả thiết. Như vậy $f(z) \equiv 0$ tại mọi điểm hữu hạn của miền D . Nếu hàm f chỉnh hình tại ∞ thì theo tính liên tục ta có $f(\infty) = 0$, tức là $f(z) \equiv 0$ trong D .

II. Trường hợp tập E có điểm tụ duy nhất tại ∞ . Ta xét hàm $f(w) = f\left(\frac{1}{w}\right)$. Hàm này chỉnh hình trong miền D^* là ảnh của miền D qua ánh xạ $w = \frac{1}{z}$. Tập hợp E có ảnh qua ánh xạ $w = \frac{1}{z}$ là tập hợp E^* nào đó có điểm tụ $w = 0$ thuộc miền D^* . Lập luận như trên ta có: $F(w) = 0$ trong D^* . Do đó $f(z) \equiv 0$ trong D . Định lý được chứng minh hoàn toàn. \square

Hệ quả 4.2.1. (nguyên lý cô lập của 0-điểm hàm chỉnh hình)

Mọi 0-điểm của hàm chỉnh hình không đồng nhất bằng 0 đều cô lập, tức là đối với mỗi 0-điểm nằm trong D của hàm $f \not\equiv 0$ đều tồn tại lân cận mà trong đó hàm f không có một 0-điểm nào khác ngoài 0-điểm đó.

Chứng minh. Giả sử tồn tại 0-điểm $z = a$ của hàm $f \not\equiv 0$ mà trong lân cận bất kỳ của nó còn tồn tại các 0-điểm khác của f . Khi đó số 0-điểm đó là vô số và đối với chúng điểm $z = a$ là điểm tụ. Từ đó theo định lý duy nhất $f(z) \equiv 0$ trong D . Điều này mâu thuẫn với giả thiết rằng $f(z) \not\equiv 0$ trong D . \square

Hệ quả 4.2.2. Nếu hàm f chỉnh hình trong miền D và tại điểm $a \in D$ nào đó hàm f và mọi đạo hàm của nó đều triệt tiêu thì $f(z) \equiv 0$ trong D .

Chứng minh. Vì hàm f chỉnh hình tại điểm $a \in D$ nên trong lân cận nào đó của điểm a nó khai triển được thành chuỗi Taylor. Theo điều kiện của hệ quả ta có $f^{(n)}(a) = 0 \ \forall n \geq 0$ nên

$$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = 0 \quad \forall n \geq 0.$$

Điều đó cũng có nghĩa là $f(z) \equiv 0$ trong lân cận đó. Lấy lân cận này làm tập hợp E và áp dụng định lý duy nhất ta có $f(z) \equiv 0$ trong D . \square

Hệ quả 4.2.3. Nếu $f_1, f_2 \in \mathcal{H}(D)$ và $f_1(z) = f_2(z)$ trên tập hợp E nào đó nằm trong D và có điểm tụ thuộc D thì $f_1(z) \equiv f_2(z)$ trong D .

Chứng minh. Hệ quả 4.2.3 thu được bằng cách áp dụng định lý duy nhất cho hàm $f(z) = f_1(z) - f_2(z)$. \square

Nhận xét 4.2.1. Bên cạnh định lý duy nhất đã được chứng minh (còn gọi là định lý duy nhất trong) trong lý thuyết hàm chỉnh hình còn có các định lý duy nhất biên, trong đó tổng quát nhất và sâu sắc nhất là các định lý của N. Luzin và I. Privalov mà do phạm vi giáo trình ta sẽ không trình bày ở đây.

Nhận xét 4.2.2. Từ định lý vừa chứng minh ta cũng suy ra rằng mỗi không-điểm của hàm $f (\neq 0)$ đều có cấp hữu hạn. Thật vậy, từ định lý 4.1.1 và khai triển Taylor (4.24) suy rằng nếu không điểm của hàm chỉnh hình có “cấp vô hạn” thì

$$\lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z)}{(z-a)^n} = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

và do đó $f \equiv 0$ trong D .

Nhận xét 4.2.3. Tập hợp con compact $K \subset D$ bất kỳ chỉ chứa một số hữu hạn các không-điểm của hàm chỉnh hình f .

Nhận xét 4.2.4. Nếu tập hợp mọi không-điểm của hàm chỉnh hình f ($f \neq 0$), trong miền chỉnh hình D của nó không hữu hạn thì tập hợp đó chỉ có thể là tập đếm được. Thật vậy, ta ký hiệu \overline{D}'_n là hệ các miền đóng thuộc D thỏa mãn các điều kiện:

- a) $\overline{D}'_{n+1} \subset \overline{D}'_n$;
- b) $\text{dist}(\partial D, \partial \overline{D}'_n) = \frac{1}{n}$.

Trong mỗi miền đóng \overline{D}'_n hàm f chỉ có một số hữu hạn không-điểm vì trong trường hợp ngược lại, tồn tại giới hạn của các không điểm ấy và điểm giới hạn này thuộc D . Do đó $f(z) \equiv 0$ trong D theo định lý duy nhất. Từ nhận xét đó, dễ dàng suy ra rằng tập hợp các không điểm của hàm chỉnh hình là đếm được.

Nhận xét 4.2.5. Trong nhiều trường hợp, thay vì các không-điểm của hàm chỉnh hình ta sẽ xét A -điểm. Ta gọi z_0 là A -điểm của hàm f chỉnh hình trong miền D nếu $f(z_0) = A$, $A \in \mathbb{C}$. Trong trường hợp đặc biệt khi $A = 0$ thì z_0 là không-điểm của hàm f . Ta nhận xét rằng với mọi $A \neq \infty$, mọi A -điểm của hàm f đều là không-điểm của hàm $f(z) - A$. Do đó mọi quy luật tổng quát đã được xác lập đối với không-điểm của hàm chỉnh hình đều đúng với A -điểm của hàm chỉnh hình, trong đó $A \neq \infty$ là số phức tùy ý.

4.2.3 Nguyên lý thác triển giải tích

Định nghĩa 4.2.2. Giả sử các điều kiện sau đây được thỏa mãn: 1) hàm f chỉnh hình trong miền D ; 2) hàm F chỉnh hình trong miền $\tilde{D} \supset D$; 3) $F(z)|_D \equiv f(z)$, tức là $F(z) \equiv f(z)$ khi $z \in D$. Khi đó hàm $F(z)$ được gọi là *thác triển giải tích* của hàm $f(z)$ (từ miền D ra miền \tilde{D}).

Nói một cách khác: hãy mở rộng miền xác định của hàm f mà vẫn giữ nguyên tính chỉnh hình.

Tính chất quan trọng nhất của thác triển giải tích là tính duy nhất của nó. Định lý sau đây (gọi là *nguyên lý thác triển giải tích*) có một ý nghĩa rất cơ bản trong việc xây dựng khái niệm hàm giải tích.

Định lý 4.2.3. (nguyên lý thác triển giải tích)

Nếu phép thác triển giải tích hàm chỉnh hình vào miền xác định rộng hơn cho trước là có thể thực hiện được thì phép thác triển đó là duy nhất.

Chứng minh. Thật vậy, giả sử f_1 và g_1 là hai thác triển giải tích của hàm $f_0 \in \mathcal{H}(D)$ vào cùng một miền $D_1 \supset D$. Khi đó hàm

$$h(z) = f_1(z) - g_1(z)$$

chỉnh hình trong miền D_1 và bằng 0 trong miền D . Từ định lý duy nhất suy ra rằng $h(z) \equiv 0$ và $f_1(z) \equiv g_1(z)$ trong D_1 . \square

Nhận xét 4.2.6. Hiển nhiên bao giờ ta cũng mong muốn thác triển hàm chỉnh hình cho trước ra miền càng rộng hơn càng tốt và kết quả thác triển hàm chỉnh hình cho trước ra khắp nơi (tất nhiên nơi nào có thể) nói chung sẽ dẫn đến tính đa trị!

Về sau (xem chương V) ta thường cần đến sự mở rộng khái niệm thác triển giải tích vừa được trình bày.

Giả sử cho hai miền $D_1 \subset \overline{\mathbb{C}}$ và $D_2 \subset \overline{\mathbb{C}}$ và các hàm chỉnh hình tương ứng $f_1 \in \mathcal{H}(D_1)$ và $f_2 \in \mathcal{H}(D_2)$. Hai hàm $f_1(z)$ và $f_2(z)$ được gọi là *thác triển giải tích trực tiếp* của nhau nếu

- a) $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$,
 b) tồn tại miền $\delta_{12} \subset D_1 \cap D_2$ sao cho

$$f_1|_{\delta_{12}} = f_2|_{\delta_{12}}.$$

Theo định lý duy nhất hai hàm f_1 và f_2 phải bằng nhau khắp nơi trong thành phần liên thông $\Delta \supset \delta_{12}$ của giao $D_1 \cap D_2$. Nhưng giao $D_1 \cap D_2$ có thể không liên thông và do đó tại các thành phần liên thông khác đẳng thức

$$f_1(z) = f_2(z)$$

có thể không được thỏa mãn.

Bây giờ ta đưa ra khái niệm tổng quát hơn về *thác triển giải tích theo một xích miền*.

Giả sử cho xích miền

$$D_0, D_1, \dots, D_n$$

sao cho mọi giao $D_{i,i+1} = D_i \cap D_{i+1}$ đều không trống và đều là những miền với mọi i , $0 \leq i \leq n-1$. Giả sử tồn tại các hàm

$$f_0(z), f_1(z), \dots, f_n(z)$$

chỉnh hình trong các miền D_i , $i = 0, \dots, n$ tương ứng sao cho trong mọi miền $D_{i,i+1}$ ($i = 0, 1, \dots, n-1$) ta có đẳng thức

$$f_i \equiv f_{i+1}$$

với mọi $z \in D_{i,i+1}$ (tức là: f_{i+1} là thác triển giải tích trực tiếp của f_i từ D_i vào miền D_{i+1}). Khi đó, hàm $f_n(z)$ được gọi là *thác triển giải tích của hàm $f_0(z)$ theo xích miền D_0, D_1, \dots, D_n* (không có hình dung từ “trực tiếp”!).

Dễ dàng thấy rằng: thác triển giải tích hàm chỉnh hình theo một xích miền cho trước là duy nhất (tất nhiên, nếu phép thác triển đó có thể thực hiện được).

Rõ ràng là khi thác triển hàm chỉnh hình cho trước theo một xích miền ta có thể trở về miền xuất phát sau một số bước chuyển tiếp nào đó và nói chung lúc đó ta có thể thu được một hàm chỉnh hình khác.

Để kết thúc tiết này, ta tìm điều kiện để có thể thực hiện thác triển giải tích.

Ta có định lý sau đây.

Định lý 4.2.4. *Giả sử miền $D \subset \mathbb{C}$ và hàm $f \in \mathcal{H}(D)$. Hàm $f(z)$ có thể thác triển giải tích ra miền $D^* \supset D$ khi và chỉ khi tồn tại, dù chỉ là một, phép khai triển hàm đó thành chuỗi Taylor tại lân cận của điểm $a \in D$ nào đó với hình tròn hội tụ vượt ra khỏi biên giới của miền D .*

Chứng minh. 1^+ Giả sử hình tròn hội tụ $\mathcal{K}(a)$ của khai triển hàm $f(z)$ thành chuỗi Taylor

$$f(z) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(z-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n + \cdots \quad (4.26)$$

vượt ra khỏi biên giới của miền D . Ta ký hiệu

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_1(a) &= \{z \in D : |z-a| < \text{dist}(a, \partial D)\}, \\ G &= \mathcal{K}(a) \cap D. \end{aligned}$$

Xét đẳng thức (4.26). Vế trái của nó là hàm $f(z)$ chỉnh hình trong miền D ; còn vế phải là chuỗi lũy thừa biểu diễn hàm chỉnh hình trong hình tròn $\mathcal{K}(a)$. Theo định lý Cauchy-Taylor hai vế của (4.26) bằng nhau trong hình tròn $\mathcal{K}_1(a)$. Do đó theo định lý duy nhất chúng bằng nhau trong giao G mà tại đó cả hai vế đều chỉnh hình.

Ta thác triển hàm $f(z)$ ra khỏi miền D bằng cách đặt

$$f^*(z) = \begin{cases} f(z) & \text{nếu } z \in D, \\ S(z) & \text{nếu } z \in \mathcal{K}(a) \setminus G \end{cases}$$

trong đó $S(z)$ là tổng của chuỗi ở vế phải của (4.26).

Từ đó ta thu được hàm xác định trong $D \cap \mathcal{K}(a)$ đơn trị và chỉnh hình $f^*(z)$ tại đó. Như vậy nếu hình tròn hội tụ $\mathcal{K}(a)$ của khai triển Taylor của hàm $f(z)$ vượt ra khỏi biên giới của miền chỉnh hình của hàm thì có thể thác triển giải tích hàm đó ra miền $D \cup \mathcal{K}(a)$.

2⁺ Ngược lại, giả sử hàm $f(z)$ có thể thác triển ra miền rộng hơn $D^* \supset D$. Khi đó tồn tại hình tròn $\mathcal{K}(a^*)$ vượt ra khỏi biên giới miền D với tâm tại điểm $a^* \in D$. Theo định lý Cauchy-Taylor khai triển

$$f(z) = f(a^*) + \frac{f'(a^*)}{1!}(z - a^*) + \dots$$

hội tụ ít nhất là trong hình tròn $\mathcal{K}(a)$. Định lý được chứng minh. \square

Trên cơ sở định lý vừa chứng minh, quá trình thác triển giải tích có thể hình dung như sau.

Ta khai triển hàm thành chuỗi Taylor tại mỗi điểm trong của miền D . Có hai khả năng có thể xảy ra

(i) Nếu không một hình tròn hội tụ nào của các khai triển thu được vượt ra khỏi miền D thì hàm $f(z)$ không thác triển được ra khỏi miền D và miền D được gọi là *miền tồn tại tự nhiên* của hàm $f(x)$ (xem 5.1, 5.2).

(ii) Nếu có những hình tròn hội tụ vượt ra khỏi miền D thì theo định lý 4.2.3 ta thu được hàm chỉnh hình trong D^* là hợp của mọi hình tròn hội tụ và $D^* \supset D$.

Hàm đã được thác triển như vậy được khai triển thành chuỗi Taylor tại mỗi điểm $a \in D^* \setminus D$. Nếu không một hình tròn hội tụ nào của các khai triển mới vượt ra khỏi miền D^* thì D^* là miền tồn tại của hàm được xét. Trong trường hợp ngược lại ta lại áp dụng định lý trên và bằng các khai triển mới ta thác triển hàm vào miền $D^{**} \supset D^*$ trong đó D^{**} là hợp của các hình tròn hội tụ mới.

Quá trình thác triển đã chỉ ra được tiếp tục cho đến khi thu được miền $D(f)$ mà hàm f không thể thác triển giải tích tiếp được nữa.

4.2.4 Nguyên lý môđun cực đại

Đó là định lý sau đây

Định lý 4.2.5. *Giả sử hàm f chỉnh hình trong miền $D \subset \mathbb{C}$. Khi đó môđun của hàm không thể đạt giá trị cực đại của nó (và do đó không đạt giá trị lớn nhất) tại bất cứ điểm nào của miền đó, trừ trường hợp khi $f(z) \equiv \text{const}$ trong miền D .*

Chứng minh. Giả thiết rằng tại điểm $z_0 \in D$ ($z_0 \neq \infty$) môđun của hàm $f(z) \not\equiv \text{const}$ đạt cực đại của nó. Điều đó có nghĩa rằng trong lân cận nào đó $\mathcal{U}(z_0, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ của điểm z_0 hàm f thỏa mãn hệ thức $|f(z)| \leq |f(z_0)|$.

Đầu tiên ta cần chứng minh rằng $|f(z)| \equiv |f(z_0)|$ trong lân cận $\mathcal{U}(z_0, \varepsilon_0)$. Giả sử $\gamma(z_0, \varepsilon)$ là đường tròn tùy ý với bán kính $\varepsilon < \varepsilon_0$ và tâm tại z_0 . Theo định lý trung bình ta có

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + \varepsilon e^{it}) dt$$

và từ đó

$$|f(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + \varepsilon e^{it})| dt$$

hay là

$$0 \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [|f(z_0 + \varepsilon e^{it})| - |f(z_0)|] dt.$$

Trong bất đẳng thức trên biểu thức dưới dấu tích phân là không dương. Do đó bất đẳng thức chỉ có thể xảy ra trong trường hợp nếu

$$|f(z_0 + \varepsilon e^{it})| \equiv |f(z_0)|,$$

tức là $|f(z)| \equiv |f(z_0)|$ trên $\gamma(z_0, \varepsilon)$. Vì ε là tùy ý, $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ nên từ đó suy rằng $|f(z)| \equiv |f(z_0)|$ trong lân cận $\mathcal{U}(z_0, \varepsilon_0)$.

Tiếp theo ta cần chứng minh rằng $f(z) \equiv f(z_0)$ trong lân cận $\mathcal{U}(z_0, \varepsilon_0)$. Nếu $f(z_0) = 0$ thì $|f(z)| \equiv 0$ và do đó $f(z) \equiv 0$ trong lân cận $\mathcal{U}(z_0, \varepsilon_0)$. Nếu

$f(z_0) \neq 0$ thì $f(z) \neq 0$ trong lân cận đã nêu. Trong lân cận $\mathcal{U}(z_0, \varepsilon_0)$ ta xét hàm

$$F(z) = \ln f(z) = \ln |f(z)| + i \arg f(z) = u + iv.$$

Ở đây vì $|f(z)| \equiv |f(z_0)|$ với $z \in \mathcal{U}(z_0, \varepsilon_0)$ nên $u \equiv \text{const}$ (vì $u = \ln |f(z)| = \ln |f(z_0)|$). Theo điều kiện Cauchy-Riemann ta có

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{\partial u}{\partial y} \equiv 0, \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial x} \equiv 0, \end{aligned}$$

và từ đó ta có $v = \text{const}$ trong $\mathcal{U}(z_0, \varepsilon)$. Do vậy hàm $F(z) = \ln f(z) \equiv \text{const}$ và từ đó $f(z) \equiv \text{const}$ trong lân cận của điểm z_0 . Như vậy $f(z) \equiv \text{const}$ trong lân cận của điểm z_0 . Theo định lý duy nhất, ta có $f(z) \equiv \text{const}$ trong miền D . Đó là điều vô lý.

Bây giờ ta xét trường hợp miền $D \ni \infty$ và hàm $f(z)$ có môđun đạt cực đại tại ∞ . Trong trường hợp này ta xét hàm $F(w) = f\left(\frac{1}{w}\right)$. Hàm này chỉnh hình trong miền D^* thu được từ D qua ánh xạ $w = \frac{1}{z}$. Hàm $F(w)$ có cực đại tại điểm $w = 0$ và điểm $w = 0$ là điểm trong của D^* . Theo phần chứng minh trên ta có $F(w) = \text{const}$ trong D^* . Do đó $f(z) \equiv \text{const}$ trong miền D . \square

Ta lưu ý các hệ quả sau

Hệ quả 4.2.4. *Hàm f chỉnh hình trong miền D có môđun hằng số khi và chỉ khi bản thân hàm đó là hằng số trong miền đó.*

Chứng minh. Điều kiện đủ là hiển nhiên. Điều kiện cần được trình bày trong phần cuối của chứng minh định lý. \square

Hệ quả 4.2.5. *Nếu $f(z) \not\equiv \text{const}$ là hàm chỉnh hình trong miền D và liên tục trên \overline{D} thì giá trị cực đại của môđun của nó chỉ đạt được trên biên của miền D .*

Chứng minh. Thật vậy, theo định lý quen thuộc trong giải tích thực, hàm $|f(z)|$ (liên tục trong miền \overline{D}) nhận giá trị cực đại của nó tại điểm z_0 nào đó của miền \overline{D} . Theo nguyên lý môđun cực đại điểm z_0 không thể nằm trong D . Do đó điểm z_0 chỉ có thể nằm trên biên ∂D của miền D . \square

Hệ quả 4.2.6. Nếu $f(z) \not\equiv \text{const}$ là hàm chỉnh hình trong miền D và $f(z_0) \neq 0 \forall z \in D$ thì môđun của nó không thể đạt cực tiểu (và do đó không đạt giá trị bé nhất) ở trong miền D .

Chứng minh. Giả sử hàm $|f(z)|$ có cực tiểu tại điểm $z_0 \in D$. Ta xét hàm

$$F(z) = \frac{1}{f(z)}.$$

Đó là hàm chỉnh hình trong miền D . Hàm $|F(z)| = |f(z)|^{-1}$ có cực đại tại điểm $z_0 \in D$. Nhưng khi đó $F(z) \equiv \text{const}$ trong D và do đó $f(z) \equiv \text{const}$ trong D . Điều đó trái với giả thiết của hệ quả. \square

Hệ quả 4.2.7. Nếu hàm $f(z) \not\equiv \text{const}$ chỉnh hình trong miền D và liên tục trên \overline{D} và $|f(z)| \equiv \text{const}$ trên biên ∂D của miền D thì nó có ít nhất một 0-điểm nằm trong D .

Chứng minh. Giả sử ngược lại: hàm $f(z)$ không có 0-điểm trong D . Khi đó môđun $|f(z)|$ không có cả cực đại lẫn cực tiểu trong miền D . Vì $|f(z)|$ liên tục trên \overline{D} nên nó đạt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của nó tại các điểm biên của miền. Nhưng, theo giả thiết trên biên của miền D $|f(z)|$ là hàm hằng. Do đó giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trong miền \overline{D} là trùng nhau, tức là $|f(z)| \equiv \text{const}$ trong D . Điều đó có nghĩa là mỗi điểm của D đều là điểm cực đại đối với $|f(z)|$. Nhưng điều đó không thể xảy ra vì $f(z) \not\equiv \text{const}$. Như vậy hàm $f(z)$ có ít nhất một 0-điểm trong miền D . \square

Từ nguyên lý môđun cực đại của hàm chỉnh hình ta thu được định lý sau đây gọi là Bổ đề Schwarz⁴

⁴K. G. A. Schwarz (1843-1921) là nhà toán học Đức.

Định lý 4.2.6. Giả sử $f(z)$ là hàm chỉnh hình trong hình tròn đơn vị $\mathcal{U} = \{z : |z| < 1\}$ và thỏa mãn các điều kiện $f(0) = 0$ và $|f(z)| < 1 \forall z \in \mathcal{U}$.

Khi đó

1⁺ hàm $f(z)$ cũng thỏa mãn các điều kiện $|f'(0)| \leq 1$ và $|f(z)| \leq |z| \forall z \in \mathcal{U}$,

2⁺ nếu đẳng thức $|f(z)| = |z|$ thỏa mãn dù chỉ tại một điểm $z_0 \neq 0$, $|z_0| < 1$ hay $|f'(0)| = 1$ thì khắp nơi trong hình tròn \mathcal{U} hàm

$$f(z) = e^{i\alpha} z$$

trong đó α là hằng số thực.

Chứng minh. 1⁺ Giả sử r là số dương tùy ý < 1 . Khi đó

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=r} \frac{f(t)dt}{t-z}, \quad z \in \{|z| < r\}.$$

Từ giả thiết $f(0) = 0$ và hệ thức vừa viết ta có

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=r} \left(\frac{1}{t-z} - \frac{1}{t} \right) f(t) dt \\ &= \frac{z}{2\pi i} \int_{|t|=r} \frac{f(t)dt}{t(t-z)}, \end{aligned}$$

nghĩa là hàm

$$\frac{f(z)}{z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=r} \frac{f(t)dt}{t(t-z)}$$

chỉnh hình trong hình tròn $\{|z| < r\}$, trong đó

$$f'(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=r} \frac{f(t)}{t^2} dt.$$

Như vậy hàm

$$F(z) = \frac{f(z)}{z}; \quad F(0) = f'(0)$$

chỉnh hình trong hình tròn: $\{|z| < 1\}$.

Từ nguyên lý môđun cực đại suy ra rằng $\max |F|$ đạt được trên đường tròn $\{|z| = r_1\}$ trong đó r_1 là số dương tùy ý bé hơn r . Do đó, với $|z| < r_1$, theo giả thiết, ta có:

$$\left| \frac{f(z)}{z} \right| < \frac{1}{r_1} \quad \text{khi} \quad |z| = r_1.$$

Từ đó, đối với điểm z cố định bất kỳ thuộc hình tròn đơn vị, qua giới hạn khi $r_1 \rightarrow 1$ ta có

$$\left| \frac{f(z)}{z} \right| \leq 1$$

Đặc biệt là đối với $z = 0$ ta có $|F(0)| = |f'(0)| \leq 1$ và đối với điểm $z \neq 0$ thì $|F(z)| = \frac{|f(z)|}{|z|} \leq 1$ tức là $|f(z)| \leq |z|$.

2⁺ Nếu tại điểm $z_0 \neq 0$, $z_0 \in \mathcal{U}$ ta có đẳng thức $|f(z_0)| = |z_0|$ thì tại điểm đó $|F(z_0)| = \left| \frac{f(z_0)}{z_0} \right| = 1$. Điều đó có nghĩa là hàm $|F(z)|$ đạt cực đại = 1 tại điểm $z_0 \in \mathcal{U}$. Do đó theo nguyên lý môđun cực đại ta có $F(z) \equiv \text{const}$ trong $\overline{\mathcal{U}}$. Nếu có đẳng thức $|f'(0)| = 1$ thì bằng lý luận tương tự ta cũng kết luận rằng $F(z) \equiv \text{const}$. Trong cả hai trường hợp rõ ràng là $|F(z)| = 1$, tức là $F(z) = e^{i\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ và do đó $f(z) = e^{i\alpha}z$. Bổ đề Schwarz được chứng minh. \square

Về mặt hình học Bổ đề Schwarz có nghĩa như sau. Qua ánh xạ bất kỳ thực hiện bởi hàm chỉnh hình $w = f(z)$, $f(0) = 0$ biến hình tròn đơn vị \mathcal{U} lên miền D^* nằm trong hình tròn đơn vị khoảng cách từ ảnh $f(z_0)$ của điểm $z_0 \in \mathcal{U}$ đến điểm $w = 0$ không vượt quá khoảng cách từ chính điểm z đến điểm $z = 0$. Nếu có một điểm nào đó của \mathcal{U} mà khoảng cách từ đó đến gốc tọa độ bằng khoảng cách từ ảnh của nó đến gốc tọa độ thì miền D^* trùng với hình tròn đơn vị và lúc đó ánh xạ chỉ là phép quay.

4.3 Điểm bất thường cô lập

4.3.1 Chuỗi Laurent

Chuỗi hàm dạng

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-a)^n &= \cdots + \frac{a_{-m}}{(z-a)^m} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-a} \\
 &\quad + a_0 + a_1(z-a) + \cdots + a_n(z-a)^n + \cdots \\
 &= \sum_{n \geq 1} \frac{a_{-n}}{(z-a)^n} + \sum_{n \geq 0} a_n(z-a)^n \\
 &= \sum_{-\infty < n < \infty} a_n(z-a)^n
 \end{aligned} \tag{4.27}$$

được gọi là *chuỗi Laurent*⁵, trong đó $z = a$ là điểm cố định của mặt phẳng phức, $a_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}$ là các hệ số của chuỗi Laurent (*hệ số Laurent*) và phép lấy tổng được thực hiện theo các giá trị âm và dương của số hiệu n .

Ta xét hai chuỗi

$$a_0 + a_1(z-a) + \cdots + a_n(z-a)^n + \cdots \tag{4.28}$$

$$\frac{a_{-1}}{z-a} + \frac{a_{-2}}{(z-a)^2} + \cdots + \frac{a_{-m}}{(z-a)^m} + \cdots \tag{4.29}$$

Định nghĩa 4.3.1. 1) Chuỗi Laurent (4.27) hội tụ tại điểm $z \in \mathbb{C}$ nếu tại điểm đó các chuỗi (4.28) và (4.29) đồng thời hội tụ.

2) Nếu chuỗi Laurent hội tụ thì tổng của nó được định nghĩa như là tổng của hai tổng của chuỗi (4.28) và (4.29).

Chuỗi (4.28) là chuỗi lũy thừa thông thường nên nếu nó hội tụ thì miền hội tụ sẽ là hình tròn $S(R) = \{z : |z-a| < R\}$ (khi $R = 0$ chuỗi (4.28) chỉ hội tụ tại điểm a ; còn khi $R = \infty$ thì chuỗi hội tụ trong toàn mặt phẳng). Trong (4.29) ta thay $\frac{1}{z-a} = t$ và thu được chuỗi lũy thừa

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} t^n. \tag{4.30}$$

⁵P. Laurent (1813-1854) là nhà toán học Pháp.

Nếu chuỗi (4.30) hội tụ thì miền hội tụ sẽ là hình tròn

$$S(r_1) = \left\{ t : |t| < r_1 = \frac{1}{r} \right\}.$$

Do đó chuỗi (4.29) hội tụ trong miền $\{z : |z - a| > r\}$. Nếu điều kiện sau đây được thỏa mãn

$$r < R$$

thì chuỗi (4.27) hội tụ trong miền

$$\mathcal{V} = \left\{ z \in \mathbb{C} : r < |z - a| < R, r < R \right\}.$$

Đó là vành tròn với tâm tại điểm a .

Tại mỗi điểm nằm ngoài vành tròn đó chuỗi Laurent (4.27) phân kỳ do một trong hai chuỗi (4.28) và (4.29) phân kỳ. Như vậy nếu thỏa mãn điều kiện $r < R$ thì miền hội tụ của chuỗi (4.27) là vành tròn. Tại các điểm nằm trên biên của vành tròn \mathcal{V} chuỗi (4.27) có thể hội tụ tại những điểm này nhưng phân kỳ tại các điểm khác. Nếu $r > R$ thì các chuỗi (4.28) và (4.29) không có miền hội tụ chung và do vậy chuỗi (4.27) không hội tụ tại bất cứ điểm nào của mặt phẳng phức.

Nhận xét 4.3.1. Từ định lý Abel (định lý 4.6) suy rằng trong mọi vành tròn đóng $r < r_1 \leq |z - a| \leq R_1 < R$ nằm trong vành tròn \mathcal{V} chuỗi Laurent hội tụ đều và theo định lý Weierstrass (định lý 12.3) tổng của chuỗi Laurent (4.27) là hàm chỉnh hình trong vành tròn \mathcal{V} . Đồng thời, chuỗi có thể đạo hàm và tích phân từng số hạng một số lần tùy ý.

Trong trường hợp riêng có thể xảy ra trường hợp $r = 0$ hay $R = \infty$. Từ sự lập luận ở trên suy rằng nếu trong chuỗi chỉ có một số hữu hạn số hạng với lũy thừa âm thì $r = 0$ và nếu chỉ có một số hữu hạn số hạng với lũy thừa dương thì $R = \infty$.

Định lý 4.3.1. (Laurent)

Giả sử $0 \leq r < R \leq \infty$. Mọi hàm $f(z)$ chỉnh hình trong vành tròn

$$\mathcal{V} = \{z \in \mathbb{C} : r < |z - a| < R, r < R\}$$

đều biểu diễn được thành chuỗi Laurent hội tụ trong vành tròn đó

$$f(z) = \sum_{-\infty < n < +\infty} a_n(z-a)^n = \sum_{n \leq -1} a_n(z-a)^n + \sum_{n \geq 0} a_n(z-a)^n \quad (4.31)$$

và khai triển đó là duy nhất.

Chứng minh. Giả sử z là điểm cố định của vành tròn \mathcal{V} . Ta xét vành tròn

$$\mathcal{V}^* = \{z \in \mathcal{V} : r' < |z-a| < R', \ r < r' < R' < R\}$$

sao cho điểm $z \in \mathcal{V}^*$. Ta ký hiệu các đường tròn biên của \mathcal{V}^* là $\Gamma(r') = \{z \in \mathcal{V} : |z-a| = r'\}$ và $\Gamma(R') = \{z \in \mathcal{V} : |z-a| = R'\}$. Theo công thức tích phân Cauchy ta có

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma(R')} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma(r')} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta. \quad (4.32)$$

Trên đường tròn $\Gamma(R')$ nhân Cauchy $\frac{1}{\zeta-z}$ có thể biểu diễn dưới dạng

$$\frac{1}{\zeta-z} = \frac{1}{\zeta-a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-a}{\zeta-a}} = \sum_{k \geq 0} \frac{(z-a)^k}{(\zeta-a)^{k+1}}, \quad \zeta \in \Gamma(R').$$

Vì

$$\left| \frac{z-a}{\zeta-a} \right| = q_1 < 1$$

nên chuỗi thu được trên đây hội tụ đều trên $\Gamma(R')$. Nhân chuỗi đó với hàm $\frac{f(\zeta)}{2\pi i}$ và tích phân kết quả theo đường tròn $\Gamma(R')$ ta có

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma(R')} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta = \sum_{k \geq 0} a_k (z-a)^k, \quad (4.33)$$

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma(R')} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{k+1}} d\zeta. \quad (4.34)$$

Trên đường tròn $\Gamma(r')$ ta có

$$\frac{1}{\zeta - z} = -\frac{1}{z - a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\zeta - a}{z - a}} = -\sum_{k \geq 1} \frac{(\zeta - a)^{k-1}}{(z - a)^k},$$

$$\left| \frac{\zeta - a}{z - a} \right| = q_2 < 1.$$

Nhân với $\frac{1}{2\pi i} f(\zeta)$ và tích phân kết quả theo đường tròn $\Gamma(r')$ ta thu được

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma(r')} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \sum_{k \geq 1} \frac{a_{-k}}{(z - a)^k} \quad (4.35)$$

$$a_{-k} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma(r')} f(\zeta) (\zeta - a)^{k-1} d\zeta \quad (4.36)$$

Thế các công thức (4.33) và (4.35) vào (4.32) ta có

$$f(z) = \sum_{-\infty < k < \infty} a_k (z - a)^k, \quad (4.37)$$

với mọi $z \in \mathcal{V}^*$. Vấn đề còn lại là chứng minh rằng khai triển thu được là duy nhất.

Giả sử \mathcal{L} là đường cong đóng Jordan trơn từng khúc nào đó nằm trong \mathcal{V}^* và bao điểm a . Trên đường cong này chuỗi (4.37) hội tụ đều. Nhân hai vế của đẳng thức (4.37) với $\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{(z - a)^{m+1}}$, trong đó m là số nguyên cố định, rồi tích phân kết quả thu được theo đường cong đóng \mathcal{L} theo hướng ngược chiều kim đồng hồ, ta có

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{L}} \frac{f(z)}{(z - a)^{m+1}} dz = \sum_{-\infty < k < \infty} a_k \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{L}} \frac{dz}{(z - a)^{m+1-k}}.$$

Vì

$$\oint_{\mathcal{L}} \frac{dz}{(z - a)^{m+1-k}} = \begin{cases} 0 & \text{nếu } m \neq k \\ 2\pi i & \text{nếu } m = k \end{cases}$$

nên từ đó suy ra

$$a_m = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{L}} \frac{f(z)}{(z-a)^{m+1}}, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Điều đó chứng tỏ khai triển (4.37) trong vành tròn \mathcal{V}^* là duy nhất. Vì r' và R' có thể lấy tương ứng gần r và R tùy ý nên khai triển (4.37) hội tụ trong toàn vành \mathcal{V} và khai triển đó là duy nhất. \square

Định nghĩa 4.3.2. 1. Giả sử hàm $f(z)$ chỉnh hình trong vành tròn $\mathcal{V} = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-a| < \rho\}$. Khi đó hàm f có thể khai triển thành chuỗi Laurent

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z-a)^n + \sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{(z-a)^n} \quad (4.38)$$

hội tụ trong vành tròn đó. Chuỗi (4.38) được gọi là *chuỗi (hay khai triển) Laurent của hàm $f(z)$ trong lân cận của điểm a .*

2. Giả sử tại lân cận điểm $z = \infty$ (tức là trong miền $\{z : R < |z| < \infty\}$) hàm $f(z)$ biểu diễn được dưới dạng chuỗi hội tụ

$$f(z) = \sum_{-\infty < n < \infty} a_n z^n. \quad (4.39)$$

Khi đó chuỗi (4.39) được gọi là *chuỗi (hay khai triển) Laurent của hàm $f(z)$ trong lân cận của điểm ∞ .*

Nhận xét 4.3.2. Các hệ số của khai triển (4.37) được tính theo công thức (4.34) nếu $n \geq 0$ và được tính theo công thức (4.36) nếu $n \leq -1$. Ta lấy đường tròn tùy ý

$$\gamma(\rho) = \{z \in \mathcal{V}^* : |z-a| = \rho, r' < \rho < R'\}$$

và áp dụng định lý tích phân Cauchy dễ dàng thấy rằng các hệ số Laurent được tính bằng phép tích phân theo đường tròn $\gamma(\rho)$ và ta có công thức hợp nhất hai công thức (4.34) và (4.36) sau đây

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma(\rho)} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}}, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (4.40)$$

Bây giờ ta chuyển sang xét phép khai triển hàm thành chuỗi Laurent tại lân cận điểm vô cùng.

Giả sử hàm $f(z)$ chỉnh hình trong lân cận thủng nào đó của điểm vô cùng. Đặt $z = \frac{1}{\zeta}$. Qua phép biến đổi này điểm $z = \infty$ biến thành điểm $\zeta = 0$ và lân cận $\mathcal{V}(\infty)$ của điểm vô cùng chuyển thành lân cận của điểm $\zeta = 0$. Rõ ràng là hàm $\varphi(\zeta) = f\left(\frac{1}{\zeta}\right)$ chỉnh hình tại lân cận điểm $\zeta = 0$. Do đó có thể khai triển hàm $\varphi(\zeta)$ thành chuỗi Laurent

$$\varphi(\zeta) = \sum_{-\infty < n < \infty} c_n \zeta^n = \sum_{n \geq 0} c_n \zeta^n + \sum_{n \geq 1} \frac{c_{-n}}{\zeta^n}.$$

Tiếp đó, sau khi thực hiện phép đổi biến $\zeta = \frac{1}{z}$ và thay $c_n = a_{-n}$ ta có

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{a_{-n}}{z^n} + \sum_{n \geq 1} a_n z^n = \sum_{-\infty < n < \infty} a_n z^n. \quad (4.41)$$

Chuỗi (4.41) là khai triển Laurent của hàm $f(z)$ tại lân cận của điểm $a = \infty$.

Định nghĩa 4.3.3. 1⁺ Phần của chuỗi (4.31) hoặc (4.41) gồm từ mọi số hạng của chuỗi Laurent của hàm $f(z)$ tại lân cận điểm $z = a$ mà khi $z \rightarrow a$ các số hạng đó đều dần đến ∞ được gọi là *phần chính* của khai triển Laurent của hàm $f(z)$.

2⁺ Hiệu giữa chuỗi Laurent của hàm $f(z)$ tại lân cận điểm $z = a$ và phần chính của nó được gọi là *phần chỉnh hình* (hay *phần đều*) của chuỗi Laurent của hàm $f(z)$ tại lân cận điểm $z = a$.

Nếu điểm $a \neq \infty$ thì trong khai triển Laurent (4.31):

- (i) chuỗi $\sum_{n \geq -1} a_n (z - a)^n$ là phần chính;
- (ii) chuỗi $\sum_{n \geq 0} a_n (z - a)^n$ là phần chỉnh hình.

Nếu điểm $a = \infty$ thì trong khai triển Laurent (4.41):

- (i) chuỗi $\sum_{n \geq 1} a_n z^n$ là phần chính;
- (ii) chuỗi $\sum_{n \geq 0} \frac{a_{-n}}{z^n}$ là phần chỉnh hình.

Nhận xét 4.3.3. 1. Khai triển Laurent thường được sử dụng trong những trường hợp khi hàm f xác định trong một lân cận nào đó của điểm z_0 nhưng không xác định tại z_0 .

Khi đó, khai triển Laurent của hàm f có thể thực hiện được trong vành tròn $\{0 < |z - z_0| < \delta\}$. Khai triển ấy thường được gọi là khai triển Laurent của hàm f tại lân cận điểm z_0 .

2. Chuỗi Taylor là trường hợp riêng của chuỗi Laurent khi $a_n = 0$, $n = -1, -2, \dots$. Khác với trường hợp chuỗi Taylor, trong đó có các hệ số Taylor được biểu diễn qua các đạo hàm của hàm, trong trường hợp chuỗi Laurent người ta không thể biểu diễn các hệ số Laurent a_n qua các đạo hàm của f tại điểm z_0 vì hàm f không xác định tại điểm z_0 .

Để khai triển hàm thành chuỗi Laurent ta cần lưu ý một số phương pháp sau đây.

Trong thực hành các công thức (4.38) ít khi được dùng để tìm hệ số của khai triển Laurent của các hàm cụ thể. Thông thường bằng cách này hay cách khác việc khai triển các hàm cụ thể thành chuỗi Laurent được quy về khai triển thành chuỗi Taylor và do đó cần áp dụng các *khai triển bảng* đã nêu trong 4.1.4.

Để khai triển hàm thành chuỗi Laurent tại lân cận điểm $a = \infty$ ta có thể sử dụng các *khai triển bảng* hoặc sử dụng *phương pháp chính tắc* sau.

Đầu tiên thực hiện phép biến đổi biến $z = \frac{1}{\zeta}$ rồi áp dụng các khai triển bảng để khai triển hàm $\varphi(\zeta) = f\left(\frac{1}{\zeta}\right)$ thành chuỗi Laurent tại lân cận điểm $\zeta = 0$. Sau cùng thay $\zeta = \frac{1}{z}$ vào chuỗi thu được ta sẽ thu được chuỗi Laurent tại lân cận điểm $z = \infty$.

Ví dụ 1. Hàm $f(z) = \frac{1}{(1-z)(z+2)}$ chỉnh hình trong các miền

- a) $D_1 = \{|z| < 1\}$;
- b) $D_2 = \{1 < |z| < 2\}$;
- c) $D_3 = \{|z| > 2\}$.

Giải. Ta sẽ tìm khai triển Laurent của hàm f trong các miền nói trên.

Với mục đích đó, ta biểu diễn hàm f dưới dạng

$$f(z) = \frac{1}{3} \left[\frac{1}{1-z} + \frac{1}{z+2} \right].$$

a) Khai triển Laurent trong miền D_1 . Vì trong miền D_1 ta có $|z| < 1$ nên

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n \geq 0} z^n,$$

và

$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{2 \left(1 + \frac{z}{2} \right)} = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n \cdot z^n}{2^{n+1}}.$$

Do đó

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{3} \left[1 + \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} \right] z^n, \quad z \in D_1.$$

Đó là khai triển Taylor.

b) Khai triển Laurent trong miền D_2 . Vì $1 < |z| < 2$ nên:

$$\frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z \left(1 - \frac{1}{z} \right)} = -\sum_{n \geq 0} \frac{1}{z^{n+1}}, \quad |z| > 1,$$

và

$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{2 \left(1 + \frac{z}{2} \right)} = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n \cdot z^n}{2^{n+1}}, \quad |z| < 2.$$

Do đó

$$f(z) = \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{3} \right) \cdot \frac{1}{z^n} + \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n \cdot z^n}{3 \cdot 2^{n+1}}, \quad z \in D_2.$$

c) Khai triển Laurent trong miền D_3 . Vì $|z| > 2$ nên

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-z} &= -\sum_{n \geq 1} \frac{1}{z^n}, \quad |z| > 1, \\ \frac{1}{z+2} &= \frac{1}{z \left(1 + \frac{2}{z} \right)} = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \cdot \frac{2^n}{z^{n+1}} \\ &= \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n \cdot 2^{n-1}}{z^n}, \end{aligned}$$

và ta có kết quả:

$$f(z) = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n \cdot 2^{n-1} - 1}{3 \cdot z^n}, \quad |z| > 2.$$

Ví dụ 2. Khai triển hàm $f(z) = \frac{1}{2-z}$ thành chuỗi Laurent tại lân cận điểm $a = \infty$.

Giải. Đầu tiên thực hiện phép đổi biến $z = \frac{1}{\zeta}$. Khi đó hàm đã cho có dạng

$$w = f\left(\frac{1}{\zeta}\right) = \frac{\zeta}{2\zeta - 1} = -\frac{\zeta}{1 - 2\zeta}.$$

Vì với điều kiện $|2\zeta| < 1$ ta có

$$w = f\left(\frac{1}{\zeta}\right) = -\zeta \sum_{n \geq 0} (2\zeta)^n = -\sum_{n \geq 0} 2^n \zeta^{n+1}, \quad |\zeta| < \frac{1}{2}$$

nên khi trở về biến z ta thu được

$$f(z) = \frac{1}{2-z} = -\sum \frac{2^n}{z^{n+1}}, \quad |z| > 2.$$

Đó là khai triển Laurent cần tìm.

Ta cũng có thể thu được khai triển này bằng cách áp dụng phương pháp giải ví dụ 1

Ta có

$$f(z) = \frac{1}{2-z} = -\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{z}}$$

Khi đó với điều kiện $\left|\frac{2}{z}\right| < 1$ ta có

$$f(z) = -\frac{1}{z} \cdot \sum_{n \geq 0} \left(\frac{2}{z}\right)^n = -\sum \frac{2^n}{z^{n+1}}, \quad |z| > 2.$$

Ví dụ 3. Khai triển các hàm e^z , $\sin z$, $\cos z$ thành chuỗi Laurent tại lân cận điểm $a = \infty$.

Giải. Thực hiện phép đổi biến $z = \frac{1}{\zeta}$. Khi đó các hàm đã cho có dạng $e^{\frac{1}{\zeta}}$, $\sin \frac{1}{\zeta}$, $\cos \frac{1}{\zeta}$. Khai triển các hàm này thành chuỗi Laurent tại lân cận điểm $\zeta = 0$:

$$\begin{aligned} e^{\frac{1}{\zeta}} &= 1 + \frac{1}{\zeta} + \frac{1}{2\zeta^2} + \cdots + \frac{1}{n!\zeta^n} + \cdots, \\ \sin \frac{1}{\zeta} &= \frac{1}{\zeta} - \frac{1}{3!\zeta^3} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n-1)!\zeta^{2n-1}} + \cdots, \\ \cos \frac{1}{\zeta} &= 1 - \frac{1}{2!\zeta^2} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!\zeta^{2n}} + \cdots \end{aligned}$$

Trở về biến z ta thu được

$$\begin{aligned} e^z &= 1 + \frac{z}{1!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots, \\ \sin z &= z - \frac{z^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots, \\ \cos z &= 1 - \frac{z^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \cdots \end{aligned}$$

Ví dụ 4. Khai triển hàm trong ví dụ 1 thành chuỗi Laurent trong các miền khác nhau nếu lấy $a = 1$.

Giải. Trong trường hợp này ta có hai vành tròn với tâm tại điểm $a = 1$:

- (i) hình tròn thủng: $\mathcal{V}_1 = \{z : 0 < |z - 1| < 1\}$
- (ii) phần ngoài hình tròn $\mathcal{V}_2 = \{z : |z - 1| > 1\}$.

Trong mỗi vành tròn vừa nêu hàm $f(z)$ chỉnh hình và trên biên của chúng tồn tại điểm mà hàm không chỉnh hình.

Cũng như trong ví dụ 1, ta có

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}.$$

Tiếp theo,

$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{1-(z-1)} = -\sum_{n \geq 0} (z-1)^n, \quad |z-1| < 1.$$

Do đó

$$f(z) = -\frac{1}{z-1} - \sum_{n \geq 0} (z-1)^n, \quad 0 < |z-1| < 1.$$

(ii) Khai triển trong vành tròn $1 < |z-1| < \infty$.

Trong miền này ta có

$$\begin{aligned} \frac{1}{z-2} &= \frac{1}{(z-1)-1} = \frac{1}{z-1} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z-1}} \\ &= \frac{1}{z-1} \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(z-1)^n} \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(z-1)^{n+1}}, \quad |z-1| > 1. \end{aligned}$$

và từ đó suy rằng

$$f(z) = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} = \sum_{n \geq 2} \frac{1}{(z-1)^n}, \quad 1 < |z-1| < \infty$$

Để kết thúc tiết này ta chứng minh

Định lý 4.3.2. *Giả sử hàm $f(z)$ chỉnh hình trong vành tròn $\mathcal{V} = \{z : r < |z-a| < R\}$. Khi đó các hệ số của chuỗi Laurent*

$$f(z) = \sum_{-\infty < n < \infty} a_n (z-a)^n$$

của hàm $f(z)$ trong vành tròn \mathcal{V} thỏa mãn các bất đẳng thức

$$|a_n| \leq \frac{M}{\rho^n}, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (4.42)$$

trong đó $M = \max_{z \in \gamma(\rho)} |f(z)|$, $\gamma(\rho) = \{z \in \mathcal{V} : |z-a| = \rho, r < \rho < R\}$.

Các bất đẳng thức (4.42) được gọi là các bất đẳng thức Cauchy đối với hệ số Laurent.

Chứng minh. Sử dụng các công thức (4.38) ta có

$$|a_n| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma(\rho)} \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta-a|^{n+1}} d\zeta \leq \frac{M}{2\pi\rho^{n+1}} \int_{\gamma(\rho)} ds = \frac{M}{2\pi\rho^{n+1}} \cdot 2\pi\rho = \frac{M}{\rho^n}.$$

□

4.3.2 Điểm bất thường cô lập đơn trị

Giả sử hàm $f(z)$ chỉnh hình trong lân cận nào đó của điểm $z = a$, có thể trừ ra chính điểm a . Nói cách khác, $f(z)$ chỉnh hình trong vành tròn (lân cận thủng) $\dot{\mathcal{U}}(a; r) = \{z : 0 < |z - a| < r\}$. Khi đó hai khả năng sau đây có thể xảy ra

(1) Tìm được số A sao cho nếu đặt $f(a) = A$ thì hàm $f(z)$ trở nên chỉnh hình tại điểm $z = a$, tức là chỉnh hình trong toàn hình tròn $\mathcal{U}(a; r) = \{z : |z - a| < r\}$. Trong trường hợp này điểm $z = a$ được gọi là *điểm bất thường khử được* (hay còn gọi là *điểm đều* hoặc *điểm thường*).

(2) Hàm $f(z)$ chỉnh hình trong vành tròn $\dot{\mathcal{U}}(a; r) = \{z : 0 < |z - a| < r\}$ nhưng không chỉnh hình trong hình tròn $\mathcal{U}(a; r) = \{z : |z - a| < r\}$. Khi đó điểm $z = a$ được gọi là *điểm bất thường cô lập đơn trị* (gọi tắt là *điểm bất thường cô lập* hoặc đôi khi chỉ gọi là *điểm bất thường*) của hàm $f(z)$.

Để khảo sát đáng điệu của hàm trong lân cận của điểm $z = a$ ta khai triển hàm $f(z)$ thành chuỗi Laurent trong vành tròn $\dot{\mathcal{U}}(a, r)$:

$$f(z) = \sum_{-\infty < n < +\infty} a_n(z-a)^n = \sum_{n \geq 1} \frac{a_{-n}}{(z-a)^n} + \sum_{n \geq 0} a_n(z-a)^n, \quad (4.43)$$

$$0 < |z - a| < r$$

trong đó

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(\rho)} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad 0 < \rho < r. \quad (4.44)$$

Ta có

Định lý 4.3.3. *Nếu hàm $f(z)$ chỉnh hình trong vành tròn $\dot{\mathcal{U}}(a; r) = \{z : 0 < |z - a| < r\}$ thì $z = a$ là điểm bất thường khử được của $f(z)$ khi và chỉ khi hàm $f(z)$ có môđun bị chặn trong lân cận nào đó của điểm a .*

Chứng minh. I. *Điều kiện cần.* Giả sử $z = a$ là điểm bất thường khử được của $f(z)$. Khi đó tìm được số A sao cho sau khi thay $f(a) = A$ thì ta thu được hàm chỉnh hình tại điểm $z = a$ và do đó nó liên tục tại a . Từ sự tồn

tại giới hạn hữu hạn $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = A$ suy ra $f(z)$ bị chặn trong lân cận nào đó của điểm a .

II. *Điều kiện đủ.* Giả sử tồn tại lân cận $\mathcal{U}(a; \delta)$, $0 < \delta \leq r$ và tồn tại số $M > 0$ sao cho $|f(z)| \leq M$ khi $z \in \mathcal{U}(a; \delta)$, $z \neq a$. Trong các công thức (4.44) ta xem $\gamma(\rho) = \{z : |z - a| = \rho, \rho < \delta\}$ và áp dụng định lý 4.3.2

$$|a_n| \leq \frac{M}{\rho^n}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

ta thu được

$$|a_{-n}| \leq M\rho^n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.45)$$

Trong công thức (4.45) các hệ số a_{-n} không phụ thuộc ρ . Do đó khi $\rho \rightarrow 0$ ta thu được $a_{-n} = 0$ $n = 1, 2, \dots$. Từ đó suy rằng trong khai triển Laurent (4.43) của hàm $f(z)$ phần chính bằng 0 và

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z - a)^n, \quad 0 < |z - a| < r.$$

Ký hiệu tổng của chuỗi lũy thừa vế phải là $S(z)$. Tổng $S(z)$ là hàm chỉnh hình trong toàn hình tròn $\mathcal{U}(a; r)$ và $f(z) = S(z) \forall z \in \mathcal{U}(a; r)$. Nếu ta đặt $f(a) = S(a)$ thì $f(z)$ trở nên chỉnh hình trong $\mathcal{U}(a; r)$ kể cả điểm $z = a$. (Đó cũng là lý do có tên gọi “điểm bất thường khử được”). \square

Nhận xét 4.3.4. Khái niệm “điểm bất thường khử được” được dùng tương tự như khái niệm “điểm gián đoạn khử được”. Tuy nhiên nếu đối với hàm hai biến thực $F(x, y)$ xác định và khả vi trong lân cận điểm (x_0, y_0) (có thể trừ ra chính điểm (x_0, y_0)) tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} F(x, y) = A$ sau khi

$$\begin{matrix} x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0 \end{matrix}$$

bổ sung giá trị $f(x_0, y_0) = A$ ta sẽ thu được hàm $F(x, y)$ liên tục tại (x_0, y_0) nhưng nói chung không khả vi tại (x_0, y_0) . Trong khi đó đối với hàm $f(z)$ chỉnh hình trong $\mathcal{U}(a; r)$ chỉ với một điều kiện về tính bị chặn của nó trong lân cận điểm $z = a$ ta đã có giới hạn $\lim_{z \rightarrow a} f(z)$ tồn tại hữu hạn và sau khi bổ sung giá trị $f(a) = \lim_{z \rightarrow a} f(z)$ ta thu được hàm chỉnh hình tại chính điểm $z = a$.

Từ định lý 4.3.3 đã chứng minh suy rằng $z = a$ là điểm bất thường cô lập của hàm $f(z)$ chỉnh hình trong vành tròn $\mathcal{U}(a; r)$ khi và chỉ khi $|f(z)|$ không bị chặn trong bất cứ lân cận nào của điểm $z = a$, tức là

$$\overline{\lim} |f(z)| = \infty.$$

Như vậy nếu $z = a$ là điểm bất thường cô lập của hàm $f(z)$ thì hàm $f(z)$ không có giới hạn hữu hạn khi $z \rightarrow a$ và do đó chỉ có thể xuất hiện hai trường hợp

i) $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$.

ii) hàm $f(z)$ không dần tới một giới hạn hữu hạn hay vô cùng nào khi $z \rightarrow a$ (tức là tồn tại ít nhất hai dãy điểm $z'_1, z'_2, \dots, z'_n, \dots$ và $z''_1, z''_2, \dots, z''_n, \dots$ cùng hội tụ đến a sao cho các dãy giá trị tương ứng của hàm $f(z'_n)$ và $f(z''_n)$ không dần tới cùng một giới hạn).

Ví dụ 5. 1) Ta xét hàm $f(z) = \frac{1}{(z-a)^n}$, $n \in \mathbb{N}$. Hàm này chỉnh hình khi $0 < |z-a|$ và $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$. Như vậy, trường hợp i) xảy ra.

2) Ta xét ví dụ khác là $f(z) = e^{\frac{1}{z-a}}$, $a = \alpha + i\beta$. Hàm này chỉnh hình khi $0 < |z-a|$, nhưng $\lim_{z \rightarrow a} f(z)$ không tồn tại. Thật vậy, giả sử z nằm trên đường thẳng qua a và song song với trục thực. Vì $z-a = x-\alpha$ là số thực nên khi $x > \alpha$ và $x \rightarrow \alpha$ thì $e^{\frac{1}{x-\alpha}} \rightarrow \infty$, còn khi $x < \alpha$ và $x \rightarrow \alpha$ thì $e^{\frac{1}{x-\alpha}} \rightarrow 0$. Do đó không tồn tại giới hạn hữu hạn lẫn giới hạn vô cùng khi $z \rightarrow a$ và ta có trường hợp ii).

Định nghĩa 4.3.4. 1) Điểm bất thường cô lập $z = a$ của hàm $f(z)$ được gọi là *cực điểm* nếu $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$.

2) Điểm bất thường cô lập $z = a$ của hàm $f(z)$ được gọi là *điểm bất thường cốt yếu* nếu hàm $f(z)$ không bị chặn về môđun và không dần đến ∞ khi $z \rightarrow a$.

Ta khảo sát một cách chi tiết dáng điệu của hàm tại lân cận của cực điểm.

Định lý 4.3.4. Điểm $z = a$ là cực điểm của hàm $f(z)$ khi và chỉ khi điểm đó là 0-điểm đối với hàm $\varphi(z) = \frac{1}{f(z)}$.

Chứng minh. I. Giả sử $z = a$ là cực điểm của hàm $f(z)$. Khi đó $\lim_{z \rightarrow a} |f(z)| = \infty$ và do đó tồn tại lân cận $\mathcal{U}(a; \delta) = \{z : |z - a| < \delta < r\}$ của điểm a sao cho trong đó $f(z)$ thỏa mãn bất đẳng thức $|f(z)| > 1$. Trong lân cận đó hàm $\varphi(z) = \frac{1}{f(z)}$ là hàm chỉnh hình có thể trừ ra điểm $z = a$. Nhưng từ hệ thức

$$|\varphi(z)| = \frac{1}{|f(z)|} < 1$$

và định lý 4.3.3 suy rằng $z = a$ là điểm bất thường khử được đối với hàm $\varphi(z)$. Giá trị của hàm này tại điểm a bằng:

$$\varphi(a) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{1}{f(z)} = 0.$$

Do đó hàm $\varphi(z)$ chỉnh hình trong $\mathcal{U}(a; \delta)$ và $z = a$ là 0-điểm của nó.

II. Ngược lại, giả sử $z = a$ là 0-điểm của hàm $\varphi(z)$. Ta cần chứng minh $z = a$ là cực điểm của $f(z)$. Thật vậy, vì $z = a$ là 0-điểm của hàm $\varphi(z)$ và $\varphi(z) \not\equiv 0$ nên $\exists \Delta > 0$ đủ bé sao cho trong lân cận $\mathcal{U}(a; \Delta) = \{z : |z - a| < \Delta\}$ hàm $\varphi(z)$ không có 0-điểm nào khác ngoài $z = a$ (tính cô lập của 0-điểm của hàm chỉnh hình!). Ta lập hàm $f(z) = \frac{1}{\varphi(z)}$. Đó là hàm chỉnh hình trong lân cận thủng $\dot{\mathcal{U}}(a; \Delta) = \{z : 0 < |z - a| < \Delta\}$ và dần đến ∞ khi $z \rightarrow a$. Do đó $z = a$ là cực điểm của $f(z)$. \square

Nhờ sự tương ứng giữa 0-điểm và cực điểm được xác lập trong định lý 4.3.4 ta có thể phát biểu định nghĩa về cấp của cực điểm.

Định nghĩa 4.3.5. Ta nói rằng điểm $z = a$ là cực điểm cấp m ($m \geq 1$) đối với hàm $f(z)$ nếu điểm $z = a$ là 0-điểm cấp m đối với hàm $\frac{1}{f(z)}$. Trong trường hợp $m = 1$ cực điểm được gọi là cực điểm đơn còn khi $m > 1$ -cực điểm gọi là cực điểm bội.

Ví dụ 6. 1) Xét hàm $f(z) = \frac{1}{\sin \frac{1}{z}}$. Các điểm $z_k = \frac{1}{k\pi}$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ đều là cực điểm đơn của $f(z)$. Thật vậy, hàm $g(z) = \frac{1}{f(z)} = \sin\left(\frac{1}{z}\right)$ chỉnh hình khi $z \neq 0$ và z_k là 0-điểm đơn của nó ($g'(z_k) \neq 0$). Điểm $z = 0$ là điểm bất thường không cô lập, nó là điểm tụ của các cực điểm.

2) Chứng minh rằng $z = 0$ là cực điểm cấp 3 của hàm $f(z) = \frac{1}{z - \sin z}$. Tương tự như trên dễ dàng thấy rằng $(z - \sin z)'|_{z=0} = (z - \sin z)''|_{z=0} = 0$, còn $(z - \sin z)^{(3)}|_{z=0} = 1$. Do vậy $z = 0$ là 0-điểm cấp 3 của mẫu số và do đó là cực điểm cấp 3 của hàm.

Dáng điệu của hàm tại lân cận của cực điểm cấp m cũng được xác định nhờ cấu trúc của khai triển Laurent tại lân cận của cực điểm.

Định lý 4.3.5. Điểm bất thường cô lập $z = a$ của hàm $f(z)$ là cực điểm cấp m của nó khi và chỉ khi phần chính của khai triển Laurent của hàm $f(z)$ trong lân cận điểm $z = a$ chứa không quá m số hạng và $a_n = 0 \forall n \leq -(m+1)$, còn $a_{-m} \neq 0$.

Chứng minh. I. Giả sử $z = a$ là cực điểm cấp m của hàm $f(z)$. Khi đó $z = a$ là 0-điểm cấp m đối với hàm $\frac{1}{f(z)}$. Từ đó suy rằng trong lân cận nào đó của $z = a$ ta có

$$\frac{1}{f(z)} = A_m(z-a)^m + A_{m+1}(z-a)^{m+1} + \dots; \quad A_m \neq 0$$

và do đó

$$f(z) = \frac{1}{(z-a)^m} \cdot \frac{1}{A_m + A_{m+1}(z-a) + \dots}. \quad (4.46)$$

Chuỗi lũy thừa $A_m + A_{m+1}(z-a) + \dots$ biểu diễn một hàm chỉnh hình không triệt tiêu trong một lân cận nào đó của điểm $z = a$ (vì $A_m \neq 0$). Do đó

$$\varphi(z) = \frac{1}{A_m + A_{m+1}(z-a) + \dots}$$

là hàm chỉnh hình trong lân cận của điểm $z = a$ và ta có khai triển dạng

$$\varphi(z) = \alpha_0 + \alpha_1(z-a) + \cdots + \alpha_n(z-a)^n + \cdots \quad \alpha_0 = \frac{1}{A_m} \neq 0. \quad (4.47)$$

Thay chuỗi (4.47) vào (4.46) ta thu được chuỗi

$$f(z) = \frac{\alpha_0}{(z-a)^m} + \frac{\alpha_1}{(z-a)^{m-1}} + \cdots \quad (4.48)$$

và do tính duy nhất của khai triển hàm thành chuỗi Laurent, chuỗi ở vế phải của (4.48) là khai triển Laurent của hàm $f(z)$.

Thay đổi ký hiệu các hệ số trong (4.48) bằng cách đặt $\alpha_n = a_{n-m}$; $n = 0, 1, 2, \dots$ ta thu được

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z-a)^m} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-a} + a_0 + a_1(z-a) + \cdots \quad (4.49)$$

II. Giả sử trong lân cận nào đó của điểm $z = a$ hàm $f(z)$ có khai triển dạng (4.49), trong đó $a_{-m} \neq 0$. Khai triển đó có thể viết lại dưới dạng

$$f(z) = \frac{a_{-m} + A_{-m+1}(z-a) + \cdots}{(z-a)^m}.$$

Từ đó suy ra

$$\frac{1}{f(z)} = (z-a)^m \cdot \frac{1}{a_{-m} + a_{-m+1}(z-a) + \cdots}, \quad a_{-m} \neq 0.$$

Bằng cách thay hàm chỉnh hình $\frac{1}{a_{-m} + a_{-m+1}(z-a) + \cdots}$ bởi khai triển Taylor của nó theo các lũy thừa của $z-a$ ta thu được

$$\begin{aligned} \frac{1}{f(z)} &= (z-a)^m [\beta_0 + \beta_1(z-a) + \cdots] \\ &= \beta_0(z-a)^m + \beta_1(z-a)^{m+1} + \cdots; \quad \beta_0 = \frac{1}{a_{-m}} \neq 0. \end{aligned} \quad (4.50)$$

Khai triển (4.50) chứng tỏ rằng $z = a$ là 0-điểm cấp m của hàm $\frac{1}{f(z)}$. Do đó theo định lý 4.3.4 điểm $z = a$ là cực điểm cấp m của hàm $f(z)$. \square

Áp dụng phương pháp chứng minh vừa trình bày ta có thể chứng minh

Định lý 4.3.6. Điểm bất thường cô lập $z = a$ của hàm $f(z)$ là cực điểm cấp m ($m \geq 1$) của nó khi và chỉ khi hàm $f(z)$ có thể biểu diễn dưới dạng

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-a)^m}, \quad \varphi(a) \neq 0$$

trong đó $\varphi(z)$ là hàm chỉnh hình tại điểm $z = a$ và $\varphi(a) \neq 0$.

Ví dụ 7. 1) Xét hàm $f(z) = \frac{\cos z - 1}{z^4}$. Hàm f chỉnh hình trong miền $D = \{z : 0 < |z| < \infty\}$. Khai triển Laurent của hàm đó trong miền D có dạng

$$\frac{\cos z - 1}{z^4} = \frac{1}{z^4} \left[\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} - 1 \right] = -\frac{1}{2z^2} + \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n+4)!}$$

và do đó $z = 0$ là cực điểm cấp 2 của hàm $f(z)$ (ở đây $a_{-2} = -\frac{1}{2} \neq 0$; $a_{-n} = 0 \quad \forall n > 2$).

$$2) \quad f(z) = \frac{1}{e^z - 1} - \frac{1}{z}.$$

Rõ ràng là $z = 0$ là điểm bất thường của hàm $f(z)$. Vì e^z tuần hoàn nên mẫu số của phân thức thứ nhất bằng 0 khi $z = 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$. Như vậy hàm $f(z)$ chỉnh hình $\forall z \neq 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$.

Nếu $z_k = 2k\pi i$, $k \neq 0$ thì $\frac{1}{z}$ chỉnh hình, còn $\frac{1}{e^z - 1}$ có cực điểm đó. Dễ dàng thấy rằng $z_k = 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$ là các cực điểm đơn của $\frac{1}{e^z - 1}$ và

do vậy chúng cũng là cực điểm đơn của hàm $f(z)$. Ta xét điểm $z = 0$. Ta có

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1+z-e^z}{z(e^z-1)} = \frac{1+z-\left[1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\dots\right]}{z\left[\left(1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\dots\right)-1\right]} \\ &= \frac{-\frac{z^2}{2!}-\frac{z^3}{3!}-\dots}{z\left(z+\frac{z^2}{2!}+\dots\right)} \\ &= \frac{-\frac{1}{2!}-\frac{z}{3!}-\dots}{1+\frac{z}{2!}+\dots} \rightarrow -\frac{1}{2} \quad (z \rightarrow 0). \end{aligned}$$

Do đó hàm $f(z)$ bị chặn trong lân cận điểm $z = 0$ và vì vậy $z = 0$ là điểm bất thường khử được.

Sau cùng ta khảo sát đáng điệu của hàm chỉnh hình tại lân cận điểm bất thường cốt yếu. Từ các định lý 4.3.3 và 4.3.5 dễ dàng chứng minh

Định lý 4.3.7. *Điểm bất thường cô lập $z = a$ của hàm $f(z)$ là điểm bất thường cốt yếu của nó khi và chỉ khi phần chính trong khai triển Laurent của hàm $f(z)$ tại lân cận điểm a có vô số số hạng.*

Ví dụ 8. 1) Hàm $f(z) = \sin \frac{1}{z}$ chỉnh hình trong miền $D = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < \infty\}$ và

$$f(z) = \sin \frac{1}{z} = \frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \dots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!z^{2n+1}} + \dots$$

Phần chính của khai triển có vô số hạng thức khác 0. Do đó điểm $z = 0$ là điểm bất thường cốt yếu của hàm $\sin \frac{1}{z}$.

2) Hàm $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ chỉnh hình trong miền $D = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < \infty\}$ và $f(z) = e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!z^n}$. Do đó, điểm $z = 0$ là điểm bất thường cốt yếu của hàm $e^{\frac{1}{z}}$.

Sự phức tạp của đáng điệu hàm chỉnh hình tại lân cận điểm bất thường cốt yếu được thể hiện trong định lý sau đây

Định lý 4.3.8. (Weierstrass)⁶

Giả sử a là điểm bất thường cốt yếu của hàm $f(z)$. Khi đó tại lân cận $\mathcal{U}(a; \delta)$ bất kỳ của điểm a hàm $f(z)$ nhận những giá trị gần một số phức cho trước bất kỳ bao nhiêu tùy ý, tức là:

$$\forall b \in \mathbb{C}, \forall \varepsilon > 0, \forall \mathcal{U}(a, \delta) \exists z \in \dot{\mathcal{U}}(a, \delta) : |f(z) - b| < \varepsilon.$$

Điều đó có nghĩa là: $f(z)$ dần đến giới hạn cho trước bất kỳ khi z dần đến a theo dãy các giá trị được chọn tương ứng.

Chứng minh. Ta sẽ chứng minh bằng phương pháp phản chứng. Giả thiết rằng

$$\exists b \in \mathbb{C}, \exists \varepsilon > 0 \exists \mathcal{U}(a; \delta) : \forall z \in \dot{\mathcal{U}}(a; \delta) \Rightarrow |f(z) - b| \geq \varepsilon.$$

Ta xét hàm

$$\varphi(z) = \frac{1}{f(z) - b}.$$

Hàm $\varphi(z)$ có các tính chất là

i) $\varphi(z)$ có môđun bị chặn trong lân cận thủng $\dot{\mathcal{U}}(a; \delta)$

$$|\varphi(z)| = \frac{1}{|f(z) - b|} \leq \frac{1}{\varepsilon}.$$

ii) $\varphi(z)$ chỉnh hình trong $\dot{\mathcal{U}}(a; \delta)$ và vì $z = a$ là điểm bất thường cô lập của $f(z)$ nên nó cũng là điểm bất thường cô lập của $\varphi(z)$.

Do đó theo định lý 4.3.3, điểm a là điểm bất thường khử được của $\varphi(z)$ và tại lân cận điểm a (chẳng hạn $a \neq \infty$) ta có

$$\varphi(z) = \sum_{n \geq m} a_n(z - a)^n, \quad a_m \neq 0, \quad m \geq 0 \quad \forall z \in \dot{\mathcal{U}}(a; \delta).$$

Nếu $m = 0$ thì $a_0 \neq 0$ và hàm

$$f(z) = b + \frac{1}{\varphi(z)} = b + \frac{1}{a_0 + a_1(z - a) + \dots}$$

⁶K. Weierstrass (1815-1897) là nhà toán học Đức.

chỉnh hình trong lân cận thủng $\dot{\mathcal{U}}(a; \delta)$, tức là $z = a$ là điểm bất thường khi được đối với $f(z)$. Mâu thuẫn với giả thiết của định lý. Nếu $m > 0$ thì $a_m \neq 0$ và hàm

$$f(z) = b + \frac{1}{\varphi(z)} = b + \frac{1}{a_m(z-a)^m + a_{m+1}(z-a)^{m+1} + \dots}$$

có cực điểm cấp m tại điểm a . Điều đó cũng mâu thuẫn với điều kiện của định lý. \square

Định nghĩa 4.3.6. Ta nói rằng tập hợp E trù mật khắp nơi trong tập hợp B nếu

$$\forall z \in B, \forall \varepsilon > 0, \exists z^* \in E : |z - z^*| < \varepsilon.$$

Sử dụng định nghĩa 4.3.6 ta có thể phát biểu định lý Weierstrass dưới dạng: Nếu a là điểm bất thường cốt yếu của hàm $f(z)$ thì $\forall \mathcal{U}(a; \delta)$ là lân cận của điểm a tập hợp $f(\dot{\mathcal{U}}(a; \delta))$ trù mật khắp nơi trong \mathbb{C} .

Định lý Weierstrass chỉ khẳng định rằng trong lân cận đủ bé của điểm bất thường cốt yếu hàm nhận những giá trị gần một số phức cho trước bao nhiêu tùy ý chứ không nói gì về việc hàm nhận mọi giá trị. Nhà toán học Pháp Picard⁷ đã chứng minh định lý mạnh hơn và sâu sắc hơn sau đây

Định lý Picard. Trong lân cận bé bao nhiêu tùy ý của điểm bất thường cốt yếu hàm $f(z)$ nhận vô số lần mọi giá trị hữu hạn ngoại trừ nhiều nhất một giá trị (gọi là giá trị ngoại lệ Picard).

Ví dụ 9. 1) Khảo sát dáng điệu của hàm $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ tại lân cận điểm $z = 0$.

Như đã biết điểm $z = 0$ là điểm bất thường cốt yếu. Ta sẽ chứng tỏ rằng trong lân cận điểm $z = 0$ hàm $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ có dáng điệu như được mô tả trong định lý Picard. Giả sử A là số phức $\neq 0$ bất kỳ. Đặt $A = \rho e^{i\varphi}$. Từ phương trình $e^{\frac{1}{z}} = A$ ta thu được

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} &= \ln A = \ln \rho + i(\varphi + 2k\pi) \\ \Rightarrow z_k &= \frac{1}{\ln \rho + i(\varphi + 2k\pi)}, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

⁷C. Picard (1856-1942) là nhà toán học Pháp.

Rõ ràng là đối với mọi hình tròn với tâm $z = 0$ và bán kính đủ bé ta có thể lấy số k_1 sao cho với mọi k mà $|k| \geq |k_1|$ thì mọi z_k đều rơi vào trong hình tròn đó. Nhưng z_k là nghiệm của phương trình $e^{\frac{1}{z}} = A$ với mọi A cho trước và $A \neq 0$. Như vậy đối với hàm $e^{\frac{1}{z}}$ giá trị ngoại lệ Picard là $A = 0$.

2) Hàm $f(z) = \sin \frac{1}{z}$ có điểm bất thường cốt yếu là $z = 0$. Giả sử A là số được cho tùy ý.

Ta xét phương trình $\sin \frac{1}{z} = A$. Sử dụng định nghĩa hàm $\sin t$ trong miền phức ta viết phương trình dưới dạng

$$\frac{e^{\frac{i}{z}} - e^{-\frac{i}{z}}}{2i} = A.$$

Sau một vài phép biến đổi ta thu được phương trình

$$e^{\frac{2i}{z}} - 2Aie^{\frac{i}{z}} - 1 = 0$$

và do đó

$$e^{\frac{i}{z}} = Ai \pm \sqrt{(Ai)^2 + 1} = B.$$

Số $B \neq 0$ vì nếu không như vậy thì $Ai = \pm \sqrt{(Ai)^2 + 1}$ hay là $(Ai)^2 = (Ai)^2 + 1$. Giả sử

$$B = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Khi đó từ phương trình $e^{\frac{i}{z}} = B$ ta thu được

$$\begin{aligned} \frac{i}{z} &= \ln B = \ln \rho + i(\varphi + 2k\pi) \\ z &= \frac{1}{\varphi + 2k\pi - i \ln \rho}, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Từ đó suy rằng trong lân cận bất kỳ của điểm $z = 0$ đều tìm được nghiệm của phương trình $\sin \frac{1}{z} = A$, $\forall A$ vì số k có thể lấy lớn tùy ý về môđun.

Trong trường hợp này hàm $\sin \frac{1}{z}$ không có giá trị ngoại lệ Picard.

4.3.3 Dáng điệu của hàm tại điểm vô cùng

Ta lưu ý rằng trên mặt phẳng phức z chỉ tồn tại một điểm vô cùng và theo định nghĩa lân cận của điểm ∞ :

$$\mathcal{U}(\infty; \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} : d_{\overline{\mathbb{C}}}(z; \infty) < \varepsilon\}$$

Đó là phần ngoài hình tròn với bán kính $R = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} - 1}$ và với tâm tại gốc tọa độ. Trên mặt cầu Riemann lân cận đó tương ứng với hình tròn cầu với tâm tại cực bắc của mặt cầu.

Nếu thực hiện phép biến đổi $z = \frac{1}{\zeta}$ hay $\zeta = \frac{1}{z}$ thì lân cận điểm $z = \infty$ của mặt phẳng z biến thành lân cận điểm $\zeta = 0$ của mặt phẳng ζ . Do đó việc khảo sát dáng điệu của hàm $f(z)$ tại lân cận điểm $z = \infty$ được đưa về khảo sát dáng điệu của hàm $\varphi(\zeta) = f\left(\frac{1}{\zeta}\right)$ tại lân cận điểm $\zeta = 0$.

Định nghĩa 4.3.7. Điểm vô cùng $z = \infty$ của mặt phẳng phức là *điểm bất thường cô lập* của hàm chỉnh hình $f(z)$ nếu có thể chỉ ra giá trị $R > 0$ sao cho trong phần ngoài hình tròn $|z| > R$ hàm $f(z)$ không có các điểm bất thường mà khoảng cách từ đó đến gốc tọa độ là hữu hạn.

Giả sử $f(z) \in \mathcal{H}(\mathcal{U}(\infty; \varepsilon))$. Sau khi thực hiện phép biến đổi $z = \frac{1}{\zeta}$ ta thu được

$$f(z) = f\left(\frac{1}{\zeta}\right) = \varphi(\zeta)$$

và hàm $\varphi(\zeta)$ chỉnh hình trong lân cận nào đó của điểm $\zeta = 0$. Từ đó suy rằng *tính bất thường* của hàm $f(z)$ khi $z \rightarrow \infty$ và của $\varphi(\zeta)$ khi $\zeta \rightarrow 0$ là như nhau vì

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \lim_{\zeta \rightarrow 0} \varphi(\zeta).$$

Ta có

Định nghĩa 4.3.8. Giả sử $z = \infty$ là điểm bất thường cô lập của hàm $f(z)$. Người ta nói rằng điểm $z = \infty$ là *điểm bất thường khử được, cực điểm* hay *điểm bất thường cốt yếu* tùy theo giới hạn $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z)$ hữu hạn, bằng ∞ hay hoàn toàn không tồn tại.

Tuy nhiên các tiêu chuẩn về dạng của điểm bất thường được phát biểu dựa vào khai triển Laurent cần phải có sự thay đổi.

Khai triển Laurent của hàm $f(z)$ tại ∞ thu được từ khai triển Laurent của $\varphi(\zeta)$ tại lân cận điểm $\zeta = 0$ bằng cách thay $\zeta = \frac{1}{z}$:

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{a_{-n}}{z^n} + \sum_{n \geq 1} a_n z^n = \sum_{-\infty < b < +\infty} a_n z^n, \quad (4.51)$$

trong đó

chuỗi $\sum_{n \geq 0} \frac{a_{-n}}{z^n}$ là *phần chỉnh hình*

chuỗi $\sum_{n \geq 1} a_n z^n$ là *phần chính*.

Ta thấy, khác với khai triển Laurent trong lân cận điểm bất thường hữu hạn, trong khai triển (4.51) đối với hàm $f(z)$ tại lân cận điểm $z = \infty$ tập hợp mọi số hạng với lũy thừa dương của z đóng vai trò phần chính, còn tập hợp lũy thừa âm lập nên phần chỉnh hình. Từ định nghĩa 4.3.8 và cấu trúc của chuỗi Laurent (4.51) ta có

Định lý 4.3.9. Điểm $z = \infty$ là

1⁺ *điểm bất thường khử được* của hàm $f(z)$ khi và chỉ khi khai triển (4.51) không chứa phần chính (tức là không chứa các số hạng với lũy thừa dương của z);

2⁺ *cực điểm* khi và chỉ khi phần chính trong (4.51) chỉ chứa một số hữu hạn số hạng;

3⁺ *điểm bất thường cốt yếu* khi và chỉ khi phần chính chứa vô số số hạng (tức là chứa vô số số hạng với lũy thừa dương của z).

Đối với điểm bất thường cốt yếu tại ∞ định lý Weierstrass diễn đạt như sau: Nếu $z = \infty$ là điểm bất thường cốt yếu của hàm $f(z)$ thì trong lân cận

bất kỳ của nó hàm $f(z)$ nhận những giá trị gần một số phức cho trước bao nhiêu tùy ý.

Định lý Picard đối với trường hợp điểm bất thường cốt yếu vô cùng cũng được phát biểu tương tự như trường hợp hữu hạn.

Ta minh họa định lý Picard bằng hai ví dụ sau.

Ví dụ 10. 1) Điểm $z = \infty$ là điểm bất thường cốt yếu đối với hàm $f(z) = e^z$. Ta xét phương trình

$$e^z = A, \quad A \neq 0.$$

Phương trình này có các nghiệm sau đây

$$z_k = \ln |A| + i(\arg A + 2k\pi),$$

trong đó $\arg A$ là giá trị chính của argumen, $k \in \mathbb{Z}$. Từ đó suy rằng trong lân cận bất kỳ của điểm $z = \infty$ tồn tại vô số điểm z_k mà tại đó hàm e^z nhận giá trị A ($A \neq 0$). Giá trị $A = 0$ là giá trị ngoại lệ Picard (hàm e^z không nhận giá trị $A = 0$).

2) Đối với hàm $f(z) = \sin z$ điểm $z = \infty$ là điểm bất thường cốt yếu và đối với mỗi giá trị A phương trình $\sin z = A$ có vô số nghiệm

$$z_k = \frac{1}{i} \ln(iA + \sqrt{1 - A^2}) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Do đó hàm $f(z) = \sin z$ không có giá trị ngoại lệ Picard.

4.3.4 Phân loại hàm chỉnh hình

Phù hợp với sự phân loại điểm bất thường cô lập, ta sẽ phân loại các hàm chỉnh hình đơn giản nhất theo các điểm bất thường của chúng.

Định nghĩa 4.3.9. Hàm $f(z)$ chỉnh hình trong toàn mặt phẳng \mathbb{C} (tức là hàm không có điểm bất thường hữu hạn) được gọi là *hàm nguyên*.

Khai triển hàm nguyên $f(z)$ thành chuỗi Taylor ở lân cận điểm $z = 0$:

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n. \quad (4.52)$$

Vì hàm $f(z)$ chỉnh hình trong toàn mặt phẳng \mathbb{C} nên chuỗi (4.52) hội tụ với mọi z , và do đó chuỗi đó là chuỗi Laurent của hàm $f(z)$ tại lân cận điểm ∞ với phần chính là

$$f_1(z) = \sum_{n \geq 1} a_n z^n$$

và phần chỉnh hình

$$f_2(z) = a_0.$$

Trong $\overline{\mathbb{C}}$, điểm bất thường duy nhất của hàm nguyên chỉ có thể là điểm $z = \infty$.

Định lý 4.3.10. *Nếu điểm $z = \infty$ là cực điểm cấp n của hàm nguyên $f(z)$ thì $f(z)$ là đa thức bậc n .*

Chứng minh. Theo giả thiết, ta có

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + \sum_{n \geq 0} \frac{\alpha_n}{z^n}.$$

Đặt $g(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z$. Đó là phần chính của khai triển Laurent của hàm $f(z)$ trong lân cận điểm $z = \infty$. Hiển nhiên hàm

$$h(z) = f(z) - g(z)$$

là một hàm nguyên và điểm $z = \infty$ là điểm chỉnh hình của nó. Do đó theo định lý Liouville $h(z) \equiv \text{const}$. Từ đó suy ra $f(z)$ là đa thức bậc n . \square

Hàm nguyên, mà điểm $z = \infty$ là điểm bất thường cốt yếu được gọi là *hàm nguyên siêu việt*, (ví dụ các hàm $e^z, \sin z, \cos z, \dots$)

Lớp tổng quát hơn các hàm nguyên là các hàm phân hình.

Định nghĩa 4.3.10. Hàm $f(z)$ được gọi là *hàm phân hình* trong miền $D \subset \mathbb{C}$ nếu tồn tại tập hợp (hữu hạn hoặc vô hạn) các điểm cô lập

$$\{a_i\}_{i \in J}, \quad a_i \in D \quad \forall i \in J$$

mà mỗi điểm trong đó là cực điểm của hàm f sao cho

$$f \in \mathcal{H} \quad (D \setminus \{a_i\}).$$

Nói cách khác: trong tập hợp D hàm f không có các điểm bất thường nào khác ngoài cực điểm.

Trong lân cận của mỗi điểm thuộc D hàm phân hình có thể biểu diễn dưới dạng thương của hai hàm chỉnh hình $\varphi(z)/\psi(z)$, trong đó $\psi(z)$ không đồng nhất bằng 0. Một cách tự nhiên, ta có thể xác định phép cộng và nhân các hàm phân hình. Rõ ràng là đối với các phép toán đó, tập hợp các hàm phân hình trong D lập thành một vành.

Định lý 4.3.11. *Giả sử hàm $f(z)$ phân hình trong D . Khi đó hàm f' cũng là phân hình trong D . Hàm f và f' cũng có cực điểm như nhau, đồng thời nếu z_0 là cực điểm cấp $m > 0$ của hàm f thì nó là cực điểm cấp $m + 1$ của đạo hàm f' .*

Chứng minh. Hàm f' xác định và chỉnh hình tại mọi điểm của miền D không phải là cực điểm của hàm f . Ta sẽ chứng minh rằng nếu z_0 là cực điểm của f thì z_0 cũng là cực điểm của f' . Với z đủ gần z_0 ta có

$$f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^m} \cdot h(z),$$

trong đó $h(z)$ là hàm chỉnh hình trong lân cận điểm z_0 , $h(z_0) \neq 0$. Do đó, nếu $z \neq z_0$ thì

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{1}{(z - z_0)^{m+1}} [(z - z_0)h'(z) - mh(z)] \\ &= \frac{1}{(z - z_0)^{m+1}} \tilde{h}(z). \end{aligned}$$

Vì $\tilde{h}(z_0) = mh(z_0) \neq 0$ nên điểm z_0 là cực điểm cấp $m + 1$ của hàm f' . \square

Ta nhận xét rằng trong miền đóng bị chặn bất kỳ của mặt phẳng phức hàm phân hình chỉ có một số hữu hạn cực điểm.

Thật vậy, nếu trong miền đóng bị chặn bất kỳ $\overline{D} \subset \mathbb{C}$ hàm có vô số cực điểm thì từ tập hợp các cực điểm có thể trích ra dãy (z_n) hội tụ đến điểm z_0 nào đó nằm trong miền đóng được xét $z_0 \in \overline{D}$. Khi đó z_0 là điểm tụ của dãy các cực điểm (z_n) của $f(z)$ và

$$\lim_{z_n \rightarrow z_0} f(z_n) = \infty.$$

Do đó z_0 là điểm bất thường của hàm $f(z)$. Mặt khác là điểm tụ của dãy (z_n) , điểm z_0 không thể là điểm bất thường cô lập của f . Như vậy, điểm z_0 không thể là cực điểm của hàm $f(z)$. Nhưng điều đó mâu thuẫn với tính phân hình của $f(z)$.

Ta có định lý sau:

Định lý 4.3.12. *Hàm chỉnh hình $f(z)$ trong $\overline{\mathbb{C}}$ không có các điểm bất thường khác ngoài cực điểm khi và chỉ khi f là hàm hữu tỷ.*

Chứng minh. 1. Hiển nhiên hàm hữu tỷ là một hàm phân hình có một số hữu hạn cực điểm.

2. Ngược lại, rõ ràng là số cực điểm của hàm f trong $\overline{\mathbb{C}}$ là hữu hạn (vì $\overline{\mathbb{C}}$ là compact). Ta ký hiệu a_ν ($\nu = 1, 2, \dots, n$) là những cực điểm của nó và $g_\nu(z)$ là phần chính của khai triển Laurent tương ứng tại điểm a_ν . Gọi $g(z)$ là phần chính của khai triển Laurent tại điểm $z = \infty$ (nếu f chỉnh hình tại ∞ thì $g(z) \equiv 0$).

Hàm

$$\varphi(z) = f(z) - g(z) - \sum_{\nu=1}^n g_\nu(z)$$

chỉnh hình trong $\overline{\mathbb{C}}$ và theo định lý Liouville thì $\varphi(z) \equiv \text{const}$. Từ đó suy ra

$$f(z) = g(z) + \sum_{\nu=1}^n g_\nu(z) + \text{const}$$

là một hàm hữu tỷ. □

4.4 Tính bất biến của tập hợp mở

Một trong những tính chất tôpô quan trọng của hàm chỉnh hình là tính chất bất biến của tập hợp mở mà ta sẽ xét trong mục này.

4.4.1 Nguyên lý acgumen

Định lý 4.4.1. *Giả sử tập hợp mở $D \subset \mathbb{C}$ và $f \in \mathcal{H}(D)$ với tập hợp các 0-điểm trong D là $N_f(D)$. Giả sử $\partial\tilde{D}$ là biên định hướng của miền \tilde{D} nằm trong D sao cho*

$$\partial\tilde{D} \subset D \setminus N_f(D).$$

Khi đó nếu gọi $N_f(\tilde{D})$ là số 0-điểm của hàm f nằm trong \tilde{D} , thì ta có công thức

$$N_f(\tilde{D}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\tilde{D}} \frac{f'(z)}{f(z)} dz, \quad (4.53)$$

trong đó mỗi 0-điểm được tính một số lần bằng cấp của nó.

Chứng minh. Theo định lý duy nhất (xem nhận xét 13.4) trong \tilde{D} chỉ có một số hữu hạn 0-điểm của hàm f . Ta ký hiệu các không điểm đó là a_1, a_2, \dots, a_m với cấp tương ứng là $n(a_1), \dots, n(a_m)$. Như vậy

$$N_f(\tilde{D}) = \sum_{j=1}^m n(a_j).$$

Đối với mỗi 0-điểm a_j ta xét hình tròn $S(a_j) \subset \tilde{D}$ với tâm tại a_j và bán kính đủ bé sao cho

$$S(a_j) \cap S(a_i) = \emptyset; \quad i \neq j; \quad i, j = 1, 2, \dots, m.$$

Ta xét compact: $D^* = \tilde{D} \setminus \left\{ \bigcup_{j=1}^m \overset{\circ}{S}(a_j) \right\}$, trong đó $\overset{\circ}{S}(a_j)$ là phần trong của hình tròn $S(a_j)$.

Hiển nhiên biên của D^* là

$$\partial D^* = \partial \tilde{D} \cup \partial S(a_1) \cup \cdots \cup \partial S(a_m),$$

trong đó các đường tròn $\partial S(a_j)$ được lấy theo hướng âm.

Vì $\partial \tilde{D} \subset D \setminus N_f(D)$ nên hàm $g = \frac{f'}{f}$ chỉnh hình trong lân cận nào đó của biên $\partial \tilde{D}$. Do đó, đối với D^* ta có

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D^*} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 0,$$

hay là

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \tilde{D}} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{j=1}^m \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S(a_j)} \frac{f'(z)}{f(z)} dz. \quad (4.54)$$

Vì $a_j, j = 1, 2, \dots, m$ là 0-điểm của hàm f nên $f(z) = (z - a_j)^{n(a_j)} \cdot \varphi_j(z)$ trong đó $\varphi_j(z)$ chỉnh hình tại điểm a_j và $\varphi_j(a_j) \neq 0$.

Do đó

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n(a_j)}{z - a_j} \frac{\varphi'_j(z)}{\varphi_j(z)}. \quad (4.55)$$

Từ (4.54) và (4.55) ta thu được (4.53):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \tilde{D}} \frac{f'(z)}{f(z)} dz &= \sum_{j=1}^m \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S(a_j)} \frac{n(a_j)}{z - a_j} dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S(a_j)} \frac{\varphi'_j(z)}{\varphi_j(z)} dz \\ &= \sum_{j=1}^m n(a_j) = N_f(\tilde{D}). \end{aligned}$$

□

Định lý vừa chứng minh có thể diễn đạt về mặt hình học như sau. Ta biểu diễn $\partial \tilde{D}$ bằng tuyến

$$z = z(t), \quad t \in [a, b]$$

và ký hiệu $\Phi(t)$ là nguyên hàm của f'/f dọc theo tuyến đó. Khi đó

$$\int_{\partial \tilde{D}} \frac{f'(z)dx}{f(z)} = \Phi(b) - \Phi(a).$$

Mặt khác, $\Phi(t) = \ln f[z(t)]$, trong đó \ln là nhánh liên tục bất kỳ của hàm lôgarit biến thiên dọc theo biên $\partial \tilde{D}$. Vì

$$\ln f = \ln |f| + i \arg f$$

và hàm $\ln |f|$ đơn trị nên số gia của $\ln |f|$ dọc theo tuyến $\partial \tilde{D}$ bằng 0 và

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \tilde{D}} \frac{f'(z)}{f(z)} dz &= i \{ \arg f[z(b)] - \arg f[z(a)] \} \\ &= i \Delta_{\partial \tilde{D}} \arg f. \end{aligned}$$

Do đó

$$N_f(\tilde{D}) = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\partial \tilde{D}} \arg f. \quad (4.56)$$

Về mặt hình học, vế phải của (4.56) chỉ số vòng quay đầy đủ của vector $w = f(z)$ xung quanh điểm $w = 0$ khi z vòng quanh theo $\partial \tilde{D}$ (hình IV.2).

Hình IV.2

Ta ký hiệu $\Gamma^* = f(\partial \tilde{D}) : w = f[z(t)], t \in [a, b]$. Khi đó số $N_f(\tilde{D})$ trong công thức (4.53) và (4.56) bằng số vòng quay của vector w khi điểm w vòng quanh theo Γ^* . Số vòng quay đó được gọi là *chỉ số* của tuyến Γ^* đối với điểm

$w = 0$ và được ký hiệu là $\text{ind}_0 \partial D^*$. Do đó, công thức (4.56) có thể viết dưới dạng

$$N_f(\tilde{D}) = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\Gamma^*} \arg w = \text{ind}_0 \partial D^*.$$

Nhận xét 4.4.1. Thay vì xét không-điểm của hàm f ta có thể xét các A -điểm của nó, tức là nghiệm của phương trình $f(z) = A$. Để làm điều đó, ta chỉ cần thay hàm f bởi hàm $f(z) - A$ trong toàn bộ quá trình lập luận như trên. Nếu $\partial \tilde{D}$ không chứa A -điểm của f thì

$$\begin{aligned} N_{f,A}(\tilde{D}) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \tilde{D}} \frac{f' dz}{f - A} = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\partial \tilde{D}} \arg \{f(z) - A\} \\ &= \frac{1}{2\pi} \Delta_{\Gamma^*} \arg [w - A] = \text{ind}_A \partial D^*, \end{aligned}$$

trong đó $N_{f,A}(\tilde{D})$ là số A -điểm của hàm f trong \tilde{D} .

Ví dụ 1. (Định lý Gauss). Đa thức

$$P_n(z) = a_0 z^n + A_1 z^{n-1} + \cdots + a_n = \sum_{k=0}^n a_k z^{n-k}, \quad a_0 \neq 0$$

có n nghiệm (không-điểm) trên \mathbb{C} .

Vì $\lim_{z \rightarrow \infty} P_n(z) = \infty$ nên mọi nghiệm của $P_n(z)$ đều nằm trong hình tròn $\{|z| < R\}$ với bán kính R đủ lớn. Ta ký hiệu số nghiệm đó là N_p . Khi đó theo định lý 4.4.3 ta có

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{P'_n(z) dz}{P_n(z)} = N_p.$$

Mặt khác, dễ dàng thấy rằng với $|z|$ đủ lớn, thì

$$\begin{aligned} \frac{P'_n(z)}{P_n(z)} &= \frac{n a_0 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1}}{a_0 z^n + \cdots + a_n} \\ &= \frac{n}{z} \left[1 + \sum_{k \geq 1} \alpha_k \cdot z^{-k} \right] = \frac{n}{z} + \frac{\text{const}}{z^2} \cdot h(z), \end{aligned}$$

trong đó $h(z)$ là hàm chỉnh hình ở ngoài hình tròn $|z| \geq R$ và $\lim_{z \rightarrow \infty} h(z) = 1$.

Do đó, nếu $\Gamma(\rho)$ là đường tròn $\{|z| = \rho\}$ thì ta có

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(\rho)} \frac{P'_n(z)}{P_n(z)} dz = \frac{n}{2\pi i} \int_{\Gamma(\rho)} \frac{dz}{z} + \frac{\text{const}}{2\pi i} \int_{\Gamma(\rho)} \frac{h(z)}{z^2} dz.$$

Nhưng tích phân thứ hai ở vế phải dần đến 0 khi $\rho \rightarrow \infty$ nên

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(\rho)} \frac{P'_n(z) dz}{P_n(z)} = n.$$

Như vậy $N_p = n$, tức là đa thức bậc n có đúng n nghiệm trong \mathbb{C} .

Định lý 4.4.1 và công thức (4.53) có thể khái quát cho hàm phân hình. Tuy nhiên trong trường hợp này, nó không cho ta số không-điểm nằm trong \tilde{D} mà chỉ cho hiệu

$$N_f(\tilde{D}) - P_f(\tilde{D})$$

giữa số $N_f(\tilde{D})$ các không-điểm và số $P_f(\tilde{D})$ các cực điểm của hàm f trong \tilde{D} . Như vậy ta có

Định lý 4.4.2. *Giả sử $f(z)$ là hàm phân hình trong tập hợp mở D , $f \neq \text{const}$ với số không-điểm là N_f và số cực điểm P_f . Giả sử $\partial\tilde{D}$ là biên có hướng của miền $\tilde{D} \subset D$ sao cho*

$$\partial\tilde{D} \subset D \setminus \{N \cup P\}$$

(N và P là tập các không-điểm và cực điểm của hàm f). Khi đó nếu $N_f(\tilde{D})$ và $P_f(\tilde{D})$ lần lượt là số không-điểm và cực điểm của hàm f trong \tilde{D} thì ta có

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\tilde{D}} \frac{f'(z) dz}{f(z)} = N_f(\tilde{D}) - P_f(\tilde{D}), \quad (4.57)$$

trong đó mỗi không-điểm và mỗi cực điểm đều được tính một số lần bằng cấp của nó.

Trường hợp riêng, khi $f \in \mathcal{H}(D)$ thì vế phải của (4.57) bằng $N_f(\tilde{D})$.

Chứng minh. Hiển nhiên rằng $N_f(\tilde{D})$ và $P_f(\tilde{D})$ là hữu hạn. Ta ký hiệu b_1, b_2, \dots, b_n là các cực điểm của f nằm trong \tilde{D} với cấp tương ứng là $p(b_1), p(b_2), \dots, p(b_n)$ và như vậy

$$P_f(\tilde{D}) = \sum_{k=1}^n p(b_k).$$

Cũng như ở trên, lấy các không-điểm và cực điểm làm tâm ta dựng các hình tròn $S(a_j)$ và $S(b_j)$ đủ bé sao cho chúng ngoài nhau từng đôi một và cùng nằm trong \tilde{D} .

Tương tự như trong chứng minh định lý 4.4.1 ta có

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \tilde{D}} \frac{f'(z)dz}{f(z)} = \sum_{j=1}^m \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S(a_j)} \frac{f'(z)dz}{f(z)} + \sum_{j=1}^n \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S(b_j)} \frac{f'(z)dz}{f(z)}. \quad (4.58)$$

Đối với các không-điểm quá trình lý luận được tiến hành như ở trên.

Ta xét các cực điểm. Đối với cực điểm b_j ta có

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{h(z)}{(z - b_j)^{p(b_j)}}; \\ \frac{f'(z)}{f(z)} &= -\frac{p(b_j)}{z - b_j} + \frac{h'(z)}{h(z)}, \end{aligned} \quad (4.59)$$

trong đó $h(z)$ chỉnh hình và không có không-điểm trong lân cận điểm b_j .

Thế (4.59) vào tích phân thứ hai ở vế phải (4.58) và áp dụng (4.55) ta thu được

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \tilde{D}} \frac{f'(z)dz}{f(z)} &= \sum_{j=1}^m n(a_j) - \sum_{j=1}^n p(b_j) \\ &= N_f(\tilde{D}) - P_f(\tilde{D}). \end{aligned}$$

□

Định lý 4.4.3. (Nguyên lý acgumen)

Với các giả thiết của định lý 4.4.2 ta có

$$\frac{1}{2\pi} \Delta_{\partial \tilde{D}} \arg f(z) = N_f(\tilde{D}) - P_f(\tilde{D}). \quad (4.60)$$

Nói rõ hơn: giả sử điểm z vòng quanh theo các tuyến đóng $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$ của biên có hướng

$$\partial \tilde{D} = \{\Gamma_i\}_{i \in I} \quad \text{của miền } \tilde{D}.$$

Khi đó điểm $w = f(z)$ sẽ vòng quanh theo các tuyến đóng xác định $\Gamma'_1, \Gamma'_2, \dots, \Gamma'_n$. Tổng số vòng quay của điểm w theo các tuyến bao điểm $w = 0$ đó sẽ bằng hiệu giữa số 0-điểm và số cực điểm của hàm f trong miền \tilde{D} .

4.4.2 Định lý Rouché

Sử dụng các kết quả trong tiết trước ta sẽ chứng minh định lý quan trọng sau đây gọi là định lý Rouché.

Định lý 4.4.4. (Rouché)

Giả sử $f(z)$ và $g(z)$ là hai hàm chỉnh hình trong miền D ; Γ là biên có hướng của miền $\tilde{D} \subset D$. Khi đó nếu $|f(z)| > |g(z)|$ khắp nơi trên $\Gamma = \partial \tilde{D}$ thì:

- a) hàm $f + g$ không có không-điểm trên Γ ;
 - b) $N_f(\tilde{D}) = N_{f+g}(\tilde{D})$,
- (tức là số không-điểm của hàm f trong miền \tilde{D} bằng số không-điểm của hàm $f + g$ trong \tilde{D}).

Chứng minh. a) Điều khẳng định thứ nhất là hiển nhiên vì nếu $f(z) + g(z) = 0$ thì $|f(z)| = |g(z)|$ trên Γ .

b) Vì $|f(z)| > |g(z)| \geq 0 \Rightarrow f(z) \neq 0$ trên Γ . Theo định lý 4.4.1, số không-điểm của hàm $f(z) + g(z)$ trong \tilde{D} là

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f'(z) + g'(z)}{f(z) + g(z)} dz,$$

vì $f(z) + g(z) \neq 0$ trên Γ .

Mặt khác, tích phân này có thể biểu diễn dưới dạng

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f'(z) + g'(z)}{f(z) + g(z)} dz &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{d}{dz} [\ln(f(z) + g(z))] dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{d}{dz} (\ln f) dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{d}{dz} \ln \left(1 + \frac{g}{f}\right) dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f'(z) dz}{f(z)} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{d}{dz} \ln \left[1 + \frac{g(z)}{f(z)}\right] dz \quad (*) \end{aligned}$$

Ta xét hàm

$$\omega(z) = \frac{f(z) + g(z)}{f(z)}.$$

Dễ dàng thấy rằng tích phân thứ hai ở vế phải của (*) bằng

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^*} \frac{d\omega}{\omega},$$

trong đó Γ^* là ảnh của Γ qua ánh xạ $\omega = 1 + \frac{g}{f}$. Nhưng vì

$$\left| \frac{g(z)}{f(z)} \right| < 1,$$

nên Γ^* nằm trọn trong hình tròn $\{|\omega - 1| < 1\}$. Vì hình tròn này không chứa điểm $\omega = 0$ nên

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^*} \frac{d\omega}{\omega} = 0.$$

Như vậy

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f'(z) + g'(z)}{f(z) + g(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz.$$

□

Ví dụ 2. Tìm số không-điểm của hàm

$$\varphi(z) = z^9 - 6z^4 + 3z - 1$$

trong hình tròn $\{|z| < 1\}$.

Giải. Ta ký hiệu

$$f(z) = -6z^4; \quad g(z) = z^9 + 3z - 1$$

và do đó $f(z) + g(z) = \varphi(z)$.

Khi $|z| = 1$ ta có

$$\begin{aligned} |f(z)|_{|z|=1} &= 6; \\ |g(z)|_{|z|=1} &\leq (|z|^9 + 3|z| + 1)|_{|z|=1} = 5. \end{aligned}$$

Do đó $|f|_{\{|z|=1\}} > |g|_{\{|z|=1\}}$ và theo định lý Rouché số không-điểm của hàm φ trong hình tròn đơn vị là 4.

Ví dụ 3. Chứng minh rằng đa thức $P_n(z)$ bậc n trong ví dụ 1 (4.3) có n nghiệm trong \mathbb{C} (định lý Gauss).

Giải. Ta đặt

$$\begin{aligned} f(z) &= a_0 z^n, \\ g(z) &= a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \cdots + a_n. \end{aligned}$$

Với $|z|$ đủ lớn, ta có

$$|f(z)| > |g(z)|.$$

Thật vậy, khi $|z| \geq 1$ ta có

$$\begin{aligned} |a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n| &\leq |a_1| |z|^{n-1} + \cdots + |a_n| \\ &\leq |z|^{n-1} (|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|) \end{aligned}$$

Đặt $M = \sum_{m=1}^n |a_m|$. Khi đó $|z|^{n-1} M < |a_0 z^n|$ nếu $|z| > \frac{M}{|a_0|}$. Do đó

$$|a_0 z^n| > |a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n|$$

được thỏa mãn khi $|z| > R_0 = \max \left\{ 1, \frac{M}{|a_0|} \right\}$. Từ đó suy ra rằng đa thức $P_n(z) \neq 0$ khi $|z| > R_0$. Ta đặt

$$\Gamma(R) = \{z \in \mathbb{C} : |z| = R > R_0\}.$$

Hàm $f(z)$ và $g(z)$ ($f(z) + g(z) = P_n(z)$) thỏa mãn định lý Rouché trong hình tròn $\{|z| \leq R\}$. Do đó, số nghiệm của $P_n(z)$ trong \mathbb{C} bằng số nghiệm của hàm f trong \mathbb{C} và bằng bậc của đa thức đã cho.

Ví dụ 4. Tính số nghiệm của phương trình

$$0,9 \cdot e^{-z} + 1 = 2z$$

trong miền $D = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1, \operatorname{Re} z > 0\}$.

Giải. Ta đặt $f(z) = -2z + 1$, $g(z) = 0,9 \cdot e^{-z}$.

Khi $|z| = 1$, $x \geq 0$ ta có

$$\begin{aligned} |f(z)| &\geq 2|z| - 1 = 1, \\ |g(z)| &= 0,9 \cdot e^{-x} \leq 0,9. \end{aligned}$$

Khi $x = 0$, $-1 \leq y \leq 1$ ta có

$$\begin{aligned} |f(z)| &= \sqrt{1 + 4y^2} \geq 1; \\ |g(z)| &= 0,9. \end{aligned}$$

Như vậy

$$|f(z)|_{\partial D} > |g(z)|_{\partial D}.$$

Vì trong miền D hàm f có một không-điểm là $z_0 = \frac{1}{2}$ nên theo định lý Rouché phương trình đã cho có một nghiệm trong D .

4.4.3 Tính bất biến của tập hợp mở

Định lý 4.4.5. Giả sử $f(z)$ là hàm chỉnh hình, không đồng nhất bằng hằng số trong tập hợp mở $D \subset \mathbb{C}$. Khi đó ảnh $D^* = f(D)$ cũng là tập hợp mở trong \mathbb{C} .

Chứng minh. Giả sử w_0 là điểm tùy ý thuộc D^* và z_0 là một trong các nghịch ảnh của nó trong D . Vì D là tập hợp mở nên tồn tại hình tròn

$$S = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \delta\} \subset D.$$

Bằng cách giảm bán kính δ trong trường hợp cần thiết, ta có thể cho rằng hình tròn

$$\overline{S} = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq \delta\}$$

không chứa các w_0 -điểm khác ngoài điểm z_0 (vì $f \not\equiv \text{const}$ nên theo định lý duy nhất, mọi w_0 -điểm đều cô lập). Giả sử

$$\alpha = \min_{z \in \partial S} |f(z) - w_0|. \quad (4.61)$$

Hiển nhiên rằng $\alpha > 0$. Thật vậy, vì hàm $f(z) - w_0$ liên tục nên $|f(z) - w_0|$ đạt cực đại trên ∂S . Do đó, nếu $\alpha = 0$ thì trên ∂S tồn tại w_0 -điểm của hàm f . Điều đó trái với cách xây dựng hình tròn S .

Bây giờ ta cần chứng minh rằng

$$S^* = \{|w - w_0| < \alpha\} \subset D^*.$$

Giả sử w_1 là điểm tùy ý của hình tròn S^* , tức là

$$|w_1 - w_0| < \alpha. \quad (4.62)$$

Ta xét biểu thức

$$f - w_1 = (f - w_0) + (w_0 - w_1). \quad (4.63)$$

Từ (4.61) ta có

$$|f(z) - w_0| \geq \alpha; \forall z \in \partial S \quad (4.64)$$

và do đó, từ (4.62) - (4.64) ta thu được

$$|f(z) - w_1| \geq |f(z) - w_0| - |w_0 - w_1| > 0, \quad \forall z \in \partial S.$$

Như vậy hai hàm $f(z) - w_0$ và $w_1 - w_0$ thỏa mãn điều kiện định lý Rouché. Do đó trong hình tròn S hàm $f(z) - w_1$ có số không-điểm bằng số không-điểm của hàm $f(z) - w_0$, tức là có ít nhất một không-điểm, (điểm $z = z_0$ có thể là không-điểm bội của hàm $f(z) - w_0$). Như vậy, trong ∂S hàm f nhận giá trị w_1 và do đó $w_1 \in D^*$. Vì w_1 là điểm tùy ý, nên $S^* \subset D^*$.

Tính mở của D^* được chứng minh. \square

Định lý 4.4.6. (Nguyên lý bảo toàn miền)

Giả sử D là miền thuộc \mathbb{C} và $f \in \mathcal{H}(D)$, $f \neq \text{const}$. Khi đó ảnh $D^ = f(D)$ là một miền trong \mathbb{C} .*

Chứng minh. Tập hợp D^* là tập hợp mở theo định lý 4.4.5. Ta cần chứng minh D^* liên thông. Giả sử w_1 và w_2 là những điểm tùy ý của D^* và z_1 là một trong các nghịch ảnh của w_1 , z_2 là một trong các nghịch ảnh của w_2 qua ánh xạ f : $f(z_1) = w_1$, $f(z_2) = w_2$; $z_1, z_2 \in D$. Vì D liên thông nên tồn tại đường cong Jordan $\gamma \subset D$ nối z_1 với z_2 . Giả sử γ có phương trình $z = \gamma(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$. Khi đó $\forall t \in [\alpha, \beta]$ hàm $\gamma(t) \subset D$ và $\gamma(\alpha) = z_1$, $\gamma(\beta) = z_2$. Vì hàm f liên tục nên $\psi = f \circ \gamma$ là biểu diễn tham số của đường cong liên tục $\gamma^* \subset D^*$ nối w_1 với w_2 : $\psi(\alpha) = (f \circ \gamma)(\alpha) = f(z_1) = w_1$, $\psi(\beta) = (f \circ \gamma)(\beta) = f(z_2) = w_2$. Do vậy D^* là tập liên thông. Do đó D^* là miền. \square

4.5 Bài tập

1. Nếu $f \in \mathcal{H}(D)$, $D = \{z : |z| < 1\}$ và $|f(z)| < 1 \forall z \in D$ thì

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{1 - \overline{f(z_0)}f(z)} \right| \leq \left| \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0}z} \right|; \quad z_0, z \in D \quad (*)$$

Chỉ dẫn. Áp dụng Bổ đề Schwarz.

2. Chứng minh rằng nếu $F \in \mathcal{H}(D)$, $D = \{z : |z| < R\}$ và $|F(z)| \leq M \forall z \in D$ thì

$$\left| \frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} \right| \leq \frac{2MR}{|R^2 - \overline{z_0}z|}, \quad \forall z_0, z \in D.$$

Chỉ dẫn. Áp dụng (*) cho hàm $f(z) = \frac{F(Rz)}{M}$.

3. Chứng minh rằng

$$\left| \frac{a-b}{1-\bar{a}b} \right| \geq \frac{|a|-|b|}{1-|a||b|}, \quad \forall a, b \in \{z : |z| < 1\}.$$

4. Chứng minh rằng nếu hàm $f(z)$ chỉnh hình và $|f(z)| < 1$ trong hình tròn đơn vị thì

$$|f(z)| \leq \frac{|z| + |f(0)|}{1 + |f(0)||z|}.$$

Chỉ dẫn. Áp dụng 3 và 1.

5. Tìm những tập hợp điểm mà trên đó các chuỗi sau đây hội tụ đều:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n^2 z}{n^2},$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left\{ z^{2n} - \frac{1}{z^{2n}} \right\}.$

Chứng tỏ rằng trên các tập đó hai chuỗi nói trên không cho phép lấy đạo hàm từng số hạng. Hãy giải thích tại sao điều đó không mâu thuẫn với định lý Weierstrass?

6. Giả sử phần ảo của hàm nguyên $f(z)$ bị chặn bởi hằng số M trên toàn mặt phẳng. Chứng minh rằng khi đó hàm f là hằng số.

Chỉ dẫn. Đặt $\varphi(z) = e^{-if(z)}$ và xét $|\varphi(z)|$.

7. Hãy xác định xem có tồn tại hay không hàm chỉnh hình tại điểm $z = 0$ và tại các điểm $z_n = \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \dots$ nó nhận giá trị

- 1) $f\left(\frac{1}{n}\right) = \begin{cases} 0 & \text{khi } n = 1, \\ \frac{1}{2n} & \text{khi } n \neq 1; \end{cases}$
- 2) $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2n} \cos^2 \frac{n\pi}{2}.$

Trả lời. 1) Tồn tại, $f(z) = \begin{cases} z/2 & \text{khi } z \neq 1, \\ 0 & \text{khi } z = 1; \end{cases}$
 2) Không tồn tại

8. Hãy xét xem trong hình tròn đơn vị có tồn tại hay không hàm chỉnh hình mà

$$\begin{aligned} 1) \quad & f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n}{n+1}, \quad n = 2, 3, \dots; \\ 2) \quad & f\left(\frac{1}{n}\right) = \begin{cases} \frac{1}{n^2}, & n \neq 1, \\ 0, & n = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Trả lời. 1) Tồn tại, $f(z) = \frac{1}{1+z}$;
 2) Không tồn tại.

9. Giả sử a là điểm bất thường cốt yếu của hàm f . Hãy xét xem a là điểm bất thường loại nào đối với $\frac{1}{f(z)}$?

Trả lời. Điểm giới hạn của các cực điểm hoặc điểm bất thường cốt yếu.

10. Giả sử z_0 là cực điểm cấp m của $f(z)$. Chứng minh rằng tồn tại các hằng số dương ε, A, B sao cho $\forall z \in \{0 < |z - z_0| < \varepsilon\}$ ta có:

$$\frac{A}{|z - z_0|^m} \leq |f(z)| \leq \frac{B}{|z - z_0|^m}.$$

11. Hãy chứng minh định lý Liouville bằng cách tính tích phân

$$\int_{\mathcal{L}(R)} \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)} dz, \quad \mathcal{L}(R) = \{z : |z| = R\}, \quad |a| < R, \quad |b| < R$$

và ước lượng tích phân ấy khi $R \rightarrow \infty$.

Chỉ dẫn. Hãy chứng minh rằng tích phân I bằng

$$I = 2\pi i \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right).$$

12. Xác định số nghiệm của đa thức $P(z) = z^5 - 12z^2 + 14$:

1^+ trong vành tròn $\mathcal{V}_1 = \{z : 0 < |z| < 2\}$;

2^+ trong vành tròn $\mathcal{V}_2 = \{z : 1 < |z| < 2\}$;

3^+ trong nửa mặt phẳng bên phải.

Trả lời. $1^+ N_{\mathcal{V}_1}(f) = 5$; $2^+ N_{\mathcal{V}_2}(f) = 2$; $3^+ N(f) = 2$.

13. Hãy xác định các nghiệm của đa thức

$$P(z) = z^4 + z^3 + 4z^2 + 2z + 3$$

nằm trong những góc phần tư nào của mặt phẳng phức

Trả lời. Trong góc phần tư thứ II và thứ III.

14. Chứng minh rằng nếu $P(z)$ là đa thức bậc n thì đường mức $\mathcal{L}_R = \{z \in \mathbb{C} : |P(z)| = R\}$ (đường lemniscate) có thể phân rã thành không quá n thành phần liên thông.

Chỉ dẫn. Áp dụng nguyên lý môđun cực đại.

Chương 5

Hàm đa trị và diện Riemann

5.1	Phương pháp thác triển của Weierstrass	370
5.1.1	Phần tử chính tắc	371
5.1.2	Điểm bất thường của phần tử chính tắc	372
5.1.3	Phương pháp thác triển của Weierstrass	373
5.1.4	Hàm không cho phép thác triển giải tích	378
5.2	Các phương pháp khác	380
5.2.1	Thác triển giải tích theo tuyến	380
5.2.2	Thác triển đối xứng	386
5.3	Hàm giải tích đủ	391
5.3.1	Khái niệm hàm giải tích đủ	391
5.3.2	Một vài ví dụ	393
5.3.3	Tính đơn trị và đa trị. Định lý đơn trị (monodromie)	396
5.3.4	Nhánh và phương pháp tách nhánh chỉnh hình	399
5.3.5	Khái niệm về điểm bất thường	405
5.4	Khái niệm về diện Riemann	412

5.4.1	Một số ví dụ mở đầu	413
5.4.2	Phương pháp dựng diện Riemann	419
5.5	Bài tập	420

Trong các chương trước ta đã xét các hàm chỉnh hình trong miền cho trước và đã không quan tâm đến bản chất của hàm ở ngoài miền đó. Sự khảo sát có tính chất “địa phương” đó là cần thiết để có sự khảo sát các hàm một cách toàn cục - tức là khảo sát hàm trong miền tồn tại nói chung của nó.

Nguyên nhân chung trong sự xuất hiện tính đa trị của thác triển giải tích một hàm chỉnh hình từ một miền cho trước ra miền rộng hơn là ở chỗ: các điểm của mặt phẳng phức \mathbb{C} không phải là một tập hợp được sắp thứ tự, trong khi phép thác triển chỉ có thể đơn trị trong trường hợp khi ta có một thứ tự cố định giữa các điểm mà trên đó quá trình thác triển giải tích được diễn ra.

Một điều cũng cần nhấn mạnh là trong lý thuyết hàm người ta không được phép loại trừ các hàm đa trị vì ngay các hàm ngược của những hàm đơn trị giản đơn nhất cũng đã có thể là không đơn trị. Do đó vấn đề cơ bản là cần xây dựng một quan điểm không mâu thuẫn, cân đối và logic đối với các hàm đa trị.

5.1 Phương pháp thác triển của Weierstrass

Trong lý thuyết Weierstrass, đầu tiên hàm chỉ được xác định ở trong hình tròn hội tụ của chuỗi lũy thừa đầu tiên. Sau đó, hàm được xác định bởi các giá trị cho bởi chuỗi đó và mọi thác triển của nó.

Trong mục này ta sẽ trình bày một cách ngắn gọn quá trình thác triển giải tích theo Weierstrass hay còn gọi là *phương pháp chuẩn* của thác triển.

5.1.1 Phần tử chính tắc

Giả sử miền D trong định nghĩa 13.1 là một hình tròn. Nếu tâm a của hình tròn thuộc \mathbb{C} (hữu hạn!) thì hình tròn đó có dạng

$$S(a) = \{|z - a| < R_a, R_a \leq \infty\}.$$

Nếu $a = \infty$ thì $S(a) = \{|z| > R_a, R_a \geq 0\}$. Khi đó trong hình tròn $S(a)$ hàm f có thể biểu diễn dưới dạng

$$f_a(z) = \begin{cases} \sum_{n \geq 0} a_n (z - a)^n, & z \in \{|z - a| < R_a\}; \\ \sum_{n \geq 0} a_n z^{-n}, & z \in \{|z| > R_a\}. \end{cases}$$

Định nghĩa 5.1.1. Cặp $P_a = (S(a); f_a(z))$, trong đó $f_a(z)$ là tổng của chuỗi lũy thừa với tâm tại điểm a và $S(a)$ là hình tròn hội tụ của nó được gọi là một *phần tử chính tắc* với tâm tại a và $S(a)$ được gọi là hình tròn hội tụ của P_a .

Đối với các phần tử chính tắc việc định nghĩa thác triển giải tích trực tiếp và thác triển giải tích có phần đơn giản hơn vì các hình tròn hội tụ giao nhau theo một tập hợp liên thông và do đó không cần thiết phải chỉ rõ phép thác triển giải tích được tiến hành qua thành phần liên thông nào của giao. Ta có

Định nghĩa 5.1.2. Giả sử $S(a_1), S(a_2), \dots, S(a_n)$ là dãy hữu hạn các hình tròn thuộc \mathbb{C} sao cho tâm a_{i+1} của hình tròn $S(a_{i+1})$ nằm trong hình tròn $S(a_i)$, $i = 1, 2, \dots, n-1$. Dãy hình tròn ấy được gọi là *một xích*. Nếu $f_{a_i}(z)$ là phần tử chính tắc với hình tròn hội tụ $S(a_i)$ và $f_{a_{i+1}}(z)$ là thác triển giải tích trực tiếp của f_{a_i} , $i = 1, 2, \dots, n-1$ thì ta nói rằng f_{a_1} được *thác triển giải tích theo xích các hình tròn*.

Từ đó ta rút ra là: phần tử chính tắc $f_b(z)$ là thác triển giải tích của phần tử chính tắc $f_a(z)$ nếu

a) hoặc $f_b(z)$ là thác triển giải tích trực tiếp của $f_a(z)$;

b) hoặc $f_b(z)$ là khâu cuối cùng của một xích hữu hạn các phần tử

$$f_a(z) = f_{a_1}(z), f_{a_2}(z), \dots, f_{a_n}(z) = f_b(z),$$

trong đó mỗi chuỗi $f_{a_j}(z)$ là thác triển giải tích trực tiếp của $f_{a_{j-1}}(z)$, $j = 1, \dots, n-1$.

Dễ dàng thấy rằng quan hệ thác triển giải tích giữa các phần tử chính tắc có các tính chất:

1. *tính phản xạ*: mỗi phần tử chính tắc là thác triển giải tích của chính nó;
2. *tính đối xứng*: nếu phần tử chính tắc $f_b(z)$ là thác triển giải tích của phần tử $f_a(z)$ thì phần tử $f_a(z)$ là thác triển giải tích của phần tử $f_b(z)$;
3. *tính bắc cầu*: Nếu phần tử $f_b(z)$ là thác triển giải tích của phần tử $f_a(z)$, phần tử $f_c(z)$ là thác triển giải tích của $f_b(z)$ thì $f_c(z)$ là thác triển giải tích của $f_a(z)$.

5.1.2 Điểm bất thường của phần tử chính tắc

Giả sử $f_a(z)$ là phần tử chính tắc với tâm a và bán kính hội tụ R_a . Ta xét điểm s nào đó trên biên $\gamma(R_a) = \{|z - a| = R_a\}$ của hình tròn hội tụ của $f_a(z)$. Các điểm của $\gamma(R_a) = \gamma(R)$ có thể chia thành hai lớp.

1. Tại điểm s đã cho của đường tròn $\gamma(R)$ tồn tại phần tử chính tắc $f_s(z)$ là thác triển trực tiếp của $f_a(z)$. Những điểm này được gọi là những *điểm chính quy* của $f_a(z)$.
2. Phần tử như thế không tồn tại. Những điểm này được gọi là những *điểm bất thường* của phần tử chính tắc $f_a(z)$.

Từ định nghĩa điểm chính quy suy ra rằng: nếu $z_0 \in \gamma(R_a)$ là điểm chính quy thì mọi điểm của cung $\delta \ni z_0$ nào đó đều là điểm chính quy. Do đó, nếu tồn tại một điểm chính quy thì sẽ tồn tại vô số điểm chính quy. Ngược lại với điều này, điểm bất thường có thể là duy nhất.

Vì biên $\gamma(R_a)$ là đóng nên các điểm bất thường của một phần tử chính tắc lập thành một tập hợp đóng. Nói cách khác, điểm giới hạn của các điểm bất thường cũng là điểm bất thường.

Về điểm bất thường của phần tử chính tắc ta có

Định lý 5.1.1. *Trên biên $\gamma(R_a) = \{|z - a| = R_a\}$ của hình tròn hội tụ của chuỗi lũy thừa $f_a(z)$ có ít nhất một điểm bất thường của phần tử chính tắc.*

Chứng minh. Giả sử trên $\gamma(R_a)$ không tồn tại một điểm bất thường nào của phần tử chính tắc. Khi đó hàm này có thể thác triển giải tích đến mọi điểm nằm trên $\gamma(R_a)$. Kết quả của thác triển giải tích được ký hiệu là $\varphi(z)$. Như vậy $\varphi(z) \equiv f_a(z)$, $z \in S(a)$. Theo định nghĩa thác triển giải tích, đối với mỗi điểm $\zeta \in \gamma(R_a)$ đều tồn tại hình tròn $S(\zeta)$ với tâm tại ζ mà trong đó $\varphi(z)$ chỉnh hình.

Như vậy đường tròn $\gamma(R_a)$ được phủ bởi vô số hình tròn với tâm nằm trên $\gamma(R_a)$.

Theo bổ đề Heine - Borel, từ phủ vô hạn đó có thể trích một phủ con hữu hạn, nghĩa là tồn tại hệ các hình tròn $S(\zeta_j)$ $j = 1, 2, \dots, n$; $\zeta_j \in \gamma(R_a)$ phủ $\gamma(R_a)$. Giả sử z_j là một điểm của giao hai hình tròn kề nhau $S(\zeta_j)$ và $S(\zeta_{j+1})$ ($j = 1, 2, \dots, n$; $S(\zeta_{n+1}) \equiv S(\zeta_1)$) nằm ngoài $S(a)$. Ta đặt $R = \min_{1 \leq j \leq n} |z_j - a|$. Khi đó hàm $\varphi(z)$ trùng với $f_a(z)$ trong $S(a)$ và chỉnh hình trong hình tròn lớn hơn $S_0(a) = \{|z - a| < R, R > R_a\}$. Từ đó suy ra rằng hàm $f_a(z)$ biểu diễn chuỗi lũy thừa hội tụ trong hình tròn $S_0(a)$ với bán kính hội tụ $R > R_a$. Nhưng điều này không thể xảy ra. \square

Ta có hệ quả sau đây.

Hệ quả 5.1.1. *Bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa $f_a(z)$ bằng khoảng cách từ tâm a đến điểm bất thường gần nhất của phần tử chính tắc.*

Trong nhiều trường hợp, điều khẳng định này cho phép ta tìm bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa một cách rất có hiệu lực mà không sử dụng công thức Cauchy - Hadamard.

5.1.3 Phương pháp thác triển của Weierstrass

Phương pháp thác triển giải tích của Weierstrass dựa trên việc áp dụng một cách có hệ thống chuỗi Taylor. Nếu hàm $f(z)$ chỉnh hình trong miền D thì

nó có thể khai triển thành chuỗi Taylor tại lân cận của mỗi điểm $z_0 \in D$ với bán kính hội tụ R_0 không bé hơn khoảng cách ngắn nhất δ_0 từ z_0 đến biên ∂D . Nếu bán kính hội tụ lớn hơn khoảng cách ngắn nhất đó thì chuỗi vừa thu được sẽ xác định hàm chỉnh hình trong phần hình tròn nằm ngoài miền D và trùng với $f(z)$ trong hình tròn $\{|z - z_0| < \delta_0\}$. Do đó chuỗi vừa thu được cho ta thác triển hàm vào hình tròn $|z - z_0| < R_0$ (xem định lý 13.5)

Như vậy, về sau ta chỉ cần xét các khai triển Taylor và dùng các khai triển đó để thực hiện thác triển giải tích.

Nội dung của phương pháp Weierstrass là như sau. Giả sử ta bắt đầu từ chuỗi lũy thừa

$$f_{a_1}(z) = \sum_{n \geq 0} a_n(z - a_1)^n \quad (5.1)$$

có bán kính hội tụ hữu hạn $R_{a_1} > 0$. Chuỗi đó sẽ xác định hàm $f_{a_1}(z)$ chỉnh hình trong hình tròn $S(a_1) = \{|z - a_1| < R_{a_1}\}$. Nếu ta lấy điểm a_2 với môđun bé hơn R_{a_1} , thì dễ dàng thấy rằng các giá trị $f_{a_1}(a_2)$, $f'_{a_1}(a_2)$, \dots , $d_{a_1}^{(p)}(a_2)$ được tính (về mặt lý thuyết) theo các công thức

$$f_{a_1}^{(p)}(a_2) = \sum_{n=p}^{\infty} n(n-1) \cdots (n-p+1) a_n (a_2 - a_1)^{n-p}.$$

Do đó ta có thể xét chuỗi Taylor

$$\sum_{p \geq 0} \frac{f_{a_1}^{(p)}(a_2)}{p!} (z - a_2)^p; \quad (0! = 1). \quad (5.2)$$

Ta nhận xét rằng việc khai triển hàm $f_{a_1}(z)$ thành chuỗi theo các lũy thừa của $(z - a_2)$ có thể tiến hành một cách nhanh chóng bằng cách dựa vào hệ thức

$$\begin{aligned} (z - a)^n &= [(z - a_2) + (a_2 - a_1)]^n \\ &= \sum_{0 \leq k \leq n} C_n^k (a_2 - a_1)^{n-k} (z - a_2)^k \end{aligned}$$

và nhóm các từ của chuỗi thu được sau khi thế biểu thức vừa viết vào (5.1).

Giả sử chuỗi (5.2) hội tụ trong hình tròn

$$S(a_2) = \{|z - a_2| < R_{a_2}, R_{a_2} \geq R_{a_1} - |a_2 - a_1|\}.$$

Nếu $R_{a_2} = R_{a_1} - |a_2 - a_1|$ thì hình tròn $S(a_2)$ tiếp xúc trong với hình tròn $S(a_1)$. Trong trường hợp này ta không thu được thác triển giải tích.

Giả sử $R_{a_2} > R_{a_1} - |a_2 - a_1|$. Khi đó hình tròn $S(a_2)$ vượt ra khỏi giới hạn của hình tròn $S(a_1)$. Trong hình tròn $S(a_2)$ chuỗi (5.2) xác định hàm $f_{a_2}(z)$ chỉnh hình trong $S(a_2)$ và

$$f_{a_1}(z) \equiv f_{a_2}(z), \quad z \in S(a_1) \cap S(a_2).$$

Do đó $f_{a_2}(z)$ là thác triển giải tích trực tiếp của $f_{a_1}(z)$ từ hình tròn $S(a_1)$ vào hình tròn $S(a_2)$.

Như vậy, trong miền $S(a_1) \cup S(a_2)$ ta thu được hàm chỉnh hình

$$f(z) = \begin{cases} f_{a_1}(z), & z \in S(a_1), \\ f_{a_2}(z), & z \in S(a_2). \end{cases}$$

Nói cách khác: hàm $f(z)$ chỉnh hình trong miền giới hạn bởi các cung tròn AmB và AnB (hình V.1). Từ đó ta cũng thấy rằng nếu $z = a_3$ thuộc hình quạt Aa_1B của $S(a_1)$ thì bán kính hội tụ của mỗi chuỗi Taylor biểu diễn hàm $f(z)$ tại điểm a_3 sẽ không bé hơn khoảng cách từ điểm a_3 đến biên của miền $AmBnA$ và lớn hơn $R_{a_1} - |a_3|$, và mỗi điểm của hình quạt Aa_1B đều cho phép thác triển giải tích hàm $f(z)$ ra khỏi giới hạn của $S(a_1)$. Do đó, nếu đối với a_2 nào đó miền $R_{a_2} = R_{a_1} - |a_2|$ thì ta không thể thác triển giải

Hình V.1

tích bằng cách xuất phát từ các điểm nằm trên bán kính a_1H đi qua điểm a_2 , trong đó H là điểm cuối của bán kính hình tròn $S(a_1)$. Trong trường hợp này, điểm H là điểm bất thường của $f_{a_1}(z)$.

Vì trên biên của hình tròn hội tụ của chuỗi lũy thừa có ít nhất một điểm bất thường nên các điểm bất thường có thể rơi vào A hoặc B . Cũng có thể xảy ra trường hợp mọi điểm của $AmBnA$ đều là điểm bất thường đối với $f(z)$, khi đó $f(z)$ không thể thác triển rộng hơn nữa. Giả sử rằng không phải mọi điểm của $AmBnA$ đều là điểm bất thường. Khi đó tìm được điểm a_3 và chuỗi

$$\sum_{q \geq 0} \frac{f^{(q)}(a_3)}{q!} (z - a_3)^q$$

với hình tròn hội tụ $S(a_3)$ vượt ra khỏi giới hạn $AmBnA$. Trong phần hình tròn $S(a_3)$ nằm ngoài $AmBnA$ ta sẽ thu được một thác triển mới của $f(z)$ mà không cần phân biệt a_3 thuộc $S(a_1)$ hay $S(a_2)$. Như vậy ta thu được hàm chỉnh hình

$$f(z) = \begin{cases} f_{a_1}(z), & z \in S(a_1), \\ f_{a_2}(z), & z \in S(a_2), \\ f_{a_3}(z), & z \in S(a_3). \end{cases}$$

Sau khi bước thứ hai này đã hoàn thành ta chuyển sang bước thứ ba, thứ tư,...

Giả sử tồn tại một dãy các phần tử chính tắc

$$f_{a_1}(z), f_{a_2}(z), f_{a_3}(z), \dots, f_{a_n}(z);$$

sao cho chuỗi $f_{a_j}(z)$ là thác triển giải tích trực tiếp của $f_{a_{j-1}}(z)$, $1 \leq j \leq n-1$. Khi đó phần tử chính tắc $f_{a_n}(z)$ là thác triển giải tích của phần tử chính tắc $f_{a_1}(z)$ dọc theo dây xích các hình tròn $S(a_1), S(a_2), \dots, S(a_n)$.

Thuật toán đã nêu trên đây để thác triển giải tích có thể tiến hành vô hạn nếu ta chọn tâm của các khai triển Taylor là những điểm chính quy ngày càng mới đối với các phần tử chính tắc đã thu được.

Ta nhận xét rằng vì hai phần tử chính tắc $f_{a_j}(z)$ và $f_{a_{j-1}}(z)$ là thác triển giải tích trực tiếp của nhau nên

$$\partial S(a_j) \cap \partial S(a_{j-1}) \neq \emptyset.$$

Thật vậy, nếu $S(a_j) \subset S(a_{j-1})$ thì $f_{a_j}(z)$ là hàm chỉnh hình trong hình tròn tâm a_j bán kính lớn hơn bán kính R_{a_j} . Do đó hình tròn $S(a_j)$ không còn là hình tròn hội tụ của $f_{a_j}(z)$ nữa.

Ví dụ 1. Giả sử hàm đầu tiên $f_1(z)$ được cho trong hình tròn $S(0) = \{|z| < 1\}$ bởi chuỗi

$$f_1(z) = \sum_{n \geq 0} z^n.$$

Hiển nhiên tổng $f_1(z) = \frac{1}{1-z}$.

Ta chọn điểm $z_0 \neq 0$ tùy ý trong hình tròn $S(0)$ và khai triển hàm $f_1(z)$ theo lũy thừa $(z - z_0)^n$. Dễ dàng thấy rằng khai triển Taylor của $f_1(z)$ tại lân cận z_0 có dạng

$$f_2(z) = \sum a_n^1 (z - z_0)^n, \quad a_n^1 = \frac{f_1^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{(1 - z_0)^{n+1}}.$$

Do đó

$$f_2(z) = \sum \frac{(z - z_0)^n}{(1 - z_0)^{n+1}}.$$

Dễ dàng kiểm tra rằng bán kính hội tụ R_0 của chuỗi này bằng $|1 - z_0|$. Nếu điểm z_0 không nằm trên đoạn $[0, 1]$ thì $R_0 = |1 - z_0| > 1 - |z_0|$, nghĩa là R_0 lớn hơn khoảng cách từ z_0 đến đường tròn $\partial S(0)$. Do đó, hình tròn hội tụ $S(z_0) = \{|z - z_0| < R_0\}$ vượt ra khỏi giới hạn của đường tròn $\partial S(0)$. Trong hình tròn $S(z_0)$ chuỗi trên đây xác định hàm chỉnh hình $f_2(z) = \frac{1}{1-z}$ và

$$f_2(z) = f_1(z), \quad z \in S(0) \cap S(z_0).$$

Như vậy $f_2(z)$ là thác triển giải tích của f_1 từ $S(0)$ vào $S(z_0)$. Vì $R_0 = |1 - z_0|$ bằng khoảng cách từ điểm 1 đến điểm z_0 nên với mọi vị trí của z_0 trong $S(0)$ biên $\partial S(z_0)$ đều phải đi qua điểm $z = 1$.

Bây giờ ta lấy điểm $z_1 \neq z_0$, $z_1 \in \{|z - z_0| < |1 - z_0|\}$ làm tâm và lại thu được khai triển

$$\sum_{n \geq 0} \frac{(z - z_1)^n}{1 - z_1)^{n+1}}$$

hội tụ trong hình tròn $S(z_1) = \{|z - z_1| < |1 - z_1|\}$ đến hàm $f_3(z) = \frac{1}{1-z}$ trùng với hàm f_1 và f_2 trong các phần chung của $S(z_1)$ với miền xác định của hàm f_1 và f_2 . Do đó $f_3(z)$ là thác triển giải tích của f_1 ra miền $S(z_1) = \{|z - z_1|, |1 - z_1|\}$. Với mọi vị trí của điểm z_1 biên của hình tròn $S(z_1)$ đều phải đi qua điểm $z = 1$.

Bằng cách lặp lại quá trình đó, ta thu được thác triển giải tích hàm $f_1(z)$ ra toàn mặt phẳng trừ điểm $z = 1$. Như vậy hàm

$$F(z) = \frac{1}{1-z}$$

là thác triển giải tích của $f_1(z)$ từ hình tròn đơn vị ra miền $D = \overline{\mathbb{C}} \setminus \{1\}$.

Nhận xét 5.1.1. 1. Về mặt lý thuyết, phương pháp thác triển của Weierstrass tiện lợi trong mọi trường hợp. Nhưng trong các bài toán cụ thể, việc áp dụng phương pháp đó gặp rất nhiều khó khăn bởi tính phức tạp của nó.

2. Quá trình thác triển giải tích được trình bày trên đây là cơ sở của lý thuyết hàm số được Weierstrass đưa ra, trong đó Weierstrass đã lấy chuỗi lũy thừa làm nền tảng để định nghĩa hàm giải tích mà ta sẽ trình bày trong mục sau.

5.1.4 Hàm không cho phép thác triển giải tích

Tuy phần lớn các chuỗi lũy thừa thông thường đều cho phép thác triển giải tích ra khỏi giới hạn của hình tròn hội tụ đầu tiên nhờ các chuỗi Taylor, nhưng không nên nghĩ rằng đối với mọi chuỗi lũy thừa phép thác triển giải tích đều luôn luôn thực hiện được. Weierstrass, người đầu tiên đưa ra định nghĩa thác triển giải tích, đã chứng tỏ bằng ví dụ rằng tồn tại những phần tử chính tắc mà *mọi điểm biên của hình tròn hội tụ đều là điểm bất thường*, nghĩa là biên của hình tròn hội tụ là một *đường bất thường*.

Ta xét chuỗi

$$f(z) = 1 + z + z^2 + z^6 + \cdots + z^{n!} + \dots \quad (5.3)$$

Dễ dàng thấy rằng bán kính hội tụ của chuỗi (5.3) là bằng 1. Do đó trên đường tròn đơn vị có ít nhất một điểm bất thường của hàm $f(z)$.

Nếu dần đến điểm $z = 1$ từ phía trong thì mỗi số hạng của chuỗi (5.3) đều dần đến 1, còn tổng của nó thì dần đến ∞ . Từ đó suy rằng $z = 1$ là điểm bất thường của $f(z)$.

Trên mỗi cung bé tùy ý của đường tròn $\{|z| = 1\}$ đều tồn tại những điểm có argumen bằng 2π nhân với một số hữu tỷ nào đó. Ta đặt

$$z = re^{2\pi i \frac{m}{n}}, \quad r < 1$$

$m, n \in \mathbb{Z}$. Khi đó

$$z^{n!} = r^{n!} e^{2\pi i m(n-1)!} = r^{n!}$$

$$z^{(n+1)!} = (z^{n!})^{n+1} = (r^{n!})^{n+1} = r^{(n+1)!}, \dots$$

Từ đó có thể viết chuỗi (5.3) dưới dạng

$$f(z) = (1 + z + z^2 + \dots + z^{(n-1)!}) + r^{n!} + r^{(n+1)!} + \dots$$

Khi $r \rightarrow 1$, biểu thức trong dấu ngoặc

$$1 + z + \dots + z^{(n-1)!}$$

dần đến một giới hạn nào đó, còn phần dư dần đến ∞ . Điều đó chứng tỏ rằng các điểm dạng $z = e^{2\pi i \frac{m}{n}}$ đều là điểm bất thường của hàm $f(z)$. Vì tập hợp các điểm $z = e^{2\pi i \frac{m}{n}}, m, n \in \mathbb{Z}$ lập nên tập hợp trù mật khắp nơi trên đường tròn $\{|z| = 1\}$ và vì tập hợp các điểm bất thường là đóng nên mọi điểm thuộc đường tròn đơn vị đều là điểm bất thường của hàm $f(z)$.

Trong trường hợp này hàm $f(z)$ hoàn toàn không thể thác triển đến điểm z nằm ngoài đường tròn $\{|z| = 1\}$ và một hàm như vậy được gọi là hàm không thác triển được, còn đường tròn $\{|z| = 1\}$ được gọi là *biên tự nhiên* của hàm.

5.2 Các phương pháp khác

Nếu thác triển giải tích của một hàm tồn tại thì thác triển đó có thể xây dựng bởi một xích các miền tròn như đã mô tả trong mục trước. Nhưng khái niệm này còn chưa hoàn toàn tiện lợi để thu được một biểu tượng rõ ràng về đặc tính đa trị xuất hiện trong thác triển giải tích. Khái niệm có hiệu lực nhất để đạt được mục đích đó là khái niệm thác triển giải tích theo tuyến.

5.2.1 Thác triển giải tích theo tuyến

Không hạn chế tổng quát, ta có thể giả thiết rằng mọi tuyến đang xét đều được tham số hóa trên đoạn $I = [0, 1]$.

Thác triển giải tích theo tuyến được định nghĩa như sau.

Định nghĩa 5.2.1. Giả sử cho tuyến

$$\gamma : I \rightarrow \mathbb{C}$$

với điểm đầu $a = \gamma(0)$ và điểm cuối $b = \gamma(1)$, và phần tử chính tắc

$$f_*(z) = f_{\gamma(0)}(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z - \gamma(0))^n$$

với tâm $\gamma(0) = a$ tại điểm đầu của tuyến γ . Ta nói rằng phần tử chính tắc f_0 thác triển giải tích được theo tuyến nếu

1. tồn tại họ các phần tử chính tắc

$$f_t(\gamma) = f_{\gamma(t)}(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z - \gamma(t))^n, \quad t \in I$$

với tâm tại điểm $a_t = \gamma(t)$ và bán kính hội tụ $R_t = R(\gamma(t)) \neq 0$ (nghĩa là mỗi giá trị $t \in I$ đều tương ứng với phần tử chính tắc f_t);

2. nếu $u(t_0) \subset [0, 1]$ là lân cận liên thông của điểm $t_0 \in I$ mà

$$\gamma(t) \subset S[\gamma(t_0)] = \{z - \gamma(t_0) \mid < R_{t_0}\}, \quad \forall t \in u(t_0)$$

thì với $t \in u(t_0)$ bất kỳ, phần tử chính tắc f_t là thác triển giải tích trực tiếp của f_{t_0} .

Trong trường hợp f_0 thác triển được theo tuyến thì ta nói rằng phần tử chính tắc $f_1 = f_{\gamma(1)}$ của họ trên (với tâm tại điểm cuối $b = \gamma(1)$ của tuyến) thu được từ f_0 bằng thác triển giải tích theo γ . Ngược lại, phần tử chính tắc f_0 thu được từ f_1 bằng thác triển giải tích theo tuyến γ^- .

Thác triển giải tích theo tuyến có thể xem như trường hợp giới hạn của thác triển giải tích theo một xích miền: thay cho xích hữu hạn các miền và hàm chỉnh hình trong các miền tương ứng đó, ta sẽ lấy một họ liên tục các hàm và miền. Về sau ta sẽ thấy rằng thác triển giải tích theo tuyến luôn luôn có thể đưa về thác triển giải tích theo một xích các hình tròn.

Bây giờ ta chuyển sang xét một số tính chất của thác triển giải tích theo tuyến.

Định lý 5.2.1. *Bán kính hội tụ $R(a)$ của chuỗi $f_a(z)$ hoặc đồng nhất bằng vô cùng, hoặc là hàm liên tục của tâm a .*

Chứng minh. Giả sử $R(a) < \infty$ đối với t_0 nào đó, $a_0 = \gamma(t_0)$. Ta lấy t_1 sao cho điểm $\gamma(t_1)$ nằm trong hình tròn hội tụ của phần tử chính tắc $f_{t_0}(z)$ và

$$|\gamma(t_0) - \gamma(t_1)| < \frac{R(a_0)}{2}.$$

Khi đó bán kính hội tụ của chuỗi $f_{t_1}(z)$ không bé hơn khoảng cách từ $\gamma(t_1)$ đến biên của hình tròn hội tụ $f_{t_0}(z)$. Do đó

$$R[\gamma(t_1)] \geq R[\gamma(t_0)] - |\gamma(t_0) - \gamma(t_1)|.$$

Điểm $\gamma(t_0)$ nằm trong hình tròn hội tụ của $f_{t_1}(z)$ nên

$$R[\gamma(t_0)] \geq R[\gamma(t_1)] - |\gamma(t_0) - \gamma(t_1)|.$$

Như vậy

$$|R(\gamma(t_0)) - R(\gamma(t_1))| \leq |\gamma(t_0) - \gamma(t_1)|$$

và từ đó suy ra kết luận của định lý. \square

Định lý 5.2.2. *Phép thác triển giải tích phần tử chính tắc cho trước theo tuyến γ luôn luôn dẫn đến một phần tử chính tắc P_1 duy nhất không phụ thuộc vào cách chọn họ các phần tử thực hiện thác triển.*

Chứng minh. Thật vậy, giả sử P_t và Q_t là hai thác triển của cùng một phần tử $P_0 \equiv Q_0$ dọc theo tuyến γ . Nếu $E = \{t \in J : P_t \equiv Q_t\}$ thì E có các tính chất sau đây

- a) $E \neq \emptyset$ vì điểm $t = 0 \in E$;
- b) E là tập hợp mở. Thật vậy, với t_0 bất kỳ cả hai chuỗi P_{t_0} và Q_{t_0} đều hội tụ trong hình tròn

$$|z - \gamma(t_0)| < \varepsilon(t_0),$$

trong đó $\varepsilon(t_0)$ bằng bán kính bé nhất trong hai bán kính hội tụ. Tồn tại số $\delta = \delta(t_0) > 0$ sao cho

$$|\gamma(t_0) - \gamma(t)| < \varepsilon(t_0), \quad \forall t \in \{|t - t_0| < \delta\},$$

cho nên P_t và Q_t là thác triển giải tích trực tiếp tương ứng của P_{t_0} và Q_{t_0} khi $|t - t_0| < \delta$. Nếu $t_0 \in E$ thì $P_{t_0} \equiv Q_{t_0}$ và các thác triển giải tích trực tiếp của chúng P_t và Q_t cũng trùng nhau. Như vậy $t \in E$ nếu $|t - t_0| < \delta$. Tính mở của E được chứng minh.

- c) E là tập hợp đóng. Giả sử t_0 là điểm giới hạn của E . Khi đó tồn tại $t_1 \in E$ sao cho

$$|t_1 - t_0| < \delta(t_0).$$

và $P_{t_1} = Q_{t_1}$. Nhưng hình tròn hội tụ của ba chuỗi P_{t_1} , P_{t_0} và Q_{t_0} giao nhau và trong giao đó tổng của ba chuỗi trùng nhau. Như vậy $P_{t_0} \equiv Q_{t_0}$ và $t_0 \in E$.

Từ ba tính chất trên đây suy ra $E = J$ và như vậy $P_t \equiv Q_t$ với mọi $t \in J$. Do đó $P_1 = Q_1$. \square

Định lý 5.2.3. *Phép thác triển giải tích phần tử P_0 dọc theo tuyến γ luôn luôn có thể thay bằng phép thác triển giải tích theo một xích hữu hạn các hình tròn.*

Chứng minh. Vì bán kính hội tụ $R(\gamma(t))$ là hàm liên tục dương của $\gamma(t)$ nên $R(\gamma(t)) \geq \delta > 0$ với mọi $t \in J$. Ta chọn dãy các giá trị $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ sao cho

$$|\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j)| < \delta, \quad 0 \leq j \leq n-1.$$

Khi đó các hình tròn $S_j = \{|z - \gamma(t_j)| < R(\gamma(t_j))\}$, $0 \leq j \leq n-1$ lập nên một xích hữu hạn các hình tròn, còn các phần tử P_0, P_1, \dots, P_{t_n} lập nên thác triển giải tích theo xích các hình tròn. \square

Tiếp theo, nếu phần tử P_0 được thác triển giải tích theo tuyến γ_1 , nối điểm a với điểm b thì thác triển giải tích P_0 dọc theo tuyến bất kỳ khác cũng nối a với b và đủ gần γ_1 sẽ dẫn đến một phần tử duy nhất P_1 . Cụ thể ta có

Định lý 5.2.4. *Giả sử δ là giá trị cực tiểu của bán kính hội tụ $R(\gamma(t))$ của phần tử chính tắc P_t trên γ . Giả sử $\gamma_1 : z = \gamma_1(t)$, $t \in J$, là tuyến bất kỳ khác thỏa mãn điều kiện*

$$\gamma_1(0) = \gamma(0) = a, \quad \gamma_1(1) = \gamma(1) = b,$$

$$|\gamma_1(t) - \gamma(t)| \leq \frac{\delta}{4}.$$

Khi đó nếu Q_t là phần tử thu được từ $P_0 = Q_0$ bằng thác triển giải tích theo γ_1 thì

$$P_1 = Q_1.$$

Chứng minh. Ta xét dãy điểm $0 = t_0 < \dots < t_n = 1$ thỏa mãn điều kiện $|\gamma(t) - \gamma(t_{i-1})| < \frac{\delta}{4}$ với mọi $t \in [t_{i-1}, t_i]$ $0 \leq i \leq n$. Khi đó phép thác triển P_0 thành P_1 có thể thực hiện theo xích hữu hạn các thác triển trực tiếp.

Giả sử L_i là đoạn thẳng nối $\gamma(t_i)$ với $\gamma_1(t_i)$. Ta xét thác triển P_0 , từ điểm a đến điểm $\gamma(t_1)$. Phép thác triển này có thể thực hiện:

- a) theo tuyến γ từ điểm a đến điểm $\gamma(t_1)$; và
- b) theo tuyến hợp gồm đoạn của γ_1 từ điểm a đến điểm $\gamma_1(t_1)$ và L_1^- từ $\gamma_1(t_1)$ đến $\gamma(t_1)$.

Cả hai thác triển trên cùng đưa đến một phần tử P_{t_1} vì đó là hai thác triển xảy ra trong hình tròn hội tụ của phần tử chính tắc $P_0 \equiv Q_0$.

Bây giờ ta thác triển tiếp tục P_{t_1} từ điểm $\gamma(t_1)$ đến điểm $\gamma(t_2)$. Phép thác triển này có thể thực hiện:

- a) dọc theo γ từ điểm $\gamma(t_1)$ đến $\gamma(t_2)$ và thu được phần tử P_{t_2} ;
- b) hoặc theo tuyến hợp gồm đoạn L_1 , đoạn của γ_1 từ điểm $\gamma_1(t_1)$ đến điểm $\gamma_1(t_2)$ và L_2^- từ $\gamma_1(t_2)$ đến $\gamma(t_2)$ và cũng thu được phần tử P_{t_2} (vì trong phép thác triển này, ta không ra khỏi hình tròn hội tụ của P_{t_1}).

Ta nhận xét rằng trong thác triển P_0 từ a đến $\gamma(t_2)$ ta đã thác triển theo L_1 liên tiếp theo hai hướng ngược nhau, nên kết quả sẽ không đổi nếu ta bỏ qua L_1 . Như vậy, ta đã thác triển dọc theo hai tuyến:

- a) tuyến từ a đến $\gamma(t_2)$ dọc theo γ ; và
- b) tuyến từ a đến $\gamma_1(t_2)$ và sau đó từ $\gamma_1(t_2)$ đến $\gamma(t_2)$ theo L_2^- , và đã đưa đến một kết quả là phần tử chính tắc P_{t_2} .

Tiếp tục quá trình đó, sau một số hữu hạn bước ta sẽ đến điểm b và thu được $P_1 \equiv Q_1$. \square

Để kết thúc việc nghiên cứu các tính chất của thác triển theo tuyến, ta chứng minh tính bất biến của thác triển theo các tuyến đồng luân. Định lý đó có ý nghĩa cực kỳ quan trọng đối với lý thuyết các hàm đa trị mà ta sẽ thấy rõ trong mục sau.

Định lý 5.2.5. *Giả sử*

$$\gamma_0 = \gamma_0(t), \quad t \in J, \quad \gamma_1 = \gamma_1(t), \quad t \in J$$

là những tuyến có đầu mút chung đồng luân với nhau và giả sử phần tử chính tắc P thác triển giải tích được dọc theo tuyến bất kỳ

$$\gamma_u = \gamma_u(t), \quad u \in J$$

thực hiện phép đồng luân ($\gamma_0 \sim \gamma_1$) ấy. Khi đó, các kết quả của thác triển phần tử P theo γ_0 và γ_1 là trùng nhau.

Chứng minh. Theo định nghĩa phép đồng luân và điều kiện của định lý tồn tại họ các tuyến $\gamma_u = \gamma_u(t)$, $0 \leq u \leq 1$ phụ thuộc liên tục vào u sao cho

- a) mọi tuyến γ_u đều có chung điểm đầu và điểm cuối;
- b) tuyến γ_u trùng với γ_0 khi $u = 0$ và trùng với γ_1 khi $u = 1$;
- c) thác triển giải tích phần tử P theo mọi tuyến γ_u đều có thể thực hiện được.

Để đơn giản cách lý luận, ta tạm gọi hai tuyến với các đầu mút chung là tương đương nếu kết quả của thác triển theo các tuyến đó là như nhau. Ta cần chứng minh rằng mọi tuyến γ_u , $0 \leq u \leq 1$ đều tương đương với nhau.

Từ định lý 5.2.4 ta suy ra rằng với $u > 0$ đủ bé, các tuyến γ_u đều tương đương với γ_0 . Ta ký hiệu u^* là cận dưới đúng của các giá trị u , $0 \leq u \leq 1$ mà tuyến γ_u không tương đương với tuyến γ_0 (nếu những giá trị u ấy tồn tại!).

Từ lý luận vừa nêu suy ra rằng $u^* > 0$. Một mặt, tuyến γ_{u^*} không thể tương đương với tuyến γ_0 , và mặt khác γ_{u^*} không thể không tương đương với γ_0 , vì theo định lý 5.2.4 mọi tuyến γ_u với u đủ gần u^* đều có một tính chất hết như của γ_{u^*} . Nhưng điều đó không thể xảy ra theo định nghĩa số u^* . Do đó số u^* không tồn tại và mọi tuyến γ_u , $0 \leq u \leq 1$ đều tương đương với nhau. Từ đó suy ra kết luận của định lý. \square

Nhận xét 5.2.1. Nếu dù chỉ dọc theo một trong các tuyến γ_u thực hiện phép đồng luân $\gamma_0 \sim \gamma_1$ phần tử P không thể thác triển được thì kết quả của thác triển phần tử P dọc theo γ_0 và γ_1 có thể khác nhau.

Thật vậy ta xét nửa trên γ_0 đường tròn đơn vị và nửa dưới γ_1 của nó. Giả sử $f(z) = \sqrt{z}$. Ta xét kết quả của thác triển f dọc theo γ_0 và γ_1 từ điểm 1 đến điểm -1 . Hiển nhiên $\gamma_0 \sim \gamma_1$ và phép đồng luân này có thể thực hiện nhờ họ các cung tròn γ_u , $0 \leq u \leq 1$ đi qua hai điểm ± 1 . Giả sử để xác định ta ký hiệu

$$\gamma_{\frac{1}{2}} = [-1, +1] \subset \mathbb{R}.$$

Hiển nhiên hàm f có thể thác triển dọc theo γ_u , $u \neq \frac{1}{2}$. Hàm f không

thể thác triển giải tích theo tuyến $\gamma_{\frac{1}{2}}$ vì

$$f'(z) \rightarrow \infty \text{ khi } z \rightarrow 0 \in [-1, +1].$$

Tất nhiên tại điểm -1 ta có

$$f_0 = i\sqrt{r} = i, \quad f_1 = -i\sqrt{r} = -i,$$

trong đó f_0 là kết quả của thác triển hàm f theo γ_0 còn f_1 là kết quả của thác triển hàm f theo γ_1 .

5.2.2 Thác triển đối xứng

Để xây dựng một cách thực tiễn phép thác triển giải tích hàm chỉnh hình cho trước, thông thường người ta sử dụng nguyên lý đối xứng của Riemann và Schwartz. Đó là một trường hợp riêng của thác triển giải tích có liên quan tới ánh xạ bảo giác. Nguyên lý này sẽ đưa đến những trường hợp riêng quan trọng thường gặp trong ứng dụng, đồng thời nó cũng đưa đến việc xây dựng có hiệu lực thác triển giải tích.

Định lý 5.2.6. (Riemann - Schwartz) *Giả sử hàm $f(z)$ chỉnh hình trong miền D có biên Jordan ∂D chứa đoạn thẳng $\delta \subset \mathbb{R}$ của trục thực và $D \cap D^* = \emptyset$, trong đó D^* là miền đối xứng với D qua trục thực. Giả sử hàm f liên tục đến tận δ và trên đoạn thẳng δ hàm $f(z)$ nhận giá trị thực. Khi đó hàm f được thác triển giải tích qua đoạn δ vào miền D^* và phép thác triển đó được cho bởi công thức*

$$h(z) = \begin{cases} f(z), & z \in D \cup \delta, \\ \overline{f(\bar{z})}, & z \in D^*. \end{cases}$$

Chứng minh. Trước hết ta nhận xét rằng hàm thu được trong thác triển là duy nhất, do tính chất duy nhất của thác triển giải tích.

Ta chứng minh rằng hàm

$$g(z) = \overline{f(\bar{z})}, \quad z \in D^*$$

chỉnh hình trong D^* . Ta có

$$\begin{aligned}\frac{g(z + \Delta z) - g(z)}{\Delta z} &= \frac{\overline{f(\bar{z} + \overline{\Delta z})} - \overline{f(\bar{z})}}{\Delta z} \\ &= \overline{\left[\frac{f(\bar{z} + \overline{\Delta z}) - f(\bar{z})}{\overline{\Delta z}} \right]}.\end{aligned}$$

Vì z và $z + \Delta z \in D^*$ nên \bar{z} , $\bar{z} + \overline{\Delta z} \in D$ và do đó

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{g(z + \Delta z) - g(z)}{\Delta z} = \overline{f'(\bar{z})}.$$

Như vậy hàm $g(z)$ chỉnh hình trong D^* .

Bây giờ ta chứng minh rằng hàm $h(z)$ liên tục trong miền $D \cup \delta \cup D^*$. Thật vậy, từ tính liên tục của hàm f đến tận δ suy ra

$$\lim_{z \rightarrow x} f(z) = f(x), \quad x \in \delta$$

và từ đó ta có

$$\lim_{z \rightarrow x} g(z) = \lim_{z \rightarrow x} \overline{f(\bar{z})} = \overline{f(x)}.$$

tức là hàm $g(z)$ cũng liên tục đến tận δ . Vì

$$f(x) = \overline{f(x)}$$

theo điều kiện của định lý nên

$$g(z)|_{z \in \delta} = f(z)|_{z \in \delta}$$

Như vậy hàm $h(z)$ liên tục trong $D \cup \delta \cup D^*$, chỉnh hình tại mọi điểm của D và D^* . Từ định lý 11.3 và định lý Morera suy ra rằng hàm $h(z)$ chỉnh hình trong $D \cup \delta \cup D^*$ và là thác triển giải tích của hàm $f(z)$. \square

Ta nhận xét rằng tại các điểm của $D \cup \delta \cup D^*$ đối xứng với nhau qua trục thực hàm $f(z)$ nhận các giá trị liên hợp phức. Đó cũng là nguyên do để người ta gọi định lý 5.2.6 là “nguyên lý đối xứng”.

Bây giờ ta trình bày một số ví dụ áp dụng nguyên lý đối xứng để tìm ánh xạ bảo giác.

Ví dụ 1. Ánh xạ miền $D_0 = \overline{\mathbb{C}} \setminus \{[-3i, +3i] \cup [-4, +\infty)\}$ lên nửa mặt phẳng trên $D_0^* = \{\operatorname{Im} w > 0\}$.

Giải. Ta nhận xét rằng cả hai miền D_0 và D_0^* đã cho đều có tính chất đối xứng: miền D_0 có trục đối xứng là trục thực, còn miền D_0^* có trục đối xứng là trục ảo. Do đó, để có ánh xạ cần tìm ta kẻ nhất cắt phụ (đường chấm chấm) theo trục thực và xét nửa trên của miền D_0 , kẻ nhất cắt phụ theo trục ảo trong mặt phẳng w (đường chấm chấm) và xét góc phần tư thứ nhất D^* của D_0^* (hình V.2).

Hình V.2

Ta cần tìm ánh xạ $D(z)$ lên D^* sao cho phần biên phụ $[-\infty, -4]$ được ánh xạ lên phần dương của trục ảo, còn phần biên $ABCD_\infty$ được ánh xạ lên phần dương trục thực.

1. Đầu tiên ta dùng ánh xạ $z_1 = z^2$ ánh xạ miền $D(z)$ lên toàn bộ mặt phẳng với nhất cắt $[-9, +\infty) \subset \mathbb{R}$, trong đó bờ trên của nhất cắt tương ứng với phần biên CD_∞ , còn đoạn bờ dưới $[-9, +16]$ tương ứng với phần biên CBA , đoạn của bờ dưới đi từ 16 đến ∞ tương ứng với phần biên phụ $(-\infty, -4]$.

2. Tiếp theo ta sử dụng hàm

$$z_2 = \sqrt{z^2 + 9}$$

ánh xạ miền vừa thu được lên nửa mặt phẳng trên, trong đó đoạn $[-\infty, -5]$ là phần biên phụ và phần còn lại - đoạn $[-5, \infty)$ - là ảnh của biên miền D .

3. Ánh xạ

$$z_3 = \sqrt{z_2 + 5} = \sqrt{5 + \sqrt{z^2 + 9}}$$

sẽ biến nửa mặt phẳng vừa thu được thành góc phần tư thứ nhất, trong đó bán trục \mathbb{R}^+ tương ứng với biên của D , còn phần dương của trục ảo tương ứng với phần biên phụ.

Áp dụng nguyên lý đối xứng cho đoạn $(-\infty, -4)$ ta suy ra rằng hàm $w = z_3 = \sqrt{5 + \sqrt{z^2 + 9}}$ cùng với thác triển của nó xuống nửa mặt phẳng dưới (qua đoạn $(-\infty, -4)$ ánh xạ miền D_0 lên nửa mặt phẳng trên.

Ví dụ 2. Tìm ánh xạ phần trong hình tròn đơn vị D lên phần ngoài của “hình sao” D^* :

$$\{|w| \leq 1, \arg w = \frac{2k\pi}{n}, k = 0, 1, 2, \dots, n-1\}.$$

Giải. Hiển nhiên cả miền D lẫn D^* đều có tính chất đối xứng. Do đó, để có ánh xạ cần tìm ta chỉ cần xét ánh xạ hình quạt

$$D_0 = \left\{ |z| \leq 1, 0 < \arg z < \frac{2\pi}{n} \right\},$$

lên hình quạt

$$D^* = \left\{ |w| < \infty, 0 < \arg w < \frac{2\pi}{n} \right\},$$

trong đó cung tròn $AB = \left(0, \frac{2\pi}{n}\right)$ biến thành hai đoạn thẳng $\{|w| < 1, \arg w = 0\}$ và $\left\{|w| < 1, \arg w = \frac{2\pi}{n}\right\}$ (hình V.3)

Hình V.3

Ta vẽ các nhát cắt phụ theo các bán kính OA và OB và xét hình quạt D_0 trong mặt phẳng z ; ta vẽ các nhát cắt phụ $A'\infty$ và $B'\infty$ trong mặt phẳng w và xét hình quạt D^* . Ta sẽ tìm ánh xạ hình quạt D_0 lên D_0^* sao cho cung AB được ánh xạ lên hai đoạn thẳng $B'O' \cup O'A'$, các nhát cắt phụ được ánh xạ lên các đoạn thẳng $A'\infty$ và $B'\infty$.

Ta thực hiện các ánh xạ trung gian sau:

1. Ánh xạ $z_1 = z^n$ ánh xạ hình quạt D_0 lên hình tròn đơn vị với nhát cắt phụ $[0, 1]$.
2. Hàm Jukovski

$$z_2 = \frac{1}{2} \left(z_1 + \frac{1}{z_1} \right)$$

ánh xạ miền vừa thu được lên toàn bộ mặt phẳng trừ nhát cắt $[-1, +\infty]$, trong đó nhát cắt $[1, +\infty]$ là nhát cắt phụ (đó là những điểm trong!). Ta ký hiệu miền ảnh là $D(z_2)$.

3. Hàm

$$z_3 = \frac{z_2 + 1}{2}$$

ánh xạ miền $D(z_2)$ lên toàn bộ mặt phẳng với nhát cắt $[0, +\infty)$, trong đó nhát cắt $[+1, \infty)$ là nhát cắt phụ.

4. Hàm $z_4 = \sqrt{z_3}$ cho ta nửa mặt phẳng trên, trong đó nhát cắt phụ chuyển thành đoạn thẳng đi từ -1 đến $+1$ qua ∞ .

5. Hàm

$$w = \sqrt[n]{z_4}$$

sẽ ánh xạ miền thu được trong mặt phẳng z_4 lên hình quạt D_0^* . Tiếp đó, bằng phương pháp lý luận tương tự như trong ví dụ trước ta sẽ thu được ánh xạ cần tìm.

5.3 Hàm giải tích đủ

Khái niệm thác triển giải tích đã trình bày trong các mục trước là một khái niệm cực kỳ quan trọng. Nó cho phép ta khái quát hóa khái niệm hàm chỉnh hình, đi đến khái niệm hàm giải tích.

5.3.1 Khái niệm hàm giải tích đủ

Bây giờ ta có thể phát biểu định nghĩa sau đây của Weierstrass về hàm giải tích.

Định nghĩa 5.3.1. Giả sử tại điểm a cho phần tử chính tắc $f_a(z)$ với tâm tại điểm $z = a$. Ta thác triển giải tích phần tử $f_a(z)$ đã cho theo mọi tuyến bắt đầu từ tâm a của phần tử mà trên mỗi tuyến phép thác triển ấy có thể thực hiện được. Tập hợp F mọi phần tử thu được từ $f_a(z)$ trong kết quả của mọi thác triển được gọi là *hàm giải tích đủ*.

Hiển nhiên khái niệm hàm giải tích đã được định nghĩa ở đây không phụ thuộc vào việc chọn phần tử chính tắc đầu tiên. Thật vậy, giả sử $f_b(z)$ là phần tử bất kỳ thuộc hàm giải tích $F(z)$ xác định bởi $f_a(z)$. Khi đó $f_b(z)$ thu được từ $f_a(z)$ bằng thác triển giải tích theo tuyến γ . Nhưng chính $f_a(z)$ lại thu được từ $f_b(z)$ bằng thác triển giải tích theo tuyến γ^- . Nếu $f_c(z)$ là phần tử tùy ý thu được từ $f_a(z)$ bằng thác triển theo tuyến λ thì $f_c(z)$ cũng thu được từ $f_b(z)$ bằng thác triển giải tích theo tuyến hợp $\gamma^- \cup \lambda$.

Hai hàm giải tích được xem là bằng nhau nếu chúng có ít nhất một phần tử chung. Từ định lý 5.2.2 ta kết luận rằng khi đó mọi phần tử tương ứng của chúng đều bằng nhau.

Ta có

Định lý 5.3.1. Giả sử $F(z)$ là một hàm giải tích đủ và D_F là hợp mọi hình tròn hội tụ của mọi phần tử chính tắc thuộc F . Khi đó D_F là một miền (gọi là miền tồn tại theo nghĩa Weierstrass của hàm giải tích F).

Chứng minh. 1. Hiển nhiên D_F là tập hợp mở.

2. Ta cần chứng minh D_F là tập hợp liên thông. Giả sử $z_0 \in S(z_0)$, $f_{z_0}(z) \in F$ và $z^* \in S(z^*)$, $f_{z^*}(z) \in F$. Theo định nghĩa, tồn tại một xích nối f_{z_0} với f_{z^*}

$$f_{z_0}, \dots, f_{z_n} = f_{z^*}.$$

Vì $f_{z_{j-1}}$ và f_{z_j} là thác triển giải tích trực tiếp của nhau nên

$$S(z_{j-1}) \cap S(z_j) = \delta_{j-1,j} \neq \emptyset.$$

$j = 0, 1, \dots, n-1$. Giả sử $\xi_j \in \delta_{j-1,j}$ và γ_j là tuyến thuộc $S(z_j)$ và nối ξ_j với ξ_{j+1} , $j = 1, 2, \dots, n-1$. Khi đó, bằng cách nối z_0 với ξ_1 bởi tuyến liên tục γ_0 trong $S(z_0), \dots$, nối ξ_n với z^* bởi tuyến liên tục $\gamma_n \subset S(z_n)$ ta thu được tuyến

$$\gamma = \gamma_0 \cup \gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_n \subset D_F$$

nối z_0 với z^* . Điều đó chứng tỏ D_F là tập hợp liên thông. \square

Hàm giải tích được định nghĩa ở đây không phải là hàm theo nghĩa thông thường của từ vì mỗi giá trị z cho trước không nhất thiết phải tương ứng với một giá trị của hàm mà có thể tương ứng với một số, và thậm chí là với vô số giá trị của hàm. Điều cần lưu ý ở đây là: nói chung, phần tử chính tắc sẽ sinh ra hàm giải tích đa trị.

Nhận xét 5.3.1. 1. Nếu ta cho một phần tử $f_a(z)$ tại điểm $a \in \overline{\mathbb{C}}$ nào đó thì hiển nhiên phần tử này sẽ xác định một tập hợp \mathcal{K} nào đó các tuyến γ nằm trong $\overline{\mathbb{C}}$ và đều xuất phát từ điểm a mà trên những tuyến đó có thể thác triển giải tích phần tử $f_a(z)$. Hàm giải tích sinh bởi phần tử $f_a(z)$ sẽ được xác định đối với mỗi tuyến $\gamma \subset \mathcal{K}$. Do đó ta có thể xem giá trị tại điểm cuối của tuyến γ trong thác triển giải tích phần tử đầu tiên $f_a(z)$ theo γ là giá trị của hàm giải tích tương ứng với tuyến $\gamma \subset \mathcal{K}$.

2. Từ sự phân tích trên ta thấy rằng Weierstrass đã lấy chuỗi lũy thừa để làm công cụ xuất phát trong khi định nghĩa hàm giải tích. Tính ưu việt của định nghĩa Weierstrass là ở chỗ định nghĩa đó mang tính chất kiến thiết

khá rõ rệt. Tuy nhiên trong việc xây dựng lý thuyết hàm theo quan điểm Weierstrass, một số chứng minh đã tỏ ra khó khăn hơn so với phương pháp của Cauchy. Nhưng mặt khác, với phương pháp của Cauchy ta đã thu được khá ít ỏi khi chưa tìm được những hàm thỏa mãn các điều kiện đủ để một hàm là chỉnh hình. Ta cũng đã tìm được là: các hàm chỉnh hình tổng quát nhất đều có thể khai triển thành chuỗi lũy thừa; và do đó cả hai quan điểm này hoàn toàn tương đương với nhau. Điều đó chứng tỏ, để xây dựng lý thuyết một cách trọn vẹn ta cần đến cả hai phương pháp (xem 4.1.5).

5.3.2 Một vài ví dụ

Bây giờ ta xét một vài ví dụ quan trọng nhất về các hàm giải tích. Ta sẽ không dừng lại khảo sát một cách chi tiết, mà chỉ phác họa việc định nghĩa cùng một số tính chất của các hàm ấy.

Ví dụ 1. Đối với các giá trị phức z , hàm $\ln z$ được định nghĩa một cách tự nhiên như là thác triển giải tích của $\ln x$. Hàm $\ln x$ được khai triển thành chuỗi Taylor dạng

$$\ln x = \ln[1 + (x - 1)] = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (x - 1)^n. \quad (5.4)$$

Chuỗi này hội tụ trong khoảng $(0, 2) \subset \mathbb{R}$. Theo định lý Abel, chuỗi này hội tụ cả đối với các giá trị phức trong hình tròn $S(1) = \{|z - 1| < 1\}$ và vì thế, ta có thể xét chuỗi (5.4) với z phức, nghĩa là xét hàm

$$f(z) = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (z - 1)^n. \quad (5.5)$$

Chuỗi (5.5) hội tụ trong hình tròn $S(1)$ và do đó hàm $f_1(z)$ chỉnh hình trong $S(1)$ và $f_1(x) = \ln x$ khi $0 < x < 2$. Do đó hàm $f_1(z)$ là thác triển giải tích (duy nhất!) của hàm $\ln x$ từ khoảng $0 < x < 2$ vào hình tròn $S(1)$.

Bây giờ nếu lấy $f_1(z)$ làm phần tử chính tắc đầu tiên và thực hiện mọi thác triển giải tích phần tử đó (được cho tại điểm $z = 1$) ta sẽ thu được hàm giải tích $\ln z$.

Ví dụ 2. Ta xét hàm lũy thừa tổng quát

$$w = z^a, \quad a \in \mathbb{C}.$$

Với x thực và dương và với a là một số thực cố định ta có công thức

$$x^a = e^{a \ln x}.$$

Ta mở rộng công thức này cho trường hợp $z \in \mathbb{C}$ và a cố định thuộc \mathbb{C} bằng cách đặt

$$z^a = e^{a \ln z}.$$

Ở đây, ta có thể lấy phần tử chính tắc đầu tiên là

$$g_1(z) = e^{af_1(z)}$$

tại điểm $z = 1$, trong đó $f_1(z)$ là phần tử đầu tiên của hàm $\ln z$ tại điểm $z = 1$. Khi đó

$$\begin{aligned} g_1(z) &= \sum_{n \geq 0} \binom{a}{n} (z-1)^n, \\ \binom{a}{n} &= \frac{a(a-1) \cdots (a-n+1)}{n!}. \end{aligned} \tag{5.6}$$

Thật vậy, ta có

$$\left. \frac{d^n}{dz^n} g_1(z) \right|_{z=1} = \left. \frac{d^n}{dx^n} g_1(x) \right|_{x=1} = \left. \frac{d^n}{dx^n} x^n \right|_{x=1} = n! \binom{a}{n}.$$

Từ hệ thức này và công thức Taylor

$$g_1(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{g_1^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

ta suy ra (5.6).

Như vậy, hàm lũy thừa tổng quát là hàm giải tích.

Ta sẽ phân biệt bốn trường hợp sau đây.

1. $a \in \mathbb{Z}$. Trong trường hợp này hàm $w = z^a$ chỉnh hình trong \mathbb{C} nếu $a > 0$ và trong $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ nếu $a < 0$.

2. $a \in \mathbb{Q}$ ($a = \frac{p}{q}$ là số hữu tỷ). Trong trường hợp này mỗi giá trị $z \neq 0$, ∞ sẽ tương ứng với q giá trị khác nhau của m .

Thật vậy, đặt $z = re^{i\varphi}$, ta có

$$|w| = e^{a \ln r} = r^a,$$

$$\theta_k = a\varphi + 2k\pi a.$$

Khi $k = 0, 1, \dots, q-1$ ta có

$$\theta_0 = a\varphi,$$

$$\theta_1 = a\varphi + \frac{p}{q}2\pi,$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots$$

$$\theta_{q-1} = a\varphi + \frac{p}{q}(q-1)2\pi,$$

còn khi $k \geq q$ thì các giá trị θ_k khác các giá trị trên đây một số hạng bội nguyên của 2π . Do đó

$$z^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{z^p}.$$

3. a là số vô tỷ. Trong trường hợp này đối với các giá trị $\theta_k = a\varphi + 2k\pi a$ sẽ không có những giá trị khác nhau một bội nguyên của 2π . Thật vậy, nếu $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ và $k_1 \neq k_2$ mà

$$2k_1\pi a - 2k_2\pi a = 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

thì ta có

$$a = \frac{n}{k_1 - k_2} \in \mathbb{Q}.$$

Điều này trái với giả thiết rằng a là số vô tỷ.

Do đó khi a là số vô tỷ, mỗi giá trị $z \neq 0, \infty$ sẽ tương ứng với một tập hợp đếm được giá trị.

4. $a = \alpha + i\beta, \beta \neq 0$. Trong trường hợp này w là hàm có vô số giá trị và

$$\begin{aligned}\rho_k &= |w| = e^{\alpha \ln r - \beta(\varphi + 2k\pi)}, \\ \tilde{\theta}_k &= \arg w = \alpha(\varphi + 2k\pi) + \beta \ln r, \quad k \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Từ hai hệ thức này suy ra rằng khi $z \neq 0, \infty$ các giá trị của hàm lũy thừa tổng quát được phân bố trên hệ các đường tròn

$$\{|w| = e^{\alpha \ln r - \beta(\varphi + 2k\pi)}, k \in \mathbb{Z}\}.$$

5.3.3 Tính đơn trị và đa trị.

Định lý đơn trị (monodromie)

Giả sử $z = a^*$ là một điểm thuộc miền tồn tại D_F và $f_{a_0}(z)$ là phần tử chính tắc được cho tại a_0 . Có hai khả năng sau đây có thể xảy ra:

1. Thác triển giải tích phần tử $f_{a_0}(z)$ theo mọi tuyến đều chỉ dẫn đến một và chỉ một phần tử tại điểm a^* .

2. Phần tử tìm được tại a^* trong thác triển theo một tuyến không trùng với phần tử thu được tại điểm ấy nhưng qua thác triển theo một tuyến khác.

Điều vừa trình bày trên đây đã buộc ta phải chia các hàm giải tích thành hai lớp:

(I) lớp các hàm thỏa mãn khả năng thứ nhất được gọi là lớp các *hàm đơn trị*;

(II) lớp các hàm thỏa mãn khả năng thứ hai được gọi là lớp các *hàm đa trị*.

Tính chất của hàm là đơn trị hay đa trị là tính chất toàn cục, nghĩa là tính chất đó không xuất hiện đối với một phần đủ bé của hàm ấy.

Ta xét hàm giải tích $F(z)$ sinh bởi phần tử $f_a(z)$ tại điểm a . Giả sử miền $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ và $a \in D$, và giả sử phần tử $f_a(z)$ cho phép thác triển giải tích theo mọi tuyến xuất phát từ a và nằm trong D . Tập hợp các phần tử thu được qua mọi thác triển đó được gọi là hàm giải tích $F(z)$ trong miền D .

Ta sẽ chứng minh rằng khái niệm

“HÀM GIẢI TÍCH ĐƠN TRỊ”

và khái niệm

“HÀM CHÍNH HÌNH”

là hai khái niệm đồng nhất.

Thật vậy, giả sử $F(z)$ chỉnh hình trong miền D . Tại mỗi điểm $z_0 \in D$ ta cho phần tử $f_{z_0}(z)$ mà cụ thể là chính hàm $F(z)$. Ta cố định điểm $z_0 \in D$ và phần tử $f_{z_0}(z)$ tại đó. Nếu tuyến γ nối z_0 với z^* và $\gamma \subset D$ thì một cách hiển nhiên phần tử $f_{z_0}(z)$ có thác triển giải tích theo γ và ta có thể lấy hàm $F(z)$ làm phần tử chính tắc tại z^* .

Bây giờ giả sử $F(z)$ giải tích đơn trị trong D . Ta cần chứng minh $F(z)$ chỉnh hình trong miền đó. Thật vậy, tại mỗi điểm của miền D ta có đúng một phần tử $F(z)$ (vì nếu tại một điểm nào đó tồn tại hai phần tử khác nhau thì hàm đã cho không đơn trị!). Do đó tại lân cận của mỗi điểm thuộc miền D các giá trị của hàm $F(z)$ trùng với các giá trị của một phần tử (duy nhất) nào đó. Vì vậy hàm $F(z)$ chỉnh hình tại mọi điểm của miền D .

Khó khăn chủ yếu khi khảo sát các hàm đa trị là việc chọn các giá trị của hàm tại một điểm cho trước. Trong một số trường hợp, hàm giải tích có thể được xem như những hàm “thông thường” (đơn trị!). Ta có định lý cực kỳ quan trọng đối với lý thuyết hàm đa trị sau đây - gọi là định lý đơn trị monodromie trường hợp riêng của định lý 5.2.5.

Định lý 5.3.2. (định lý đơn trị). *Giả sử $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ là miền đơn liên và $f_0(z)$ là hàm chỉnh hình tại điểm $z_0 \in D$ nào đó. Giả sử hàm $f_0(z)$ có thể thác triển giải tích theo tuyến $\gamma \subset D$ bất kỳ (với điểm đầu tại z_0) không vượt khỏi giới hạn của miền D . Khi đó hàm giải tích $F(z)$ thu được qua mọi thác triển ấy của hàm $f_0(z)$ là hàm chỉnh hình trong D .*

Chứng minh. Giả sử hàm $f_0(z)$ là tổng của chuỗi lũy thừa hội tụ trong hình tròn $S(z_0)$. Giả sử z^* là điểm tùy ý thuộc D . Vì miền D đơn liên nên hai

tuyến γ_0 và $\gamma_1 \subset D$ bất kỳ đi từ z_0 đến z^* là đồng luân với nhau. Từ điều kiện của định lý suy ra rằng hàm $f_0(z)$ có thể thác triển giải tích theo tuyến γ_u , $0 \leq u \leq 1$ bất kỳ thực hiện phép đồng luân ấy. Theo định lý 5.2.5 mọi thác triển đó đều dẫn đến một và chỉ một phần tử chính tắc tại điểm z^* . Như vậy, hàm giải tích xác định trong miền D bởi mọi thác triển đó là hàm đơn trị trong D . Do đó $F(z)$ là hàm chỉnh hình. \square

Nhận xét 5.3.2. 1. Định lý đơn trị cho ta sự giải thích quan trọng về nguyên nhân của tính đa trị có thể có trong thác triển giải tích: tính đa trị có thể nảy sinh khi vòng quanh những điểm mà phép thác triển phần tử đầu tiên không thể thực hiện được.

2. Với các điều kiện của định lý 5.3.2, phần tử chính tắc $f_{z_0}(z)$ sẽ sinh ra một hàm giải tích trong miền D . Do đó, định lý đơn trị còn có thể phát biểu ở một dạng khác như sau:

Hàm giải tích trong miền đơn liên là một hàm chỉnh hình.

3. Nếu điều kiện của định lý đơn trị không được thỏa mãn thì tại các điểm $z \in D$ hàm giải tích có thể nhận nhiều giá trị. Vấn đề cần xem xét là số các giá trị, nghĩa là số phần tử tại điểm $z \in D$, có thể có là bao nhiêu? Số các phần tử khác nhau của hàm giải tích tại một điểm có thể là vô hạn.

Nhưng ta có

Định lý 5.3.3. (J. H. Poincare, V. Volterra). *Hàm giải tích $F(z)$ có thể có không quá một tập hợp đếm được các phần tử khác nhau với tâm tại điểm cố định cho trước.*

Chứng minh. Giả sử hàm giải tích $F(z)$ được xác định bởi phần tử đầu tiên $f_a(z)$, $a \in M_F$ là điểm tùy ý. Theo định nghĩa, các phần tử khác nhau của hàm giải tích $F(z)$ đều có thể thu được bằng thác triển phần tử đầu tiên theo một tuyến nào đó. Theo định lý 5.2.4 kết quả của thác triển theo tuyến sẽ không thay đổi nếu ta biến dạng tuyến đó đi một ít. Do đó ta luôn luôn có thể xem thác triển giải tích được diễn ra theo các đường gấp khúc với đỉnh tại các điểm của mặt phẳng có tọa độ hữu tỷ. Tập hợp các đường gấp

khúc đó là tập hợp đếm được. Do đó tập hợp các phần tử thu được bằng thác triển theo các đường gấp khúc ấy là đếm được. \square

5.3.4 Nhánh và phương pháp tách nhánh chỉnh hình

Giả sử cho hàm giải tích $F(z)$ được sinh bởi phần tử đầu tiên $f_a(z)$. Ta lấy một miền D nào đó chứa điểm a và xét các thác triển giải tích $f_a(z)$ không phải theo mọi tuyến có thể có đi từ điểm a mà chỉ theo những tuyến nằm trong miền D . Kết quả của mọi thác triển đó cho ta hàm $\Phi(z)$ khác với toàn bộ hàm giải tích $F(z)$ ở chỗ là: miền xác định của $\Phi(z)$ có phần hẹp hơn. Hàm $\Phi(z)$ này được gọi là một *nhánh* của hàm giải tích $F(z)$ trong miền D .

Cụ thể hơn ta có

Định nghĩa 5.3.2. Phần của hàm giải tích đủ $F(z)$ được xác định bởi tập hợp các phần tử thu được bằng thác triển giải tích phần tử $f_a(z)$ theo các tuyến không vượt khỏi giới hạn của miền D cho trước được gọi là một *nhánh* trong miền D của hàm giải tích đủ $F(z)$.

Ta nhấn mạnh rằng: nhánh của hàm giải tích trong miền D cũng như bản thân hàm giải tích đều được sinh bởi việc cho phần tử đầu tiên $f_a(z)$.

Do đó định nghĩa trên còn có thể diễn đạt như sau:

Tập hợp con liên thông các phần tử của một hàm giải tích được gọi là một nhánh của hàm giải tích.

Nhánh của một hàm giải tích có thể là một hàm không đơn trị của z . Về sau ta chỉ xét các nhánh đơn trị của hàm giải tích.

Vì hàm giải tích đơn trị trong miền D là chỉnh hình trong miền đó nên ta có

Định nghĩa 5.3.3. Nếu hàm $\Phi(z)$ giải tích trong miền D là đơn trị trong miền đó thì $\Phi(z)$ được gọi là một *nhánh chỉnh hình* của hàm giải tích $F(z)$ (trong miền D).

Việc tách các nhánh chỉnh hình của hàm giải tích là một phần rất quan trọng của bài toán khảo sát đặc tính đa trị của hàm giải tích đó. Định lý đơn

trị đã chứng minh trong tiết trước cho phép ta xây dựng một thuật toán đơn giản và tiện lợi để “tách \equiv cắt” hàm giải tích $F(z)$ thành các nhánh chỉnh hình.

Nội dung thuật toán đó như sau

1. Ta vẽ những nhát cắt biến miền đa liên D có cấp liên thông hữu hạn thành miền đơn liên D^* .
2. Ta cố định phần tử chính tắc

$$P(a) = \{S(a); f_a(z)\}$$

tại điểm $a \in D^*$.

3. Áp dụng định lý đơn trị, ta thu được hàm chỉnh hình $F_a(z) \in H(D^*)$.

Hàm vừa thu được là một nhánh chỉnh hình của hàm $F(z)$. Hiển nhiên, các phần tử khác nhau tại điểm a sẽ sinh ra các nhánh chỉnh hình khác nhau của hàm $F(z)$. Từ đó suy ra rằng trong miền D^* hàm $F(z)$ được tách thành những nhánh chỉnh hình.

Ta nhận xét rằng các nhát cắt biến miền D thành miền đơn liên D^* có thể lấy theo các cách khác nhau, do đó hàm giải tích cũng được tách thành nhánh chỉnh hình theo những cách khác nhau.

Tuy nhiên định lý đơn trị không cho phép ta giải quyết vấn đề tách nhánh chỉnh hình của hàm giải tích $F(z)$ trong miền đa liên D .

Trong trường hợp chung, phương pháp tách nhánh chỉnh hình được tiến hành theo “thủ tục” sau đây:

Giả sử $f(z)$ là một phần tử nào đó của hàm giải tích $F(z)$ tại điểm $z_0 \in D$ và $\gamma \subset D$ là một tuyến đóng với điểm đầu tại z_0 . Bằng cách thác triển giải tích hàm $f(z)$ theo tuyến γ ta sẽ thu được phần tử $\varphi(z, \gamma)$ tại điểm z_0 .

Có hai khả năng sau đây có thể xảy ra

- (I) Thác triển giải tích phần tử $f(z)$ theo mọi tuyến đóng $\gamma \subset D$ có thể có với điểm đầu tại z_0 sẽ dẫn đến một và chỉ một phần tử $f(z)$ tại điểm z_0 .

Trong trường hợp này tồn tại hàm chỉnh hình $g(z)$ trong D sao cho $g(z) \equiv f(z)$, với mọi điểm z của lân cận điểm z_0 .

- (ii) Thác triển giải tích phần tử $f(z)$ theo một tuyến đóng $\gamma_0 \subset D$ nào

đó với điểm đầu tại z_0 dẫn đến phần tử $\varphi(z, \gamma_0)$:

$$\varphi(z, \gamma_0) \neq f(z)$$

tại điểm z_0 .

Trong trường hợp này hàm giải tích $F(z)$ không cho phép tách nhánh chỉnh hình trong D .

Đó là nội dung “thủ tục” tách nhánh chỉnh hình trong trường hợp chung.

Để làm sáng tỏ điều vừa trình bày, ta xét việc tách nhánh chỉnh hình của các hàm trong các ví dụ 2 và 3 của mục 5.1.

Trước hết ta xét hàm $w = \sqrt[n]{z}$. Hiển nhiên theo định lý đơn trị, nhánh chỉnh hình của hàm $\sqrt[n]{z}$ có thể tách trong miền đơn liên bất kỳ không chứa điểm $z = 0, \infty$. Hơn thế nữa: *Nhánh của hàm $\sqrt[n]{z}$ có thể tách trong một miền bất kỳ không chứa một tuyến đóng nào bao điểm $z = 0$.*

Chứng minh. Thật vậy, khi vòng quanh theo những tuyến γ bao điểm $z = 0$ thì $\arg z$ thay đổi một bội nguyên của 2π . Do đó phép thác triển một phần tử nào đó theo γ có thể dẫn đến một phần tử khác. \square

Trong mỗi miền thỏa mãn điều kiện của mệnh đề vừa chứng minh ta có thể tách n nhánh chỉnh hình của hàm giải tích $F(z) = \sqrt[n]{z}$, mỗi nhánh trong số đó sẽ khác với nhánh kia bởi các thừa số $e^{i\frac{2\pi k}{n}}$ và hoàn toàn được đặc trưng bởi việc chỉ ra một miền mà trong đó hàm xác định và một giá trị của hàm tại một điểm của miền đó.

Đối với hàm giải tích $F(z) = \ln z$ ta cũng có mệnh đề tương tự như ở trên: cụ thể là:

Nhánh của hàm $\ln z$ có thể tách trong miền D bất kỳ không chứa một tuyến đóng nào bao điểm $z = 0$.

Chứng minh. Thật vậy, nếu tuyến đóng γ bao điểm $z = 0$ thì khi vòng quanh theo γ điểm $w = \ln z$ không trở về vị trí ban đầu của nó mà nhận một vị trí mới là

$$w_0^{(1)} = w_0 + 2\pi i.$$

\square

Ví dụ 3. Ta xét hàm giải tích

$$w = \sqrt{(z - a_1)(z - a_2) \dots (z - a_n)}$$

$$a_i \neq a_j, \quad i, j = 1, 2, \dots, n, \quad a_i \in \mathbb{C}.$$

Mỗi giá trị z sẽ tương ứng với hai giá trị w . Ta xét phần tử $w_0(z)$ cho trước tại điểm z_0 . Giả sử γ là tuyến đóng Jordan với điểm đầu z_0 .

1. Tuyến γ bao một số lẻ các điểm a_i . Trong trường hợp này phép thác triển $w_0(z)$ theo γ dẫn đến giá trị $w_0(z)$ tại điểm z_0 .

2. Tuyến γ bao một số chẵn điểm. Trong trường hợp này phép thác triển theo γ sẽ đi đến giá trị đầu tiên.

Ta sẽ chứng minh 1), còn 2) được chứng minh tương tự. Giả sử γ bao k điểm a_1, a_2, \dots, a_k , k là số lẻ. Ta đặt $\varphi_i = \arg(z - a_i)$, $i = 1, 2, \dots, k, k + 1, \dots, n$. Qua thác triển theo γ , hiển nhiên φ_i , $i = 1, 2, \dots, k$ sẽ nhận gia số là 2π ; còn φ_i , $i = k + 1, \dots, n$ không nhận gia số nào. Do đó qua thác triển theo γ ta có

$$\Delta_{\gamma} \arg w = \frac{2\pi \cdot k + \overbrace{0 + 0 + \dots + 0}^{n-k \text{ lần}}}{2\pi} = k,$$

k lẻ từ đó suy ra 1).

Bây giờ giả sử các điểm a_i , $i = 1, \dots, n$ được ghép thành các cặp: $[a_1, a_2], [a_3, a_4], \dots$ và ký hiệu các nhất cắt giản đơn không giao nhau nối a_1 với a_2 ; a_3 với a_4 ; \dots tương ứng là

$$\gamma(a_1, a_2), \quad \gamma(a_3, a_4), \dots$$

Nếu n là số lẻ thì a_n không được phép thành cặp với điểm nào cả. Trong trường hợp này ta ghép a_n với ∞ và thu được $\frac{n+1}{2}$ nhất cắt. Trong miền $D = \overline{\mathbb{C}} \setminus \{\gamma(a_1, a_2) \cup \dots \cup \gamma(a_n, \infty)\}$ cả hai nhánh của w đều chỉnh hình.

Nếu n là số chẵn thì ta thu được $\frac{n}{2}$ nhất cắt $(a_1, a_2), \dots, (a_{n-1}, a_n)$ và trong trường hợp này hàm đã cho được tách thành hai nhánh chỉnh hình trong $D = \overline{\mathbb{C}} \setminus \{\gamma(a_1, a_2) \cup \dots \cup \gamma(a_{n-1}, a_n)\}$.

Ví dụ 4. Ta chứng minh rằng hàm giải tích

$$w(z) = \ln \frac{1-z}{1+z}$$

có thể tách thành một tập hợp đếm được các nhánh chỉnh hình trong miền $D = \overline{\mathbb{C}} \setminus [-1, 1]$.

Giả sử $w_0(z)$ là phần tử đầu tiên của hàm $F(z)$ tại điểm z_0 và $\gamma \subset D$ là tuyến đóng Jordan với điểm đầu z_0 . Sau khi thác triển hàm $w_0(z)$ theo γ ta thu được giá trị $F(z_0)$ bằng

$$w(z_0) = w_0(z_0) + i\Delta_\gamma \arg \frac{1-z}{1+z}.$$

Đặt $\varphi_1 = \arg(1-z)$, $\varphi_2 = \arg(1+z)$; ta có

$$\Delta_\gamma \arg \frac{1-z}{1+z} = \varphi_1 - \varphi_2.$$

Có hai khả năng có thể xảy ra

1. Đoạn $[-1, 1]$ nằm trong γ . Trong trường hợp này $\varphi_1 = \varphi_2 = 2\pi$. Do đó $\varphi_1 - \varphi_2 = 0$, $w(z_0) = w_0(z_0)$ và $f(z) = \ln \frac{1-z}{1+z}$, $z \in D$ $f(z_0) = w_0(z_0)$ là một nhánh chỉnh hình.

2. Đoạn $[-1, +1]$ không nằm trong γ . Khi đó $\varphi_1 = \varphi_2 = 0 \Rightarrow \varphi_1 - \varphi_2 = 0$ và $f(z) = \ln \frac{1-z}{1+z}$, $z \in D$ là nhánh chỉnh hình.

Hàm giải tích đã cho có thể tách thành tập hợp đếm được các nhánh chỉnh hình. Các nhánh đó xác định theo công thức

$$f_n(z) = \ln \left| \frac{1-z}{1+z} \right| + i\Delta_\gamma \arg \frac{1-z}{1+z} + i\operatorname{Im} w_0 + 2n\pi i, \quad n \in \mathbb{Z},$$

trong đó $w_0 = \ln \frac{1-z_0}{1+z_0}$ là giá trị cố định của lôgarit, còn γ là tuyến nằm trong D nối z_0 với z .

Ví dụ 5. Giả sử $D = \overline{\mathbb{C}} \setminus [-1, +1]$ và $f(z) = \left(\frac{1-z}{1+z} \right)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$ là nhánh chỉnh hình sao cho $f(0+i0) = 1$. Tính các giá trị $f(z)$ khi $z \in \mathbb{R}$.

Khi $z \in D$ thì

$$f(z) = \left| \frac{1-z}{1+z} \right|^\alpha e^{i\varphi}, \quad \varphi = \varphi_1 - \varphi_2,$$

trong đó $\varphi_1 = \Delta_\gamma \arg(1-z)$, $\varphi_2 = \Delta_\gamma \arg(1+z)$, γ là tuyến nối $z_0 = 0$ với điểm $z \in D$.

Ta phân biệt các trường hợp sau đây

1. $z = x \in (-1, +1)$ và nằm ở bờ trên của nhát cắt $(-1, +1)$. Trong trường hợp này $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$. Do đó

$$f(x + i0) = \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^\alpha > 0.$$

2. $z = x > 1$. Trong trường hợp này ta có

$$\varphi_1 = -\pi, \quad \varphi_2 = 0$$

và do đó

$$f(x) = \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^\alpha e^{-i\alpha\pi}.$$

3. $z = x < -1$. Khi đó $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \pi$ và

$$f(x) = \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^\alpha e^{-i\alpha\pi}.$$

4. $z = x \in (-1, +1)$ và z nằm ở bờ dưới của nhát cắt. Hiển nhiên trong trường hợp này

$$\varphi_1 = -2\pi, \quad \varphi_2 = 0$$

và do đó

$$f(x - i0) = \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^\alpha e^{-i2\pi\alpha}.$$

Ví dụ 6. Giả sử $D = \overline{\mathbb{C}} \setminus [-1, 1]$ và $f(z)$ là nhánh chính hình trong miền D của hàm $\ln \frac{1-z}{1+z}$ mà $f(0 + i0) = 0$. Tính giá trị của $f(z)$ trên trục thực và trục ảo.

Tại mọi điểm $z \in D$ ta có

$$f(z) = \ln \left| \frac{1-z}{1+z} \right| + i(\varphi_1 - \varphi_2),$$

$$\varphi_1 = \Delta_\gamma \arg(1-z), \quad \varphi_2 = \Delta_\gamma \arg(1+z),$$

trong đó $\gamma \subset D$ là tuyến nối điểm 0 nằm ở bờ trên của nhát cắt với điểm z .

1. Giả sử $z = x \in (-1, 1)$ và nằm ở bờ trên của nhát cắt. Khi đó $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ và

$$f(x + i0) = \ln \frac{1-x}{1+x}.$$

2. Giả sử $z = x > 1$. Khi đó $\varphi_1 = -\pi$, $\varphi_2 = 0$ và

$$f(x) = \ln \frac{x-1}{x+1} - i\pi.$$

Nếu $z = x < -1$ thì $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \pi$ và

$$f(x) = \ln \frac{x-1}{x+1} - i\pi.$$

3. Giả sử $z = x \in (-1, 1)$ và nằm ở bờ dưới của nhát cắt. Khi đó $\varphi_1 = -2\pi$, $\varphi_2 = 0$ và

$$f(x - i0) = \ln \frac{1-x}{1+x} - 2\pi i.$$

4. Giả sử $z = iy$, $y > 0$. Khi đó $\varphi_1 = -\varphi_2$, $\varphi_2 = \arctg y$ và do đó khi $y > 0$

$$f(iy) = -2i\arctg y,$$

$$(\text{vì } |1 - iy| = |1 + iy|).$$

5.3.5 Khái niệm về điểm bất thường

Ta đã gặp khái niệm điểm bất thường trong chương trước. Nếu như tại các điểm bất thường mà ta đã gặp trong chương trước đây tính chỉnh hình của hàm bị phá vỡ một cách rất đơn giản: do hàm không liên tục, thì ở đây

(xem cả mục trước) ta sẽ gặp loại điểm bất thường mà tính chỉnh hình của hàm bị phá vỡ do tính đa trị của hàm tại lân cận điểm đó.

Ta sẽ trình bày khái niệm điểm bất thường trên cơ sở lý thuyết thác triển giải tích.

Định nghĩa 5.3.4. Giả sử cho hàm giải tích $F(z)$ sinh bởi phần tử chính tắc đầu tiên $f_a(z)$ tại điểm a và cặp (a^*, γ) gồm a^* là điểm nào đó của $\overline{\mathbb{C}}$ và γ là tuyến đi từ a đến a^* . Ta sẽ nói rằng cặp (a^*, γ) *xác định một điểm bất thường của hàm giải tích $F(z)$* nếu phần tử $f_a(z)$ có thể thác triển giải tích theo γ từ a đến điểm tùy ý của γ ngoài điểm cuối a^* .

Một điều quan trọng cần nhấn mạnh ở đây là: khái niệm điểm thường cũng như điểm bất thường phụ thuộc một cách rất căn bản vào tuyến γ . Điểm $z = a$ có thể là điểm thường đối với tuyến thác triển giải tích đi từ tâm a của $f_a(z)$ nhưng lại là điểm bất thường đối với tuyến khác cũng xuất phát từ tâm a .

Vậy khi nào thì hai cặp (a, γ) và (a, γ_1) sẽ xác định một điểm bất thường?

Hai cặp (a, γ) và (a, γ_1) được xem là xác định một điểm bất thường nếu các phần tử $f_{\tilde{a}}(z)$ và $f_{\tilde{a}_1}(z)$ tương ứng với các điểm $\tilde{a} \in \gamma$ và $\tilde{a}_1 \in \gamma_1$ đủ gần điểm cuối chung a^* của γ và γ_1 có thể thác triển giải tích vào nhau theo tuyến nào đó nằm trong hình tròn

$$\{|z - a^*| < b, \rho = \max\{|\tilde{a} - a^*|, |\tilde{a}_1 - a^*|\}\}.$$

Vì cấu trúc của điểm bất thường của hàm giải tích là hết sức phức tạp nên ta chỉ hạn chế xét lớp các điểm bất thường đơn giản nhất - các điểm bất thường cô lập.

Định nghĩa 5.3.5. Điểm $z = a \in \overline{\mathbb{C}}$ được gọi là *điểm bất thường cô lập* của hàm giải tích $F(z)$ nếu tồn tại lân cận $V(a)$ của điểm a .

$$V(a) = \{z \in \overline{\mathbb{C}} : 0 < |z - a| < R\}$$

sao cho mọi phần tử $f_{z_1} \in F$ nào đó có thể thác triển ra toàn vành tròn $V(a)$.

Ví dụ 7. Các điểm $z = 0, 1, \infty$ là những điểm bất thường cô lập của hàm $F(z) = \frac{1}{1 + \sqrt{z}}$.

Thật vậy, các điểm $0, \infty$ là những điểm bất thường cô lập của hàm $F(z)$ vì trong trường hợp này tập hợp

$$V = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < \infty\},$$

thỏa mãn các điều kiện của định nghĩa 5.3.5. Ta xét điểm $z = 1$. Tại lân cận bé $U(1, \varepsilon)$ của điểm $z = 1$ hàm \sqrt{z} được phân thành hai nhánh chỉnh hình $f_1(z)$ và $f_2(z)$ (định lý Monodromie). Giả sử

$$f_1(1) = 1, \quad f_2(1) = -1.$$

Khi đó hàm $f(z)$ cũng sẽ phân thành hai nhánh

$$F_j(z) = \frac{1}{1 + f_j(z)}, \quad j = 1, 2, \quad \forall z \in U(1, \varepsilon).$$

Nhánh $F_1(z)$ chỉnh hình tại điểm $z = 1$, nhánh $F_2(z)$ có cực điểm đơn tại $z = 1$, vì

$$\begin{aligned} F_2(z) &= \frac{1}{1 + \sqrt{z}} = \frac{1}{1 + \sqrt{1 + (z - 1)}} \\ &= \frac{1}{-\frac{z - 1}{2} + \dots} = -\frac{2}{z - 1} + \dots \end{aligned}$$

tại lân cận của điểm $z = 1$.

Ví dụ 8. Các điểm $z = 0, 1, \infty$ là điểm bất thường cô lập của hàm

$$F(z) = \frac{1 + \sqrt{z}}{z - 1}.$$

Thật vậy, hiển nhiên $z = 0, \infty$ là điểm bất thường cô lập của hàm $F(z)$. Ta xét điểm $z = 1$. Tương tự như trong ví dụ trước, tại lân cận $U(1, \varepsilon)$ của điểm $z = 1$ hàm $F(z)$ được tách thành hai nhánh chỉnh hình $F_j(z) = \frac{1 + f_j(z)}{z - 1}$, $j = 1, 2$; $z \in U(1, \varepsilon)$. Nhánh F_1 có cực điểm đơn tại điểm $z = 1$, còn nhánh F_2 chỉnh hình tại điểm $z = 1$.

Định nghĩa 5.3.6. Giả sử a là điểm bất thường cô lập của hàm giải tích $F(z)$ và $V(a)$ là lân cận thỏa mãn định nghĩa 5.3.5 và $\gamma \subset V(a)$ là tuyến Jordan chứa điểm a ở bên trong. Khi đó, nếu phép vòng quanh theo γ không làm thay đổi phần tử chính tắc đầu tiên thì điểm a được gọi là *điểm bất thường có đặc tính đơn trị*.

Như vậy, điểm bất thường cô lập có đặc tính đơn trị được đặc trưng bởi điều là: phần tử chính tắc $f_{z_1}(z)$ tại điểm z_1 đủ gần điểm cuối a của tuyến γ (cặp (a, γ)) xác định điểm bất thường của ta, có thể thác triển ra toàn vành tròn $V(a)$ như một hàm chỉnh hình.

Do đó, điểm bất thường cô lập có đặc tính đơn trị có thể xem như điểm biên cô lập của miền chỉnh hình của hàm chỉnh hình f nào đó (là một nhánh của hàm giải tích). Do đó sự phân loại các điểm bất thường này được căn cứ vào cấu trúc của chuỗi Laurent của hàm f trong $V(a)$ như đã trình bày trong 4.3.

Định nghĩa 5.3.7. Giả sử a là điểm bất thường cô lập của hàm giải tích $F(z)$, $V(a)$ là lân cận như trong định nghĩa 5.3.5 và $\gamma \subset V(a)$ là tuyến Jordan bao điểm a ở trong. Giả sử phép vòng quanh theo γ đưa đến phần tử khác phần tử đầu tiên. Khi đó điểm a được gọi là *điểm bất thường có đặc tính đa trị* hay *điểm phân nhánh*. Có thể xảy ra hai khả năng sau đây.

1. Nếu tồn tại số nguyên $n \geq 2$ sao cho sau phép vòng quanh n lần theo một hướng ta quay về với phần tử đầu tiên thì điểm a được gọi là *điểm phân nhánh cấp hữu hạn* và số n bé nhất có tính chất vừa nêu là *cấp phân nhánh*.

2. Nếu số n như trong 1) không tồn tại (nghĩa là vòng quanh theo γ theo một hướng luôn luôn đưa đến phần tử mới) thì điểm a được gọi là *điểm phân nhánh cấp vô hạn* hay *điểm phân nhánh lôga*.

Ví dụ 9. Điểm $z = \pm 1$ là điểm phân nhánh cấp hai của hàm

$$F(z) = \sqrt{z^2 - 1}.$$

Thật vậy, giả sử

$$z - 1 = \rho_1 e^{i\theta_1}, \quad z + 1 = \rho_2 e^{i\theta_2}.$$

Khi đó

$$F(z) = \sqrt{\rho_1 \rho_2} \cdot e^{i \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}}.$$

Từ đó suy ra rằng khi vòng quanh theo tuyến γ bao một trong hai điểm $z = -1$ hoặc $+1$ giá trị thu được khác giá trị đầu tiên của F về dấu. Thật thế, khi vòng theo γ thì θ_1 (hoặc θ_2) tăng lên 2π trong khi đó θ_2 (hoặc θ_1) không thay đổi. Do đó argumen của căn thức thay đổi đại lượng bằng π còn môđun trở về giá trị ban đầu của nó. Nếu vòng quanh theo γ một lần nữa thì căn thức quay về giá trị đầu tiên của nó.

Ví dụ 10. Điểm $z = a$ và $z = b$ là những điểm phân nhánh của hàm

$$F(z) = \sqrt[n]{(z-a)^k(z-b)^{n-k}}, \quad 0 < k < n.$$

Thật vậy, ta xét điểm a . Ta đặt

$$z - a = r(a) \cdot e^{i\varphi(a)}, \quad z - b = r(b) \cdot e^{i\varphi(b)}.$$

Khi đó

$$F(z) = \sqrt[n]{r(a)r(b)} \cdot e^{\frac{k\varphi(a) + (n-k)\varphi(b)}{n}}.$$

Khi vòng quanh theo tuyến γ chỉ bao điểm a thì $\varphi(a)$ có gia số là 2π , và $\varphi(b)$ không thay đổi, còn $\sqrt[n]{r(a)r(b)}$ trở về giá trị đầu tiên của nó. Do đó

$$\begin{aligned} \Delta_\gamma \arg F(z) &= \frac{k(\varphi(a) + 2\pi) + (n-k)\varphi(b)}{n} \\ &= \frac{k\varphi(a) + (n-k)\varphi(b)}{n} + \frac{k}{n}2\pi. \end{aligned}$$

a) Nếu k và n nguyên tố cùng nhau thì hiển nhiên điểm $z = a$ là điểm phân nhánh cấp n .

b) Nếu d là ước số chung lớn nhất của k và n , tức là $k = p \cdot d$, $n = q \cdot d$, $q \geq 1$ và p, q nguyên tố cùng nhau thì khi đó điểm $z = a$ là điểm phân nhánh cấp q nếu $q \geq 2$. Nếu $q = 1$ thì k chia hết cho n và điểm $z = a$ không phải là điểm phân nhánh.

Tương tự như vậy, điểm $z = b$ là điểm phân nhánh của hàm $F(z)$. Việc xác định cấp phân nhánh của điểm b được tiến hành tương tự.

Ví dụ 11. Xét hàm giải tích

$$F(z) = \sqrt[n]{(z-a)^k(z-b)^\ell},$$

trong đó $k + \ell$ không phải bội của n .

Hiển nhiên các điểm $z = a, b$ là những điểm phân nhánh của hàm $F(z)$. Ta sẽ chứng tỏ rằng điểm ∞ cũng là điểm phân nhánh.

Ta ký hiệu

$$z - a = r(a)e^{i\varphi(a)}, \quad z - b = r(b)e^{i\varphi(b)},$$

trong đó z nằm trên đường tròn chạy theo hướng âm:

$$\gamma^-(R) = \{|z| = R, R > \max\{|a|, |b|\}\}.$$

Khi đó

$$F(z) = \sqrt[n]{r(a)r(b)} e^{i\frac{k\varphi(a)+\ell\varphi(b)}{n}}.$$

Khi vòng quanh theo $\gamma^-(R)$ thì cả $\varphi(a)$ lẫn $\varphi(b)$ đều nhận hai số -2π và do đó

$$\begin{aligned} \Delta_{\gamma^-(R)} \arg F(z) &= \frac{k[\varphi(a) - 2\pi] + \ell[\varphi(b) - 2\pi]}{n} \\ &= \frac{k\varphi(a) + \ell\varphi(b)}{n} - \frac{k + \ell}{n} 2\pi. \end{aligned}$$

Vì $k + \ell$ không phải bội số của n nên $\frac{k + \ell}{n} 2\pi \neq$ bội nguyên của 2π . Từ đó suy ra $z = \infty$ là điểm phân nhánh.

Để kết thúc mục này ta chứng minh định lý về cấu trúc của hàm giải tích lân cận điểm phân nhánh cấp hữu hạn a .

Định lý 5.3.4. *Giả sử $f(z)$ giải tích trong vành tròn $V(a)$ và a là điểm phân nhánh cấp hữu hạn m của hàm $f(z)$. Khi đó hàm $f(z)$ có thể biểu diễn dưới dạng*

$$f(z) = \sum_{-\infty < n < \infty} a_n (z-a)^{n/m}. \quad (5.7)$$

Chứng minh. Để chứng minh ta xét hàm

$$g(\zeta) = f(a + \zeta^m).$$

Hàm $g(\zeta)$ có các tính chất sau đây.

a) Hàm $g(\zeta)$ giải tích trong vành tròn

$$V^* = \{0 < |\zeta| < \sqrt[m]{r}\}$$

b) Hàm $g(\zeta)$ đơn trị trong V^* . Thật vậy, ta lấy đường tròn

$$\gamma(\rho) = \{|\zeta| = \rho, 0 < \rho < \sqrt[m]{r}\}.$$

Khi điểm $\zeta = \rho e^{i\varphi}$ đi hết đường tròn $\gamma(\rho)$ một lần theo hướng dương thì điểm $z = a + \zeta^m = a + \rho^m e^{im\varphi}$ sẽ vòng quanh đường tròn

$$\gamma^*(\rho) = \{|z - a| = \rho^m\}$$

theo hướng dương m lần. Do đó phép thác triển giải tích hàm $g(\zeta)$ theo đường tròn $\gamma(\rho)$ trọn một vòng sẽ đưa đến thác triển giải tích hàm $f(z)$ theo đường tròn $\gamma^*(\rho)$ trọn m lần theo hướng dương. Vì điểm a là điểm phân nhánh cấp m nên theo định nghĩa 5.3.6 lần thác triển thứ m theo đường tròn $\gamma^*(\rho)$ sẽ đưa đến phần tử đầu tiên. Do đó hàm $g(\zeta)$ đơn trị trong V^* .

Từ hai tính chất này và nhận xét ở đầu tiết 2 của mục này, suy ra tính chỉnh hình của $g(\zeta)$. Khai triển hàm $g(\zeta)$ thành chuỗi Laurent trong vành tròn V^* ta có

$$g(\zeta) = \sum_{-\infty < n < \infty} a_n \zeta^n. \quad (5.8)$$

Bằng cách thế $\zeta = (z - a)^{1/m}$ vào khai triển (5.8) ta thu được (5.7). \square

Hệ quả 5.3.1. Giả sử điểm $z = \infty$ là điểm phân nhánh cấp m của hàm giải tích $f(z)$. Khi đó hàm f có thể biểu diễn dưới dạng

$$f(z) = \sum_{-\infty < n < \infty} a_n z^{n/m}, \quad (5.9)$$

trong đó chuỗi hội tụ trong vành tròn dạng $\{R < |z| < \infty\}$.

Chứng minh. Nhận xét rằng điểm $\zeta = 0$ là điểm phân nhánh cấp m của hàm $f(1/\zeta)$. Do đó từ định lý 5.3.4 suy ra hệ quả 5.3.1. \square

Khai triển (5.7) và (5.9) là khái quát của khai triển Laurent mà ta đã nghiên cứu trong chương trước. Như vậy, điểm phân nhánh cô lập cấp m của hàm $f(z)$ ($m \in \mathbb{N}, m \geq 2$) được đặc trưng bởi điều kiện là: tại lân cận của điểm ấy có một nhánh của $f(z)$ được biểu diễn dưới dạng

$$f = \sum_{-\infty < n < \infty} a_n (z - a)^{n/m} \quad a \neq \infty \quad (5.10)$$

hoặc

$$f = \sum_{-\infty < n < \infty} a_n z^{-n/m} \quad (a = \infty). \quad (5.11)$$

Căn cứ vào cấu trúc của chuỗi (5.10) hoặc (5.11) điểm phân nhánh $z = a$ còn được gọi là

1. *điểm phân nhánh đại số* nếu chỉ có một số hữu hạn hệ số $a_n \neq 0$ khi $n < 0$;
2. *điểm phân nhánh siêu việt* nếu có vô số hệ số $a_n \neq 0$ khi $n < 0$ (điểm bất thường cốt yếu có đặc tính đa trị!).

5.4 Khái niệm về diện Riemann

Như đã nói trong mục trước, hàm giải tích không phải là hàm theo nghĩa thông thường của từ đó vì mỗi giá trị z có thể tương ứng với một hoặc một số (và thậm chí là một tập hợp đếm được giá trị). Để có thể xem hàm $F(z)$ như là hàm theo nghĩa thông thường ta gán hàm $F(z)$ với một mặt R nào đó mà trên đó hàm $F(z)$ đơn trị. B. Riemann là người đầu tiên đưa ra ý niệm tìm những mặt mới thay cho mặt phẳng phức mà trên đó mọi hàm giải tích đều đơn trị. Những mặt thu được đó gọi là *diện Riemann*. Diện Riemann có thể xem như là phương pháp tương tượng trực quan về đặc trưng đa trị của hàm giải tích. Có thể nói rằng tính trực quan là ý nghĩa cơ bản của việc đưa khái niệm diện Riemann để nghiên cứu hàm đa trị.

5.4.1 Một số ví dụ mở đầu

Giả sử cho hàm chỉnh hình $f(z)$ xác định trong miền D của mặt phẳng phức. Tại mỗi điểm $a \in D$ hàm $f(z)$ được khai triển thành chuỗi Taylor. Ta tách ra những chuỗi mà hình tròn hội tụ của chúng vượt ra khỏi giới hạn của D . Hợp miền D với mọi hình tròn này lập nên một miền $D_1 \supset D$ nào đó. Có thể có hai trường hợp xảy ra.

1. *Trường hợp 1:* Trong giao của hai hình tròn K_1 và K_2 : $G = K_1 \cap K_2$, tổng của chuỗi Taylor tương ứng

$$\begin{aligned} f_1(z) &= a_0^1 + a_1^1(z-a) + a_1^1(z-a)^2 + \dots \\ f_2(z) &= a_0^{(2)} + a_1^{(2)}(z-\tilde{a}) + a_2^{(2)}(z-\tilde{a})^2 + \dots \end{aligned}$$

khác nhau, nghĩa là $f_1(z) \neq f_2(z)$, $z \in G$.

Do đó, tại điểm $z \in G$ hàm có hai giá trị. Theo đề nghị của Riemann, trong trường hợp đó, ta sẽ hình dung rằng ở phía trên miền G , các hình tròn K_1 và K_2 nằm trên nhau (không nhập làm một) trong hai mặt phẳng (hoặc tờ - mặt phẳng).

2. Nếu tổng $f_1(z) = f_2(z)$ trong G thì ta sẽ dán các hình tròn K_1 và K_2 với nhau theo miền G để được một "tờ". Như vậy, miền thu được D_1 trong kết quả của thác triển không nhất thiết là đơn diện (một tờ) mà ở những phần riêng lẻ nó có thể là đa diện (nhiều tờ!).

Quá trình thác triển giải tích có thể tiếp tục bằng cách khai triển hàm thành chuỗi Taylor tại các điểm nằm ngoài D nhưng nằm trong D_1 (ở một số phần riêng lẻ miền D_1 có thể là đa diện). Qua bước thác triển này miền giải tích của hàm có thể được mở rộng thành miền D_2 nào đó chứa D_1 , v. v... Quá trình này có thể tiếp tục cho đến khi phép thác triển tiếp theo không thực hiện được. Và như ta biết, hàm thu được trong kết quả là hàm giải tích đủ, còn miền được phủ bởi miền D đã cho và mọi hình tròn hội tụ được gọi là miền tồn tại của hàm. Miền này có thể là đơn diện và cũng có thể là đa diện. Bây giờ ta sẽ trình bày một số ví dụ xây dựng diện Riemann một số hàm đơn giản để phục vụ cho sự hình dung trực quan diện Riemann sẽ trình bày trong phần sau.

Ví dụ thứ nhất. Xét hàm giải tích

$$F(z) = \sqrt[n]{z}, \quad z \in D = \{0 < |z| < \infty\}.$$

Trong miền $D = \{0 < |z| < \infty\}$ hàm $F(z)$ là đa trị. Các điểm $z = 0, \infty$ là điểm phân nhánh cấp n (xem định nghĩa 5.3.7). Ta đặt $D^* = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$. Trong miền D^* hàm $F(z)$ có thể tách thành n nhánh chỉnh hình

$$f_m(z) = \sqrt[n]{|z|} \cdot e^{i \frac{\arg z + 2\pi m}{n}} = \tilde{F}(z) e^{i \frac{2\pi m}{n}}, \quad (5.12)$$

$\tilde{F}(z) = \sqrt[n]{|z|} e^{i \frac{\arg z}{n}}$, $m = 0, 1, 2, \dots, n-1$, $-\pi < \arg \leq \pi$. Ta lấy n bản - miền D^*

$$D_m^* = \overline{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{R}_-$$

với biên của mỗi miền là nhất cắt theo \mathbb{R}_- . Ta ký hiệu bờ trên của nhất cắt \mathbb{R}_- là γ^+ và bờ dưới là γ^- .

Ta nhận xét rằng các nhánh chỉnh hình f_0, f_1, \dots, f_{n-1} có thể thác triển liên tục lên các bờ của nhất cắt. Do đó ta có thể đồng nhất những điểm trên các bờ của các nhất cắt mà tại đó giá trị của các nhánh chỉnh hình trùng nhau.

Từ các hệ thức (5.12) ta có

$$f_m(z)|_{\gamma^+} = \tilde{F}(z) e^{\frac{2m+1}{n}\pi i}, \quad f_n(z)|_{\gamma^-} = \tilde{F}(z) e^{\frac{2m-1}{n}\pi i}.$$

Do đó

$$f_m(z)|_{\gamma^+} = f_{m+1}(z)|_{\gamma^-} : m = 0, 1, \dots, n-2$$

và

$$f_{n-1}(z)|_{\gamma^-} = f_0(z)|_{\gamma^+}.$$

Do đó từ nhận xét trên đây ta có thể đồng nhất (“dán”) các bờ của nhất cắt như sau. Khi $m = 0, 1, \dots, n-2$ ta sẽ dán bờ γ^+ của nhất cắt \mathbb{R}_- trên bản miền D_m^* với bờ γ^- trên bản miền D_{m+1}^* . Vì giá trị $f_0 = f_n$ trên \mathbb{R}_- (và

cả $D_0^* = D_n^*$) nên ta còn phải dán bờ γ^+ của bản miền D_0^* với bờ γ^- của bản miền D_{n-1}^* .

Trong không gian ba chiều, phép dán không có tự cắt sau cùng này không thể thực hiện được. Nhưng điều đó không cần bản. Mặt n - tờ vừa được dựng gọi là *diện Riemann của hàm $\sqrt[n]{z}$* . Bây giờ tọa độ z sẽ xác định điểm trên tờ số 0, điểm trên tờ số 1, ... , và điểm nằm trên tờ thứ $n - 1$. Ta cần tìm ký hiệu để xác định điểm duy nhất trên diện Riemann.

Điểm $z \neq 0, \neq \infty$ thuộc tờ thứ 0 đặt tương ứng với giá trị cố định của $\sqrt[n]{z}$ bằng $f_0(z)$, $-\pi < \arg z \leq \pi$ và ký hiệu điểm trên tờ thứ 0 là $(z, f_0(z))$. Sau đó xuất phát từ giá trị $\sqrt[n]{z}$ ta thác triển hàm $F(z)$ theo tuyến đóng giản đơn bao điểm gốc tọa độ ta sẽ vượt qua nhát cắt và đi đến tờ thứ nhất và khi trở về điểm có tọa độ z trên tờ thứ nhất $F(z)$ nhận giá trị $f_1(z)$. Ta ký hiệu điểm z trên tờ thứ nhất là $(z, f_1(z))$, v.v... Bằng cách lý luận tương tự, ta ký hiệu điểm z trên tờ thứ $n - 1$ là $(z, f_{n-1}(z))$.

Như vậy mọi điểm của mặt n - tờ vừa dựng có thể xem như các cặp có thứ tự $(z, F(z))$, trong đó $F(z) = \sqrt[n]{z}$ và ngoài ra hai điểm (z_1, F_1) và (z_2, F_2) trùng nhau trên diện Riemann khi và chỉ khi

$$z_1 = z_2, \quad F_1(z) = F_2(z)$$

tại lân cận điểm $z = z_1$. Hiển nhiên rằng hàm $F(z)$ đơn trị trên diện Riemann của nó và nhận giá trị F tại điểm (z, F) .

Ở phía trên điểm $z = 0$ diện Riemann của hàm F chỉ có một điểm và tương tự trên điểm $z = \infty$ diện Riemann cũng chỉ có một điểm. Các điểm này gọi là *điểm phân nhánh* của mặt.

Trên hình V.4 là diện Riemann của hàm 2-trị \sqrt{z} . Đối với hàm $w = \sqrt{z}$, mỗi giá trị $\neq 0$ tương ứng với hai giá trị khác nhau w_1 và $w_2 = e^{\pi i} w_1$ khác nhau bởi thừa số $e^{\frac{2\pi i}{2}} = e^{\pi i} = -1$, tức là khác nhau về dấu.

Nếu xuất phát từ điểm z_0 thuộc tờ D_2 ta vạch một chu tuyến đóng bao điểm phân nhánh $z = 0$ thì khi trở về vị trí xuất phát z_0 ta sẽ ở tờ D_1 với giá trị hàm $w_2(z_0)$ và nếu tiếp tục thực hiện một lần vòng quanh miền xung quanh điểm phân nhánh ta sẽ trở về vị trí xuất phát cùng với giá trị xuất phát của hàm $w_1(z_0)$.

Hình V.4

Hình V.5

Ví dụ thứ hai. Xét hàm giải tích

$$F(z) = z + \sqrt{z^2 - 1}$$

(xem ví dụ 9, **5.3**). Ta ký hiệu $\rho_1(z)$, $\theta_1(z)$ và tương ứng $\rho_2(z)$, $\theta_2(z)$ là môđun và argumen của các số phức $z - 1$ và $z + 1$. Khi đó

$$\varphi(z) = \sqrt{z^2 - 1} = \sqrt{\rho_1(z)\rho_2(z)} e^{i\frac{[\theta_1(z) + \theta_2(z)] + 2m\pi}{2}}, \quad m = 0, 1$$

và hiển nhiên rằng trong miền $D = \overline{\mathbb{C}} \setminus [-1, +1]$ hàm $\varphi(z)$ có thể tách thành hai nhánh chỉnh hình $\varphi_m(z)$, $m = 0, 1$ và do đó hàm F được tách thành hai nhánh chỉnh hình $f_0(z)$ và $f_1(z)$.

Để dựng diện Riemann của hàm $F(z) = z + \varphi_m(z)$, $m = 0, 1$ ta lấy hai bản miền $D = \overline{\mathbb{C}} \setminus [-1, +1]$ trong đó đoạn $\gamma = [-1, +1]$ được chứa trong \mathbb{R} , $m = 0, 1$. Tương tự như trong ví dụ thứ nhất dễ dàng thấy rằng

$$\begin{aligned} f_0(z)|_{\gamma^- \subset D_0} &= f_1(z)|_{\gamma^+ \subset D_1}, \\ f_0(z)|_{\gamma^+ \subset D_0} &= f_1(z)|_{\gamma^- \subset D_1}. \end{aligned}$$

Do đó ta sẽ dán bờ dưới γ^- của bản miền D_0 với bờ trên γ^+ của bản miền D_1 và tiếp theo là dán bờ trên $\gamma^+ \subset D_0$ với bờ dưới $\gamma^- \subset D_1$ (cách dán này gọi là cách dán bắt chéo!).

Mặt hai tờ vừa thu được gọi là diện Riemann của hàm $F(z) = z + \sqrt{z^2 - 1}$ (hình V.5).

Điểm $z = \infty$ không phải là điểm phân nhánh của hàm đã cho vì tại lân cận điểm ∞ ta có thể khai triển hàm đó thành chuỗi Laurent có phần chính

dạng $= \text{const} \cdot z$, và do đó điểm ∞ là cực điểm đơn của các nhánh chỉnh hình. Từ đó suy ra rằng trên mỗi tờ đều có điểm vô cùng riêng của nó.

Ví dụ thứ ba. Trong miền $D = \overline{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{R}_-$ hàm giải tích

$$F(z) = \text{Ln } z$$

có thể tách vô số nhánh chỉnh hình. Bờ trên của nhát cắt ta ký hiệu là γ^+ , còn bờ dưới là γ^- . Khi đó, nếu ta ký hiệu $f_m(z)$ là các nhánh chỉnh hình thì

$$\begin{aligned} f_m(z) &= \ln |z| + i \arg z + 2\pi i m; \\ -\pi &< \arg z < \pi, \quad m \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Từ hệ thức (5.13) suy ra rằng

$$\begin{aligned} f_m(z)|_{\gamma^+} &= \ln |z| + (2m+1)\pi i, \\ f_m(z)|_{\gamma^-} &= \ln |z| + (2m-1)\pi i. \end{aligned}$$

Do đó

$$f_m(z)|_{\gamma^+} = f_{m+1}(z)|_{\gamma^-}.$$

Áp dụng nhận xét đã nêu trong ví dụ thứ nhất ta sẽ lấy các bản miền D_m tương ứng với các nhánh chỉnh hình $f_m(z)$ và dán các bờ của chúng như sau: dán bờ γ^+ của bản miền D_m với γ^- của bản miền D_{m+1} , $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Kết quả của phép dán này sẽ cho ta mặt vô số tờ - diện Riemann của hàm lôgarit (hình V.6).

Trên diện Riemann này có thể xem lôgarit như hàm theo nghĩa thông thường. Tại các điểm $z = 0$ và $z = \infty$ lôgarit không xác định, do đó diện Riemann không có một điểm nào ở phía trên $z = 0$ và $z = \infty$.

Ví dụ thứ tư. Tương tự như ở ví dụ thứ hai, diện Riemann của hàm (xem ví dụ 3, 5.3)

$$F(z) = \sqrt{(z-m)(z-a_2)(z-a_3)}, \quad a_1 \neq a_2 \neq a_3$$

có thể dựng như sau. Hiển nhiên rằng điểm a_1, a_2, a_3 và $z = \infty$ là những điểm phân nhánh cấp hai của hàm $F(z)$. Giả sử $\gamma(a_1, a_2)$, $\gamma(a_3, \infty)$ là những tuyến Jordan không giao nhau, nối a_1 với a_2 , a_3 với ∞ (hình V.7).

Hình V.6

Hình V.7

Bây giờ ta lấy hai bản miền D .

$D_m = \overline{\mathbb{C}} \setminus \{\gamma(a_1, a_2) \cup \gamma(a_3, \infty)\}$, $m = 0, 1$ tương ứng với các nhánh chính hình f_m ; $m = 0, 1$ trong miền $D = \overline{\mathbb{C}} \setminus \{\gamma(a_1, a_2) \cup \gamma(a_3, \infty)\}$ và sau đó dán bắt chéo các bản miền đó với nhau theo các nhát cắt $\gamma(a_1, a_2)$ và $\gamma(a_3, \infty)$. Mặt hai tờ vừa dựng là diện Riemann của hàm đã cho. Các điểm của mặt này có thể ký hiệu là $(z, F(z))$, trong đó z xác định điểm trên cả hai tờ, còn $F(z)$ thì xác định điểm đó của mặt nằm trên tờ nào.

Ví dụ thứ năm. Diện Riemann của hàm

$$F(z) = \sqrt[n]{(z-a)^k(z-b)^\ell}$$

là mặt n -tờ. Để dựng diện Riemann của hàm $F(z)$ cần phân biệt hai trường hợp có thể xảy ra.

1. Số $k + \ell$ là bội số của n . Do đó, điểm $z = \infty$ không phải là điểm phân nhánh của hàm $F(z)$. Trong trường hợp này diện Riemann của $F(z)$ được xây dựng tương tự như ở ví dụ thứ hai.

2. Số $k + \ell$ không phải là bội số của n . Trong trường hợp này (xem ví dụ 11, 5.3) điểm $z = \infty$ là điểm phân nhánh cấp n của hàm $F(z)$. Do đó diện Riemann của hàm $F(z)$ được xây dựng tương tự như trong ví dụ thứ tư.

Ví dụ thứ sáu. Xét hàm giải tích (xem ví dụ thứ tư)

$$F(z) = \sqrt{(z - a_1)(z - a_2) \cdots (z - a_n)},$$

trong đó a_1, a_2, \dots, a_n là những số phức khác nhau. Như ta biết $F(z)$ là hàm có hai giá trị. Do đó ta sẽ thu được diện Riemann hai tờ với các điểm phân nhánh là a_1, a_2, \dots, a_n .

Để dựng diện Riemann đối với hàm đã cho, ta cần phân biệt hai trường hợp có thể xảy ra.

1. n là số lẻ. Ta ghép các điểm rẽ nhánh thành các cặp $(a_1, a_2), (a_3, a_4), \dots$. Điểm a_n không được ghép với điểm nào thành cặp cả. Trong trường hợp này, điểm $z = \infty$ cũng là điểm phân nhánh nên ta sẽ ghép a_n với ∞ . Do đó trong miền

$$D = \overline{\mathbb{C}} \setminus \left\{ \overbrace{\gamma(a_1, a_2) \cup \cdots \cup \gamma(a_n, \infty)}^{\frac{n+1}{2} \text{ nhát cắt}} \right\},$$

trong đó $\gamma(a_1, a_2), \dots, \gamma(a_n, \infty)$ là những nhát cắt đơn giản không giao nhau, hàm đã cho có thể tách thành hai nhánh chỉnh hình.

Bây giờ lấy hai bản miền D_m

$$D_m = \overline{\mathbb{C}} \setminus \{ \gamma(a_1, a_2) \cup \cdots \cup \gamma(a_n, \infty) \}, \quad m = 0, 1$$

và dán bắt chéo với nhau theo những nhát cắt và ta sẽ thu được diện Riemann của hàm $F(z)$.

2. n là số chẵn. Trong trường hợp này ta lấy hai bản miền D_m .

$$D_m = \overline{\mathbb{C}} \setminus \{ \gamma(a_1, a_2) \cup \gamma(a_3, a_4) \cup \cdots \cup \gamma(a_{n-1}, a_n) \}, \quad m = 0, 1$$

và tiến hành phép dán như ở trên (xem ví dụ thứ hai).

5.4.2 Phương pháp dựng diện Riemann

Ý niệm chủ yếu về diện Riemann là ở chỗ: tùy theo sự xuất hiện các hiện tượng không đơn trị trong quá trình thác triển giải tích, người ta đưa vào

xét những “bản miền” mới (“các tờ” mới) thuộc mặt phẳng của biến độc lập và bằng cách gắn liền đồng thời các “bản mới” đó với các bản trước (có thể nói: “dán bản này với bản khác”!) sao cho điểm z chuyển dịch từ bản này đến bản kia là thông suốt.

Phương pháp dựng diện Riemann bằng cách cắt - dán đã mô tả trong các ví dụ ở tiết trước được ứng dụng trong trường hợp tổng quát. Ta sẽ mô tả một cách vắn tắt quá trình này.

Giả sử $F(z)$ là hàm giải tích tùy ý chỉ có các điểm bất thường cô lập. Từ mỗi điểm của mặt phẳng mà ở trên điểm đó tồn tại dù chỉ là một điểm bất thường, ta kẻ tia đi từ điểm đó ra vô cùng và không đi qua hình chiếu của các điểm bất thường khác. Mặt phẳng z với các nhát cắt theo những tia đó là một miền đơn liên D . Theo định lý Monodromie hàm giải tích $F(z)$ có thể tách thành một tập hợp đếm được các nhánh chỉnh hình

$$f_m(z), \quad m = 1, 2, \dots$$

Mỗi nhánh chỉnh hình $f_m(z)$ sẽ tương ứng với một bản miền D_m . Các tờ của chồng bản miền D_m vừa thu được sẽ được dán với nhau theo phương pháp đã tiến hành trong tiết trước.

5.5 Bài tập

1. Hãy khảo sát xem hàm đa trị

$$\sqrt{1 + \sqrt{z}}$$

có nhánh đơn trị cho phép khai triển thành chuỗi Laurent tại lân cận điểm $z = 1$ hay không?

2. Chứng minh rằng hàm $z^\alpha(1-z)^\beta$, trong đó α, β là những số thực, có thể tách nhánh chỉnh hình trong $\mathbb{C} \setminus [0, 1]$ nếu $\alpha + \beta$ là số nguyên.

3. Giả sử $D = \mathbb{C} \setminus [-1, +1]$ và f là nhánh chỉnh hình trong D của hàm $\sqrt{z^2 - 1}$ sao cho $f(2) = \sqrt{3}$.

1. Tính giá trị của f tại điểm $z = x \in \mathbb{R}$.
2. Khai triển hàm $f(z)$ thành chuỗi Laurent tại lân cận điểm $z = \infty$.

Trả lời: 2) $f(z) = z \sum_{n \geq 0} \binom{1/2}{n} (-1)^n z^{-2n}$.

4. Chứng minh rằng hàm đa trị

$$f(z) = \sqrt{z - z^2}$$

cho phép tách các nhánh chỉnh hình trong phần ngoài D của các nhát cắt $\Gamma_1 = [1, +\infty)$ và $\Gamma_2 = (-\infty, 0]$.

5. Giả sử $w(z)$ là nhánh chỉnh hình của hàm $f(z)$ trong bài tập 4 mà $w\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$.

Tính $w\left(\frac{1+i}{2}\right)$, $w(-1+i0)$, $w(-1-i0)$.

6. Giả sử D là phần ngoài của hai tia $\gamma_1 = [1, 1-i\infty)$ và $\Gamma_2 = [-1, -1+i\infty)$ và $w(z)$ là nhánh chỉnh hình của hàm $\ln(1-z^2)$ thỏa mãn điều kiện $w(0) = 0$. Tính $w(8)$ và $w(1+i)$.

7. Dựng diện Riemann của các hàm

1. $w = \sqrt[n]{(z-a)^k(z-b)^\ell}$

phân biệt hai trường hợp $k + \ell$ là bội của n và không là bội của n .

2. $w = \text{Ln} \frac{z-a}{z-b}$.

Chương 6

Lý thuyết thặng dư và ứng dụng

6.1	Cơ sở lý thuyết thặng dư	423
6.1.1	Định nghĩa thặng dư	423
6.1.2	Phương pháp tính thặng dư	425
6.1.3	Định lý cơ bản của lý thuyết thặng dư	436
6.1.4	Tích tích phân theo chu tuyến đóng	444
6.2	Một số ứng dụng của lý thuyết thặng dư	448
6.2.1	Phương pháp tính tích phân	448
6.2.2	Tích tích phân dạng $I = \int_0^{2\pi} R(\cos \varphi, \sin \varphi) d\varphi$. . .	451
6.2.3	Tích phân dạng $I = \int_{-\infty}^{+\infty} R(x) dx$	454
6.2.4	Tích phân dạng $I = \int_{\mathbb{R}} e^{iax} R(x) dx$	459

6.2.5	Tích phân dạng $I = \int_{\mathbb{R}^+} R(x)x^\alpha dx$	463
6.2.6	Một số ví dụ khác	478
6.2.7	Tìm tổng của chuỗi	490
6.3	Hàm nguyên và hàm phân hình	495
6.3.1	Hàm phân hình. Bài toán Cousin thứ nhất trong mặt phẳng phức	495
6.3.2	Hàm nguyên. Bài toán Cousin thứ hai trong mặt phẳng phức	503
6.4	Bài tập	513

6.1 Cơ sở lý thuyết thặng dư

6.1.1 Định nghĩa thặng dư

Trước khi phát biểu định nghĩa về thặng dư ta chứng minh một định lý đơn giản sau đây

Định lý 6.1.1. *Giả sử hàm f chỉnh hình trong vành tròn*

$$V = \{z \in \mathbb{C} : r < |z - a| < R\}$$

Khi đó tích phân

$$I(\rho) = \int_{|z-a|=\rho} f(z)dz, \quad r < \rho < R$$

không phụ thuộc vào ρ .

Chứng minh. Thật vậy, giả sử $r < \rho_1 < \rho_2 < R$ và $\gamma(\rho_1) = \{|z - a| = \rho_1\}$, $\gamma(\rho_2) = \{|z - a| = \rho_2\}$. Từ định lý về bất biến của tích phân theo các tuyến

đồng luân suy ra rằng

$$\int_{\gamma(\rho_1)} f(z)dz = \int_{\gamma(\rho_2)} f(z)dx.$$

□

Định nghĩa 6.1.1. Giả sử hàm $f(z)$ chỉnh hình tại điểm a hoặc có bất thường cô lập đặc tính đơn trị a . Giả sử γ là đường cong đóng Jordan bao điểm $z = a$ và được định hướng ngược chiều kim đồng hồ. Khi đó tích phân $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z)dz$ được gọi là *thặng dư* của hàm $f(z)$ đối với điểm a và được ký hiệu là

$$\operatorname{Res}[f; a] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z)dz. \quad (6.1)$$

Hiển nhiên chu tuyến γ thỏa mãn định nghĩa 6.1.1 bao giờ cũng tồn tại. Thật vậy, theo điều kiện đã cho hàm f chỉnh hình trong $U(\rho) = \{0 < |z-a| < \rho\}$. Do đó ta có thể lấy γ là đường cong Jordan đóng bất kỳ thuộc $U(\rho)$ không đi qua a nhưng bao a , ví dụ đường tròn $\gamma_r = \{|z-a| = r, r < \rho\}$.

Từ định lý Cauchy và định lý 6.1.1 suy ra rằng thặng dư (6.1) có thể viết dưới dạng

$$\operatorname{Res}[f; a] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(a,r)} f(z)dz, \quad (6.2)$$

trong đó đường tròn $\gamma(a, r)$ chạy theo hướng dương và đại lượng ở vế phải của (6.2) không phụ thuộc vào r và hoàn toàn được xác định bởi đáng điệu địa phương của hàm f tại điểm a .

Định nghĩa 6.1.2. Giả sử hàm $f \in H\{|z| > r\}$ và $z = \infty$ là điểm bất thường cô lập của hàm $f(z)$. Đại lượng

$$\operatorname{Res}[f; \infty] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma^-(0,R)} f(z)dz$$

được gọi là *thặng dư của hàm f tại điểm ∞* trong đó $\gamma^-(0, R)$ là đường tròn $\gamma^-(0, R) = \{|z| = R\}$ với bán kính đủ lớn được định hướng sao cho lân cận điểm ∞ luôn luôn nằm bên trái.

Ta có thể đưa ra định nghĩa hợp nhất sau đây về thặng dư.

Định nghĩa 6.1.3. Giả sử $a \in \overline{\mathbb{C}}$ là điểm chỉnh hình hoặc điểm bất thường cô lập đơn trị của hàm f . Giá trị của tích phân của hàm f theo biên của lân cận đủ bé của điểm $z = a$ chia cho $2\pi i$ được gọi là *thặng dư của hàm f tại điểm a* .

Theo định lý Cauchy

$$\operatorname{Res}[f; a] = 0$$

nếu hàm f chỉnh hình tại điểm a và $a \in \mathbb{C}$. Thặng dư tại ∞ có thể khác 0 khi hàm chỉnh hình tại ∞ . Thật vậy, giả sử $f(z) = \frac{1}{z}$. Hiển nhiên điểm $z = \infty$ là không điểm đơn của f và

$$\operatorname{Res}[f; \infty] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma^-(0, R)} \frac{1}{z} dz = -1 \neq 0.$$

Như vậy hàm chỉ có thể có thặng dư $\neq 0$ tại điểm a cách gốc tọa độ một khoảng cách hữu hạn trong trường hợp khi a thật sự là điểm bất thường, trong khi đó nó có thể có thặng dư $\neq 0$ tại ∞ thậm chí cả trong trường hợp hàm chỉnh hình tại đó.

6.1.2 Phương pháp tính thặng dư

Việc tính thặng dư bằng cách xuất phát từ định nghĩa hết sức phức tạp. Cơ sở cho việc tính toán thặng dư một cách thực tiễn là định lý sau đây.

Định lý 6.1.2. *Giả sử với $0 < |z - a| < \rho$ hàm $f(z)$ có thể biểu diễn dưới dạng*

$$f(z) = \sum_{-\infty < n < \infty} a_n(z - a)^n, \quad (6.3)$$

Khi đó

$$\operatorname{Res}[f; a] = a_{-1}. \quad (6.4)$$

Nếu khi $R < |z| < \infty$

$$f(z) = \sum_{-\infty < n < \infty} a_n z^n \quad (6.5)$$

thì

$$\operatorname{Res}[f; \infty] = -a_{-1}. \quad (6.6)$$

Chứng minh. 1. Trong vành tròn đóng bất kỳ

$$0 < \rho_1 \leq |z - a| \leq \rho_2 < \rho$$

chuỗi (6.3) hội tụ đều nên có thể tích phân từng số hạng chuỗi (6.3) theo đường tròn $\gamma(r) = \{|z - a| = r; \rho_1 \leq r \leq \rho_2\}$. Kết quả của phép tích phân đó cho ta

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(r)} f(z) dz = a_{-1}.$$

Từ đó suy ra (6.4) được chứng minh.

2. Vì chuỗi (6.1.5) hội tụ đều trên đường tròn

$$\gamma(0, \tilde{R}) = \{|z| = \tilde{R}, \tilde{R} > R\}$$

nên có thể tích phân từng số hạng chuỗi đó theo $\gamma(0, \tilde{R})$ và thu được

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma^-(0, \tilde{R})} f(z) dz = -a_{-1}.$$

□

Ví dụ 1. Giả sử

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^6}.$$

Tính $\text{Res}[f; 0]$.

Giải. Vì tại lân cận điểm $z = 0$ ta có

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z^6} \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots \right) \\ &= \frac{1}{z^5} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z} + \dots \end{aligned}$$

nên $a_{-1} = \frac{1}{5!}$ và $\text{Res}[f; 0] = \frac{1}{5!}$.

Ví dụ 2. Chứng minh rằng nếu

$$f(z) = z \cdot \cos \frac{1}{z+1}$$

thì

$$\text{Res}[f; -1] = -\frac{1}{2}.$$

Giải. Thật vậy, ta có

$$f(z) = [(z+1) - 1] \left[1 - \frac{1}{2(z+1)^2} + \dots \right]$$

và do đó

$$a_{-1} = -\frac{1}{2}.$$

Ví dụ 3. Giả sử

$$f(z) = \frac{1}{z(1 - e^{-hz})}.$$

Tính $\text{Res}[f; 0]$.

Giải. Khi đó $\text{Res}[f; 0] = \frac{1}{2}$. Thật vậy, tại lân cận điểm $z = 0$ ta có

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z \left[1 - 1 + hz - \frac{h^2 z^2}{2!} + \dots \right]} \\ &= \frac{1}{hz^2 - \frac{h^2 z^3}{2!} + \dots} \\ &= \frac{1}{hz^2} + \frac{1}{2z} + \varphi(z), \end{aligned}$$

trong đó $\varphi(z)$ chỉnh hình tại điểm $z = 0$. Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Ví dụ 4. Ta xét miền $D = \mathbb{C} \setminus [0, 1]$ và hàm giải tích trong đó

$$F(z) = \sqrt[8]{\frac{z}{1-z}}.$$

Tính $\text{Res}[f; \infty]$, trong đó f là nhánh chỉnh hình nhận giá trị dương ở bờ trên của nhát cắt $[0, 1]$.

Giải. Trong miền D hàm $F(z)$ có thể tách thành ba nhánh chỉnh hình. Giả sử $f(z)$ là nhánh chỉnh hình nhận giá trị dương ở bờ trên của nhát cắt. Ta sẽ khai triển hàm $f(z)$ thành chuỗi Laurent tại lân cận điểm ∞ . Với $z \in D$ ta có

$$f(z) = \left| \sqrt[8]{\frac{z}{1-z}} \right| e^{i\frac{\varphi}{3}}, \quad \varphi = \varphi_1 - \varphi_2,$$

trong đó $\varphi_1 = \Delta_\gamma \arg z$, $\varphi_2 = \Delta_\gamma(1-z)$, $\gamma \subset D$ là đường cong nằm trong D và nối điểm $0 + i0$ với $z \in D$. Khi $z = x > 1$ ta có $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = -\pi$. Do đó

$$f(x) = \sqrt[3]{\frac{x}{x-1}} e^{i\pi/3},$$

và $f(\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = e^{i\pi/3}$.

Từ đó suy ra rằng trong lân cận điểm $z = \infty$ ta có

$$f(z) = e^{i\pi/3} \sqrt[3]{\frac{1}{1-\frac{1}{z}}} = e^{i\pi/3} \left(1 - \frac{1}{z}\right)^{-\frac{1}{3}},$$

trong đó căn thức nhận giá trị 1 tại ∞ . Từ đó dễ dàng thấy rằng

$$f(z) = e^{i\pi/3} \sum_{n \geq 0} \binom{-\frac{1}{3}}{n} (-1)^n z^{-n}$$

và

$$\text{Res}[f; \infty) = -e^{i\pi/3} \binom{-\frac{1}{3}}{1}.$$

Ví dụ 5. Giả sử $f(z)$ là nhánh chính hình của hàm

$$F(z) = \left(\frac{1-z}{1+z} \right)^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

mà $f(0+i0) = 1$ trong miền $D = \mathbb{C} \setminus [-1, +1]$. Tính thặng dư của hàm $f(z)$ tại điểm ∞ (ví dụ 5.3.5).

Giải. Ta khai triển hàm $f(z)$ thành chuỗi Laurent tại lân cận điểm ∞ . Ta có

$$f(\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = e^{-i\alpha\pi}.$$

Tiếp theo

$$f(z) = \left(\frac{-1 + \frac{1}{z}}{1 + \frac{1}{z}} \right)^\alpha = e^{-i\alpha\pi} g(z),$$

trong đó ta đặt

$$g(z) = \left(\frac{1 - \frac{1}{z}}{1 + \frac{1}{z}} \right)^\alpha.$$

Hàm $g(z)$ chỉnh hình tại điểm ∞ và $g(\infty) = 1$

$$\begin{aligned} f(z) &= \left(\frac{1 - \frac{1}{z}}{1 + \frac{1}{z}} \right)^\alpha \\ &= \frac{1 - \frac{\alpha}{z} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}z^{-2} + \dots}{1 + \frac{\alpha}{z} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}z^{-2} + \dots} \\ &= 1 - \frac{2\alpha}{z} + \dots \end{aligned}$$

Từ đó suy ra rằng

$$f(z) = e^{i\pi\alpha} \left[1 - \frac{2\alpha}{z} + \dots \right]$$

và

$$\text{Res}[f; \infty] = 2\alpha e^{i\alpha\pi}.$$

Ví dụ 6. Giả sử $f(z)$ là nhánh chỉnh hình của hàm $F(z) = \text{Ln} \frac{1-z}{1+z}$ mà $f(0+i0) = 0$ trong miền $D = \mathbb{C} \setminus [-1, +1]$. Tính thặng dư của hàm $f(z)$ tại điểm ∞ (ví dụ 5.3.6).

Giải. Ta có

$$\begin{aligned} f(z) &= \ln \left| \frac{1-z}{1+z} \right| + i(\varphi_1 - \varphi_2) \\ \varphi_1 &= \Delta_\gamma \arg(1-z), \quad \varphi_2 = \Delta_\gamma \arg(1+z), \end{aligned}$$

trong đó γ là tuyến thuộc D nối điểm $z = 0 + i0$ (điểm 0 ở bờ trên của nhát cắt) với điểm z . Hiển nhiên khi $z = iy, y > 0$ thì $\varphi_1 = -\varphi_2, \varphi_2 = \arctg y$ và do đó với $y > 0$.

$$f(iy) = -2i \text{arctg } y,$$

vì $|1 - iy| = |1 + iy|$.

Từ đó cũng rút ra rằng

$$f(\infty) = \lim_{y \rightarrow \infty} f(iy) = -\pi i.$$

Do đó tại lân cận điểm $z = \infty$ ta có

$$\begin{aligned} f(z) &= \ln \frac{-1 + \frac{1}{z}}{1 + \frac{1}{z}} \\ &= -\pi i + \ln \left(1 - \frac{1}{z}\right) - \ln \left(1 + \frac{1}{z}\right), \end{aligned}$$

trong đó các logarit ở vế phải chỉnh hình tại lân cận điểm ∞ và bằng 0 khi $z = \infty$.

Dễ dàng thấy rằng

$$\begin{aligned} f(z) &= -\pi i - \sum_{n \geq 1} \frac{1}{nz^n} - \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{nz^n} \\ &= -\left[\pi i + \sum_{n \geq 0} \frac{2}{(2n+1)z^{2n+1}}\right], \quad 1 < |z| < \infty. \end{aligned}$$

và từ đó rút ra

$$\text{Res}[f; \infty] = +2.$$

Trong các ví dụ trên đây, việc khai triển hàm thành chuỗi Laurent được tiến hành một cách dễ dàng. Tuy nhiên tuyệt đại đa số trường hợp phép khai triển đó được tiến hành rất khó khăn.

I. THẶNG DƯ TẠI ĐIỂM BẤT THƯỜNG CỐT YẾU. Nếu điểm $z = a$ là điểm bất thường cốt yếu của hàm $f(z)$ thì để tính thặng dư của hàm tại điểm đó ta cần tìm phần chính của khai triển Laurent và sử dụng công thức (6.4) nếu $a \in \mathbb{C}$, công thức (6.6) nếu $a = \infty$.

II. THẶNG DƯ TẠI CỰC ĐIỂM. Trong trường hợp khi a là cực điểm của hàm f , để tính thặng dư tại điểm a , thay cho công thức (6.4) và (6.6) (sử dụng khai triển Laurent) ta thường sử dụng những công thức sẽ chứng minh dưới đây chỉ cần tìm đạo hàm. Ta xét các trường hợp cụ thể sau đây.

1. Trường hợp cực điểm đơn

Định lý 6.1.3. Nếu a là cực điểm đơn của hàm $f(z)$ thì thặng dư của f tại a được tính theo công thức

$$\operatorname{Res}[f; a] = \lim_{z \rightarrow a} (z - a)f(z). \quad (6.7)$$

Chứng minh. Tại lân cận điểm a khai triển Laurent của hàm $f(z)$ có dạng

$$f(z) = a_{-1}(z - a)^{-1} + \sum_{n \geq 0} a_n(z - a)^n$$

và từ đó suy ra

$$a_{-1} = \lim_{z \rightarrow a} (z - a)f(z).$$

Như vậy, để tính thặng dư tại cực điểm đơn ta có công thức

$$\operatorname{Res}[f(z); a] = \lim_{z \rightarrow a} (z - a)f(z).$$

□

Hệ quả 6.1.1. Nếu $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, trong đó φ và ψ là những hàm chỉnh hình tại điểm a thỏa mãn điều kiện $\varphi(a) \neq 0$, $\psi(a) = 0$, $\psi'(a) \neq 0$ thì

$$\operatorname{Res}[f; a] = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}. \quad (6.8)$$

Chứng minh. Thật vậy, vì a là cực điểm của $f(z)$ nên từ (6.7) ta có

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}[f; a] &= \lim_{z \rightarrow a} \frac{(z - a)\varphi(z)}{\psi(z)} \\ &= \lim_{z \rightarrow a} \frac{\varphi(z)}{\frac{\psi(z) - \psi(a)}{z - a}} = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}. \end{aligned}$$

□

Ví dụ 7. Tìm thặng dư của hàm $w = \operatorname{tg} z$ tại các điểm $z_n = \frac{2n+1}{2}\pi, n \in \mathbb{Z}$.

Giải. Ta có $\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}$, $\cos z_n = 0$, $\cos z'|_{z_n} = -\sin z_n$. Do đó từ (6.8) ta có

$$\operatorname{Res}[\operatorname{tg} z; z_n] = \frac{\sin z_n}{-\sin z_n} = -1.$$

Trường hợp cực điểm bội. Ta có định lý sau đây:

Định lý 6.1.4. Nếu a là cực điểm cấp m của hàm $f(z)$ thì

$$\operatorname{Res}[f; a] = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \{(z-a)^m f(z)\}. \quad (6.9)$$

Chứng minh. Vì a là cực điểm cấp m của hàm $f(z)$ nên

$$f(z) = \frac{a_m}{(z-a)^m} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-a} + \sum_{n \geq 0} a_n (z-a)^n$$

và từ đó

$$\begin{aligned} (z-a)^m f(z) &= a_{-m} + a_{-m+1}(z-a) + \cdots + a_{-1}(z-a)^{m-1} \\ &\quad + \sum_{n \geq 0} a_n (z-a)^{n+m}. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Lấy vi phân biểu thức (6.10) $m-1$ lần liên tiếp ta có

$$\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z-a)^m f(z)] = (m-1)! a_{-1} + m! a_0 (z-a) + \cdots$$

và chuyển qua giới hạn khi $z \rightarrow a$ ta thu được (6.9). \square

Ví dụ 8. Tính thặng dư của hàm

$$f(z) = \frac{1}{(z^2 + 1)^3}$$

đối với điểm $z = i$.

Giải. Hiển nhiên điểm $z = i$ là cực điểm cấp ba của hàm $f(z)$. Do đó áp dụng công thức (6.9) ta có

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}[f; i] &= \frac{1}{2!} \lim_{z \rightarrow i} \frac{d^2}{dz^2} \left[(z - i)^3 \frac{1}{(z - i)^3 (z + i)^3} \right] \\ &= \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow i} \frac{d^2}{dz^2} [(z + i)^{-3}] \\ &= \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow i} [(-3)(-4)(z + i)^{-5}] = -\frac{3}{16}i.\end{aligned}$$

Ví dụ 9. Tính

$$\operatorname{Res}\left[\frac{1}{\sin z^2}; 0\right].$$

Giải. Vì $z = 0$ là cực điểm cấp hai của hàm $f(z)$ nên

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}[f; 0] &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} \left[\frac{z^2}{\sin z^2} \right] = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{2z \sin z^2 - 2z^3 \cos z^2}{\sin^2 z^2} \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{2z \left[z^2 - \frac{z^6}{3!} + \dots \right] - 2z^3 \left[1 - \frac{z^4}{2!} + \dots \right]}{\left(z^2 - \frac{z^6}{3!} + \dots \right)^2} \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{3}z^7 + \dots}{z^4 + \dots} = 0.\end{aligned}$$

III. THẶNG DƯ TẠI VÔ CÙNG. Công thức (6.6) là công thức cơ bản để tính thặng dư tại điểm vô cùng

$$\operatorname{Res}[f; \infty] = -a_{-1}. \quad (20.6)$$

Tuy nhiên, trong một số trường hợp để tính thặng dư tại ∞ , ta có thể áp dụng công thức được chứng minh trong định lý sau đây.

Định lý 6.1.5. Nếu hàm f chỉnh hình tại điểm ∞ thì

$$\operatorname{Res}[f; \infty] = - \lim_{z \rightarrow \infty} z[f(z) - a_0]. \quad (6.11)$$

Chứng minh. Thật vậy, với $|z| > R$ ta có

$$\begin{aligned} f(z) &= a_0 + \frac{a_{-1}}{z} + \frac{a_{-2}}{z^2} + \dots \\ &= \sum_{n \geq 1} \frac{a_{-n}}{z^n} + a_0 \Rightarrow f(z) - a_0 = \sum_{n \geq 1} \frac{a_{-n}}{z^n}. \end{aligned}$$

Nhân hai vế của đẳng thức trên đây với z và chuyển qua giới hạn khi $z \rightarrow \infty$ ta thu được (6.11). \square

Hệ quả 6.1.2. Nếu ∞ là không - điểm cấp $m \geq 1$ của $f(z)$ thì $a_0 = a_{-1} = \dots = a_{-m+1} = 0$ và do đó $\text{Res}[f; \infty] = -a_{-1} = 0$.

Nếu $m = 1$, tức là $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = a_0 = 0$ thì

$$\text{Res}[f(z); \infty] = - \lim_{z \rightarrow \infty} z \cdot f(z).$$

Ví dụ 10. Giả sử cho hàm

$$F(z) = \frac{z^{1-p}(1-z)^p}{1+z^2}, \quad p \in \mathbb{R} \quad D = \overline{\mathbb{C}} \setminus [0, 1].$$

Tính thặng dư tại ∞ của nhánh chính hình $f(z)$ thỏa mãn điều kiện

$$\arg(1-z) = \arg z = 0$$

khi z thuộc bờ trên của nhát cắt $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ còn sau đó các argumen biến thiên liên tục.

Giải. Hiển nhiên điểm $z = 0$, $z = 1$ là điểm phân nhánh của hàm đa trị $F(z)$ và trong miền D hàm $F(z)$ có thể tách nhánh chính hình. Giả sử $f(z)$ là nhánh thỏa mãn các điều kiện đã nêu. Hiển nhiên rằng

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0.$$

Do đó, để tính $\text{Res}[f; \infty]$ ta có thể áp dụng công thức (6.11). Ta cần tìm $\lim_{z \rightarrow \infty} |zf(z)|$ và $\lim_{z \rightarrow \infty} \arg zf(z)$.

Ta có a)

$$\begin{aligned}\lim_{z \rightarrow \infty} |f(z) \cdot z| &= \lim_{z \rightarrow \infty} |z| \cdot \frac{|z|^{1-p}|1-z|^p}{|1+z^2|} \\ &= \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\left|1 - \frac{1}{z}\right|^p}{\left|1 + \frac{1}{z^2}\right|} = 1.\end{aligned}$$

b) Tính $\lim \arg(zf(z))$. Vì $z \cdot f(z)$ là hàm chỉnh hình trong D nên giới hạn của nó không phụ thuộc vào phương dần z ra vô cùng. Giả sử $z \rightarrow \infty$ theo hướng dương của trục thực. Ta có

$$\begin{aligned}\lim_{z \rightarrow \infty} \arg(z \cdot f(z)) &= \lim_{z \rightarrow \infty} \{\arg z + (1-p)\arg z + p\arg(1-z) - \arg(1+z^2)\} \\ &= 0 + (1-p) \cdot 0 + p \cdot (-\pi) + 0 = -p\pi.\end{aligned}$$

Như vậy

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z \cdot f(z) = e^{-p\pi i},$$

và từ đó suy ra rằng

$$\text{Res}[f; \infty] = -e^{-p\pi i}.$$

6.1.3 Định lý cơ bản của lý thuyết thặng dư

Định lý cơ bản của lý thuyết thặng dư là định lý sau đây

Định lý 6.1.6. (Cauchy) *Giả sử D là tập hợp mở của mặt phẳng phức và f là hàm chỉnh hình trong $D \setminus \{a_i\}$, trong đó a_i là tập hợp những điểm bất thường cô lập của hàm $f(z)$. Giả sử Γ là biên có hướng của miền $B \subset D$ và giả thiết rằng Γ không đi qua một điểm bất thường nào của f . Khi đó*

1. số điểm bất thường của f ở trong B là hữu hạn.
2. hàm $f(z)$ thỏa mãn hệ thức

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = 2\pi i \sum_{a_i \in B} \text{Res}[f; a_i], \quad (6.12)$$

trong đó tổng ở vế phải của (6.12) được lấy theo mọi điểm bất thường của hàm $f(z)$ nằm trong B .

Chứng minh.

1. Điều khẳng định thứ nhất của định lý hoàn toàn hiển nhiên.
2. Để chứng minh điều khẳng định thứ hai ta cần phân biệt hai trường hợp

hợp

Trường hợp thứ nhất. Điểm $\infty \notin B$. Vì điểm ∞ không thuộc B nên B là miền của \mathbb{C} . Giả sử S_i là những hình tròn đóng với tâm tại mỗi điểm bất thường $a_i (\in \overset{\circ}{B})$: $S_i = \{|z - a_i| \leq r_i, r_i > 0\}$. Ta giả thiết rằng r_i được chọn đủ bé sao cho:

- a) $\overline{S_i} \subset \overset{\circ}{B}, \forall i$; b) $S_i \cap S_j = \emptyset, i \neq j$.

Giả sử γ_i là biên của hình tròn S_i tương ứng chạy theo hướng dương. Ta ký hiệu

$$B^* = B \setminus \left(\bigcup_i \overset{\circ}{S_i} \right),$$

trong đó $\overset{\circ}{S_i}$ là phần trong của S_i . Hiển nhiên B^* cũng là một miền. Biên ∂B^* chính là hiệu giữa biên có hướng Γ của B và các đường tròn γ_i . Vì $f \in H(B^*)$ nên

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \sum_i \int_{\gamma_i} f(z) dz. \quad (6.13)$$

Nhưng mặt khác từ (6.2) ta có

$$\int_{\gamma_i} f(z) dz = 2\pi i \text{Res}[f; a_i].$$

Thế biểu thức này vào (6.13) ta thu được hệ thức (6.12).

Trường hợp thứ hai. Điểm $\infty \in B$. Giả sử $U(\infty, r) = \{z \in \overline{\mathbb{C}} : |z| \geq r\}$ là lân cận điểm ∞ mà tại đó hàm $f(z)$ chỉnh hình (có thể trừ ra chính điểm $z = \infty$) và giả sử $\partial U(\infty, r) \cap \Gamma = \emptyset$.

Ta ký hiệu:

$$\tilde{B}(r) = B \setminus \{|z| > r\}.$$

Biên có hướng của $\tilde{B}(r)$ là tổng biên có hướng Γ của B và đường tròn $\{|z| = r\}$ chạy theo hướng dương. Vì miền $\tilde{B}(r)$ không chứa điểm ∞ nên từ trường hợp I suy ra

$$\int_{\Gamma} f(z)dz + \int_{\{|z|=r\}} f(z)dz = 2\pi i \sum_i \text{Res}[f; a_i], \quad (6.14)$$

trong đó tổng ở vế phải của (6.14) được lấy theo mọi điểm bất thường a_i của f nằm trong miền B trừ ra điểm ∞ . Nhưng theo định nghĩa 6.1.2 ta có

$$\int_{\{|z|=r\}} f(z)dz = -2\pi i \text{Res}[f; \infty],$$

và từ (6.14) suy ra rằng

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = 2\pi i \left\{ \sum_i \text{Res}[f; a_i] + \text{Res}[f; \infty] \right\}.$$

Đó chính là đẳng thức (6.2) vì điểm ∞ cũng là một trong các điểm a_i . \square

Nhận xét 6.1.1. Công thức tích phân cơ bản thứ hai của Cauchy là nền tảng để xây dựng toàn bộ lý thuyết hàm chỉnh hình mà đặc biệt là để thu được khai triển Laurent và do đó để tính thặng dư. Nhưng công thức đó lại là một hệ quả của định lý cơ bản của Cauchy về lý thuyết thặng dư. Thật vậy, đối với hàm $f \in \mathcal{H}(D)$, hàm

$$z \mapsto \frac{f(z)}{z-a}$$

nhận điểm a là điểm bất thường có thể có. Thặng dư của hàm này tại a bằng $f(a)$. Thật thế, điểm a chỉ có thể là điểm chỉnh hình hoặc cực điểm đơn của $\frac{f(z)}{z-a}$ và nếu ta sử dụng khai triển

$$f(z) = f(a) + f'(a)(z-a) + \dots$$

thì hệ số của $\frac{1}{z-a}$ sẽ là $f(a)$. Do đó

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)}{z-a} dz = \text{Res}\left[\frac{f(z)}{z-a}; a\right] = f(a).$$

Định lý 6.1.6 có ý nghĩa to lớn về mặt nguyên tắc vì nó đưa việc tính một đại lượng có tính chất toàn cục - tích phân của hàm chỉnh hình theo biên của miền - về tính những đại lượng có tính chất địa phương - thặng dư của hàm tại các điểm bất thường.

Hệ quả 6.1.3. *Giả sử hàm f chỉnh hình trong toàn mặt phẳng $\overline{\mathbb{C}}$ trừ ra (một số hữu hạn) các điểm bất thường cô lập. Khi đó tổng các thặng dư tại các điểm ấy (kể cả điểm ∞) là bằng 0.*

Chứng minh. Trước hết ta nhận xét rằng số các điểm bất thường cô lập (nếu hàm không có điểm bất thường không cô lập) không thể bằng ∞ vì trong trường hợp đó sẽ tồn tại điểm tụ đối với tập hợp các điểm bất thường và điểm đó là điểm bất thường nhưng không cô lập.

Bây giờ giả sử a là điểm hữu hạn tùy ý mà tại đó f chỉnh hình. Ta bao điểm a bởi một đường tròn $\gamma(a, \varepsilon)$ với tâm a và bán kính đủ bé ε sao cho f chỉnh hình trong $\overline{S(a, \varepsilon)} = \{|z-a| \leq \varepsilon\}$. Đường tròn $\gamma(a, \varepsilon)$ chia mặt phẳng thành hai miền: miền bị chặn $D = S(a, \varepsilon)$ và miền không bị chặn D^∞ . Áp dụng định lý thặng dư đối với D^∞ ta thu được

$$\int_{\gamma(a, \varepsilon)} f(z) dz = 2\pi i \sum_{\overline{\mathbb{C}}} \text{Res}[f; \cdot].$$

Mặt khác, theo định lý tích phân Cauchy (áp dụng cho miền D) ta có

$$\int_{\gamma(a, \varepsilon)} f(z) dz = 0.$$

Từ đó suy ra

$$\sum_{\overline{\mathbb{C}}} \text{Res}[f; \cdot] = 0. \quad (6.15)$$

□

Định lý Cauchy vừa chứng minh là một trong những định lý quan trọng nhất của lý thuyết hàm biến phức. Định lý đó chỉ đúng trong trường hợp khi trên biên Γ hàm $f(z)$ không có điểm bất thường. Ta sẽ khái quát định lý 6.1.6 cho trường hợp khi hàm $f(z)$ có cực điểm đơn trên biên Γ .

Giả sử hàm $f(z)$ chỉnh hình trong Γ trừ ra một số hữu hạn điểm bất thường cô lập

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n,$$

và chỉnh hình trên Γ trừ ra một số hữu hạn điểm bất thường cô lập

$$a_1, a_2, \dots, a_m.$$

Lấy a_1, a_2, \dots, a_m làm tâm ta dựng các đường tròn $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m$ với bán kính ε đủ bé sao cho mỗi đường tròn γ_k , $k = 1, \dots, m$ chỉ cắt Γ tại hai điểm. Ta ký hiệu

$$\begin{aligned}\gamma(a_k, \varepsilon) &= \Gamma \cap \{|z - a_k| \leq \varepsilon\}, \quad k = 1, 2, \dots, m; \\ \Gamma(\varepsilon) &= \Gamma \setminus \bigcup_{k=1}^m \gamma(a_k, \varepsilon).\end{aligned}$$

Ta có định nghĩa sau

Định nghĩa 6.1.4. Giới hạn của tích phân

$$I(\varepsilon) = \int_{\Gamma(\varepsilon)} f(z) dz,$$

khi $\varepsilon \rightarrow 0$ được gọi là *giá trị chính* của tích phân $I = \int_{\Gamma} f(z) dz$ theo Cauchy

và ký hiệu là

$$\text{v.p.} \int_{\Gamma} f(z) dz = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma(\varepsilon)} f(z) dz,$$

(trong đó v.p. là những chữ cái đầu tiên của các từ tiếng Pháp Valeur-principal - có nghĩa là “giá trị chính”).

Định lý 6.1.7. Giả sử D là tập hợp mở của mặt phẳng $\overline{\mathbb{C}}$ và f là hàm chỉnh hình trong $D \setminus \{a_i\}$, trong đó a_i là tập hợp những điểm bất thường cô lập của f . Giả sử trên biên tròn Γ của miền $\tilde{D} \subset D$ hàm f chỉ có một số hữu hạn cực điểm đơn a_1, a_2, \dots, a_m .

Khi đó giá trị chính của tích phân $\int_{\Gamma} f dz$ tồn tại và được tính theo công thức

$$v.p. \int_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \left\{ \sum_{a_i \in \tilde{D}} \text{Res}[f; a_i] + \frac{1}{2} \sum_{a_k \in \Gamma} \text{Res}[f; a_k] \right\} \quad (6.16)$$

trong đó tổng $\sum_{a_i \in \tilde{D}}$ được lấy theo mọi điểm bất thường a_i nằm trong \tilde{D} , còn tổng thứ hai ở vế phải (6.16) được lấy theo mọi cực điểm $a_k \in \Gamma$.

Chứng minh. Để tiện trình bày ta ký hiệu các điểm bất thường cô lập của f trong \tilde{D} là

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$$

(một số hữu hạn điểm!). Ta sẽ chọn ε đủ bé sao cho các điểm $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ không nằm trên các đường tròn γ_k , $k = 1, 2, \dots, m$, trong đó

$$\gamma_k = \{|z - a_k| = \varepsilon\}, \quad k = 1, 2, \dots, m$$

Giả sử

$$\tilde{\gamma}(a_k, \varepsilon) = \tilde{D} \cap \gamma_k,$$

là cung tròn chạy theo hướng âm, và

$$\tilde{\Gamma}(\varepsilon) = \Gamma(\varepsilon) \cup \left\{ \bigcup_{k=1}^m \tilde{\gamma}(a_k, \varepsilon) \right\}.$$

Như vậy $\tilde{\Gamma}(\varepsilon)$ là biên của miền D^* nào đó và hiển nhiên trên $\tilde{\Gamma}(\varepsilon)$ hàm f không có điểm bất thường nào. Áp dụng định lý cơ bản của Cauchy về thặng

dư cho D^* với biên $\tilde{\Gamma}(\varepsilon)$ và hàm f ta có

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{\Gamma}(\varepsilon)} f dz &= \int_{\Gamma(\varepsilon)} f(z) dz + \sum_{k=1}^m \int_{\tilde{\gamma}(a_k, \varepsilon)} f(z) dz \\ &= 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}[f; \alpha_k], \end{aligned}$$

và do đó

$$\int_{\Gamma(\varepsilon)} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}[f; \alpha_k] + \sum_{k=1}^m \int_{\tilde{\gamma}(a_k, \varepsilon)^+} f(z) dz, \quad (6.17)$$

trong đó $\tilde{\gamma}(a_k, \varepsilon)^+$ là những cung tròn chạy theo hướng dương. Vì a_1, a_2, \dots, a_m là cực điểm đơn của hàm f nên tại lân cận các điểm ấy, hàm f có thể biểu diễn dưới dạng

$$f(z) = \frac{c_{-1,k}}{z - a_k} + \varphi_k(z), \quad k = 1, 2, \dots, m,$$

trong đó $\varphi_k(z)$ là phần chỉnh hình của f tại lân cận điểm a_k . Do đó

$$\int_{\tilde{\gamma}(a_k, \varepsilon)^+} f(z) dz = c_{-1,k} \int_{\tilde{\gamma}(a_k, \varepsilon)^+} \frac{dz}{z - a_k} + \int_{\tilde{\gamma}(a_k, \varepsilon)^+} \varphi_k(z) dz = I_1 + I_2.$$

Rõ ràng là khi $\varepsilon \rightarrow 0$ thì hai cát tuyến $\overline{a_k t_2}$ và $\overline{a_k t_1}$ (hình VI.1) dần tới vị trí của tiếp tuyến với Γ tại điểm a_k và do đó

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\varphi_2 - \varphi_1) &= \pi, \text{ và} \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\tilde{\gamma}(a_k, \varepsilon)} \frac{dz}{z - a_k} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} i(\varphi_2 - \varphi_1) = \pi i; \quad (z - a_k = \varepsilon e^{i\varphi}). \end{aligned}$$

Bây giờ ta xét I_2 . Vì $\varphi_k(z)$ chỉnh hình tại lân cận của điểm a_k nên với ε đủ bé ta có

Hình VI.1

$$\begin{aligned}
|I_2| &= \left| \int_{\tilde{\gamma}(a_k, \varepsilon)^+} \varphi_k(z) dz \right| = \left| \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \varphi_k(a_k + \varepsilon e^{i\varphi}) i \varepsilon e^{i\varphi} d\varphi \right| \\
&\leq M \varepsilon (\varphi_2 - \varphi_1), \\
M &= \sup_{z \in \tilde{\gamma}(a_k, \varepsilon)^+} |\varphi_k(z)|.
\end{aligned}$$

Như vậy

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\tilde{\gamma}(a_k, \varepsilon)^+} f(z) dz = c_{-1, k} \pi i = \pi i \operatorname{Res}[f; a_k].$$

Thế đẳng thức vừa thu được vào (6.17) ta có

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma(\varepsilon)} f(z) dz &= 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}[f; \alpha_k] + \pi i \sum_{k=1}^m \operatorname{Res}[f; a_k] \\
&= 2\pi i \left\{ \sum_{k=1}^n \cdot + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \cdot \right\}.
\end{aligned}$$

□

Nhận xét 6.1.2. 1. Nếu trên Γ hàm f không có điểm bất thường thì từ (6.16) ta thu được (6.12) tức là định lý cơ bản của lý thuyết thặng dư.

2. Nếu thay điều kiện trơn của Γ bằng điều kiện trơn từng khúc và giả sử góc giữa các tiếp tuyến tại mỗi điểm góc là δ_k , $k = 1, 2, \dots, m$, ta có

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\tilde{\gamma}(a_k, \varepsilon)} f(z) dz = \delta_k i \operatorname{Res}[f; a_k],$$

và do đó

$$v.p. \int_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \left\{ \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}[f; \alpha_k] + \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^m \delta_k \operatorname{Res}[f; a_k] \right\}.$$

6.1.4 Tính tích phân theo chu tuyến đóng

Ta xét một số ví dụ tính tích phân theo chu tuyến đóng bằng cách áp dụng thặng dư. Trong các ví dụ này chu tuyến tích phân γ được định hướng sao cho khi vòng quanh theo γ thì phần trong của γ luôn luôn ở bên trái.

Ví dụ 11. Giả sử

$$f(z) = (2z - 1) \cos \frac{z}{z - 1}.$$

Khi đó

$$I = \int_{\{|z|=2\}} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}[f; 1].$$

Hàm $f(z)$ chỉnh hình trong hình tròn $\{|z| < 2\}$ trừ ra điểm $z = 1$ là điểm bất thường cốt yếu của $f(z)$. Ta có

$$\begin{aligned} \cos \frac{z}{z-1} &= \cos \left(1 + \frac{1}{z-1} \right) \\ &= \cos 1 \cdot \cos \frac{1}{z-1} - \sin 1 \sin \frac{1}{z-1} \\ &= \cos 1 \cdot \left[1 - \frac{1}{2(z-1)^2} + \dots \right] - \\ &\quad - \sin 1 \cdot \left[\frac{1}{z-1} - \frac{1}{3!(z-1)^3} + \dots \right]; \\ 2z - 1 &= 2(z-1) - 1 \end{aligned}$$

và từ đó hệ số $a_{-1}(f)$ của chuỗi Laurent hàm f bằng

$$a_{-1}(f) = -(\cos 1 + \sin 1).$$

Do đó

$$I = -2\pi i (\cos 1 + \sin 1).$$

Ví dụ 12. Tính tích phân

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{dz}{(z^4 + 1)\sqrt{z^2 + 1}}, \quad (\sqrt{1} = 1),$$

trong đó Γ là parabol $y^2 = x$ chạy theo hướng tăng của y .

Giải. Điểm rẽ nhánh của hàm dưới dấu tích phân là $z = i$ và $z = -i$. Do đó trong miền $D = \{\operatorname{Re} z > 0\}$ ta có thể tách nhánh đơn trị của hàm đa trị và với điều kiện

$$\sqrt{z^2 + 1}\big|_{z=1} > 0,$$

ta sẽ xác định được một nhánh đơn trị. Để tính tích phân I đầu tiên ta tính tích phân theo chu tuyến đóng \mathcal{L} như ở hình VI.2 gồm:

(1) cung parabol BOA ,

(2) đoạn thẳng $AB : \operatorname{Re} z = r$; và sau đó chuyển qua giới hạn khi $r \rightarrow \infty$.

Hình VI. 2

Ta có

$$\int_{\mathcal{L}} f dz = \int_{BOA} + \int_{AB} = 2\pi i \{ \operatorname{Res}[f] + \operatorname{Res}[f] \}.$$

Ta xét tích phân theo đoạn AB . Vì trên đoạn AB ta có

$$\begin{aligned} x &= r \\ -\sqrt{r} &\leq y \leq \sqrt{r} \end{aligned}$$

và do đó

$$|z|_{z \in AB} = \sqrt{x^2 + y^2} \geq r^{1/2}$$

nên dễ dàng thấy rằng

$$\left| \int_{AB} \right| \leq \frac{2\sqrt{r}}{(r^2 - 1)\sqrt{r - 1}} \rightarrow 0 \quad \text{khi } r \rightarrow \infty.$$

Từ đó suy ra rằng

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \left\{ \operatorname{Res}\left[f; e^{i\frac{\pi}{4}}\right] + \operatorname{Res}\left[f; e^{-i\frac{\pi}{4}}\right] \right\}.$$

Để ý rằng

$$\sqrt[4]{1 + (e^{i\frac{\pi}{4}})^2} = \sqrt[4]{2}e^{i\frac{\pi}{8}},$$

$$\sqrt[4]{1 + (e^{-i\frac{\pi}{4}})^2} = \sqrt[4]{2}e^{-i\frac{\pi}{8}},$$

ta có

$$\operatorname{Res}[f; e^{i\frac{\pi}{4}}] = \frac{1}{\sqrt[4]{z^2+1}} \Big|_{z=e^{i\frac{\pi}{4}}} = \frac{1}{4\sqrt[4]{2}e^{i\frac{7\pi}{8}}},$$

$$\operatorname{Res}[f; e^{-i\frac{\pi}{4}}] = \frac{1}{\sqrt[4]{z^2+1}} \Big|_{z=e^{-i\frac{\pi}{4}}} = \frac{1}{4\sqrt[4]{2}e^{-i\frac{7\pi}{8}}},$$

và do đó

$$\int_{\Gamma} \frac{dz}{(z^4+1)\sqrt{z^2+1}} = \frac{\pi i}{2\sqrt{1+\sqrt{2}}}.$$

Ví dụ 13. Tính tích phân

$$I = \int_{|z|=1} \frac{dz}{bz^2 - 2az + b} \quad b > a > 0.$$

Giải. Mẫu số của hàm dưới dấu tích phân triệt tiêu tại hai điểm

$$\alpha = \frac{a - i\sqrt{b^2 - a^2}}{b} \quad \text{và}$$

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{a + i\sqrt{b^2 - a^2}}{b}.$$

Vì α và $\frac{1}{\alpha}$ là cực điểm đơn của hàm dưới dấu tích phân và

$$|\alpha| = \left| \frac{1}{\alpha} \right| = 1,$$

Hình VI.3

nên cả hai cực điểm α và $\frac{1}{\alpha}$ đều nằm trên chu tuyến tích phân. Ta đặt

$$\tilde{\Gamma}(\varepsilon) = \Gamma(\varepsilon) \cup \gamma^-(\alpha, \varepsilon) \cup \gamma^-\left(\frac{1}{\alpha}, \varepsilon\right),$$

gồm (hình VI.3)

- (1) đường tròn đơn vị loại bỏ hai cung nằm trong các hình tròn bé;
- (2) cung tròn $\gamma(\alpha, \varepsilon)$ chạy theo hướng âm,
- (3) cung tròn $\gamma\left(\frac{1}{\varepsilon}, \varepsilon\right)$ chạy theo hướng âm.

Khi đó

$$\int_{\tilde{\Gamma}(\varepsilon)} = \int_{\Gamma(\varepsilon)} - \int_{\gamma(\alpha, \varepsilon)} - \int_{\gamma\left(\frac{1}{\alpha}, \varepsilon\right)} = I(\varepsilon) - I(\alpha, \varepsilon) - I\left(\frac{1}{\alpha}, \varepsilon\right) = 0.$$

Do đó

$$\int_{\Gamma(\varepsilon)} = I(\alpha, \varepsilon) + I\left(\frac{1}{\alpha}, \varepsilon\right).$$

Ta xét tích phân $I(\alpha, \varepsilon)$. Tại lân cận điểm α ta có

$$\begin{aligned} \frac{1}{(z - \alpha)\left(z - \frac{1}{\alpha}\right)} &= \frac{1}{\alpha - \frac{1}{\alpha}} \left[\frac{1}{z - \alpha} + \text{hàm chỉnh hình tại } z = \alpha \right] \\ &= -\frac{\left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right)^{-1}}{z - \alpha} + \varphi_{\alpha}(z). \end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I(\alpha, \varepsilon) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma(\alpha, \varepsilon)} \frac{\left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right)^{-1}}{\varepsilon e^{i\varphi}} i \varepsilon e^{i\varphi} d\varphi + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma, \varepsilon} \varphi_{\alpha}(z) dz \\ &= \left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right)^{-1} \pi i. \end{aligned}$$

Bằng phương pháp tương tự ta có

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I\left(\frac{1}{\alpha}, \varepsilon\right) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma\left(\frac{1}{\alpha}, \varepsilon\right)} \left[\frac{\left(\frac{1}{\alpha} - \alpha\right)^{-1}}{z - \frac{1}{\alpha}} + \varphi_{\frac{1}{\alpha}}(z) \right] dz \\ &= \left(\frac{1}{\alpha} - \alpha\right)^{-1} \pi i. \end{aligned}$$

Từ đó suy ra rằng

$$\begin{aligned} I &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I(\alpha, \varepsilon) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I\left(\frac{1}{\alpha}, \varepsilon\right) \\ &= \frac{1}{b} \frac{1}{\alpha - \frac{1}{\alpha}} \pi i + \frac{1}{b} \frac{1}{\frac{1}{\alpha} - \alpha} \pi i = 0. \end{aligned}$$

6.2 Một số ứng dụng của lý thuyết thặng dư

Định lý cơ bản của Cauchy về thặng dư đã chứng minh trong mục trước là điểm xuất phát để ứng dụng lý thuyết hàm chỉnh hình trong các quá trình tính toán khác nhau.

Trong mục này, ta sẽ xét sự áp dụng lý thuyết thặng dư để tính tích phân xác định (không tìm nguyên hàm của hàm dưới dấu tích phân), và tính tổng của một số chuỗi. Đây không phải là phương pháp chung để sử dụng trong mọi trường hợp. Ta chỉ xét vài loại tích phân cổ điển và tính tổng một số chuỗi và thông qua đó để chứng tỏ phương pháp đưa các bài toán trên về bài toán tính thặng dư.

6.2.1 Phương pháp tính tích phân

Giả sử ta cần tính tích phân của hàm thực $f(x)$ theo đoạn (a, b) (hữu hạn hoặc vô hạn) nằm trên trục thực \mathbb{R} của mặt phẳng z .

Thực chất của phương pháp tính các tích phân dựa trên cơ sở lý thuyết thặng dư là như sau.

Ta sẽ bổ sung vào đoạn (a, b) một đường cong Γ nào đó sao cho đường cong Γ cùng với đoạn (a, b) , lập nên đường cong đóng giới hạn miền D mà hàm $f(x)$ có thể thác triển giải tích từ \mathbb{R} vào \overline{D} . Sau đó, áp dụng định lý cơ bản của lý thuyết thặng dư cho thác triển giải tích $f(z)$ vừa thu được ta có

$$\int_a^b f(x)dx + \int_{\Gamma} f(z)dz = 2\pi i \sum \text{Res}, \quad (6.18)$$

trong đó $\sum \text{Res}$ là tổng thặng dư của hàm f trong D .

Nếu tích phân theo Γ có thể tính được hoặc biểu diễn được qua tích phân cần tìm $\int_a^b f(x)dx$ thì bài toán được giải xong. Trong nhiều trường hợp ta có thể chọn $f(z)$ sao cho hàm f được cho trên (a, b) là phần thực hoặc phần ảo của nó thì tích phân theo đoạn (a, b) sẽ được tính bằng cách tách phần thực và phần ảo của (6.18). Trong trường hợp khi đoạn (a, b) là vô hạn thì thông thường người ta xét các họ các chu tuyến tích phân mở ra vô hạn sao cho trong giới hạn ta thu được tích phân theo (a, b) . Trong trường hợp này, tích phân theo Γ trong (6.18) có thể không cần tính mà chỉ cần tìm giới hạn của nó mà thông thường bằng cách ước lượng các tích phân.

Sau đây ta sẽ chứng minh một số bổ đề thường được sử dụng để ước lượng các tích phân theo Γ .

Bổ đề 6.2.1. (Jordan) Giả sử $\alpha > 0$ và hàm f thỏa mãn các điều kiện

1. hàm $f(z)$ liên tục trong miền

$$D(R_0) = \{\text{Im } z \geq 0, |z| \geq R_0 > 0\};$$

2. $M(R) = \max_{z \in \gamma(R)} |f(z)|$ và

$$\lim_{R \rightarrow \infty} M(R) = 0, \quad (6.19)$$

$$\gamma(R) = \{|z| = R, \text{Im } z \geq 0\}.$$

Khi đó

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma(R)} f(z) e^{i\alpha z} dz = 0. \quad (6.20)$$

Chứng minh. Giả sử $z \in \gamma(R)$, $R > R_0$. Khi đó $z = Re^{i\varphi}$, $0 \leq \varphi \leq \pi$, $dz = iRe^{i\varphi}d\varphi$,

$$|e^{i\alpha z}| = |e^{i\alpha(R \cos \varphi + iR \sin \varphi)}| = e^{-\alpha R \sin \varphi}.$$

Bây giờ ta ước lượng tích phân $\int_{\gamma(R)} f(z)e^{i\alpha z} dz$. Ta có

$$\begin{aligned}
 \left| \int_{\gamma(R)} f(z)e^{i\alpha z} dz \right| &\leq \max_{z \in \gamma(R)} |f(z)| \int_0^\pi e^{-\alpha R \sin \varphi} R d\varphi \\
 &\leq 2RM(R) \int_0^{\pi/2} e^{-\alpha R \sin \varphi} d\varphi \\
 &\quad \left(\sin \varphi \geq \frac{2}{\pi} \varphi, \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \right) \\
 &\leq 2RM(R) \int_0^{\pi/2} e^{-2R \frac{\alpha}{\pi} \varphi} d\varphi \\
 &= M(R) \left(-\frac{\pi}{\alpha} \right) e^{-2R \frac{\alpha}{\pi} \varphi} \Big|_0^{\pi/2} \\
 &= M(R) \frac{\pi}{\alpha} [1 - e^{-\alpha \pi}] \leq \frac{\pi}{\alpha} M(R).
 \end{aligned}$$

Từ đó, theo (6.19) ta thu được (6.20). \square

Nhận xét 6.2.1. 1. Nếu $\alpha < 0$ và hàm f thỏa mãn các điều kiện của bổ đề Jordan trong nửa mặt phẳng dưới $\{\text{Im } z \leq 0\}$ thì công thức (6.20) vẫn còn hiệu lực, trong đó $\gamma(R) = \{|z| = R, \text{Im } z \leq 0\}$.

2. Nếu $\alpha = ia$ ($a > 0$) và hàm f thỏa mãn các điều kiện của bổ đề Jordan trong nửa mặt phẳng bên phải thì bằng cách chứng minh tương tự ta có

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma(R)} f(z)e^{-az} dz = 0, \quad a > 0,$$

$$\gamma(R) = \{|z| = R; \text{Re } z \geq 0\}.$$

3. Nếu $\alpha = -ia$ ($a > 0$) và hàm f thỏa mãn các điều kiện của bổ đề Jordan trong nửa mặt phẳng bên trái thì

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma(R)} f(z)e^{az} dz = 0, \quad a > 0.$$

Bổ đề 6.2.2. Giả sử $\gamma(R) = \{|z| = R\}$ và $M(R) = \max_{z \in \gamma(R)} |f(z)|$.

Khi đó ta có các điều khẳng định sau đây

$$1. \quad \{RM(R) \rightarrow 0(R \rightarrow 0)\} \Rightarrow \left\{ \int_{\gamma(R)} f(z) dz \rightarrow 0(R \rightarrow 0) \right\} \quad (6.21)$$

$$2. \quad \{RM(R) \rightarrow 0(R \rightarrow \infty)\} \Rightarrow \left\{ \int_{\gamma(R)} f(z) dz \rightarrow 0(R \rightarrow \infty) \right\} \quad (6.22)$$

Chứng minh. Các hệ thức (6.21) - (6.22) dễ dàng suy ra từ ước lượng

$$\left| \int_{\gamma(R)} f(z) dz \right| \leq M(R) 2\pi R.$$

□

Trong khi giải nhiều bài toán bổ đề sau đây có một vai trò rất căn bản.

Bổ đề 6.2.3. Nếu trên cung tròn $\delta(R)$ của đường tròn bán kính R hàm f thỏa mãn hệ thức $|f| \leq \frac{\text{const}}{R^\alpha}$, thì

$$\left| \int_{\delta(R)} f(z) dz \right| \leq \frac{\text{const}}{R^{\alpha-1}}.$$

Do đó với $\alpha > 1$ tích phân dần tới 0 khi $R \rightarrow \infty$ còn với $\alpha < 1$ tích phân dần tới 0 khi $R \rightarrow 0$.

Chứng minh. Được suy trực tiếp từ bổ đề 6.2.2. □

6.2.2 Tính tích phân dạng $I = \int_0^{2\pi} R(\cos \varphi, \sin \varphi) d\varphi$

Giả sử ta xét tích phân

$$I = \int_0^{2\pi} R(\cos \varphi, \sin \varphi) d\varphi, \quad (6.23)$$

trong đó $R(u, v)$ là hàm hữu tỷ của u, v .

Việc tính các tích phân dạng (6.23) sẽ được đưa về tính tích phân của hàm biến phức theo chu tuyến đóng. Quả vậy, ta đặt

$$z = e^{i\varphi}.$$

Khi đó

$$\begin{aligned}\cos \varphi &= \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right); & \sin \varphi &= \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right), \\ d\varphi &= -i \frac{dz}{z}.\end{aligned}$$

Khi φ biến thiên từ 0 đến 2π , biến z sẽ vạch nên đường tròn $\gamma = \{|z| = 1\}$ theo hướng dương và tích phân (6.23) được đưa về tích phân

$$\begin{aligned}I &= \int_{|z|=1} R_1(z) dz; \\ R_1(z) &= -\frac{i}{z} R \left[\frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right), \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right) \right]\end{aligned}$$

là hàm hữu tỷ.

Theo định lý Cauchy về thặng dư ta có

$$I = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}[R_1(z); z_k],$$

trong đó z_1, z_2, \dots, z_n là các cực điểm của hàm hữu tỷ $R_1(z)$ nằm trong hình tròn đơn vị.

Ví dụ 1. Tính tích phân

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{1 - 2a \cos x + a^2}, \quad 0 < |a| < 1.$$

Giải. Đặt

$$z = e^{ix}$$

ta có

$$\cos x = \frac{1}{2}(z + z^{-1}), \quad dx = \frac{dz}{iz}, \quad \text{và}$$

$$I = \int_{|z|=1} \frac{idz}{az^2 - (a^2 + 1)z + a}.$$

Phương trình $az^2 - (a^2 + 1)z + a = 0$ có hai nghiệm là $z_1 = a$ và $z_2 = \frac{1}{a}$. Vì $0 < |a| < 1$ nên z_1 nằm trong hình tròn đơn vị, đó là cực điểm đơn của hàm dưới dấu tích phân.

Từ đó dễ dàng suy ra $I = \frac{2\pi}{1 - a^2}$.

Ví dụ 2. Tính tích phân

$$J = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{(a + b \cos x)^2}, \quad a > b > 0.$$

Giải. Đặt $z = e^{ix}$. Khi đó

$$I = \int_{|z|=1} \frac{4zdz}{ib^2(z - z_1)^2(z - z_2)^2}$$

$$z_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b}, \quad z_2 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - b^2}}{b}.$$

Trong hình tròn đơn vị hàm dưới dấu tích phân có cực điểm cấp hai là $z = z_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b}$ với thặng dư bằng

$$\frac{a}{i(a^2 - b^2)^{3/2}}.$$

Do đó

$$I = \frac{2\pi a}{(a^2 - b^2)^{3/2}}.$$

6.2.3 Tích phân dạng $I = \int_{-\infty}^{+\infty} R(x)dx$

Giả sử ta xét các tích phân dạng

$$I = \int_{\mathbb{R}} R(x)dx, \quad (6.24)$$

trong đó $R(x)$ là hàm hữu tỷ của biến x . Giả sử

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)},$$

trong đó P_n là đa thức đại số bậc n của x và Q_m là đa thức đại số bậc m .

Để tính các tích phân dạng (6.24) ta thường dựa trên định lý sau đây

Định lý 6.2.1. *Giả sử*

$$R(x) = \frac{P_n}{Q_m}$$

là hàm hữu tỷ và giả sử a_1 là các không - điểm phức hoặc là những không điểm thực cấp một của Q_m và

$$m \geq n + 1.$$

Khi đó

$$\begin{aligned} v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} R(x)dx &= v.p. \int_{\mathbb{R}} R(x)dx \\ &= 2\pi i \left\{ \sum_{\text{Im} a_i > 0} \text{Res} \left[\frac{P_n}{Q_m}; a_i \right] + \frac{1}{2} \sum_{\text{Im} a_j = 0} \text{Res} \left[\frac{P_n}{Q_m}; a_j \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \text{Res} \left[\frac{P_n}{Q_m}; \infty \right] \right\}. \end{aligned} \quad (6.25)$$

Chứng minh. Giả sử hàm $R(z)$ có các cực điểm a_i , $\text{Im } a_i > 0$ và giả sử trên \mathbb{R} hàm $R(z)$ có một số cực điểm đơn a_j , $\text{Im } a_j = 0$. Ta xét chu tuyến đóng $\Gamma(R, \varepsilon)$ gồm (hình VI.4):

(1) các đoạn $[-R, a_1 - \varepsilon]$, $[a_1 + \varepsilon, a_2 - \varepsilon], \dots, [a_p + \varepsilon, R]$.

$$\text{Im } a_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, p; \quad |a_i| < R;$$

(2) các cung tròn

$$\gamma(a_i, \varepsilon) = \{|z - a_i| = \varepsilon, \text{Im } z \geq 0; i = 1, \dots, p\};$$

(3) nửa đường tròn

$$\gamma(R) = \{|z| = R, \text{Im } z \geq 0, |a_i| < R \forall i = \overline{1, p}\}.$$

Hình VI.4

Áp dụng định lý cơ bản của Cauchy về thặng dư cho $\Gamma(R, \varepsilon)$ và hàm $R(z)$ ta có

$$\begin{aligned} & \int_{-R}^{a_1 - \varepsilon} R(x) dx + \int_{a_1 + \varepsilon}^{a_2 - \varepsilon} R(x) dx + \dots + \int_{a_p + \varepsilon}^R R(x) dx + \\ & + \sum_{\text{Im } a_i = 0} \int_{\gamma(a_i, \varepsilon)} R(z) dz + \int_{\Gamma(R)} R(z) dz = 2\pi i \sum_{\text{Im } a_i > 0} \text{Res}[R(z), a_i]. \end{aligned}$$

Do đó bằng cách sử dụng cách lý luận trong chứng minh định lý 6.1.6 ta thu

được

$$\begin{aligned}
\text{v.p.} \int_{\mathbb{R}} R(x) dx &= \lim_{R \rightarrow \infty, \varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\substack{|z| \leq R \\ |z - a_i| \geq \varepsilon, a_i \in \mathbb{R}}} R(z) dz \right) \\
&= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma(R)} R(z) dz + 2\pi i \sum_{\text{Im } a_i > 0} \text{Res}[R(z); a_i] + \pi i \sum_{a_i \in \mathbb{R}} \text{Res}[R(z); a_i] \\
&= \pi i \text{Res}[R; \infty] + 2\pi i \sum_{\text{Im } a_i > 0} \text{Res} + \pi i \sum_{\text{Im } a_i = 0} \text{Res}[R; a_i] \\
&= 2\pi i \left\{ \frac{1}{2} \text{Res}[R; \infty] + \sum_{\text{Im } a_i > 0} \text{Res}[R; a_i] + \frac{1}{2} \sum_{\text{Im } a_i = 0} \text{Res}[R; a_i] \right\}.
\end{aligned}$$

□

Nhận xét 6.2.2. 1. Nếu $m \geq n + 2$ thì

$$\text{Res}[R(z); \infty] = 0,$$

do đó số hạng thứ ba ở vế phải của (6.25) bằng 0.

2. Nếu $R(z)$ chỉ có các cực điểm phức và không có cực điểm trên \mathbb{R} thì số hạng thứ hai ở vế phải của (6.25) bằng 0.

3. Nếu ta lấy

$$\gamma(R) = \{|z| = R, \text{Im } z \leq 0\}$$

chạy theo hướng âm và

$$\gamma(a_i, \varepsilon) = \{|z - a_i| = \varepsilon, \text{Im } z \leq 0\}$$

chạy theo hướng dương thì bằng lý luận tương tự ta có

$$\begin{aligned}
\text{v.p.} \int_{\mathbb{R}} R(x) dx &= -2\pi i \sum_{\text{Im } a_i < 0} \text{Res}[R; a_i] - \\
&\quad - \pi i \sum_{\text{Im } a_i = 0} \text{Res}[R; a_i] - \pi i \text{Res}[R; \infty]. \tag{6.26}
\end{aligned}$$

Hai kết quả (6.25) và (6.26) trùng nhau vì tổng toàn phần các thặng dư bằng 0.

Ví dụ 3. Tính tích phân

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^3}.$$

Giải. Hàm $f(x)$ xác định trên toàn trục x và hàm

$$f(z) = \frac{1}{(z^2 + 1)^3}$$

là thác triển giải tích của hàm đã cho vào nửa mặt phẳng trên. Hàm $f(z)$ chỉnh hình khắp nơi trừ ra điểm $z = i$ và trên trục thực nó không có điểm bất thường.

Hiển nhiên hàm f thỏa mãn điều kiện

$$|f(z)|_{|z|=R>R_0>1} = \left| \frac{1}{(R^2 + 1)^3} \right| < \frac{1}{R^6}.$$

Do đó từ công thức (6.25) ta có

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^3} = 2\pi i \operatorname{Res}[f; i] = 2\pi i \left(-\frac{3}{16}i \right) = \frac{3}{8}\pi.$$

Ví dụ 4. Tính tích phân

$$I = \int_0^{\infty} \frac{dx}{1 + x^{2n}}, \quad n \geq 1, n \in \mathbb{N}.$$

Giải. Phương trình

$$z^{2n} + 1 = 0$$

có các nghiệm sau đây

$$z_k = e^{i(2k+1)\frac{\pi}{2n}}, \quad k = 0, 1, \dots, 2n - 1.$$

Do đó thác triển giải tích $f(z)$

$$f(z) = \frac{1}{1 + z^{2n}},$$

của hàm đã cho vào nửa mặt có n cực điểm đơn và hiển nhiên rằng

$$f(ze^{i\pi/n}) \equiv f(z).$$

Ta sẽ lấy chu tuyến tích phân $\Gamma(R)$ gồm

a) đoạn thẳng $[0, R] \subset \mathbb{R}$,

b) cung tròn $\gamma(R) = \left\{ z = Re^{i\varphi}; 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{n} \right\}$,

c) đoạn thẳng $\delta = \left\{ z = re^{i\frac{\pi}{n}}, 0 \leq r \leq R \right\}$, (hình VI. 5).

Hình VI. 5

Theo định lý Cauchy về thặng dư ta có

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma(R)} f(z)dz &= \int_0^R f(x)dx + \int_{\gamma(R)} f(z)dz + \int_{\delta} f(z)dz \\ &= 2\pi i \text{Res}[f; z_0] \text{ (ở trong } \Gamma(R) \text{ hàm } f(z) \\ &\quad \text{chỉ có một cực điểm } z_0) \\ &= -2\pi i \frac{e^{i\pi/2n}}{2n} = -\frac{\pi i}{n} e^{i\pi/2n}. \end{aligned}$$

Ta xét tích phân theo δ . Ta có

$$\begin{aligned}\int_{\delta} f(z)dz &= - \int_0^R f(re^{i\pi/n})e^{i\pi/n}dr \\ &= e^{i\frac{\pi}{n}} \int_0^R \frac{dx}{1+x^{2n}}.\end{aligned}$$

Ta xét tích phân theo $\gamma(R)$. Vì $x \in \gamma(R)$ nên

$$z = Re^{i\varphi},$$

$$\left| \int_{\gamma(R)} \right| \leq \int_{\gamma(R)} \frac{Rd\varphi}{R^{2n}-1} = \frac{\frac{\pi}{n}R}{R^{2n}-1} \longrightarrow 0 (R \rightarrow \infty).$$

Chuyển qua giới hạn khi $R \rightarrow \infty$ ta thu được

$$(1 - e^{\frac{i\pi}{n}})I = -\frac{\pi i}{n}e^{\frac{i\pi}{n}}$$

hay là

$$I = \frac{\pi}{2n \sin \frac{\pi}{2n}}.$$

6.2.4 Tích phân dạng $I = \int_{\mathbb{R}} e^{iax} R(x)dx$

Ta có định lý sau đây

Định lý 6.2.2. Giả sử P_n/Q_m là hàm hữu tỷ trên \mathbb{C} và a_i là không điểm phức hoặc là không điểm thực cấp một của đa thức Q_m và ngoài ra

$$m \geq n + 1.$$

Khi đó với $\alpha \in \mathbb{R}$ ta có các công thức sau đây

$$\begin{aligned} \text{v.p.} \int_R \frac{P_n}{Q_m} e^{i\alpha x} dx = \\ \begin{cases} 2\pi i \left\{ \sum_{\text{Im } a_i > 0} \text{Res} \left[\frac{P_n}{Q_m} e^{i\alpha z}, a_i \right] + \frac{1}{2} \sum_{\text{Im } a_i = 0} \text{Res} \left[\frac{P_n}{Q_m} e^{i\alpha z}, a_i \right] \right\}, & \alpha > 0; \\ -2\pi i \left\{ \sum_{\text{Im } a_i < 0} \text{Res} \left[\frac{P_n}{Q_m} e^{i\alpha z}, a_i \right] + \frac{1}{2} \sum_{\text{Im } a_i = 0} \text{Res} \left[\frac{P_n}{Q_m} e^{i\alpha z}, a_i \right] \right\}, & \alpha < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Chứng minh. Ta lại sử dụng chu tuyến đóng $\Gamma(R, \varepsilon)$ như trong chứng minh định lý 6.2.1. Những tích phân theo các nửa đường tròn $\gamma(a_i, \varepsilon)$, $a_i \in \mathbb{R}$ dần đến $-\pi i \text{Res} \left[\frac{P_n}{Q_m} e^{i\alpha z} \right]$. Tích phân theo nửa đường tròn lớn $\gamma(R)$ dần đến 0 theo bổ đề Jordan. Từ đó dễ dàng rút ra kết luận thứ nhất của định lý đối với $\alpha > 0$.

Đối với trường hợp $\alpha < 0$ ta cần lấy các nửa đường tròn dưới (xem nhận xét 6.2.1) và thu được điều kết luận thứ hai. \square

Ví dụ 5. Tính tích phân

$$I = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx. \quad (6.27)$$

Giải. Tích phân phải tìm có thể viết dưới dạng

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty \frac{\sin x}{x} dx \\ &= \frac{1}{2} \text{Re} \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ix}}{x} dx. \end{aligned}$$

Do đó, để tính (6.10) ta xét tích phân sau

$$I = (R, \varepsilon) = \int_{\Gamma(R, \varepsilon)} \frac{e^{iz}}{z} dz.$$

trong đó chu tuyến đóng $\Gamma(R, \varepsilon)$ được mô tả trên hình VI. 6.

Hình VI. 6

Tích phân $I(R, \varepsilon) = 0$ vì hàm $\frac{e^{iz}}{z}$ chỉnh hình bên trong chu tuyến $\Gamma(R, \varepsilon)$.
Nhưng mặt khác

$$\begin{aligned} I(R, \varepsilon) &= \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{\gamma(0, \varepsilon)} \frac{e^{iz}}{z} dz + \\ &+ \int_{\varepsilon}^R \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{\gamma(R)} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0. \end{aligned}$$

Vì $\frac{e^{iz}}{z} = \frac{1}{z} + h(z)$, trong đó $h(z)$ là hàm chỉnh hình tại điểm $z = 0$, nên

$$\int_{\gamma(0, \varepsilon)} \frac{e^{iz}}{z} dz = i \int_{\pi}^0 d\varphi + \int_{\gamma(0, \varepsilon)} h(z) dz \rightarrow -\pi i (\varepsilon \rightarrow 0).$$

Tích phân theo $\gamma(R)$ dần đến 0 khi $R \rightarrow \infty$. Tổng hai tích phân theo hai đoạn $[-R, -\varepsilon]$ và $[\varepsilon, R]$ bằng

$$\int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{\varepsilon}^R \frac{e^{ix}}{x} dx = \int_{\varepsilon}^R \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{x} dx = 2i \int_{\varepsilon}^R \frac{\sin x}{x} dx.$$

Do đó

$$0 = I(R, \varepsilon) = 2i \int_0^R \frac{\sin x}{x} dx - \pi i + 0(\varepsilon) + 0(R),$$

và qua giới hạn khi $\varepsilon \rightarrow 0$ và $R \rightarrow \infty$ ta thu được

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Ví dụ 6. Tính tích phân

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\cos \alpha x - \cos \beta x}{x^2} dx, \quad \alpha \geq 0, \beta \geq 0.$$

Giải. Tích phân phải tìm có thể biểu diễn dưới dạng

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\alpha x} - e^{i\beta x}}{x^2} dx \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\alpha x} - e^{i\beta x}}{x^2} dx \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx. \end{aligned}$$

Do đó để tính tích phân trên đây ta xét tích phân

$$J(R, \varepsilon) = \int_{\Gamma(R, \varepsilon)} \frac{e^{i\alpha z} - e^{i\beta z}}{z^2} dz,$$

trong đó $\Gamma(R, \varepsilon)$ là chu tuyến trong ví dụ 5 (hình VI.6) ta có

$$\int_{-R}^{-\varepsilon} f(x) dx + \int_{\gamma(0, \varepsilon)} f(z) dz + \int_{\varepsilon}^R f(x) dx + \int_{\gamma(R)} f(z) dz = 0.$$

Ta xét tích phân theo $\gamma(R)$. Hiển nhiên $\int_{\gamma(R)} f(z) dz$ dần đến 0 khi $R \rightarrow \infty$ (theo bổ đề Jordan). Bây giờ ta xét tích phân theo nửa đường tròn $\gamma(0, \varepsilon)$.

Ta có

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{i(\alpha - \beta)z + \frac{(i\alpha z)^2 - (i\beta z)^2}{2!} + \dots}{z^2} \\ &= \frac{i(\alpha - \beta)}{z} + \varphi(z), \end{aligned}$$

trong đó $\varphi(z)$ chỉnh hình tại điểm $z = 0$. Từ đó suy ra

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma(0, \varepsilon)} f(z) dx = i(\alpha - \beta)(-\pi i) = \pi(\alpha - \beta).$$

Tổng hai tích phân còn lại bằng

$$\int_{\varepsilon}^R \left(\frac{e^{i\alpha x} + e^{-i\alpha x}}{x^2} + \frac{e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}}{x^2} \right) dx = 2 \int_{\varepsilon}^R \frac{\cos \alpha x - \cos \beta x}{x^2} dx.$$

Như vậy

$$2 \int_{\varepsilon}^R \frac{\cos \alpha x - \cos \beta x}{x^2} dx + \pi(\alpha - \beta) + 0(\varepsilon) + 0(R) = 0$$

và do đó qua giới hạn khi $\varepsilon \rightarrow 0$ và $R \rightarrow \infty$ ta thu được

$$2I + \pi(\alpha - \beta) = 0,$$

từ đó

$$I = \frac{\pi}{2}(\beta - \alpha).$$

6.2.5 Tích phân dạng $I = \int_{\mathbb{R}^+} R(x)x^\alpha dx$

Giả sử

$$R(x) = \frac{P_n}{Q_m}$$

là một hàm hữu tỷ và α là một số thực.

Ta xét các tích phân dạng

$$I(\alpha) = \int_0^{\infty} R(x)x^{\alpha}dx, \quad (6.28)$$

trong đó $R(x)$ không có cực điểm ≥ 0 và $R(0) \neq 0$ (vì trong trường hợp ngược lại $R(x) = x^l R_l(x)$, trong đó l là số nguyên). $R_l(x)$ chỉnh hình tại điểm $z = 0$, sao cho $R_l(0) \neq 0$. Khi đó thay cho (6.28) ta có thể xét tích phân

$$I = \int_{\mathbb{R}^+} x^{\beta} R_l(x) dx; \quad (R_l(0) \neq 0, \infty).$$

Ta lưu ý rằng tích phân (6.28) hội tụ khi và chỉ khi các điều kiện sau đây được thỏa mãn:

- a) hàm $R(x)$ không có cực điểm ≥ 0 ;
- b) hàm $R(x)$ thỏa mãn điều kiện:

$$(b.1) \quad \lim_{x \rightarrow 0} |x|^{\alpha+1} |R(x)| = 0,$$

$$(b.2) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} |x|^{\alpha+1} |R(x)| = 0.$$

Hiển nhiên điều kiện (b.1) được thỏa mãn khi và chỉ khi $\alpha + 1 > 0$ (tức là $\alpha > -1$). Ta xét điều kiện (b.2). Khi $x \rightarrow \infty$ thì ta có thể viết

$$R(x) \approx \frac{\text{const}}{x^{m-n}} \quad (\text{const} \neq 0, m - n \in \mathbb{Z}).$$

Do đó điều kiện (b.2) được thỏa mãn khi và chỉ khi

$$m - n - \alpha - 1 > 0,$$

hay là

$$\alpha + n - m < -1.$$

Như vậy, ở đây ta sẽ giả thiết rằng $R(x)$ là hàm hữu tỷ không có cực điểm ≥ 0 , $R(0) \neq 0$. Tích phân dạng (6.28) hội tụ khi và chỉ khi

$$\alpha > -1 \quad (\text{khả tích tại } 0).$$

$$\alpha + n - m < -1 \quad (\text{khả tích tại vô cùng}),$$

tức là

$$1 - \alpha < m - n - 1. \quad (6.29)$$

Định lý 6.2.3. *Giả sử $R = \frac{P_n}{Q_m}$ là hàm hữu tỷ không có các cực điểm ≥ 0 và α là số thực không nguyên sao cho*

$$\alpha > -1, \quad (6.30)$$

$$\alpha + n - m < -1. \quad (6.31)$$

Khi đó

$$\begin{aligned} I(\alpha) &= \int_{R^+} R(x)x^\alpha dx \\ &= \frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi i \alpha}} \sum_{a_i} \text{Res}[R(z)z^\alpha; a_i], \end{aligned} \quad (6.32)$$

trong đó z^α là hàm được xác định theo công thức $z^\alpha = e^{\alpha \ln z}$, $\ln z = \ln |z| + i \arg z$, $0 < \arg z < 2\pi$.

Chứng minh. Đặt

$$f(z) = R(z)z^\alpha$$

và xét tích phân

$$I(R, \varepsilon) = \int_{\Gamma(R, \varepsilon)} f(z) dz$$

trong đó chu tuyến đóng $\Gamma(R, \varepsilon)$ (hình VI. 7) gồm

- (1) đoạn $[\varepsilon, R]$ (bờ I)
- (2) đường tròn $\gamma(R) = \{|z| = R\}$,
- (3) đoạn $[R, \varepsilon]$ (bờ II)
- (4) đường tròn $\gamma(0, \varepsilon) = \{|z| = \varepsilon\}$.

Đối với thừa số đa trị của hàm dưới dấu
tích phân

Hình VI.7

$$h(z) = z^\alpha = e^{\alpha \operatorname{Ln} z} = |z|^\alpha e^{i \arg z} = |z|^\alpha e^{i \alpha \varphi},$$

ta sẽ chọn nhánh thỏa mãn điều kiện

$$0 < \arg z < 2\pi.$$

Hiển nhiên hàm z^α này chỉnh hình trong miền

$$D = \overline{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{R}_+,$$

và do đó hàm

$$f(z) = R(z)z^\alpha,$$

phân hình.

Trên bờ (I) của nhát cắt $\varphi = 0$ nên

$$h(x + i0) = h(x) = x^\alpha > 0 \quad (x > 0).$$

Bây giờ ta xét điểm $z \in (II)$. Khi $z \in (II)$ thì $z = x - i0$ ($x > 0$) và $\varphi = 2\pi$, và do đó

$$\begin{aligned} h(x - i0) &= x^\alpha e^{i\alpha(2\pi)} \Rightarrow h(z)|_{z \in (II)} \\ &= h(x)e^{2i\pi\alpha} \quad (x > 0). \end{aligned}$$

Từ hệ thức vừa viết suy ra rằng

$$h(z)|_{z \in (II)} = e^{2\pi i \alpha} f(x).$$

Như vậy

$$\begin{aligned} \int_{(I)} f(z) dz &= \int_{(I)} f(x) dx, \\ \int_{(II)} f(z) dz &= -e^{2\pi i \alpha} \int_{(I)} f(x) dx. \end{aligned}$$

Bây giờ áp dụng định lý cơ bản của Cauchy về thặng dư cho hàm $f(z)$ và chu tuyến $\Gamma(R, \varepsilon)$ ta có

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma(R, \varepsilon)} f(z) dz &= \int_{(I)} f(x) dx + \int_{\gamma(R)} f(z) dz + \int_{(II)} f(z) dz + \int_{\gamma(0, \varepsilon)} f(z) dz \\ &= 2\pi i \sum_{a_i} \text{Res}[f(z), a_i], \end{aligned}$$

với R đủ lớn và ε đủ bé; hay là

$$(1 - e^{2\pi i \alpha} \int_{(I)} f(x) dx + \int_{\gamma(0, \varepsilon)} f(z) dz + \int_{\gamma(R)} f(z) dz = 2\pi i \sum_{a_i} \text{Res}. \quad (6.33)$$

Ta xét tích phân theo $\gamma(R)$. Ta có

$$|f(z)| = |R(z) \cdot z^\alpha| \leq \text{const} \cdot |z|^{\alpha+n-m}.$$

Do đó

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma(R)} f(z) dz \right| &\leq \text{const} \int_0^{2\pi} R^{\alpha+n-m} R d\varphi \\ &= \text{const} \cdot 2\pi R^{\alpha+n-m+1} \rightarrow 0 \quad (R \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

theo điều kiện (6.31).

Bây giờ ta xét tích phân theo $\gamma(0, \varepsilon)$.

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma(0, \varepsilon)} f(z) dz \right| &\leq \max_{z \in \gamma(0, \varepsilon)} |f(z)| \int_0^{2\pi} \varepsilon^{\alpha+1} d\varphi \\ &= 2\pi \varepsilon^{\alpha+1} \max_{z \in \gamma(0, \varepsilon)} |f(z)| \rightarrow 0 \quad (\varepsilon \rightarrow 0) \end{aligned}$$

theo điều kiện (6.30).

Chuyển qua giới hạn khi $\varepsilon \rightarrow 0$ và $R \rightarrow \infty$ từ (6.33) ta thu được (6.32) (để ý rằng vì α không nguyên nên $1 - e^{2\pi i \alpha} \neq 0$). Định lý được chứng minh. \square

Bây giờ ta xét một vài ví dụ minh họa cho chứng minh lần việc ứng dụng định lý 6.2.3.

Ví dụ 7. Tính tích phân

$$I = \int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Giải. Ta xét tích phân

$$I(R, \varepsilon) = \int_{\Gamma(R, \varepsilon)} \frac{z^{\alpha-1}}{1+z} dz,$$

trong đó $\Gamma(R, \varepsilon)$ là chu tuyến đóng như trong định lý 6.2.3.

Ta có

$$f(z) = \frac{z^{\alpha-1}}{1+z} = \frac{e^{(\alpha-1)\ln z}}{1+z},$$

trong đó $\ln z$ là nhánh chính hình khi $0 < \arg z < 2\pi$. Hàm $f(z)$ có cực điểm đơn tại $z = -1$ với thặng dư bằng

$$\text{Res}[f; -1] = \frac{e^{(\alpha-1)\ln(-1)}}{(1+z)'} \Big|_{z=-1} = e^{\pi(\alpha-1)i} = -e^{\pi\alpha i}.$$

Theo định lý cơ bản về thặng dư ta có

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma(R, \varepsilon)} f(z) dz &= \int_{(I)} f(x) dx + \int_{\gamma(R)} f(z) dz + \int_{(II)} f(z) dz + \int_{\gamma(0, \varepsilon)} f(z) dz \\ &= -2\pi i e^{\alpha\pi i}, \end{aligned}$$

hay là

$$(1 - e^{2\pi i \alpha}) \int_{(I)} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx + \int_{\gamma(0, \varepsilon)} + \int_{\gamma(R)} = -2\pi i e^{\alpha\pi i}.$$

Ta xét tích phân theo $\gamma(0, \varepsilon)$. Khi $z \in \gamma(0, \varepsilon)$ ta có $z = \varepsilon e^{i\varphi}$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, và

$$\left| \int_{\gamma(0, \varepsilon)} \right| \leq 2\pi \frac{\varepsilon^{\alpha-1}}{1-\varepsilon} \varepsilon \leq \text{const} \cdot \varepsilon^\alpha.$$

Hiển nhiên khi $\alpha > 0$ thì $\int_{\gamma(0, \varepsilon)} \rightarrow 0$.

Tương tự, khi $z \in \gamma(R)$ ta có $z = R e^{i\varphi}$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, và

$$\left| \int_{\gamma(R)} \right| \leq 2\pi R \frac{R^{\alpha-1}}{R-1} \leq \text{const} \cdot R^{\alpha-1}$$

và tất nhiên $\int_{\gamma(R)} \rightarrow 0$ khi $R \rightarrow \infty$.

Như vậy, qua giới hạn khi $\varepsilon \rightarrow 0$ và $R \rightarrow \infty$ ta có

$$(1 - e^{2\pi\alpha i}) \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx = -2\pi i e^{\alpha\pi i},$$

và do đó

$$\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx = \frac{-2\pi i e^{\alpha\pi i}}{1 - e^{2\pi\alpha i}} = \pi \frac{2i}{e^{\pi\alpha i} - e^{-\pi\alpha i}} = \frac{\pi}{\sin \alpha\pi}.$$

Ví dụ 8. Tính tích phân (theo nghĩa giá trị chính)

$$I = \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{1-x} dx, \quad 0 < \alpha < 1. \quad (6.34)$$

Giải. Việc áp dụng trực tiếp định lý 6.2.3 là không thể được vì trên bán trục \mathbb{R}_+ hàm dưới dấu tích phân có cực điểm đơn $x = 1$.

Để tính (6.34) ta xét tích phân

$$I(R, \varepsilon) = \int_{\Gamma(R, \varepsilon)} \frac{e^{(\alpha-1)\ln \alpha}}{1-z} dz, \quad R > 1,$$

trong đó chu tuyến đóng $\Gamma(R, \varepsilon)$ (hình VI.8) gồm:

- (1) đoạn thẳng $[\varepsilon, 1 - \varepsilon]$;
- (2) nửa đường tròn
 $\gamma(1, \varepsilon) = \{|z - 1| = \varepsilon, \operatorname{Im} z \geq 0\}$,
- (3) đoạn thẳng $[1 + \varepsilon, R]$,
- (4) đường tròn $\gamma(R) = \{|z| = R\}$;
- (5) đoạn thẳng $[R, 1 + \varepsilon]$;
- (6) nửa đường tròn
 $\gamma(e^{2\pi i}; \varepsilon) = \{|z - e^{2\pi i}| = \varepsilon, \operatorname{Im} z \leq 0\}$;
- (7) đoạn thẳng $[1 - \varepsilon, \varepsilon]$;
- (8) đường tròn $\gamma(0, \varepsilon) = \{|z| = \varepsilon\}$.

Hình VI. 8

Hiển nhiên, trên các phần biên (1) và (3) ta có

$$f(z) \Big|_{z \in (1), (3)} = \frac{(xe^{i\varphi})^{\alpha-1}}{1 - (xe^{i\varphi})} = \frac{x^{\alpha-1}}{1 - x} = f(x),$$

(trên (1) và (3) ta có $\varphi = 0$) và trên các phần biên (5) và (7)

$$f(z) \Big|_{z \in (5), (7)} = e^{2\pi\alpha i} f(x).$$

Do đó theo định lý cơ bản về thặng dư ta có thể viết

$$\begin{aligned} & \int_{\gamma(0, \varepsilon)} f(z) dz + (1 - e^{2\pi\alpha i}) \left\{ \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} f(x) dx + \int_{1+\varepsilon}^R f(x) dx \right\} + \\ & + \int_{\gamma(1, \varepsilon)} f(z) dz + \int_{\gamma(e^{2\pi i}, \varepsilon)} f(z) dz + \int_{\gamma(R)} f(z) dz = 0. \end{aligned} \quad (*)$$

Bằng phương pháp ước lượng tương tự như trong ví dụ 7 tích phân thứ nhất và thứ năm ở vế trái dần đến 0.

Ta xét tích phân theo $\gamma(1, \varepsilon)$. Tại lân cận điểm $z = 1$ (bờ thứ nhất) ta có

$$\frac{z^{\alpha-1}}{1-z} = -\frac{1}{z-1} + h_1(z),$$

trong đó $h_1(z)$ chỉnh hình tại điểm $z = 1$. Vì

$$1 - z = \varepsilon e^{i\varphi}, \quad dz = -i\varepsilon e^{i\varphi} d\varphi$$

nên

$$\begin{aligned} \int_{\gamma(1, \varepsilon)} f(z) dz &= \int_0^{-\pi} \left[\frac{-i\varepsilon e^{i\varphi}}{\varepsilon e^{i\varphi}} \right] d\varphi + \int_0^{-\pi} h_1[1 - \varepsilon e^{i\varphi}] i\varepsilon e^{i\varphi} d\varphi \\ &= \pi i + \int_0^{-\pi} h_1[1 - \varepsilon e^{i\varphi}] i\varepsilon e^{i\varphi} d\varphi \rightarrow \pi i \quad (\varepsilon \rightarrow 0). \end{aligned}$$

Tương tự ta có

$$\int_{\gamma(e^{2\pi i}, \varepsilon)} f(z) dz = \int_{-\pi}^{-2\pi} \frac{e^{2\pi\alpha i}}{\varepsilon e^{i\varphi}} (-i\varepsilon e^{i\varphi}) d\varphi + \int_{-\pi}^{-2\pi} h_2(z) dz,$$

trong đó $h_2(z)$ chỉnh hình tại điểm $z = e^{2\pi i}$ (điểm 1 của bờ dưới). Do đó

$$\int_{\gamma(e^{2\pi i}, \varepsilon)} f(z) dz = \pi i e^{2\pi\alpha i} + o(\varepsilon), \quad o(\varepsilon) \rightarrow 0 \quad (\varepsilon \rightarrow 0).$$

Bây giờ từ (*) và các giá trị giới hạn vừa thu được ta có

$$(1 - e^{2\pi\alpha i}) \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{1-x} dx + \pi i (1 + e^{2\pi\alpha i}) = 0,$$

và từ đó rút ra

$$I = \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{1-x} dx = \pi \cdot \operatorname{ctg} \alpha\pi.$$

Trong định lý 6.2.3 ta chỉ xét trường hợp khi α là số thực không nguyên. Nếu α là số nguyên thì các điều kiện của định lý 6.2.3 không còn phù hợp nữa. Trong trường hợp này $1 - e^{2\pi\alpha i} = 0$ và tích phân $\int_{\Gamma(R, \varepsilon)}$ cũng bằng 0 (vì

lúc này $R(z)z^\alpha$ là hàm hữu tỷ và tổng toàn phần mọi thặng dư của nó bằng 0) và do đó

$$\int_0^\infty R(x)x^\alpha dx = \frac{0}{0}!$$

Do đó để tính tích phân dạng (6.28) khi α nguyên ta cần tiến hành theo một cách khác. Ta xét tích phân dạng

$$I = \int_{\mathbb{R}_+} x^\alpha (\ln x)^{k+1} R(x) dx. \quad (**)$$

trong đó $\alpha \in \mathbb{R}$ (nguyên hoặc không nguyên), k là số nguyên ≥ 0 . Ta giả thiết $R(x)$ thỏa mãn các điều kiện của định lý 6.2.3. Khi đó tích phân vừa viết hội tụ khi và chỉ khi nó thỏa mãn các điều kiện (6.29) (vì thừa số $(\log x)^{k+1}$ không ảnh hưởng đến tính chất hội tụ của tích phân).

Ta chứng minh định lý sau đây

Định lý 6.2.4. Với các giả thiết của định lý 6.2.3 và α là số nguyên ta có hệ thức sau đây

$$(1) \quad \int_0^\infty R(x)x^\alpha dx = - \sum_{a_i} \text{Res}[R(z)z^\alpha \ln z, a_i], \quad (6.35)$$

$$(2) \quad \int_0^\infty R(x)x^\alpha \log x dx = -\frac{1}{2} \text{Res}[R(z)z^\alpha \ln z; a_i] \\ - \pi i \sum_{a_i} \text{Res}[R(z)z^\alpha \ln z; a_i]. \quad (6.36)$$

Chứng minh. Ta xét tích phân

$$I(R, \varepsilon) = \int_{\Gamma(R, \varepsilon)} R(z)z^\alpha (\ln z)^{k+1} dz, \quad (6.37)$$

trong đó $\Gamma(R, \varepsilon)$ là chu tuyến đã chọn trong định lý 6.2.3 (hình VI.7), z^α là nhánh chính hình của hàm z^α trong $\Gamma(R, \varepsilon)$ nhận giá trị dương ở bờ trên

của nhát cắt, $\log z$ là nhánh chính hình của lôgarit nhận giá trị dương của bờ trên của nhát cắt. Khi đó trong miền D ta có

$$\ln z = \ln |z| + i \arg z, \quad 0 < \arg z < 2\pi.$$

Tích phân theo (I) dẫn đến

$$\int_0^\infty R(x) x^\alpha (\ln x)^{k+1} dx.$$

Trong khi đó tích phân theo (II) dẫn đến

$$\int_0^\infty R(x) x^\alpha (e^{2\pi\alpha i}) (\ln x + 2\pi i)^{k+1} dx.$$

Do đó ta còn phải xét hai tích phân theo $\gamma(R)$ và $\gamma(0, \varepsilon)$. Xét tích phân theo $\gamma(R)$. Nếu $z \in \gamma(R)$ thì

$$\begin{aligned} |\ln z| &= \sqrt{\ln^2 R + \varphi^2} \leq (\ln^2 R + (2\pi)^2)^{1/2} < \text{const} \cdot \ln R, \\ |\ln z|^{k+1} &< \text{const} (\ln R)^{k+1}. \end{aligned} \quad (6.38)$$

Do đó nếu $z \in \gamma(R)$ thì

$$\begin{aligned} |f(z)| &= |R(z) z^\alpha (\ln z)^{k+1}| \leq \text{const} \cdot R^\alpha (\ln R)^{k+1} R^{n-m} \\ &= \text{const} \cdot \frac{(\ln R)^{k+1}}{R^{m-n-\alpha}}. \end{aligned}$$

Từ đó và điều kiện (6.29) suy ra rằng

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma(R)} f(z) dz = 0.$$

Tương tự, nếu $z \in \gamma(0, \varepsilon)$ thì

$$|\ln z| \leq \text{const} \cdot \ln \frac{1}{\varepsilon} \quad (6.39)$$

và

$$|\log z|^{k+1} \leq \text{const} \left(\log \frac{1}{\varepsilon} \right)^{k+1}$$

và do đó

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma(0, \varepsilon)} f(z) dz = 0.$$

Như vậy từ (6.37) và định lý Cauchy về thặng dư ta có

$$\lim_{R \rightarrow \infty, \varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma(R, \varepsilon)} f(z) dz = 2\pi i \sum_{a_i} \text{Res}[f(z), a_i],$$

hay là

$$\int_0^\infty R(x) x^\alpha [(\ln x)^{k+1} - e^{2\pi\alpha i} (\ln x + 2\pi i)^{k+1}] dx = 2\pi i \sum_{a_i} \text{Res}[R(z); a_i]. \quad (6.40)$$

Ta xét các trường hợp riêng sau đây

a) α là số nguyên và $k = 0$. Khi đó

$$2\pi i \sum \text{Res}[R(z) z^\alpha \ln z; a_i] = -2\pi i \int_0^\infty R(x) x^\alpha dx,$$

và từ đó ta thu được (6.35)

b) Trường hợp $k = 1$. Trong trường hợp này ta có

$$2\pi i \sum \text{Res}[R(z) z^\alpha (\ln z)^2; a_i] = -4\pi i \int_0^\infty R(x) x^\alpha \ln x dx + 4\pi^2 \int_0^\infty R(x) x^\alpha dx,$$

và từ đó ta thu được (6.36). □

Nhận xét 6.2.3. Trong trường hợp khi α không phải là số nguyên, bằng cách đặt $k = 0$, từ hệ thức (6.40) ta có

$$\begin{aligned} & (1 - e^{2\pi\alpha i}) \int_0^\infty R(x)x^\alpha \ln x dx - 2\pi i e^{2\pi\alpha i} \int_0^\infty R(x)x^\alpha dx \\ &= 2\pi i \sum \operatorname{Res}[R(z)z^\alpha \ln z; a_i]. \end{aligned} \quad (6.41)$$

Ta xét tiếp một vài ví dụ về tích phân dạng (**)

Ví dụ 9. Tính tích phân

$$I = \int_0^\infty x^{-1/2} \ln x \frac{dx}{(x+1)^2}.$$

Giải. Trong trường hợp này $\alpha = -\frac{1}{2}$, $n = 0$, $m = 2$, $k = 0$.

Do đó điều kiện (6.29) được thỏa mãn. Từ công thức (6.41) ta có

$$2 \int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}} \ln x \frac{dx}{(x+1)^2} + 2\pi i \int_0^\infty \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{(x+1)^2} dx = 2\pi i \operatorname{Res}[f(z); -1].$$

Vì điểm $z = -1$ là cực điểm cấp hai nên

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}[f; -1] &= \lim_{z \rightarrow -1} [z^{-1/2} \ln z]' \\ &= \left[\left(-\frac{1}{2} \right) \frac{z^{-\frac{1}{2}}}{z} \ln z + \frac{1}{z} z^{-\frac{1}{2}} \right]_{z=-1} \\ &= \left[\left(-\frac{1}{2} \right) \frac{-i}{-1} \pi i + \frac{i}{1} \right] = \frac{\pi}{2} + i. \end{aligned}$$

Từ đó dễ thấy rằng

$$\int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}} \ln x \frac{dx}{(x+1)^2} = -\pi, \quad \int_0^\infty \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{(x+1)^2} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Ví dụ 10. Tính tích phân

$$J = \int_0^\infty \frac{\ln x}{(x+a)^2 + b^2} dx.$$

Giải. Để tính tích phân này ta chọn chu tuyến như trong định lý 6.1.3 (hình VI.9) và xét tích phân

$$I(R, \varepsilon) = \int_{\Gamma(R, \varepsilon)} \frac{\ln^2 z}{(z+a)^2 + b^2} dz,$$

trong đó \ln là nhánh chính hình thỏa mãn điều kiện

$$0 \leq \arg z \leq 2\pi,$$

$$\begin{aligned} f(z)|_{z \in (I)} &= \frac{\ln^2 x}{(x+a)^2 + b^2}, \\ f(z)|_{z \in (II)} &= \frac{(\ln x + 2\pi i)^2}{(x+a)^2 + b^2} \\ &= \frac{\ln^2 x + 4\pi i \ln x - 4\pi^2}{(x+a)^2 + b^2}. \end{aligned}$$

Bây giờ từ định lý cơ bản về thặng dư ta thu được

$$\begin{aligned} \int_{(I)} + \int_{\gamma(R)} + \int_{(II)} + \int_{\gamma(0, \varepsilon)} &= \\ = 2\pi i \{ \text{Res}[f; -a + bi] + \text{Res}[f; -a - bi] \}. \end{aligned} \quad (6.42)$$

Bằng cách sử dụng các ước lượng (6.38) và (6.39) dễ dàng thấy rằng

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma(0, \varepsilon)} = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma(R)} = 0.$$

Ta tính thặng dư của f tại các cực điểm đơn của nó. Ta có

$$\begin{aligned} \text{Res}[f; -a + bi] &= \frac{[\ln r + i(\pi - \varphi)]^2}{2bi}, \\ \text{Res}[f; -a - bi] &= -\frac{[\ln r + i(\pi + \varphi)]^2}{2bi}, \end{aligned}$$

trong đó $r = (a^2 + b^2)^{1/2}$, $\varphi = \arctg \frac{b}{a}$.

Do đó qua giới hạn khi $\varepsilon \rightarrow 0$ và $R \rightarrow \infty$, từ (6.42) ta thu được

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^0 \frac{(\ln x + 2\pi i)^2}{(x+a)^2 + b^2} dx + \int_0^{\infty} \frac{\ln^2 x}{(x+a)^2 + b^2} dx = \\ &= -4\pi i \int_0^{\infty} \frac{\ln x}{(x+a)^2 + b^2} dx + 4\pi^2 \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x+a)^2 + b^2} = \\ &= \frac{4\pi\varphi}{b}(\pi - i \ln r) \end{aligned}$$

và

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{(x+a)^2 + b^2} dx = \frac{\varphi \ln r}{b} = \frac{\ln(a^2 + b^2)^{1/2}}{b} \operatorname{arctg} \frac{b}{a}.$$

6.2.6 Một số ví dụ khác

Trong thực tế, để áp dụng phương pháp thặng dư trong việc tính các tích phân (chủ yếu là tích phân suy rộng) hoặc ta phải đưa những tích phân cần tính về các dạng chính tắc đã trình bày trên đây, hoặc ta áp dụng trực tiếp các phương pháp tương tự cho các tích phân với dạng đã cho.

Ta sẽ nêu một vài ví dụ minh họa cho điều vừa nói.

Ví dụ 11. Ta xét tích phân

$$J(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\alpha x}}{1 + e^x} dx, \quad 0 < \alpha < 1. \quad (6.43)$$

Giải.

a) Đưa tích phân (6.43) về dạng chính tắc. Hiển nhiên bằng phép thế $e^x = t$ ta sẽ đưa tích phân đã cho về dạng

$$\int_0^{\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{1+t} dt.$$

Đó là tích phân đã nghiên cứu trong ví dụ 7.

b) Áp dụng phương pháp thặng dư trực tiếp. Ta xét hàm

$$f(z) = \frac{e^{\alpha z}}{1 + e^z}.$$

Hình VI.9

Vì hàm e^z là tuần hoàn với chu kỳ thuần ảo $2\pi i$ nên hàm $f(z)$ chỉ thay đổi một thừa số $e^{2\pi\alpha i}$ khi z nhận giá trị số $2\pi i$. Do đó ta sẽ chọn chu tuyến tích phân là chu vi hình chữ nhật với các đỉnh là $-R, R, R+2\pi i, -R+2\pi i$ (hình VI.9). Trong hình chữ nhật đó hàm $f(z)$ có cực điểm đơn $z = \pi i$ với thặng dư bằng

$$\text{Res}[f; \pi i] = \frac{e^{\alpha\pi i}}{(1 + e^z)'} \Big|_{z=\pi i} = -e^{-\alpha\pi i}.$$

Theo định lý Cauchy ta có

$$\int_{(I)} f(z)dz + \int_{(II)} f(z)dz + \int_{(III)} f(z)dz + \int_{(IV)} f(z)dz = -2\pi i e^{\alpha\pi i}. \quad (6.44)$$

$$\begin{aligned} \int_{(I)} f(z)dz &= \int_{-R}^R \frac{e^{\alpha x}}{1 + e^x} dx, \\ \int_{(III)} f(z)dz &= \int_{+R}^{-R} \frac{e^{(x+2\pi i)}}{1 + e^{x+2\pi i}} dx = -e^{-2\pi\alpha i} \int_{-R}^R \frac{e^{\alpha x}}{1 + e^x} dx. \end{aligned}$$

Trên đoạn (II) ta có $z = R + iy$, $0 \leq y \leq 2\pi$ nên

$$|f|_{z \in (II)} = \left| \frac{e^{\alpha(R+iy)}}{1 + e^{R+iy}} \right| \leq \frac{e^{\alpha R}}{e^R - 1}$$

và do đó

$$\left| \int_{(II)} f(z) dz \right| \leq 2\pi \frac{e^{\alpha R}}{e^R - 1} = 2\pi \frac{e^{(\alpha-1)R}}{1 - e^{-R}} \rightarrow 0 (R \rightarrow \infty) \text{ (vì } \alpha < 1 \text{)}.$$

Cũng tương tự, trên đoạn (IV) ta có

$$|f|_{z \in (IV)} = \left| \frac{e^{(-R+iy)}}{1 + e^{-R+iy}} \right| \leq \frac{e^{-\alpha R}}{1 - e^{-R}}$$

và do đó

$$\left| \int_{(IV)} f(z) dz \right| \leq 2\pi \frac{e^{-\alpha R}}{1 - e^{-R}} \rightarrow 0 (R \rightarrow \infty) \text{ (vì } \alpha > 0 \text{)}.$$

Như vậy nếu $0 < \alpha < 1$ thì qua giới hạn khi $R \rightarrow \infty$ từ (6.44) ta có

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\alpha x}}{1 + e^x} dx - e^{2\alpha\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\alpha x}}{1 + e^x} dx = -2\pi i e^{\alpha\pi i}$$

hay là

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\alpha x}}{1 + e^x} dx = \frac{\pi}{\sin \alpha\pi}.$$

Ví dụ 12. Tính tích phân

$$I = \int_0^1 \frac{x^p(1-x)^{1-p}}{(1+x)^3} dx, \quad (-1 < p < 2). \quad (6.45)$$

Giải. Để áp dụng lý thuyết thặng dư tính tích phân này, đầu tiên ta thác triển giải tích hàm dưới dấu tích phân ra mặt phẳng phức. Giả sử $D = \overline{\mathbb{C}} \setminus [0, 1]$. Dễ dàng thấy rằng thác triển giải tích

$$F(z) = \frac{z^p(1-z)^{1-p}}{(1+z)^3}$$

của hàm dưới dấu tích phân có hai điểm rẽ nhánh là 0 và 1 và trong miền D ta có thể tách nhánh chính hình của hàm giải tích $F(z)$. Ta sẽ tách nhánh chính hình $f(z)$ của $F(z)$ sao cho $f(z) > 0$ khi z ở bờ trên của nhất cắt $[0, 1]$.

Khi $z = x + i0$, $0 < x < 1$ thuộc bờ trên của nhất cắt

$$\begin{aligned} f(x + i0) &= f(z)|_{z \in I} = \frac{x^p(1-x)^{1-p}}{(1+x)^3} \\ &= f(x) > 0, \quad 0 < x < 1. \end{aligned}$$

Ta tìm giá trị $f(x - i0)$. Khi điểm $z = x - i0$ ở bờ dưới của nhất cắt, ta có:

$$\begin{aligned} z^p(1-z)^{1-p} &= |z|^p |1-z|^{1-p} e^{i\{p\varphi_1 + (1-p)\varphi_2\}}, \\ \varphi_1 &= \Delta_\gamma \arg z, \quad \varphi_2 = \Delta_\gamma \arg(z-1), \end{aligned}$$

trong đó γ là đường cong nối điểm thuộc bờ I với điểm $z \in D$. Nếu $z|_{II} = x - i0$ ($0 < x < 1$) thì

$$\varphi_1 = 2\pi, \quad \varphi_2 = 0,$$

và do đó

$$z^p(1-z)^{1-p} = e^{2\pi pi} [x^p(1-x)^{1-p}].$$

Từ đó suy ra rằng

$$f(z)|_{z \in II} = e^{2\pi pi} \frac{x^p(1-x)^{1-p}}{(1+x)^3}.$$

Bây giờ ta xét tích phân

$$I(R, \varepsilon) = \int_{\Gamma(R, \varepsilon)} f(z) dz,$$

trong đó chu tuyến đóng $\Gamma(R, \varepsilon)$

(Hình VI. 10) gồm:

Hình VI. 10

- (1) đường tròn $\gamma(0, \varepsilon) = \{|z| = \varepsilon\}$;
- (2) bờ (I) của nhát cắt $[\varepsilon, 1 - \varepsilon]$
- (3) đường tròn $\gamma(1, \varepsilon) = \{|z - 1| = \varepsilon\}$;
- (4) bờ (II) của nhát cắt $[\varepsilon, 1 - \varepsilon]$;
- (5) đường tròn $\gamma(R) = \{|z| = R, R > 1\}$.

Theo định lý Cauchy về thặng dư ta có

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma(R, \varepsilon)} f(z) dz &= \int_{\gamma(0, \varepsilon)} f(z) dz + (1 - e^{2\pi pi}) \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} f(x) dx + \int_{\gamma(1, \varepsilon)} f(z) dz + \int_{\gamma(R)} f(z) dz \\ &= 2\pi i \text{Res}[f, -1]. \end{aligned}$$

Ta có

$$\begin{aligned} \text{Res}[f, -1] &= \frac{1}{2!} \lim_{z \rightarrow -1} \{z^p(1-z)^{1-p}\}'' \\ &= p(p-1)2^{-p-2}e^{\pi pi}, \end{aligned}$$

và như vậy

$$\int_{\gamma(0, \varepsilon)} f(z) dz + (1 - e^{2\pi pi}) \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} f(x) dx + \int_{\gamma(1, \varepsilon)} f(z) dz + \int_{\gamma(R)} f(z) dz = \pi i p(p-1)2^{-p-1}e^{\pi pi}. \quad (6.46)$$

Ta xét tích phân theo $\gamma(0, \varepsilon)$. Vì $z \in (0, \varepsilon)$ nên $z = \varepsilon e^{i\varphi}$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, do đó

$$\left| \int_{\gamma(0, \varepsilon)} f(z) dz \right| \leq \int_0^{2\pi} \frac{\varepsilon^p(1+\varepsilon)^{1-p}}{(1-\varepsilon)^3} \varepsilon d\varphi \leq \text{const} \cdot \varepsilon^{p+1}.$$

Từ đó suy ra rằng

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma(0, \varepsilon)} f(z) dz = 0 \quad (\text{vì } p > -1).$$

Cũng tương tự ta có

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma(1, \varepsilon)} f(z) dz = 0, \quad p < 2.$$

Ta xét tích phân theo $\gamma(R)$. Vì $z \in \gamma(R)$ nên $z = Re^{i\varphi}$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ và do đó

$$\left| \int_{\gamma(R)} \right| \leq \int_0^{2\pi} \frac{R^p(1+R)^{1-p}}{(R-1)^3} R d\varphi \leq \text{const} \cdot \frac{1}{R} \rightarrow 0 \quad (R \rightarrow \infty).$$

Từ các ước lượng này và (6.46) trong giới hạn khi $\varepsilon \rightarrow 0$ và $R \rightarrow \infty$ ta có

$$(1 - e^{2\pi pi}) \int_0^1 \frac{x^p(1-x)^{1-p}}{(1+x)^3} dx = \pi i p(p-1) 2^{-p-1} e^{p\pi i}$$

hay là

$$\int_0^1 \frac{x^p(1-x)^{1-p}}{(1+x)^3} dx = \pi i p(p-1) 2^{-p-1} e^{p\pi i}$$

hay là

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x^p(1-x)^{1-p}}{(1+x)^3} dx &= \frac{\pi i p(p-1) 2^{-p-1} e^{p\pi i}}{1 - e^{2\pi pi}} = \\ &= \frac{p(1-p)}{2^{p+2} \sin p\pi}. \end{aligned}$$

(nhân tử và mẫu số với $e^{-p\pi i}$)

Nhận xét 6.2.4. Ta nhận xét rằng bằng phép thế $\frac{x}{1-x} = t$ tích phân (6.45) sẽ được đưa về tích phân đã nghiên cứu trong 5° (tích phân dạng (6.28)).

Ví dụ 13. Tính tích phân

$$I = \int_{-1}^{+1} \frac{(1+x)^p(1-x)^{1-p}}{1+x^2} dx, \quad -1 < p < 2.$$

Giải. Ta ký hiệu

$$D = \overline{\mathbb{C}} \setminus [-1, +1]$$

mặt phẳng với nhát cắt theo đoạn $[-1, +1]$ có hai bờ (I) và (II), trong miền D ta tách nhánh chính hình của hàm

$$f(z) = \frac{(1+z)^p(1-z)^{1-p}}{1+z^p}$$

là thác triển giải tích hàm dưới dấu tích phân ra toàn mặt phẳng. Ta chọn nhánh chính hình $f(z)$ thỏa mãn điều kiện

$$f(z) > 0$$

khi z thuộc bờ trên của nhát cắt $[-1, +1]$ và do đó

$$\begin{aligned} f(x+i0) &= f(z)|_{z \in (I)} = \frac{(1+x)^p(1-x)^{1-p}}{1+x^2} \\ &= f(x) > 0, \quad -1 < x < 1, \\ f(x-i0) &= f(z)|_{z \in (II)} = e^{2\pi pi} f(x). \end{aligned}$$

Ta xét tích phân

$$I(R, \varepsilon) = \int_{\Gamma(R, \varepsilon)} f(z) dz,$$

trong đó $\Gamma(R, \varepsilon)$ là chu tuyến đóng, gồm:

- (1) đường tròn $\gamma(-1, \varepsilon) = \{|z+1| = \varepsilon\}$;
- (2) bờ (I) của nhát cắt: $(I) = [-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]$;
- (3) đường tròn $\gamma(1, \varepsilon) = \{|z-1| = \varepsilon\}$;
- (4) bờ (II) của nhát cắt: $(II) = [-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]$;
- (5) đường tròn $\gamma(R) = \{|z| = R > 1\}$.

Theo định lý Cauchy về thặng dư ta có

$$\begin{aligned}
 \int_{\Gamma(R, \varepsilon)} f(z) dz &= \int_{\gamma(-1, \varepsilon)} f(z) dz + (1 - e^{2\pi p i}) \int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} f(x) dx \\
 &\quad + \int_{\gamma(1, \varepsilon)} f(z) dz + \int_{\gamma(R)} f(z) dz \\
 &= 2\pi i \{ \text{Res}[f; i] + \text{Res}[f; -i] \} = 2\pi i \sum \text{Res} f. \quad (6.47)
 \end{aligned}$$

Ta tính thặng dư

$$\text{Res}[f; \pm i] = \left(\frac{(1+z)^p (1-z)^{1-p}}{2z} \right) \Big|_{z=\pm i}.$$

Bằng cách tính các giá trị của hàm lũy thừa $(1+z)^p (1-z)^{1-p}$ tại các điểm $z = i$ và $z = -i$, dễ dàng thấy rằng

$$\begin{aligned}
 \text{Res}[f; +i] &= \frac{\sqrt{2}}{2i} e^{i \left[p \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right]} \\
 \text{Res}[f; -i] &= -\frac{\sqrt{2}}{2i} e^{i \left[p \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \right]}
 \end{aligned}$$

và từ đó ta có thể viết (6.47) dưới dạng

$$\begin{aligned}
 \int_{\gamma(-1, \varepsilon)} f(z) dz + (1 - e^{2\pi p i}) \int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} \frac{(1+x)^p (1-x)^{1-p}}{1+x^2} dx + \\
 + \int_{\gamma(1, \varepsilon)} f(z) dz + \int_{\gamma(R)} f(z) dz = \\
 = \pi \sqrt{2} \left\{ e^{i \left[p \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right]} - e^{i \left[p \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \right]} \right\} \quad (6.48)
 \end{aligned}$$

Vì $-1 < p < 2$ nên dễ dàng thấy rằng

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma(-1, \varepsilon)} f(z) dz = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma(1, \varepsilon)} f(z) dz = 0.$$

Ta xét tích phân $\int_{\gamma(R)} f(z)dz$. Hiển nhiên tích phân này không dần đến 0 khi $R \rightarrow \infty$. Do đó, để xét tích phân theo $\gamma(R)$ ta dùng định nghĩa 6.1.2 và hệ quả 6.1.2. Ta có

$$\operatorname{Res}[f; \infty] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(R)^-} f(z)dz,$$

và do đó

$$\int_{\gamma(R)} f(z)dz = -2\pi i \operatorname{Res}[f; \infty].$$

Ta tính thặng dư $\operatorname{Res}[f; \infty]$. Ta có

$$\operatorname{Res}[f; \infty] = - \lim_{z \rightarrow \infty} z f(z)$$

và để tính giới hạn đó, ta cần tính giới hạn của môđun và acgumen của $zf(z)$.

$$\text{a) } \lim_{z \rightarrow \infty} |z| |f(z)| = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\left|1 + \frac{1}{z}\right|^p \left|1 - \frac{1}{z}\right|^{1-p}}{\left|1 + \frac{1}{z^2}\right|} = 1.$$

b) Tính $\lim_{z \rightarrow \infty} [\arg z f(z)]$. Vì giới hạn của hàm chỉnh hình không phụ thuộc vào hướng dần đến giới hạn nên trong trường hợp này ta cho z dần đến ∞ theo hướng dương của trục thực. Ta có

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow \infty} \arg[zf(z)] &= \lim_{z \rightarrow \infty} \{\arg z + p \cdot \arg(1+z) + (1-p) \arg(1-z) + \arg(1+z^2)\} \\ &= 0 + 0 + (1-p)(-\pi) + 0 = (p-1)\pi. \end{aligned}$$

Do đó

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z f(z) = e^{(p-1)\pi i} = -e^{p\pi i}$$

và từ đó suy ra

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}[f; \infty] &= e^{p\pi i}, \\ \int_{\gamma(R)} f(z) dz &= -2\pi i e^{p\pi i}.\end{aligned}\tag{6.49}$$

Chuyển qua giới hạn khi $\varepsilon \rightarrow 0$ và $R \rightarrow \infty$, từ (6.48) và (6.49) ta thu được

$$\begin{aligned}I &= \frac{\pi\sqrt{2}\left\{e^{i\left[p\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right]} - e^{i\left[p\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right]}\right\} + 2\pi i e^{p\pi i}}{1 - e^{2\pi p i}} \\ &= \frac{\pi\sqrt{2}\left\{e^{-i\left[p\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right]} - e^{i\left[p\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right]}\right\} + 2\pi i}{e^{-p\pi i} - e^{p\pi i}} \\ &= \frac{\pi\left[\sqrt{2}\sin\left(p\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) - 1\right]}{\sin p\pi}.\end{aligned}$$

Ví dụ 14. Tính tích phân

$$I = \int_0^1 \frac{x^p(1-x)^{1-p}}{2+x} dx, \quad -1 < p < 2.$$

Giải. Giả sử

$$f(x) = \frac{x^p(1-x)^{1-p}}{2+x}.$$

Hàm $f(x)$ được cho trên đoạn $(0, 1) \subset \mathbb{R}$ có thể thác triển giải tích ra toàn mặt phẳng phức và thác triển giải tích của nó, hàm

$$F(z) = \frac{z^p(1-z)^{1-p}}{2+z}$$

có hai điểm phân nhánh là $z = 0$ và $z = 1$.

Giả sử $D = \overline{\mathbb{C}} \setminus [0, 1]$. Khi đó, trong miền D ta có thể tách nhánh chính hình của hàm giải tích $F(z)$. Ta sẽ chọn nhánh chính hình $f(z)$ thỏa mãn điều kiện

$$f(z) > 0$$

khi z thuộc bờ trên I của nhát cắt $(0, 1)$ và do đó

$$f(z)|_{z \in (I)} = f(x) = \frac{x^p(1-x)^{1-p}}{2+x}.$$

Ta tìm giá trị của $f(z)$ ở bờ dưới (II) của nhát cắt $(0, 1)$. Dễ dàng thấy rằng

$$\begin{aligned} f(z)|_{z \in (II)} &= e^{-(1-p)2\pi i} \frac{x^p(1-x)^{1-p}}{2+x} \\ &= e^{-(1-p)2\pi i} f(x). \end{aligned}$$

Ta xét tích phân

$$I(R, \varepsilon) = \int_{\Gamma(R, \varepsilon)} f(z) dz,$$

trong đó $\Gamma(R, \varepsilon)$ là chu tuyến đóng gồm:

- (1) đường tròn $\gamma(0; \varepsilon) = \{|z| = \varepsilon\}$;
- (2) bờ (I) của nhát cắt $(0, 1)$;
- (3) đường tròn $\gamma(1, \varepsilon) = \{|z - 1| = \varepsilon\}$;
- (4) bờ (II) của nhát cắt $(0, 1)$;
- (5) đường tròn $\gamma(R) = \{|z| = R, R > 2\}$.

Dễ dàng thấy rằng tích phân theo các đường tròn $\gamma(0, \varepsilon)$ và $\gamma(1, \varepsilon)$ đều dần đến 0 khi $\varepsilon \rightarrow 0$. Do đó theo định lý Cauchy ta có

$$\begin{aligned} (1 - e^{2\pi i p}) \int_0^1 \frac{x^p(1-x)^{1-p}}{2+x} dx &= 2\pi i \operatorname{Res}[f; -2] - \oint_{\gamma(R)} f(z) dz \\ &= 6\pi i \left(\frac{2}{3}\right)^p e^{p\pi i} + \oint_{\gamma(R)} f(z) dz. \end{aligned}$$

Đối với tích phân $\int_{\gamma(R)} f(z)dz$ ta có thể viết

$$\int_{\gamma(R)} f(z)dz = -2\pi i \operatorname{Res}[f; \infty].$$

Do đó ta cần tính $\operatorname{Res}[f; \infty]$. Để làm việc đó, ta xét hàm

$$F^*(z) = \frac{\left(1 - \frac{1}{z}\right)^{1-p}}{1 + \frac{2}{z}}.$$

Hiển nhiên đó là một hàm đa trị. Ta sẽ xét nhánh $f^*(z)$ của hàm $F^*(z)$ sao cho nhánh đó dần đến 1 khi $z \rightarrow \infty$. Đối với nhánh đó ta có

$$\begin{aligned} \frac{\left(1 - \frac{1}{z}\right)^{1-p}}{1 + \frac{2}{z}} &= \left[1 - (1-p)\frac{1}{z} + \frac{(1-p)(-p)}{2!}\frac{1}{z^2} - \dots\right] \\ &\quad \times \left[1 - \frac{2}{z} + \left(\frac{2}{z}\right)^2 + \dots\right] \\ &= 1 - [(1-p) + 2]\frac{1}{z} + \dots \end{aligned}$$

Từ đó suy ra rằng

$$c_{-1}(f^*) = -3 + p,$$

(hệ số của $1/z$).

Ta nhận xét thêm rằng

- a) $|f| = |f^*|$;
- b) $\arg f(z) \neq \arg f^*(z)$.

Thật vậy, khi $z \rightarrow \infty$ theo \mathbb{R}^+ ta có

$$\arg \frac{z^p(1-z)^{1-p}}{2+z} \rightarrow -(1-p)\pi$$

trong khi đó

$$\arg f^*(z) \rightarrow 0$$

khi $z \rightarrow \infty$ theo \mathbb{R}^+ vì $\lim f^*(z) = 1$. Từ đó suy ra rằng trên bán trục \mathbb{R}^+ ta có

$$f(z) = e^{-\pi i(1-p)} f^*(z)$$

và theo định lý duy nhất, biểu thức vừa viết đúng cho toàn mặt phẳng. Do đó

$$c_{-1}(f) = (p-3)e^{-\pi i(1-p)}$$

và

$$\int_{\gamma(R)} f(z) dz = +2\pi i(p-3)e^{-\pi i(1-p)}.$$

Như vậy khi $\varepsilon \rightarrow 0$ và $R \rightarrow \infty$ ta có

$$(1 - e^{2\pi p i})J = 6\pi i \left(\frac{2}{3}\right)^p e^{p\pi i} - 2\pi i(p-3)e^{-\pi i(1-p)}$$

hay là

$$J = \frac{\pi}{\sin p\pi} \left[p-3 - 3\left(\frac{2}{3}\right)^p \right].$$

6.2.7 Tìm tổng của chuỗi

Các phương pháp của lý thuyết thặng dư còn được áp dụng để khảo sát tổng các chuỗi. Trong một số trường hợp, việc đó thường dựa trên các định lý sau đây:

Định lý 6.2.5. *Giả sử*

$$R(z) = \frac{P_n(z)}{Q_m(z)}$$

là hàm hữu tỷ với các cực điểm không nguyên z_1, z_2, \dots, z_p ($z_k \notin \mathbb{Z}$, $k = 1, 2, \dots, p$) và giả sử $m \geq n + 2$.

Khi đó

$$\sum_{-\infty < n < \infty} R(n) = -\pi \sum_{k=1}^p \operatorname{Res}[R(z) \operatorname{ctg} \pi z; z_k]. \quad (6.50)$$

Chứng minh. Ta xét tích phân

$$I(n) = \int_{\gamma(n)} R(z) \operatorname{ctg} \pi z dz; \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

trong đó $\gamma(R)$ là biên của hình vuông với tâm tại gốc tọa độ với các đỉnh tại

$$\left(n + \frac{1}{2}\right) (\pm 1, \pm i)$$

sao cho các điểm z_1, z_2, \dots, z_p thuộc phần trong của nó (hình VI.11).

Hình VI.11

Ta sẽ chứng minh rằng $\lim_{n \rightarrow \infty} I(n) = 0$. Vì mẫu số của $R(n)$ có bậc cao hơn bậc tử số hai đơn vị nên

$$|R(z)| \leq \operatorname{const} \frac{1}{|z|^2}$$

và do đó

$$\max_{z \in \gamma(n)} |R(z)| \leq \frac{\operatorname{const}}{\left(n + \frac{1}{2}\right)^2} \leq \frac{\operatorname{const}}{n^2}. \quad (6.51)$$

Bây giờ ta xét $|\operatorname{ctg}\pi z|$ trên $\gamma(n)$. Trên các cạnh song song với trục ảo ta có

$$\begin{aligned} |\operatorname{ctg}\pi z|_{z \in D_n A_n, B_n C_n} &= \left| \frac{\cos \left[\pm \left(n + \frac{1}{2} \right) \pi + iy\pi \right]}{\sin \left[\pm \left(n + \frac{1}{2} \right) \pi + iy\pi \right]} \right| \\ &= \left| \frac{\sin iy}{\cos iy} \right| = \left| \frac{e^{y\pi} - e^{-y\pi}}{e^{y\pi} + e^{-y\pi}} \right| < 1, \end{aligned}$$

còn trên các cạnh song song với trục thực thì

$$\begin{aligned} |\operatorname{ctg}\pi z|_{z \in A_n B_n, C_n D_n} &= \left| \frac{\cos \left[nx \pm i \left(n + \frac{1}{2} \right) \pi \right]}{\sin \left[nx \pm i \left(n + \frac{1}{2} \right) \pi \right]} \right| \leq \\ &\leq \frac{\operatorname{ch} \left(n + \frac{1}{2} \right) \pi}{\operatorname{sh} \left(n + \frac{1}{2} \right) \pi} = \frac{1 + e^{-(2n+1)\pi}}{1 - e^{-(2n+1)\pi}} \\ &\leq \frac{1 + e^{-\pi}}{1 - e^{-\pi}} = \frac{e^{\pi} + 1}{e^{\pi} - 1} \end{aligned}$$

(ở đây ta đã sử dụng các bất đẳng thức

$$\begin{aligned} |\cos z| &\leq \frac{|e^{iz}| + |e^{-iz}|}{2} = \frac{e^{-y} + e^y}{2} = \operatorname{ch} y \\ |\sin z| &\geq |\operatorname{sh} y|. \end{aligned}$$

Như vậy với mọi $z \in \gamma(n)$ ta có

$$|\operatorname{ctg} z|_{z \in \gamma(n)} \leq \frac{e^{\pi} + 1}{e^{\pi} - 1}, \quad (6.52)$$

và do đó từ (6.51) và (6.52) suy ra

$$\begin{aligned} |I(n)| &\leq \frac{e^{\pi} + 1}{e^{\pi} - 1} \cdot \frac{\operatorname{const}}{n^2} \cdot 4(2n + 1) \\ &\leq \frac{\operatorname{const}}{n} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

Nhưng mặt khác, theo định lý về thặng dư ta có

$$I(n) = 2\pi i \left\{ \sum_{-n}^n \operatorname{Res}[R(z)\operatorname{ctg}\pi z; k] + \sum_{k=1}^p \operatorname{Res}[\cdot, z_k] \right\} \quad (6.53)$$

trong đó $z = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n$ là cực điểm của $\operatorname{ctg}\pi z$.

Hiển nhiên rằng

$$\operatorname{Res}[R(z)\operatorname{ctg}\pi z; k] = \frac{1}{\pi} R(k)$$

và do đó từ (6.53) ta có

$$I(n) = 2\pi i \sum_{-n}^n \frac{R(k)}{\pi} + \sum_1^p \operatorname{Res}[R(z)\operatorname{ctg}\pi z; z_k].$$

Qua giới hạn khi $n \rightarrow \infty$ ta thu được công thức phải chứng minh. \square

Định lý 6.2.6. Với các giả thiết của định lý 6.2.5 ta còn có

$$\sum_{-\infty < n < \infty} (-1)^n R(n) = -\pi \sum_{k=1}^p \operatorname{Res}\left[\frac{R(z)}{\sin \pi z}; z_k\right]. \quad (6.54)$$

Chứng minh. Cũng như trong chứng minh định lý 6.2.5, ta xét tích phân

$I(n) = \int_{\gamma(n)} \frac{R(z)dz}{\sin \pi z}$, $\gamma(n)$ = chu vi hình vuông $A_n B_n C_n D_n$, và hiển nhiên rằng

$$I(n) = 2\pi i \left\{ \frac{1}{\pi} \sum_{-n}^n (-1)^k R(k) + \sum_{k=1}^p \operatorname{Res}\left[\frac{R(z)}{\sin \pi z}; z_k\right] \right\}.$$

Ta cần chứng minh rằng $I_n \rightarrow 0$ khi $n \rightarrow \infty$. Để làm việc đó, ta sẽ ước lượng $\left| \frac{1}{\sin \pi z} \right|$ khi z biến thiên trên các cạnh hình vuông $A_n B_n C_n D_n$.

Trên các cạnh song song với trục ảo ta có

$$\left| \frac{1}{\sin \pi z} \right| = \left| \frac{1}{\sin \pi \left[\pm \left(n + \frac{1}{2} \right) + iy \right]} \right| = \left| \frac{1}{\cos i\pi y} \right| = \frac{1}{\operatorname{ch}\pi y} < 1$$

(vì $\operatorname{ch}\pi y$ không bị chặn khi y tăng!) còn trên các cạnh song song với trục thực thì

$$\left| \frac{1}{\sin \pi \left[\pm \left(n + \frac{1}{2} \right) i \pm x \right]} \right| \leq \frac{1}{\operatorname{sh} \left(n + \frac{1}{2} \right) \pi} < 1.$$

Từ đó suy ra rằng $\lim_{n \rightarrow \infty} I(n) = 0$ và ta thu được công thức (6.54). \square

Ví dụ 16. Tìm tổng của chuỗi

$$\sum_{-\infty < n < \infty} \frac{1}{(a+n)^3}; \quad a \notin \mathbb{Z}.$$

Giải. Đặt

$$R(z) = \frac{1}{(a+z)^2}$$

và áp dụng định lý 6.2.5 ta có

$$\frac{1}{\pi} \sum_{-\infty < n < \infty} \frac{1}{(a+n)^2} = -\operatorname{Res} \left[\frac{1}{(a+z)^2} \operatorname{ctg} \pi z; -a \right].$$

Vì

$$\operatorname{ctg} \pi z = \operatorname{ctg}(-\pi a) + (\pi z - \pi a) \left[\frac{-1}{\sin^2 \pi a} \right] + \dots$$

nên

$$\operatorname{Res} \left[\frac{\operatorname{ctg} \pi z}{(a+z)^2}; -a \right] = \frac{-\pi}{\sin^2 \pi a}$$

và do đó

$$\sum_{-\infty < n < \infty} \frac{1}{(a+n)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi a}.$$

Ví dụ 17. Tìm tổng của chuỗi

$$\sum_{-\infty < n < \infty} \frac{(-1)^n}{(n+a)^2}; \quad a \notin \mathbb{Z}.$$

Giải. Đặt

$$R(z) = \frac{1}{(z+a)^2},$$

và áp dụng định lý 6.23 ta có

$$\frac{1}{\pi} \sum_{-\infty < n < \infty} \frac{(-1)^n}{(a+n)^2} = -\text{Res} \left[\frac{1}{(z+a)^2 \sin \pi z}, -a \right].$$

Dễ dàng thấy rằng

$$\text{Res}[\cdot; -a] = -\frac{\pi \cos \pi a}{\sin^2 \pi a}$$

và do đó

$$\sum_{-\infty < n < \infty} \frac{(-1)^n}{(a+n)^2} = \frac{\pi^2 \cos \pi a}{\sin^2 \pi a}.$$

6.3 Hàm nguyên và hàm phân hình

6.3.1 Hàm phân hình. Bài toán Cousin thứ nhất trong mặt phẳng phức

Ta lưu ý rằng hàm đơn trị được gọi là *hàm phân hình* nếu trong toàn mặt phẳng (có thể trừ điểm ∞) nó chỉ có các điểm bất thường là cực điểm (xem 4.3.5).

Hàm phân hình có thể có một số hữu hạn hoặc vô hạn các cực điểm. Nếu nó có vô số cực điểm thì các cực điểm không thể có điểm tụ trong \mathbb{C} vì điểm tụ đó là điểm bất thường nhưng không cô lập và trong mọi trường hợp nó không phải là cực điểm. Điều đó trái với định nghĩa hàm phân hình.

Bây giờ ta xét các đường tròn C_n và C_{n+1} với bán kính bằng n và $n+1$ tương ứng. Từ điều đã nói trên suy ra rằng giữa các đường tròn này chỉ có một số hữu hạn cực điểm của hàm phân hình. Điều đó chứng tỏ rằng các cực điểm có thể đánh số theo thứ tự không giảm đối với mô đun của chúng

$$|a_1| \leq |a_2| \leq \dots \leq |a_n| \leq$$

và khi đó $\lim_n a_n = \infty$.

Giả sử f là hàm phân hình và a_n là một trong các cực điểm của nó. Ta ký hiệu

$$g_n(z) = \tilde{g}_n\left(\frac{1}{z - a_n}\right)$$

là phần chính của khai triển Laurent tại lân cận điểm a_n .

Bây giờ ta chuyển sang nghiên cứu bài toán Cousin thứ nhất trong mặt phẳng phức.

Giả sử $\{a_n\}$ là tập hợp đóng các điểm cô lập của \mathbb{C} . Đối với mỗi điểm a_n ta xác định hàm dạng

$$g_n(z) = \sum_{k=1}^{m_n} a_{k,n} \left(\frac{1}{z - a_n}\right)^k \quad (6.55)$$

(đó là những đa thức đối với $1/(z - a_n)$).

Bài toán Cousin thứ nhất được đặt ra như sau. *Hãy xác định hàm phân hình f trong \mathbb{C} sao cho f có cực điểm tại a_n với phần chính tương ứng $g_n(z)$ tại các cực điểm đó, còn hàm $f - g_n(z)$ thì chỉnh hình tại các điểm a_n .*

1. Nếu số cực điểm a_n là hữu hạn (ví dụ m) thì hàm như thế sẽ là, chẳng hạn

$$f(z) = \sum_{n=1}^m \tilde{g}_n\left(\frac{1}{z - a_n}\right).$$

2. Giả sử số cực điểm của hàm f là vô hạn. Để trình bày lời giải của bài toán Cousin trong trường hợp này, đầu tiên ta cần quy ước hiểu sự hội tụ của chuỗi các hàm phân hình.

Định nghĩa 6.3.1. Chuỗi các hàm phân hình được gọi là *hội tụ* (tương ứng: *hội tụ đều*) trên tập hợp M nếu chỉ một số hữu hạn các số hạng của nó có cực điểm trên M và sau khi cắt bỏ các số hạng ấy thì chuỗi *hội tụ* (tương ứng *hội tụ đều*) trên M .

Bây giờ ta sẽ chứng minh định lý về sự tồn tại lời giải của bài toán Cousin thứ nhất trong mặt phẳng phức, tức là chứng minh sự tồn tại hàm phân hình với các cực điểm và phần chính tương ứng cho trước.

Định lý 6.3.1. (Mittag-Leffler) *Giả sử $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ là dãy điểm rời rạc bất kỳ của \mathbb{C}*

$$0 \leq |a_1| \leq |a_2| \leq \dots \leq |a_n| \leq \dots \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \infty \text{ và } g_n(z) = \tilde{g}_n\left(\frac{1}{z - a_n}\right)$$

là dãy các đa thức bất kỳ của

$$\frac{1}{z - a_n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Khi đó tồn tại hàm phân hình f có cực điểm tại mọi a_n (và cũng chỉ tại các điểm ấy) với các phần chính $g_n(z)$ tương ứng.

Chứng minh. 1. Không giảm tổng quát, ta có thể cho rằng $a_n \neq 0$ vì thay cho f ta có thể xét hàm $f - g_0$, trong đó g_0 là phần chính của f tại điểm $z = 0$.

Hàm $g_n(z)$ chỉnh hình trong miền $D_n = \mathbb{C} \setminus \{a_n\}$, do đó có thể khai triển $g_n(z)$ thành chuỗi lũy thừa

$$g_n(z) = a_0^{(n)} + a_1^{(n)}z + \dots + a_k^{(n)}z^k + \dots \quad (6.56)$$

Chuỗi (6.56) hội tụ trong hình tròn $\{|z| < |a_n|\}$. Ta chọn một dãy $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^\infty$, $\varepsilon_n > 0$ sao cho chuỗi $\sum \varepsilon_n$ hội tụ. Vì chuỗi (6.56) hội tụ đều trên từng compact của hình tròn $\{|z| < |a_n|\}$, $\varepsilon_n > 0$, $\exists m_n \in \mathbb{N}$ sao cho khi $|z| < \frac{1}{2}|a_n|$ ta có

$$\left| g_n(z) - \sum_{k=1}^{m_n} a_k^{(n)} z^k \right| < \varepsilon_n. \quad (6.57)$$

Ta đặt $P_n(z) = \sum_{k=1}^{m_n} a_k^{(n)} z^k$ và xét chuỗi

$$\sum_{n \geq 1} |g_n(z) - P_n(z)|. \quad (6.58)$$

Ta sẽ chứng tỏ rằng chuỗi (6.58) hội tụ đều trên từng compact $K \subset \mathbb{C}$ theo nghĩa của định nghĩa (6.55). Thật vậy, tập hợp $K \subset \mathbb{C}$ bất kỳ luôn luôn có thể xem là nằm trong hình tròn $\{|z| < R\}$, $R > 0$ nào đó. Ta ký hiệu $N(R) + 1$ là chỉ số mà bắt đầu từ đó tất cả các cực điểm a_n đều nằm ngoài hình tròn với bán kính gấp đôi:

$$|a_n| > 2R \Rightarrow |a_n|/2 > R \quad \forall n > N(R), \quad (6.59)$$

và xét chuỗi

$$\sum_{n \geq N(R)+1} [g_n(z) - P_n(z)]. \quad (6.60)$$

Tất cả các cực điểm của chuỗi (6.3.6) đều thỏa mãn điều kiện (6.59): $\frac{|a_n|}{2} > R$; và do đó hình tròn $\{|z| < R\}$ nằm trong mọi hình tròn $\left\{|z| < \frac{|a_n|}{2}\right\}$. Do điều kiện (6.57) ta có thể khẳng định rằng $|g_n(z) - P_n(z)| < \varepsilon_n$ nếu $|z| < R$ và $n > N(R)$. Từ đó suy ra rằng chuỗi (6.3.6) hội tụ đều trong hình tròn $|z| < R$ và do đó trên K ; và tổng $\varphi_N(z)$ của nó là hàm chỉnh hình trên K . Từ đó suy ra rằng tổng f của (6.58) khác với $\varphi_N(z)$ một hàm hữu tỷ $\sum_{k=1}^{N(R)} [g_k(z) + P_k(z)]$ với các cực điểm $a_1, a_2, \dots, a_{N(R)}$ với các phần chính tương ứng $g_k(z)$, $k = 1, 2, \dots, N(R)$. Do đó trong K hàm f có các cực điểm cho trước và phần chính tương ứng cho trước.

Vì K là compact bất kỳ nên f là hàm phân hình và trong \mathbb{C} nó có các cực điểm và phần chính tương ứng cho trước.

2. Hiển nhiên hàm $f(z)$ chỉ là một trong các hàm thỏa mãn các điều kiện của bài toán. Bây giờ ta chứng tỏ rằng lời giải tổng quát của bài toán có thể biểu diễn dưới dạng

$$f(z) = h(z) + \sum_{n \geq 1} [g_n(z) - P_n(z)], \quad (6.61)$$

trong đó $h(z)$ là hàm nguyên, $P_n(z)$ là những đa thức nào đó. Để chứng minh, ta áp dụng phần 1 vừa chứng minh để xây dựng hàm $\varphi(z)$ có cực điểm và phần chính tương ứng của hàm $f(z)$.

Ta có

$$\varphi(z) = \sum_{n \geq 1} [g_n(z) - P_n(z)].$$

Hiển nhiên hiệu $f(z) - \varphi(z) = h(z)$ chỉnh hình trong \mathbb{C} , do đó h là hàm nguyên. Từ đó suy ra rằng

$$f(z) = h(z) + \varphi(z) = h(z) + \sum_{n \geq 1} [g_n(z) - P_n(z)].$$

□

Định lý Mittag-Leffler vừa chứng minh là định lý tồn tại chứ không cho ta một lượng thông tin nào về việc chọn các đa thức “hiệu chỉnh” P_n và hàm nguyên $h(z)$. Ta sẽ sử dụng phương pháp Cauchy để chứng minh một định lý có tính chất kiến thiết hơn sau đây.

Định lý 6.3.2. (Cauchy) *Giả sử trên hệ đường tròn*

$$\gamma_n = \{|z| = r_n, r_1 < r_2 < \dots < r_n < \dots, r_n \rightarrow \infty\}$$

nào đó hàm phân hình f tăng không nhanh hơn so với z^m , tức là với mọi $z \in \gamma_n$ ($n = 1, 2, \dots$)

$$|f(z)| \leq A|z|^m, \quad A \equiv \text{const.} \quad (6.62)$$

Khi đó có thể lấy các hàm P_n và h trong khai triển (6.61) là những đa thức bậc không vượt quá m .

Chứng minh. Giả sử hàm f có các cực điểm là $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$. Ta cố định điểm $z \in \mathbb{C}$ tùy ý khác với các cực điểm của f và giả sử γ_N chứa điểm z ở bên trong. Ta xét hàm

$$F(z) = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}.$$

Hàm $F(z)$ chỉnh hình khắp nơi trong γ_N trừ điểm $\zeta = z$ và các cực điểm a_1, a_2, \dots, a_N của hàm f . Ta xét tích phân

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_N} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

Dễ dàng thấy rằng

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta} \frac{1}{1 - \frac{z}{\zeta}} = \frac{1}{\zeta} + \frac{z}{\zeta^2} + \dots + \frac{z^m}{\zeta^{m+1}} + \frac{1}{\zeta - z} \times \frac{z^{m+1}}{\zeta^{m+1}},$$

và do đó

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_N} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_N} f(\zeta) \left[\frac{1}{\zeta} + \frac{z}{\zeta^2} + \dots + \frac{z^m}{\zeta^{m+1}} + \frac{1}{\zeta - z} \cdot \frac{z^{m+1}}{\zeta^{m+1}} \right] d\zeta$$

hay là

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_N} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_N} \sum_{k=0}^m \frac{z^k}{\zeta^{k+1}} f(\zeta) d\zeta = \frac{z^{m+1}}{2\pi i} \int_{\gamma_N} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z) \zeta^{m+1}} d\zeta. \quad (6.63)$$

Tính tích phân $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_N} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$. Ta có

$$\text{Res}[F(\zeta); z] = f(z).$$

Bây giờ tính $\text{Res}[F(\zeta); a_k]$, $k = 1, 2, \dots, N$. Vì tại lân cận điểm a_k hàm f có dạng

$$f(z) = g_k(z) + \varphi_k(z),$$

trong đó $\varphi_k(z)$ chỉnh hình tại điểm a_k , do đó

$$\text{Res}[F; a_k] = -g_k(z).$$

Từ đó suy ra

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_N} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = f(z) - \sum_{(\gamma_N)} g_n(z). \quad (6.64)$$

Bây giờ ta tính các tích phân dạng

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_N} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{k+1}} d\zeta.$$

Bằng cách áp dụng công thức tích phân đối với đạo hàm cấp cao tại điểm $z = 0$, từ công thức (6.64) ta có

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_N} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{k+1}} d\zeta = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} - \sum_{(\gamma_N)} \frac{g_n^{(k)}(0)}{k!} \quad k = 0, 1, 2, \dots, m,$$

và từ đó suy ra

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_N} \sum_{k=0}^m \frac{z^k}{\zeta^{k+1}} f(\zeta) d\zeta &= \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k - \sum_{k=0}^m \left(\sum_{(\gamma_N)} \frac{g_n^{(k)}(0)}{k!} \right) z^k \\ &= h(z) - \sum_{(\gamma_N)} P_n(z) \end{aligned}$$

trong đó

$$h(z) = \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k, \quad P_n(z) = \sum_{k=0}^m \frac{g_n^{(k)}(0)}{k!} z^k. \quad (6.65)$$

Như vậy, từ (6.26) ta thu được

$$\frac{z^{m+1}}{2\pi i} \int_{\gamma_N} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{m+1}} d\zeta = f(z) - h(z) - \sum_{(\gamma_N)} (g_n - P_n).$$

Vấn đề còn lại là ước lượng tích phân ở vế trái. Ta có

$$R_N(z) = \frac{z^{m+1}}{2\pi i} \int_{\gamma_N} \frac{f(\zeta)}{\zeta^m} \cdot \frac{d\zeta}{\zeta(\zeta - z)}$$

và do đó sử dụng điều kiện (6.25) ta thu được

$$|R_N(z)| \leq \frac{A|z|^{m+1}}{r_N - |z|}.$$

Do đó $R_N(z) \rightarrow 0$ khi $N \rightarrow \infty$ và sự hội tụ đó là đều trên compact bất kỳ. Định lý được chứng minh đầy đủ. \square

Ví dụ 1. Định lý Cauchy vừa chứng minh có ứng dụng quan trọng việc khai triển hàm phân hình thành các phân thức tối giản. Ta xét ví dụ sau

$$f(z) = \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}.$$

Hàm phân hình f có các cực điểm đơn tại $z_k = n\pi$ ($n \in \mathbb{Z}$) với thặng dư là

$$\operatorname{Res}[f; n\pi] = 1.$$

Ta sẽ chứng minh rằng hàm f bị chặn trên hệ các đường tròn

$$\gamma_n = \left\{ |z| = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi \right\}.$$

Vì $f(z)$ là hàm tuần hoàn với chu kỳ π nên trong mỗi băng $n\pi < \operatorname{Re} z < (n+1)\pi$ hàm đó nhận những giá trị như nhau. Do đó ta chỉ cần chứng minh nó bị chặn trong miền D là băng $0 \leq \operatorname{Re} z \leq \pi$ trừ đi các nửa hình tròn

$$|\operatorname{ctg} z| \leq \frac{|e^{iz}| + |e^{-iz}|}{||e^{iz}| - |e^{-iz}||} = \frac{e^{-y} + e^y}{|e^{-y} - e^y|}.$$

Do đó khi $y > 1$:

$$|\operatorname{ctg} z| \leq \frac{1 + e^{-2y}}{1 - e^{-2y}} < \frac{1 + e^{-2}}{1 - e^{-2}},$$

và khi $y < -1$

$$|\operatorname{ctg} z| \leq \frac{1 + e^{2y}}{1 - e^{-2y}} < \frac{1 + e^{-2}}{1 - e^{-2}}.$$

Trong phần còn lại của miền đang xét khi $-1 \leq y \leq 1$ thì hàm $|\operatorname{ctg} z|$ bị chặn vì nó liên tục.

Như vậy $|\operatorname{ctg} z|$ bị chặn trong miền D và do đó ta có thể lấy $m = 0$. Từ đó cũng suy ra rằng hàm $\operatorname{ctg} z$ bị chặn trong toàn mặt phẳng cắt bỏ các hình tròn $\{|z - n\pi| < r, n \in \mathbb{Z}\}$.

Thặng dư của f tại các điểm ấy bằng

$$g_n(z) = \frac{1}{z - n}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Các đa thức P_n (trong công thức (6.65)) là những đa thức bậc không quá $m = 0$:

$$P_n(z) = g_n(0) = \frac{1}{n\pi}, \quad n \neq 0.$$

Từ đó rút ra

$$\operatorname{ctg} z = \frac{1}{z} + \sum_{-\infty < n < \infty, n \neq 0} \left(\frac{1}{z - n\pi} + \frac{1}{n\pi} \right). \quad (6.66)$$

Chuỗi (6.66) là chuỗi hội tụ đều trong phần bị chặn tùy ý của mặt phẳng $|z| < R$ sau khi vứt bỏ các số hạng chứa cực điểm trong phần đó. Thật vậy, ta có

$$\left| \frac{z}{(z - n\pi)n\pi} \right| = \frac{1}{n^2} \frac{|z|}{\pi \left| \pi - \frac{z}{n} \right|} \leq \frac{R}{\pi \left(\pi - \frac{R}{n} \right)} \cdot \frac{1}{n^2}.$$

Vì $\frac{R}{\pi \left(\pi - \frac{R}{n} \right)} \rightarrow \frac{R}{\pi^2}$ khi $n \rightarrow \infty$ và chuỗi $\sum_{n \neq 0} \frac{1}{n^2}$ hội tụ nên từ đó suy ra điều cần chứng minh.

Bằng cách thay đổi thứ tự các số hạng của chuỗi (6.66) (ta có thể làm được vì chuỗi hội tụ đều và tuyệt đối) ta có

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} z &= \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z - n\pi} + \frac{1}{z + n\pi} \right) \\ &= \frac{1}{z} + \sum_{n \geq 1} \frac{2z}{z^2 - n^2\pi^2}. \end{aligned}$$

6.3.2 Hàm nguyên. Bài toán Cousin thứ hai trong mặt phẳng phức

Bây giờ ta chuyển sang xét các hàm nguyên. Theo định nghĩa (xem 4.3.5) hàm f được gọi là *hàm nguyên* nếu nó chỉnh hình trong \mathbb{C} . Hàm nguyên f có thể

1. không có một không-điểm nào,

2. có một số hữu hạn không-điểm,
3. có vô số không-điểm trong \mathbb{C} .

Trong trường hợp thứ nhất ta có

Định lý 6.3.3. *Hàm nguyên không có không - điểm khi và chỉ khi nó có thể biểu diễn dưới dạng $f = e^g$, trong đó g là hàm nguyên.*

Chứng minh. 1. Nếu g là hàm nguyên thì e^g cũng là hàm nguyên không có không - điểm.

2. Ngược lại nếu f là hàm nguyên không có không - điểm thì tồn tại hàm nguyên g sao cho $f = e^g$. Thật vậy, nhánh bất kỳ của $\ln f(z)$ đều là hàm chỉnh hình trong toàn mặt phẳng (vì f chỉnh hình và không triệt tiêu) và có thể thác triển giải tích $\ln f(z)$ theo tuyến bất kỳ. Do đó $\ln f(z)$ là hàm đơn trị trong \mathbb{C} , nghĩa là: $\ln f(z)$ là hàm nguyên. Ta ký hiệu nó là g và thu được $f = e^g$. \square

Trong trường hợp thứ hai, giả sử hàm nguyên f có một số hữu hạn không-điểm trong \mathbb{C} , trong đó mỗi không - điểm được tính một số lần bằng cấp của nó. Ta sẽ xét việc khai triển hàm nguyên thành tích các thừa số bậc nhất tương ứng với các không - điểm của chúng tương tự như khai triển đa thức

$$P(z) = az^m \prod_{n=1}^l (z - a_n) = Az^m \prod_{n=1}^l (1 - z/a_n).$$

Ta có

Định lý 6.3.4. *Nếu các hàm nguyên $f(z) \not\equiv 0$ và $F(z) \not\equiv 0$ có các không - điểm như nhau (với cấp như nhau) thì*

$$f(z) = e^{g(z)} F(z),$$

trong đó $g(z)$ là một hàm nguyên nào đó (có thể là hằng số).

Chứng minh. Ta xét hàm $\varphi(z) = \frac{f(z)}{F(z)}$. Hàm này có thể có các điểm bất thường (cực điểm!) tại các không điểm của $F(z)$. Nhưng không-điểm của

$F(z)$ cũng là không-điểm của $f(z)$ với cùng một cấp cho nên $\varphi(z)$ không có một cực điểm nào trong \mathbb{C} . Do đó $\varphi(z)$ là hàm nguyên. Bằng cách lý luận tương tự ta còn thấy rằng $\varphi(z)$ không có không điểm trong \mathbb{C} . Từ đó cũng suy ra rằng hàm

$$h(z) = \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}$$

cũng là hàm nguyên. Lấy tích phân hàm $h(z)$ từ 0 đến điểm z tùy ý ta thu được

$$g_1(z) = \int_0^z h(z)dz = \int_0^z \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}dz = \ln \frac{\varphi(z)}{\varphi(0)} + 2k\pi i.$$

Từ đó rút ra $g_1(z)$ là hàm nguyên và

$$\varphi(z) = \varphi(0)e^{g_1(z)} = e^{g_1(z) + \ln \varphi(0)} = e^{g(z)},$$

trong đó hàm $g(z) = g_1(z) + \ln \varphi(0)$ cũng là hàm nguyên.

Từ đó rút ra

$$f(z) = e^{g(z)}F(z).$$

□

Nếu hàm nguyên f có một số hữu hạn không điểm trong \mathbb{C} :

$$\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{m \text{ lần}}, a_1, a_2, \dots, a_n$$

thì vì đa thức $F(z) = z^m(1 - z/a_1) \dots (1 - z/a_n)$ cũng có những không điểm đó nên từ định lý vừa chứng minh suy ra

$$f(z) = e^{g(z)}z^m \prod_{k=1}^n (1 - z/a_k). \quad (6.67)$$

Bây giờ ta xét sự khái quát công thức trên đây cho trường hợp khi tập hợp các không điểm $N(f)$ của hàm nguyên f là vô hạn. Từ định lý duy nhất

của hàm chỉnh hình suy ra rằng $N(f)$ là tập hợp đếm được. Vì trong mọi hình tròn $\{|z| < R, R < \infty\}$ hàm f chỉ có một số hữu hạn không điểm nên các không-điểm của chúng có thể đánh số theo thứ tự môđun không giảm và mỗi không điểm được tính một số lần bằng bội của nó. Như vậy

$$N(f) = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}, \quad \lim a_n = \infty.$$

Trong trường hợp này ta cần xét tích vô hạn thay cho tích hữu hạn (6.67). Ta nhắc lại vài định nghĩa và sự kiện giản đơn nhất liên quan đến các tích ấy mà ta sẽ sử dụng sắp tới. Tích vô hạn với các thừa số phức

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + c_n) \tag{6.68}$$

được gọi là *hội tụ* nếu mọi thừa số của nó khác 0 và tích riêng

$$\pi_n = \prod_{k=1}^n (1 + c_k)$$

có giới hạn $\Pi = \lim_{n \rightarrow \infty} \pi_n$ cũng khác 0. Số Π được gọi là giá trị của tích (6.68).

Vì $1 + c_n = \frac{\pi_n}{\pi_{n-1}}$ cho nên điều kiện $c_n \rightarrow 0$ là điều kiện cần để tích (6.68)

hội tụ. Dĩ nhiên đó không phải là điều kiện đủ: chẳng hạn $\Pi \left(1 + \frac{1}{n}\right)$. Để tích (6.68) hội tụ, điều kiện cần và đủ là chuỗi $\sum_{n \geq 1} \ln(1 + c_n)$ hội tụ với việc chọn các giá trị của lôgarit thích hợp.

Cuối cùng, tích vô hạn mà thừa số là các hàm chỉnh hình trên tập hợp M được gọi là *hội tụ trên M* nếu trong các thừa số chỉ có một số hữu hạn là triệt tiêu trên M và sau khi gạt bỏ các thừa số ấy thì tích hội tụ tại mỗi điểm của M .

Định lý 6.3.5. (Về tích vô hạn các hàm nguyên)

Giả sử các hàm nguyên $U_n(z)$, $n = 1, 2, \dots$ thỏa mãn các điều kiện:

1. *Đối với mỗi $R > 0$ đều tồn tại chỉ số $N(R)$ sao cho với mọi $n > N(R)$, các hàm $U_n(z)$ đều không có không điểm trong hình tròn $\{|z| < R\}$.*

2. Chuỗi

$$\sum_{n \geq N(R)+1} \ln U_n(z)$$

hội tụ đều trong hình tròn $\{|z| < R\}$ với cách chọn nào đó đối với các lôgarit. Khi đó tích vô hạn

$$\prod_{n=1}^{\infty} U_n(z) \quad (6.69)$$

- a) hội tụ $\forall z \in \mathbb{C}$;
- b) là một hàm nguyên;
- c) tập hợp các không điểm của hàm nguyên ấy chính là tập hợp các không - điểm của mọi thừa số $U_n(z)$.

Chứng minh. a) Ta viết tích vô hạn dưới dạng

$$\prod_{n \geq 1} U_n(z) = \prod_{n=1}^{N(R)} U_n(z) \prod_{n \geq N(R)+1} U_n(z).$$

Từ điều kiện 2) suy ra rằng tích vô hạn $\prod_{n \geq N(R)+1} U_n(z)$ hội tụ trong hình tròn $\{|z| < R\}$. Khi đó tích vô hạn (6.69) hội tụ trong hình tròn $\{|z| < R\}$. Do R tùy ý nên tích vô hạn (6.69) hội tụ $\forall z \in \mathbb{C}$.

b) Ta xét hàm

$$\varphi_R(z) = \sum_{n \geq N(R)+1} \ln U_n(z).$$

Theo giả thiết, $\forall n > N(R)$ các hàm $U_n(z)$ chỉnh hình và không triệt tiêu trong hình tròn $\{|z| < R\}$. Và khi đó cả $\ln U_n(z)$ cũng là hàm chỉnh hình trong hình tròn $\{|z| < R\}$. Theo điều kiện 2) chuỗi đối với $\varphi_R(z)$ hội tụ đều. Do đó tổng của nó là hàm chỉnh hình trong hình tròn $\{|z| < R\}$. Từ đó suy ra rằng tích vô hạn

$$P(z) = \prod_{n \geq 1} U_n(z) = \prod_{n=1}^{N(R)} U_n(z) \cdot e^{\varphi_R(z)} \quad (6.70)$$

cũng là hàm chỉnh hình trong hình tròn $\{|z| < R\}$. Vì R là tùy ý nên tích vô hạn là hàm chỉnh hình trong \mathbb{C} , nghĩa là tích vô hạn (6.69) là hàm nguyên.

c) Để chứng minh 3) ta sẽ áp dụng công thức (6.70). Vì $\varphi_n(z)$ chỉnh hình trong hình tròn $\{|z| < R\}$ nên $e^{\varphi_n(z)}$ không triệt tiêu trong hình tròn ấy. Do đó trong hình tròn $\{|z| < R\}$ tích vô hạn chỉ triệt tiêu tại những điểm mà các thừa số $U_n(z)$ triệt tiêu, $n = 1, 2, \dots, n(R)$. Vì R là tùy ý, nên từ đó suy ra điều khẳng định của định lý. \square

Trước khi chuyển sang trình bày cách đặt bài toán Cousin thứ hai và lời giải của nó ta chứng minh

Bổ đề 6.3.1. *Giả sử $a \neq 0$ và $p \in \mathbb{N}$. Khi đó đối với hàm*

$$u(z) = \begin{cases} \left(1 - \frac{z}{a}\right) e^{(z/a) + \frac{1}{2}(z/a)^2 + \dots + \frac{1}{p-1}(z/a)^{p-1}}, & p \geq 2 \\ 1 - z/a, & p = 1 \end{cases} \quad (6.71)$$

trong hình tròn $\{|z| < \frac{1}{2}|a|\}$ ta có ước lượng

$$|\ln U(z)| \leq 2|z/a|$$

nếu nhánh liên tục của lôgarit được chọn sao cho $\ln U(0) = 0$.

Chứng minh. 1. Giả sử $p \geq 2$. Khi đó

$$\begin{aligned} \ln U(z) &= \ln \left(1 - \frac{z}{a}\right) + \frac{z}{a} + \frac{1}{2} \left(\frac{z}{a}\right)^2 + \dots + \frac{1}{p-1} \left(\frac{z}{a}\right)^{p-1} \\ &= -\frac{z}{a} - \frac{1}{2} \left(\frac{z}{a}\right)^2 - \dots + \left(\frac{z}{a}\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{z}{a}\right)^2 + \dots + \frac{1}{p-1} \left(\frac{z}{a}\right)^{p-1} \\ &= -\frac{1}{p} \left(\frac{z}{a}\right)^p - \frac{1}{p+1} \left(\frac{z}{a}\right)^{p+1} - \dots \end{aligned}$$

Khi $|z| < \frac{|a|}{2}$ ta có

$$\begin{aligned} |\ln U(z)| &\leq \left| \frac{z}{a} \right|^p \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p+1} \left| \frac{z}{a} \right| + \dots \right) \\ &\leq \left| \frac{z}{a} \right|^p \left(1 + \left| \frac{z}{a} \right| + \left| \frac{z}{a} \right|^2 + \dots \right) \\ &= \left| \frac{z}{a} \right|^p \frac{1}{1 - \left| \frac{z}{a} \right|} \leq 2 \left| \frac{z}{a} \right|^p. \end{aligned}$$

Như vậy, đối với $p \geq 2$ ta có $|\ln U(z)| \leq 2 \left| \frac{z}{a} \right|^p$ khi $|z| < \frac{|a|}{2}$.

2. Trường hợp $p = 1$ được xét tương tự. \square

Nhận xét. $\forall \{a_n\}_{n=1}^{\infty}, a_n \neq 0 \quad \forall n : \lim a_n = \infty \exists \{p_n\}_{n=1}^{\infty} p_n \in \mathbb{N} :$
 $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{R}{|a_n|} \right)^{p_n}$ hội tụ với mọi $R > 0$. Dãy p_n như vậy luôn luôn có thể tìm được, chẳng hạn, có thể đặt $p_n = n$ và khi đó với $|a_n| > 2R$ ta có

$$\left(\frac{R}{|a_n|} \right)^n \leq \left(\frac{1}{2} \right)^n$$

và do đó chuỗi $\sum \left(\frac{R}{|a_n|} \right)^n$ hội tụ.

Bây giờ ta chuyển sang xét bài toán Cousin thứ hai trong mặt phẳng phức.

Giả sử cho tập đóng các điểm cô lập $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ trong \mathbb{C} và số nguyên $p_n \geq 1$ đối với mỗi n . Bài toán Cousin thứ hai gồm việc xác định hàm nguyên trên \mathbb{C} có không điểm tại các điểm a_n với cấp tương ứng là p_n .

Lời giải của bài toán này được diễn đạt trong định lý sau đây.

Định lý 6.3.6. (Weierstrass) *Giả sử $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ là dãy điểm rời rạc bất kỳ của \mathbb{C} , $\lim a_n = \infty$. Khi đó tồn tại hàm nguyên f có không - điểm tại mọi điểm a_n (và cũng chỉ tại các điểm ấy) và cấp của không điểm a_n bằng số các số hạng bằng a_n trong dãy cho trước.*

Chứng minh. 1. Không giảm tổng quát, có thể xem $a_n \neq 0 \quad \forall n$ (vì thay cho f ta có thể xét hàm nguyên $f(z)/z^m$, trong đó m là cấp của không điểm của

f tại $z = 0$) và các số a_n được đánh số như sau

$$0 < |a_1| \leq |a_2| \leq |a_3| \leq \dots \leq |a_n| \leq \dots, \quad \lim a_n = \infty.$$

Hiển nhiên rằng $\forall R > 0 \exists N(R) \in \mathbb{N} : |a_n| > 2R \forall n > N(R)$. Ta đặt

$$U_n = \begin{cases} (1 - z/a_n)e^{(z/a_n) + \frac{1}{2}(\frac{z}{a_n})^2 + \dots + \frac{1}{p_n-1}(\frac{z}{a_n})^{p_n-1}}, & p_n \geq 2 \\ 1 - z/a_n, & p_n = 1, \end{cases}$$

khi đó hàm $U_n(z)$ không có không điểm trong hình tròn $\{|z| < R\} \forall n > N(R)$. Như vậy điều kiện 1) trong định lý về tích vô hạn các hàm nguyên được thỏa mãn. Ngoài ra, với $n > N(R)$ ta có

$$|\ln U_n(z)| \leq 2 \left| \frac{z}{a_n} \right|^{p_n} < 2 \left(\frac{R}{|a_n|} \right)^{p_n}$$

trong hình tròn $\{|z| < R\}$. Từ ước lượng này và tính hội tụ của chuỗi $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{R}{|a_n|} \right)^{p_n}$ ta kết luận rằng chuỗi $\sum_{n \geq N(R)+1} \ln U_n(z)$ hội tụ tuyệt đối và đều (với việc chọn các lôgarit tương ứng) trong hình tròn $\{|z| < R\}$. Như vậy, điều kiện 2) của định lý vừa nói trên cũng được thỏa mãn. Do đó tích vô hạn

$$f(z) = \prod_{n \geq 1} (1 - z/a_n) e^{(z/a_n) + \frac{1}{2}(z/a_n)^2 + \dots + \frac{1}{p_n-1}(\frac{z}{a_n})^{p_n-1}}$$

(gọi là tích vô hạn Weierstrass) có các tính chất:

- a) hội tụ trong toàn mặt phẳng \mathbb{C} ;
- b) $f(z)$ là hàm nguyên;
- c) tập hợp các không điểm của $f(z)$ là dãy $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ và tất cả các không điểm đều có bội cho trước.

2. Bây giờ ta chứng minh rằng mọi hàm nguyên khác thỏa mãn điều kiện của bài toán đều thu được từ $f(z)$ bằng cách nhân nó với hàm nguyên tùy ý không có không điểm. Thật vậy, theo phần 1) vừa chứng minh ta xây dựng hàm φ như trên: φ có không điểm tại mọi a_n với bội cho trước. Khi

đó hàm $\frac{\varphi(z)}{f(z)}$ là hàm nguyên không có không điểm. Do đó theo định lý đã chứng minh, hàm này có dạng

$$\frac{\varphi}{f} = e^{g(z)},$$

trong đó $g(z)$ là hàm nguyên. Từ đó rút ra $\varphi = fe^g$. \square

Ví dụ 2. Ta xét hàm $\sin z$. Hàm này có các không điểm đơn tại $a_n = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. Chuỗi $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{R}{a_n}\right)^{p_n}$ hội tụ khi $p_n = p = 2 \forall R > 0$. Áp dụng định lý vừa chứng minh ta có

$$\sin z = e^{g(z)} z \prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{z}{n\pi}\right) e^{z/n\pi} \left(1 + \frac{z}{n\pi}\right) e^{-z/n\pi}$$

hay là

$$\sin z = e^{g(z)} z \prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{z^2}{n^2 \pi^2}\right).$$

Từ đó suy ra rằng đạo hàm lôga có dạng

$$\frac{\cos z}{\sin z} = g'(z) + \frac{1}{z} - \sum_{n \geq 1} \frac{2z}{\left(1 - \frac{z^2}{n^2 \pi^2}\right) n^2 \pi^2}.$$

Bây giờ bằng cách so sánh với khai triển ctg z thành phân thức tối giản trong tiết trước ta kết luận rằng $g'(z) = 0 \forall z \in \mathbb{C} \Rightarrow g(z) \equiv \text{const}$. Từ đó ta có

$$\sin z = cz \prod_{n \geq 1} (1 - z^2/(n^2 \pi^2)), \quad c = \text{const}.$$

Bằng cách chia cả hai vế cho z và dần z đến 0, qua giới hạn ta có $c = 1$. Như vậy

$$\sin z = z \prod_{n \geq 1} (1 - z^2/n^2 \pi^2).$$

Định lý 6.3.7. *Giả sử*

$$A = \{a_i\}_{i \in I}, \quad B = \{b_j\}_{j \in J}, \quad A \cap B = \emptyset$$

là những tập hợp đóng các điểm cô lập của \mathbb{C} và p_i, q_j là những số nguyên dương tùy ý. Khi đó tồn tại hàm phân hình f ở trên \mathbb{C} có không - điểm tại a_i với cấp tương ứng p_i và có cực điểm tại b_j với cấp tương ứng q_j (Bài toán Cousin thứ hai tổng quát).

Chứng minh. Giả sử f là hàm nguyên có không điểm cấp p tại điểm a_i và $\varphi(z)$ cũng là hàm nguyên có không điểm cấp q_j tại điểm b_j . Ta xét hàm

$$H(z) = \frac{f(z)}{\varphi(z)}.$$

Hiển nhiên hàm $H(z)$ thỏa mãn các điều kiện của định lý. □

Từ định lý Weierstrass ta có

Định lý 6.3.8. *Hai lớp hàm chỉnh hình sau đây là đồng nhất với nhau:*

- (I) *Lớp các hàm chỉnh hình không có điểm bất thường khác trong \mathbb{C} ngoài cực điểm.*
- (II) *Lớp các hàm biểu diễn được dưới dạng thương của hai hàm nguyên.*

Chứng minh. Mũi tên từ (I) đến (II) được chứng minh như sau. Ta dựng hàm nguyên $F(z)$ có không điểm tại các cực điểm của $f(z)$ (với cấp bằng cấp của cực điểm của $f(z)$). Khi đó hàm

$$F(z) \cdot f(z) = H(z)$$

là một hàm nguyên. Từ đó suy ra

$$f(z) = \frac{H(z)}{F(z)}.$$

Như vậy mỗi hàm lớp (I) đều nằm trong lớp (II).

Mũi tên từ (II) đến (I). Hiển nhiên các hàm thuộc lớp (II) không thể có các điểm bất thường hữu hạn khác ngoài các cực điểm. Do đó mỗi hàm lớp (II) đều nằm trong lớp (I). □

BÀI TẬP

6.4 Bài tập

1. Giả sử hàm f chỉnh hình và $g(z) = f(z^n)$ trong đó $n \in \mathbb{N}$. Giả sử thêm rằng z_0 là cực điểm của hàm $g(z)$. Chứng minh rằng

- 1) $z_k = z_0 \varepsilon^k$, $\varepsilon_n = e^{\frac{2\pi i}{n}}$, $k = 1, 2, \dots, n-1$ cũng là cực điểm của $g(z)$;
- 2) $\text{Res}(g; z_k) = \varepsilon_n^k \text{Res}(g; z_0)$.

2. Giả sử $f(z) = g(az)$, $a \neq 0$. Chứng minh rằng

$$\text{Res}(f; z_0 a) = \frac{1}{a} \text{Res}(g(z), z_0).$$

3. Giả sử $f(z) = z^m g(z^n)$, trong đó m và n là những số nguyên thỏa mãn điều kiện $m \geq 0$, $m < n$. Chứng minh rằng:

$$\text{Res}[f; z_0 e^{2k\pi i/n}] = e^{2k\pi i(m+1)/n} \text{Res}[f; z_0].$$

4. Tính tích phân

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{1 - 2a \cos x + a^2}, \quad a \in \mathbb{C}, \quad a \neq \pm 1.$$

Trả lời:

$$I = \begin{cases} \frac{2\pi}{1 - a^2} & \text{nếu } |a| < 1; \\ \frac{2\pi}{a^2 - 1} & \text{nếu } |a| > 1; \\ 0 & \text{(giá trị chính), nếu } |a| = 1; a \neq \pm 1 \\ & \text{(khi } a = \pm 1 \text{ giá trị chính không tồn tại).} \end{cases}$$

5. Chứng tỏ rằng khi $-\pi < a < \pi$ thì

$$\int_0^\infty \frac{\text{sh} ax}{\text{sh} \pi x} dx = \frac{1}{2} \text{tg} \frac{a}{2}.$$

6. Chứng minh các đẳng thức sau đây

$$1. \int_0^1 \frac{x^{1-p}(1-x)^p}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin \pi p} (1+p-2^p).$$

$$2. \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x(1-x^2)}} dx = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

$$3. \int_1^2 \frac{\sqrt{3x-2-x^2}}{x} dx = \pi \left(\frac{3}{2} - \sqrt{2} \right).$$

$$4. \int_0^1 \frac{\sqrt[3]{x^2(1-x)}}{1+x} dx = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \left(\frac{4}{3} - \sqrt[3]{2} \right).$$

Chương 7

Ánh xạ bảo giác

7.1	Các khái niệm chung	516
7.1.1	Hàm đơn diệp	517
7.1.2	Điều kiện đủ để hàm đơn diệp	522
7.1.3	Sự hội tụ của dãy hàm đơn diệp	524
7.1.4	Tính chất địa phương của ánh xạ chỉnh hình có đạo hàm bằng 0	525
7.1.5	Tính chất chung của ánh xạ bảo giác	527
7.1.6	Đẳng cấu và tự đẳng cấu	528
7.1.7	Điều kiện cần để tồn tại đẳng cấu	532
7.1.8	Điều kiện chuẩn	534
7.2	Định lý cơ bản của lý thuyết ánh xạ bảo giác	537
7.2.1	Tập hợp bị chặn trong $\mathcal{H}(D)$	538
7.2.2	Tập hợp liên tục đồng bậc	539
7.2.3	Nguyên lý compact	540
7.2.4	Phiếm hàm liên tục	544
7.2.5	Đơn giản hóa cách đặt bài toán Riemann	546

7.2.6	Định lý Riemann	548
7.2.7	Định lý duy nhất của ánh xạ bảo giác	553
7.2.8	Sự tương ứng giữa các biên và công thức Christoffel-Schwarz	554
7.3	Bài tập	560
	Tài liệu tham khảo	563

Trong chương II ta đã làm quen với sự mô tả hình học các tính chất chỉnh hình của hàm biến phức. Một trong những vấn đề cơ bản của quá trình đó là việc nghiên cứu các hàm chỉnh hình bằng cách xuất phát từ các ánh xạ thực hiện bởi các hàm ấy. Các ánh xạ ấy là bảo giác tại mọi điểm mà hàm có đạo hàm khác không. Từ đó ta cũng có thể thu được những ví dụ khác nhau về các ánh xạ bảo giác minh họa về mặt hình học một hàm đã cho nào đó.

Tuy nhiên, trong thực tế vấn đề được quan tâm hơn cả và cũng là vấn đề khó khăn hơn cả là bài toán ngược - gọi là *bài toán cơ bản của lý thuyết ánh xạ bảo giác*. Bài toán đó được đặt ra như sau:

Giả sử cho hai miền D và D^* của \mathbb{C} . Hãy tìm hàm ánh xạ bảo giác miền này lên miền kia.

Trong chương này ta sẽ nghiên cứu vấn đề tồn tại hàm ánh xạ bảo giác đối với trường hợp đơn giản nhất khi hai miền D và D^* đơn liên. Cụ thể là ta sẽ chứng minh định lý Riemann khẳng định rằng *mọi miền đơn liên với biên chứa ít nhất hai điểm đều có thể ánh xạ bảo giác lên hình tròn mở của \mathbb{C}* .

7.1 Các khái niệm chung

Khái niệm ánh xạ bảo giác đã được định nghĩa trong **2.3**. Trong mục này ta sẽ trình bày một số khái niệm chung của lý thuyết ánh xạ bảo giác cùng với một vài tính chất chung của các ánh xạ ấy.

7.1.1 Hàm đơn điệp

Khái niệm hàm đơn điệp trong một miền đã được đề cập đến trong chương I. Bây giờ ta đưa vào khái niệm hàm đơn điệp tại một điểm và nghiên cứu một số tính chất của lớp hàm này mà qua đó ta sẽ thấy rõ tính chất địa phương của ánh xạ chỉnh hình có đạo hàm $\neq 0$.

Định nghĩa 7.1.1. Hàm $F(z)$ được gọi là *đơn điệp tại điểm* z_0 nếu hàm ấy đơn điệp trong lân cận nào đó của điểm z_0 .

Hiển nhiên, hàm đơn điệp trong miền thì đơn điệp tại mọi điểm của miền ấy. Điều khẳng định ngược lại nói chung là không đúng. Thật vậy, hàm $f(z) = e^z$ đơn điệp tại mọi điểm $z \neq \infty$ nhưng f không đơn điệp trong \mathbb{C} vì

$$\forall z_k = a + 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z} \text{ ta đều có } f(z_k) = e^a.$$

Bây giờ ta xét tiêu chuẩn để hàm đơn điệp tại một điểm.

Định lý 7.1.1. Hàm $f(z)$ chỉnh hình trong miền $D \subset \mathbb{C}$ là đơn điệp tại điểm $z_0 \in D$ khi và chỉ khi $f'(z_0) \neq 0$.

Chứng minh. 1. Giả sử f đơn điệp tại điểm z_0 . Ta cần chứng minh $f'(z_0) \neq 0$. Ta giả sử ngược lại: $f'(z_0) = \dots = f^{(p-1)}(z_0) = 0$; $f^{(p)}(z_0) \neq 0$, $p \geq 2$. Bằng cách áp dụng phương pháp lý luận như trong chứng minh tính bảo toàn tập mở (4.4 định lý 4.4.3) ta sẽ chọn hình tròn $U(z_0, r) = \{|z - z_0| \leq r\} \subset D$ sao cho trong đó không có w_0 -điểm của hàm f cũng như không có các không-điểm của đạo hàm ngoài tâm z_0 của nó (ta lại sử dụng tính chất có tập của các không điểm) và ta có

$$p = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U} \frac{f'(\zeta) d\zeta}{f(\zeta) - w_0}, \quad w_0 = f(z_0).$$

Từ định nghĩa chỉ số một điểm đối với đường cong (xem 4.4) ta thấy rằng trong trường hợp này $J(w, \partial U)$ bằng p với mọi w đủ gần w_0 (chẳng hạn $|w - w_0| < \mu$). Điều đó chứng tỏ rằng trong hình tròn $U(z_0, r)$ hàm f nhận giá trị w_1 , $|w_1 - w_0| < \mu$, đến p lần (vì hàm f nhận giá trị w_0 đến p lần). Vì

$f(z) \neq 0$ tại mọi $z \in \{S(z_0, r) \setminus \{z_0\}\}$ nên hàm f sẽ nhận giá trị w_1 bất kỳ tại p điểm khác nhau trong hình tròn $S(z_0, r)$. Điều đó có nghĩa là f không đơn điệu tại điểm z_0 . Điều đó mâu thuẫn với giả thiết.

2. Ngược lại, ta sẽ chứng minh rằng tồn tại một lân cận điểm z_0 mà tại đó hàm đơn điệu. Ta xét lân cận $U(z_0, r) = \{|z - z_0| < r\}$ của điểm z_0 sao cho $\overline{U}(z_0, r) \subset D$ và

a) $f'(z_0) \neq 0$ trong $\overline{U}(z_0, r)$,

b) $h(z) = f(z) - f(z_0) \neq 0, \forall z \in \{\overline{U}(z_0, r) \setminus \{z_0\}\}$.

(tức là $f(z) - f(z_0)$ có không điểm duy nhất z_0 ; vì không điểm của hàm chỉnh hình cô lập nên lân cận đó tồn tại).

Khi đó ta có $N_h(U) = 1$ (vì không điểm duy nhất của hàm $f(z) - f(z_0)$ có cấp bằng 1) và $N_h(\partial U) = 0$. Giả sử $\lambda = \min_{z \in \partial U} |f(z) - f(z_0)|$ và $V = \{w : |w - f(z_0)| < \lambda\}$. Giả sử w_1 là điểm đủ gần $f(z_0)$ sao cho $w_1 \in V$. Ta xét biểu thức

$$f(z) - w_1 = (f(z) - w_0) + (w_0 - w_1), \quad w_0 = f(z_0).$$

Vì $|f(z) - w_0| > \lambda, \forall z \in \partial U$ và $|w_1 - w_0| < \lambda$ nên

$$|f(z) - w_1| \geq |f(z) - w_0| - |w_1 - w_0| > 0, \quad \forall z \in \partial U.$$

Từ đó suy ra rằng $f(z) - w_1$ và $f(z) - w_0$ thỏa mãn các điều kiện của định lý Rouché. Do đó $N_{f-w_1}(U) = N_{f-w_0}(U) = 1$. Nhưng điều đó chứng tỏ rằng hàm $f(z) - w_1$ chỉ triệt tiêu một lần trong U . Do đó trong hình tròn V tồn tại hàm đơn trị $g(z)$ là hàm ngược của $f(z)$. Khi đó trong miền $U \cap g(V)$ chứa điểm z_0 hàm $f(z)$ đơn điệu. Định lý được chứng minh. \square

Hệ quả 7.1.1. *Hàm chỉnh hình tại điểm $z = \infty$*

$$f(z) = a_0 + \frac{a_1}{z} + \dots, \quad |z| > R$$

là đơn điệu tại đó khi và chỉ khi

$$a_{-1} = -\text{Res}[f; \infty] \neq 0.$$

Chứng minh. Ta xét hàm chỉnh hình tại điểm $\zeta = 0$

$$\varphi(\zeta) = f\left(\frac{1}{\zeta}\right) = a_0 + a_{-1}\zeta + a_{-2}\zeta^2 + \dots, \quad |\zeta| < \frac{1}{R}.$$

Hàm $\zeta = \frac{1}{z}$ ánh xạ đơn trị một - một lân cận $\{|z| > R\}$ của điểm ∞ lên lân cận $\{|\zeta| < 1/R\}$ của điểm $\zeta = 0$. Do đó hàm $f(z)$ đơn diệp tại ∞ khi và chỉ khi hàm $\varphi(\zeta)$ đơn diệp tại điểm $\zeta = 0$ (và theo định lý 7.1.1) tức là khi và chỉ khi

$$\varphi'(0) = a_{-1} \neq 0.$$

□

Hệ quả 7.1.2. Hàm $f(z)$ có cực điểm tại z_0 (hữu hạn hoặc vô hạn) là đơn diệp tại điểm ấy khi và chỉ khi z_0 là cực điểm đơn.

Chứng minh. Áp dụng định lý 7.1.1 cho hàm $\frac{1}{f(z)}$ nếu $z_0 \neq \infty$ và hệ quả 7.1.1 nếu $z_0 = \infty$. □

Ví dụ 1. Nếu z_0 là điểm bất thường cốt yếu của hàm $f(z)$ thì f không đơn diệp tại điểm z_0 . Thật vậy, theo định lý Picard, trong lân cận bất kỳ của điểm z_0 - phương trình $f(z) = c$ có vô số nghiệm đối với mọi giá trị c , có thể trừ ra một giá trị. Do đó $f(z)$ không đơn diệp tại z_0 .

Ví dụ 2. Giả sử $f(z) \in \mathcal{H}(D)$ trừ ra hai điểm z_1, z_2 là những cực điểm của nó. Khi đó $f(z)$ không đơn diệp trong D . Thật vậy, nếu $|c|$ là số đủ lớn thì phương trình $f(z) = c$ có ít nhất hai nghiệm \tilde{z}_1 và \tilde{z}_2 trong đó \tilde{z}_j đủ gần z_j . Do đó $f(z)$ không đơn diệp trong D .

Định lý 7.1.2. Nếu hàm $w = f(z)$ đơn diệp trong D , còn $F(w)$ đơn diệp trong D' thì hàm $\varphi = F(f(z))$ đơn diệp trong D .

Chứng minh. Thật vậy, vì F đơn diệp trong D' nên từ đẳng thức $F(f(z_1)) = F(f(z_2))$ suy ra $f(z_1) = f(z_2)$ và vì f đơn diệp trong D nên $z_1 = z_2$. □

Định lý 7.1.3. Giả sử $w = f(z)$ chỉnh hình đơn diệp trong miền D không chứa điểm ∞ . Khi đó hàm ngược $z = \varphi(w)$ cũng chỉnh hình đơn diệp trong D^* ($D^* = f(D)$).

Chứng minh. 1. Sự tồn tại hàm ngược được suy từ định lý 7.1.1.

2. Hàm $\varphi(w)$ đơn trị. Thật vậy, nếu $z_1 \neq z_2$ là hai giá trị của $w_0 \in D$ thì ta phải có $f(z_1) = f(z_2) = w_0$. Điều này mâu thuẫn với tính đơn diệp của $f(z)$.

3. Hàm $\varphi(w)$ là đơn diệp. Nếu $\varphi(w_1) = \varphi(w_2) = z_0$, trong đó $w_1 \neq w_2$ thì ta có

$$f(z_0) = w_1, \quad f(z_0) = w_2.$$

Nhưng điều này mâu thuẫn với tính đơn trị của $f(z)$.

4. Hàm $\varphi(w)$ liên tục. Thật vậy, giả sử $w_0 \in D'$ và $\varphi(w_0) = z_0$. Khi đó mỗi điểm $w' \in \{|w - w_0| < \mu\}$ sẽ là giá trị của $f(z)$ tại điểm z' nào đó nằm trong hình tròn $U(z_0, r) = \{|z - z_0| \leq r\}$. Nói cách khác $z' = \varphi(w') \in U(z_0, r)$ nếu $w' \in \{|w - w_0| < \mu\}$. Do đó với $\varepsilon > 0$ tùy ý, ta chọn số $r < \varepsilon$. Khi đó đối với số $\mu = \mu(r)$ tương ứng với nó ta sẽ có

$$|\varphi(w') - \varphi(w_0)| < r < \varepsilon, \quad |w' - w_0| < \mu.$$

Do đó $\varphi(w')$ liên tục.

Vấn đề còn lại là chứng tỏ $\varphi(w)$ chỉnh hình tại điểm $w_0 \in D^*$ bất kỳ. Giả sử $\varphi(w_0) = z_0$. Khi đó vì f đơn diệp nên $\Delta w \neq 0$ khi $\Delta z \neq 0$ và do đó suy ra sự tồn tại đạo hàm $\varphi'(w)$ tại mọi điểm thuộc $\{|w - w_0| < \mu\}$ và
$$\varphi'(w) = \frac{1}{f'(z)}.$$
 □

Mối liên hệ giữa ánh xạ bảo giác và hàm đơn diệp được thể hiện trong định lý sau đây.

Định lý 7.1.4. Ánh xạ chỉnh hình

$$w = f : D \rightarrow D^*$$

là bảo giác khi và chỉ khi f đơn diệp trong D .

Chứng minh. 1. Giả sử $f : D \rightarrow D^*$ là ánh xạ bảo giác, khi đó f đơn trị một - một và do đó nó đơn điệu.

2. Ngược lại, giả sử hàm f đơn điệu. Ta cần chứng minh rằng f là ánh xạ bảo giác tại mọi điểm $z \in D$. Vì f đơn điệu nên $f'(z_0) \neq 0 \forall z \in D$. Do đó nếu $z_0 \neq \infty$, và $f(z_0) \neq \infty$ kết luận của định lý được rút ra từ chỗ là $f'(z_0) \neq 0$. Giả sử $z_0 \neq \infty$ và $f(z_0) = \infty$. Khi đó

$$w = f(z) = \frac{A_{-1}}{z - z_0} + A_0 + A_1(z - z_0) + \dots, \quad A_{-1} \neq 0$$

và

$$\begin{aligned} \tilde{w} = \frac{1}{w} &= \frac{1}{f(z)} = a_1(z - z_0) + \dots, \\ a_1 &= \frac{1}{A_{-1}} = \frac{d\tilde{w}}{dz} \Big|_{z=z_0} \neq 0. \end{aligned}$$

Vì ánh xạ $\tilde{w} = \frac{1}{f(z)}$ bảo giác tại điểm z_0 nên ánh xạ $w = f(z)$ cũng bảo giác tại điểm đó.

Trường hợp $z_0 = \infty$ có thể đưa về trường hợp đã xét bằng cách đặt $z' = \frac{1}{z}$. Có thể xảy ra hai khả năng:

a) $f(\infty) \neq \infty$. Khi đó

$$w = f\left(\frac{1}{z'}\right) = A_0 + A_1 z' + \dots, \quad A_1 \neq 0.$$

b) $f(\infty) = \infty$. Khi đó

$$w = f\left(\frac{1}{z'}\right) = \frac{A_{-1}}{z'} + A_0 + A_1 z' + \dots, \quad A_{-1} \neq 0.$$

□

Nhận xét 7.1.1. Từ điều vừa trình bày trên đây suy ra rằng các điều kiện sau đây là những điều kiện cần để hàm f đơn điệu trong miền D :

1. Hàm f chỉnh hình trong miền D có thể trừ ra một điểm là cực điểm đơn của f .

2. Tại mỗi điểm hữu hạn $z_0 \in D$ (mà tại đó f chỉnh hình) hàm f thỏa mãn điều kiện $f'(z_0) \neq 0$.

3. Nếu $z_0 = \infty \in D$ và f chỉnh hình tại z_0 thì f phải thỏa mãn điều kiện $c_{-1} = -\text{Res}[f; \infty] \neq 0$.

Ta nhấn mạnh lại rằng nói chung các điều kiện 1) - 3) không phải là những điều kiện đủ để hàm f đơn điệu. Các điều kiện đủ được xét trong tiết sau.

7.1.2 Điều kiện đủ để hàm đơn điệu

Sử dụng nguyên lý acgumen ta sẽ chứng minh hai định lý sau đây là những điều kiện đủ để hàm đơn điệu trong miền D . Ta lưu ý rằng trong một số sách giáo khoa, các định lý này còn được gọi là *nguyên lý tương ứng một - một*.

Định lý 7.1.5. *Giả sử 1) D là miền đơn liên bị chặn (hoặc không bị chặn chứa điểm ∞) với biên γ là đường cong đóng Jordan; 2) $f \in \mathcal{H}(D)$ và $f \in \mathcal{C}(\overline{D})$; 3) khi z vòng quanh γ thì điểm $w = f(z)$ vạch nên đường cong đóng Jordan Γ .*

Khi đó hàm f đơn điệu trong miền D và ánh xạ bảo giác miền D lên miền bị chặn D^ với biên Γ .*

Chứng minh. Ta cần chứng minh rằng

1. Đối với mỗi điểm $w_1 \in D^*$ chỉ tồn tại một điểm $z_0 \in D$ sao cho $f(z) = w_1$, tức là $F_1(z) = f(z) - w_1$ có đúng một không - điểm trong D .

2. Đối với điểm $w_2 \notin D^*$ hàm $f(z)$ không nhận giá trị $w_2 \quad \forall z \in D$, tức là $F_2(z) = f(z) - w_2$ không có không điểm trong D .

Ta chứng minh 1). Ta ký hiệu số w_1 - điểm của hàm f trong D là $N_f(D; w_1)$ và giả sử điểm z vòng quanh γ theo hướng dương. Khi đó điểm $w = f(z)$ sẽ vòng quanh Γ , hoặc theo hướng dương, hoặc theo hướng âm. Trong trường hợp thứ nhất vectơ $F_1 = f(z) - w_1$ quay được một góc bằng

2π và

$$\begin{aligned} N_{F_1}(D; w_1) &= \frac{1}{2\pi} \Delta_\gamma \arg(f(z) - w_1) \\ &= \frac{1}{2\pi} \Delta_\Gamma(w - w_1) = 1 \end{aligned}$$

nghĩa là F_1 có một không - điểm trong D . Trong trường hợp thứ hai vector F_1 quay được góc -2π và do đó $N_{F_1}(D; w_1) = -1$ và F_1 có trừ một không điểm trong D . Điều này không thể xảy ra. Từ đó suy ra: thứ nhất khi z vòng quanh γ theo hướng dương thì đường cong Γ được vòng quanh theo hướng dương; và thứ hai hàm $f(z) - w_1$ có một không - điểm trong miền D .

Bây giờ ta chứng minh 2). Rõ ràng là từ điều vừa chứng minh suy ra

$$N_{F_2}(D; w_2) = 0 \quad \forall w_2 \notin D^*$$

vì trong trường hợp này vector $F_2 = f(z) - w_2$ không nhận một gia số argumen nào. Do đó hàm $F_2(z)$ không có không - điểm ở ngoài D . Định lý được chứng minh. \square

Định lý 7.1.6. *Giả sử: 1) D là miền đơn liên bị chặn (hoặc không bị chặn chứa điểm ∞) với biên γ là đường cong đóng Jordan; 2) $f \in \mathcal{H}(D \setminus \{z_0\})$ và $f \in \mathcal{C}(\overline{D} \setminus \{z_0\})$, trong đó z_0 là cực điểm đơn duy nhất của f trong D ; 3) khi z vòng quanh biên γ thì điểm $w = f(z)$ vạch nên đường cong đóng Jordan Γ giới hạn phần trong D^* và phần ngoài D_∞^* ; 4) ở trong D hàm f không nhận giá trị $w_0 \in D^*$ nào đó.*

Khi đó hàm f đơn điệu trong D và ánh xạ bảo giác D lên D_∞^ .*

Chứng minh. Giả sử điểm $w_1 \in D_\infty^*$. Khi điểm z vòng quanh γ argumen của vector $F_1 = F(z) - w_1$ không nhận một gia số nào. Áp dụng nguyên lý argumen ta có

$$\begin{aligned} N_{F_1}(D) - 1 &= \frac{1}{2\pi} \Delta_\gamma \arg\{f(z) - w_1\} \\ &= \frac{1}{2\pi} \Delta_\Gamma \arg\{w - w_1\} = 0. \end{aligned}$$

Do đó số không - điểm và số cực điểm của hàm $f(z) - w_1$ trong D là bằng nhau. Từ đó suy ra nó có một không - điểm.

Bây giờ giả sử $w_2 \in D^*$. Khi đó acgumen của vector $F_2 = f(z) - w_2$ nhận giá trị 0 hoặc 2π hoặc -2π khi điểm z vòng quanh γ . Trong trường hợp thứ nhất ta có

$$\begin{aligned} N_{F_2}(D) - 1 &= \frac{1}{2\pi} \Delta_{\Gamma} \arg\{w - w_2\} = 1 \\ \Rightarrow N_{F_2}(D) &= 2 \end{aligned}$$

nghĩa là F_2 có hai không điểm trong D . Nhưng điều đó không thể xảy ra vì khi $w_2 = w_0$ nó không có một không điểm nào (theo điều kiện 4 của định lý). Như vậy chỉ còn lại trường hợp thứ hai. Trong trường hợp này ta có

$$\begin{aligned} N_{F_2}(D) - 1 &= \frac{1}{2\pi} \Delta_{\Gamma} \arg\{w - w_2\} = -1 \\ \Rightarrow N_{F_2}(D) &= 0 \end{aligned}$$

tức là F_2 không có không điểm trong D . Định lý được chứng minh. \square

7.1.3 Sự hội tụ của dãy hàm đơn điệu

Nói chung kết quả của các phép toán đại số trên lớp các hàm đơn điệu là những hàm không đơn điệu. Ngược lại, phép toán qua giới hạn các dãy hàm đơn điệu lại cho ta hàm đơn điệu (trừ một trường hợp đặc biệt).

Ta có định lý sau đây về tính đơn điệu của hàm giới hạn.

Định lý 7.1.7. *Giả sử: 1) D là miền thuộc $\overline{\mathbb{C}}$; 2) $f_n(z)$ $n = 1, 2, \dots$ là những hàm chỉnh hình đơn điệu trong D ; 3) Dãy $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ hội tụ đều trên từng compact của miền D ; 4) $f(z) = \lim_n f_n(z) \neq \text{const}$ trong D .*

Khi đó hàm f chỉnh hình và đơn điệu trong miền D .

Chứng minh. Theo định lý Weierstrass hàm $f(z)$ chỉnh hình trong miền D . Ta cần chứng minh rằng hàm f đơn điệu trong D .

Giả sử hàm f không đơn điệu trong D . Khi đó tồn tại các điểm $z_1, z_2 \in D$, $z_1 \neq z_2$ sao cho $f(z_1) = f(z_2) = a$. Giả sử U_k , $k = 1, 2$ là những hình tròn

với tâm tại điểm z_k , $k = 1, 2$ sao cho $\overline{U_k} \subset D$, $k = 1, 2$. Có thể cho rằng $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ và $N_{f-a}(U_k) = 1$ và $N_{f-a}(\partial U_k) = 0$ với $k = 1, 2$. Ta đặt

$$\lambda = \min_{z \in \Gamma} |f(z) - a|,$$

trong đó $\Gamma = \partial U_1 \cup \partial U_2$. Rõ ràng là $\lambda > 0$. Do tính hội tụ đều của dãy hàm f_n đến hàm f trên Γ nên $\exists N \in \mathbb{N}$: $|f_n(z) - f(z)| < \lambda$, $\forall n > N$, $\forall z \in \Gamma$. Áp dụng định lý Rouché ta thu được

$$\begin{aligned} N_{f_n-a}(U_k) &= N_{(f-a)-(f-f_n)}(U_k) \\ &= N_{f-a}(U_k) = 1, \quad k = 1, 2. \end{aligned}$$

Điều đó có nghĩa là với $n > N$ hàm f_n nhận giá trị a cả ở trong U_1 lẫn trong U_2 . Kết luận này trái với giả thiết về tính đơn điệu của hàm f_n trong D . Định lý được chứng minh. \square

Ví dụ về dãy các hàm $f_n(z) = \frac{z}{n}$, $n = 1, 2, \dots$ chỉnh hình và đơn điệu trong hình tròn đơn vị chứng tỏ rằng điều kiện 4) của định lý là một điều kiện cốt yếu.

7.1.4 Tính chất địa phương của ánh xạ chỉnh hình có đạo hàm bằng 0

Giả sử $w_0 = f(z_0)$ và

$$f'(z_0) = \dots = f^{(p-1)}(z_0) = 0, \quad f^{(p)}(z_0) \neq 0, \quad p \geq 2. \quad (7.1)$$

Áp dụng phương pháp lý luận như trong chứng minh phần 1 định lý 7.1.1 dễ dàng thấy rằng mỗi giá trị w đủ gần w_0 (và $\neq w_0$) sẽ tương ứng đúng p giá trị z khác nhau. Nói cách khác: $w = f(z)$ là hàm p tờ tại lân cận của điểm z_0 .

Giả sử γ_1 và γ_2 là hai đường cong liên tục đi qua điểm $z_0 \in D$, có tiếp tuyến xác định tại z_0 với góc nghiêng đối với hướng dương của trục thực là

θ_1 và θ_2 tương ứng. Giả sử $z_1 = z_0 + h \in \gamma_1$ và $z_2 = z_0 + h_2 \in \gamma_2$. Ta đặt:

$$\begin{aligned} z_1 - z_0 &= h_1 = re^{i\theta_1}, & \theta_1 &= \theta_1(r), \\ z_2 - z_0 &= h_2 = re^{i\theta_2}, & \theta_2 &= \theta_2(r). \end{aligned}$$

Khi đó

$$\begin{aligned} \frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0} &= e^{i(\theta_2 - \theta_1)}, \\ \lim_{r \rightarrow 0} \arg \frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0} &= \lim_{r \rightarrow 0} (\theta_2 - \theta_1) = \theta, \end{aligned}$$

trong đó θ là góc giữa hai đường cong γ_1 và γ_2 với đỉnh tại z_0 . Vì f chỉnh hình tại z_0 và thỏa mãn điều kiện (7.1) nên

$$f(z) = a_0 + a_p(z - z_0)^p + a_{p+1}(z - z_0)^{p+1} + \dots \quad a_p \neq 0, p \geq 2 \quad (7.2)$$

và chuỗi vừa viết hội tụ trong lân cận nào đó của z_0 .

Giả sử qua ánh xạ $w = f(z)$ ta có:

$$\begin{aligned} w_0 &= f(z_0) = a_0, \\ \Gamma_1 &= f(\gamma_1), \quad \Gamma_2 = f(\gamma_2), \end{aligned}$$

và góc giữa Γ_1 và Γ_2 là

$$\psi = \lim_{r \rightarrow 0} \arg \frac{w_2 - w_0}{w_1 - w_0}, \quad w_1 = f(z_1), \quad w_2 = f(z_2).$$

Từ đó ta có

$$\begin{aligned} \frac{w_1 - w_0}{(z_1 - z_0)^p} &= a_p + a_{p+1}(z_1 - z_0) + \dots, \\ \frac{w_2 - w_0}{(z_2 - z_0)^p} &= a_p + a_{p+1}(z_2 - z_0) + \dots, \end{aligned}$$

và do đó

$$\begin{aligned} \psi &= \lim_{r \rightarrow 0} \arg \left\{ \frac{\frac{w_2 - w_0}{(z_2 - z_0)^p} (z_2 - z_0)^p}{\frac{w_1 - w_0}{(z_1 - z_0)^p} (z_1 - z_0)^p} \right\} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \arg \frac{(z_2 - z_0)^p}{(z_1 - z_0)^p} \\ &= p \lim_{r \rightarrow 0} \arg \frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0} = p \cdot \theta. \end{aligned}$$

Như vậy ánh xạ chỉnh hình có đạo hàm bằng 0 sẽ không bảo giác tại điểm z_0 .

7.1.5 Tính chất chung của ánh xạ bảo giác

Từ sự phân tích trên đây, ta có thể phát biểu định nghĩa ánh xạ bảo giác (2.3) dưới dạng tương đương sau đây.

Định nghĩa 7.1.2. Ánh xạ $w = f(z)$ biến miền $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ lên miền $D^* \subset \overline{\mathbb{C}}$ được gọi là *ánh xạ bảo giác* nếu:

1. Ánh xạ đó đơn trị một - một, nghĩa là hàm f đơn điệu trong D ;
2. Hàm $f(z)$ chỉnh hình trong D có thể trừ ra một điểm mà tại đó hàm f có cực điểm đơn.

Định lý 7.1.8. Giả sử f là ánh xạ bảo giác. Khi đó ánh xạ ngược f^{-1} cũng là bảo giác.

Chứng minh. Định lý này được suy trực tiếp từ định nghĩa 7.1.2 về hàm ngược. \square

Định lý 7.1.9. Qua ánh xạ bảo giác miền $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ lên miền $D^* \subset \overline{\mathbb{C}}$ góc giữa các đường cong tại mỗi điểm của miền D được bảo toàn.

Chứng minh. Ta cần chứng minh

1. Nếu hàm

$$f(z) = a_0 + \frac{a_1}{z} + \dots, \quad |z| > R$$

chỉnh hình tại điểm $z = \infty$, $a_1 \neq 0$ thì ánh xạ $w = f(z)$ bảo toàn góc giữa các đường cong tại điểm $z = \infty$.

2. Nếu hàm f có cực điểm đơn tại điểm z_0 (hữu hạn hoặc vô cùng) thì ánh xạ f cũng bảo toàn góc tại điểm ấy.

Ta chứng minh 1). Ta biểu diễn hàm $w = f(z)$ dưới dạng hợp của hai hàm

$$\zeta = \frac{1}{z},$$

$$w = g(\zeta) = f\left(\frac{1}{\zeta}\right) = a_0 + a_1\zeta + \dots$$

theo định nghĩa 22.3 ánh xạ $\zeta = \frac{1}{z}$ bảo toàn góc tại điểm $z = \infty$. Ánh xạ $w = g(\zeta)$ cũng bảo toàn góc tại điểm $\zeta = 0$ vì

$$g'(0) = a_{-1} \neq 0$$

Do đó ánh xạ hợp $w = f(z)$ bảo toàn góc tại điểm $z = \infty$.

Điều kết luận 2) được chứng minh tương tự. \square

7.1.6 Đồng cấu và tự đồng cấu

Ta xét tiếp một số khái niệm chung có liên quan tới lý thuyết ánh xạ bảo giác.

Nếu hàm f chỉnh hình đơn diệp trong miền D thì f là một phép đồng phôi biến tập mở của D lên tập mở của $f(D)$ và ánh xạ ngược f^{-1} chỉnh hình trong $f(D)$.

Định nghĩa 7.1.3. 1) Giả sử D là miền của mặt phẳng biến phức z , D^* là miền của mặt phẳng biến phức w . Phép đồng phôi

$$f : D \rightarrow D^*$$

được gọi là một *phép đẳng cấu* nếu cả ánh xạ f lẫn ánh xạ ngược f^{-1} đều chỉnh hình.

2) Phép đẳng cấu miền D lên chính nó

$$f : D \rightarrow D$$

được gọi là một *phép tự đẳng cấu*.

Dễ dàng thấy rằng nếu ta thừa nhận hợp $f_1 \circ f_2$ là phép toán-nhóm, ánh xạ đồng nhất $z \mapsto z$ là đơn vị, ánh xạ ngược $z = f^{-1}(w)$ là phần tử ngược đối với phần tử f , thì tập hợp mọi phép tự đẳng cấu của miền $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ bất kỳ sẽ lập thành một nhóm; nhóm đó được gọi là *nhóm các tự đẳng cấu* của miền D . Ta ký hiệu nhóm các tự đẳng cấu của miền D là $\text{Aut}D$.

Ta giả thiết rằng giữa hai miền D và D^* tồn tại ít nhất một phép đẳng cấu f_0 . Ta có định lý sau đây về mối liên hệ giữa các đẳng cấu và tự đẳng cấu.

Định lý 7.1.10. Nếu $f_0 : D \rightarrow D^*$ là một phép đẳng cấu cố định nào đó thì tập hợp mọi phép đẳng cấu f của miền D lên miền D^* được cho bởi công thức

$$f = \varphi \circ f_0,$$

trong đó $\varphi \in \text{Aut } D^*$ là một tự đẳng cấu tùy ý của D^* .

Chứng minh. Giả sử $\varphi \in \text{Aut } D^*$. Khi đó hiển nhiên $\varphi \circ f_0$ là ánh xạ bảo giác D lên D^* . Mặt khác, giả sử

$$f : D \rightarrow D^*$$

là một phép đẳng cấu tùy ý. Khi đó

$$\varphi = f \circ f_0^{-1}$$

sẽ là ánh xạ bảo giác D^* lên chính nó, và do đó nó là phần tử của nhóm $\text{Aut } D^*$. Từ đó rút ra

$$f = \varphi \circ f_0.$$

□

Bây giờ ta tính nhóm các tự đẳng cấu $\text{Aut } D$ khi D là miền chính tắc.

Ta lưu ý lại rằng: miền D được gọi là *miền chính tắc* nếu D là một trong ba miền sau đây:

1. mặt phẳng mở \mathbb{C} ;
2. mặt phẳng đóng $\overline{\mathbb{C}}$;
3. hình tròn đơn vị $U = \{|z| < 1\}$.

Định lý 7.1.11. Giả sử $D = \mathbb{C}$. Khi đó các phép biến đổi tuyến tính nguyên: $z \mapsto az + b$, $a \neq 0$ là những phép tự đẳng cấu duy nhất của mặt phẳng mở \mathbb{C} và lập thành nhóm

$$\text{Aut } \mathbb{C} = \{z \mapsto az + b, a \neq 0\}$$

phụ thuộc bốn tham số thực.

Chứng minh. Giả sử ánh xạ $w = f(z)$ là một phép tự đẳng cấu nào đó của \mathbb{C} . Vì hàm $f(z)$ chỉnh hình trong \mathbb{C} nên có thể có hai khả năng xảy ra:

1. điểm $z = \infty$ là điểm bất thường cốt yếu;
2. hàm f là một đa thức.

Ta sẽ chứng minh rằng khả năng thứ nhất không thể xảy ra. Thật vậy, vì ánh xạ f đơn điệu nên ảnh của tập hợp $\{|z| > 1\}$ không thể có điểm chung với ảnh của tập hợp $\{|z| < 1\}$. Ảnh của tập hợp $\{|z| < 1\}$ là một miền không trống. Do đó ảnh của tập hợp $\{|z| > 1\}$ không phủ kín mặt phẳng và vì thế theo định lý Weierstrass điểm $z = \infty$ không thể là điểm bất thường cốt yếu của $f(z)$. Do đó f là một đa thức bậc $n \geq 1$. Theo định lý Gauss, khi $n > 1$ đa thức $f(z)$ nhận mọi giá trị w đến n lần. Nhưng điều đó lại mâu thuẫn với tính đơn điệu của f . Từ đó rút ra $n = 1$, tức là $f(z)$ có dạng

$$f(z) = az + b, \quad a \neq 0.$$

□

Ta xét trường hợp $D = \overline{\mathbb{C}}$.

Định lý 7.1.12. *Giả sử miền $D = \overline{\mathbb{C}}$. Khi đó mọi phép tự đẳng cấu của $\overline{\mathbb{C}}$ đều là tự đẳng cấu phân tuyến tính. Các phép tự đẳng cấu đó lập thành một nhóm các tự đẳng cấu với sáu tham số thực.*

$$\text{Aut } \overline{\mathbb{C}} = \left\{ z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}, ad - bc \neq 0 \right\}.$$

Chứng minh. Giả sử $w = f(z)$ là một tự đẳng cấu của $\overline{\mathbb{C}}$ và $f(\infty) = \tilde{C} \neq \infty$. Khi đó

$$\tilde{w} = \frac{1}{w - \tilde{C}} = \frac{1}{f(z) - \tilde{C}}$$

biến điểm $z = \infty$ thành $\tilde{w} = \infty$ và là một hàm nguyên. Nhưng khi đó $\tilde{w} = a_0 + a_1 z$, $a_1 \neq 0$, hay là $\frac{1}{w - \tilde{C}} = a_0 + a_1 z$.

Do đó $w = \frac{az+b}{cz+d}$ trong đó $a = \tilde{C}a_1$, $b = \tilde{C}a_0 + 1$, $c = a_1$, $d = a_0$, đồng thời $ad - bc = -a_1 \neq 0$.

Nếu $f(\infty) = \infty$ thì hiển nhiên ta có $f(z) = a_0 + a_1z$. \square

Ta xét tiếp trường hợp $D = U = \{|z| < 1\}$.

Định lý 7.1.13. *Giả sử $D = U = \{|z| < 1\}$. Khi đó mọi phép tự đẳng cấu của hình tròn đơn vị đều là tự đẳng cấu phân tuyến tính.*

Chứng minh. Giả sử φ là một tự đẳng cấu tùy ý của hình tròn đơn vị. Ta ký hiệu $\varphi(0) = w_0$ và dựng phép tự đẳng cấu phân tuyến tính:

$$\lambda : w \mapsto \frac{w - w_0}{1 - \overline{w_0}w}$$

của hình tròn U biến điểm w_0 thành điểm 0. Ta xét ánh xạ $f = \lambda \circ \varphi$. Đó cũng là một tự đẳng cấu của hình tròn U và $f(0) = 0$. Vì $|f(z)| < 1$ với mọi $z \in U$ nên theo bổ đề Schwarz ta có

$$|f(z)| \leq |z|, \quad \forall z \in U. \quad (7.3)$$

Nhưng hiển nhiên ánh xạ ngược $z = f^{-1}(w)$ cũng thỏa mãn bổ đề Schwarz, nên $|f^{-1}(w)| \leq |w| \quad \forall w \in U$.

Đặt $w = f(z)$, ta có:

$$|z| \leq |f(z)|, \quad \forall z \in U. \quad (7.4)$$

Từ (7.3) và (7.4) ta rút ra

$$|f(z)| \equiv |z|, \quad \forall z \in U$$

và cũng theo bổ đề Schwarz ta có $f(z) \equiv e^{i\alpha}z$. Nhưng khi đó $\varphi = \lambda^{-1} \circ f = \lambda^{-1}(e^{i\alpha}z)$ là ánh xạ phân tuyến tính. Như vậy:

$$\text{Aut } U = \left\{ z \mapsto e^{i\alpha} \frac{z - a}{1 - \overline{a}z}, |a| < 1, \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

\square

7.1.7 Điều kiện cần để tồn tại đẳng cấu

Giả sử cho hai miền D và $D^* \subset \mathbb{C}$. Hãy tìm mọi đẳng cấu (nếu chúng tồn tại) biến miền D lên miền D^* .

Rõ ràng là với dạng tổng quát trên đây lời giải của bài toán cơ bản của lý thuyết ánh xạ bảo giác sẽ không tồn tại. Do đó vấn đề đầu tiên nảy ra khi khảo sát bài toán cơ bản đó là vấn đề khả năng ánh xạ bảo giác miền cho trước.

Sau đây ta sẽ chỉ ra một số điều kiện cần để bài toán trên có lời giải. Vì mọi đẳng cấu đều là những phép đồng phôi nên điều kiện cần để tồn tại đẳng cấu miền D lên miền D^* là tồn tại một ánh xạ đồng phôi nào đó giữa các miền.

Do đó điều kiện cần đầu tiên là: các miền D và D^* phải đồng phôi với nhau.

Chẳng hạn, nếu miền D là đơn liên thì điều kiện cần là miền D^* phải đơn liên (tính đơn liên là một bất biến tôpô!).

Thế nhưng điều kiện cần này lại không phải là điều kiện đủ. Điều đó được suy ra từ định lý sau đây.

Định lý 7.1.14. *Mặt phẳng \mathbb{C} và hình tròn mở $U = \{|z| < 1\}$ không đẳng cấu với nhau.*

Chứng minh. Giả thiết rằng tồn tại đẳng cấu $f : \mathbb{C} \rightarrow U$. Khi đó f chỉnh hình và bị chặn trong \mathbb{C} . Theo định lý Liouville $f \equiv \text{const}$. Điều đó trái với giả thiết f là đẳng cấu. \square

Hệ quả 7.1.3. $\overline{\mathbb{C}}$ và $\overline{\mathbb{C}} \setminus \{z_0\}$, $z_0 \neq \infty$ đều không đẳng cấu với hình tròn mở U .

Chứng minh. Vì $z_0 \neq \infty$ nên bằng ánh xạ $\zeta = \frac{1}{z - z_0}$ ta đưa z_0 về ∞ và áp dụng định lý vừa chứng minh. \square

Tuy nhiên mặt phẳng \mathbb{C} và hình tròn đơn vị U là đồng phôi với nhau.

Thật vậy hàm

$$W(z) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \frac{z}{|z|} \operatorname{arctg}|z|, & \text{khi } z \neq 0, \\ 0, & \text{khi } z = 0 \end{cases}$$

là một trong số ánh xạ đồng phôi \mathbb{C} lên U .

Nhận xét 7.1.2. Vì tính đồng phôi là điều kiện cần để tồn tại đẳng cấu giữa hai miền cho trước D và $D^* \subset \mathbb{C}$ nên từ đó suy ra rằng: *miền đa liên không đẳng cấu với miền đơn liên.*

Như vậy, nếu bây giờ đặt vấn đề về sự tồn tại đẳng cấu biến các miền D khác nhau lên miền đơn liên cho trước D^* thì ta cần phải hạn chế xét các miền đơn liên.

Trong trường hợp này *điều kiện cần để tồn tại đẳng cấu là:*

1. *miền D phải đơn liên;*
2. *miền $D \neq \mathbb{C}$.*

Điều kiện thứ nhất là điều kiện cần vì miền D đồng phôi với miền đơn liên D^* . Điều kiện $D \neq \mathbb{C}$ là điều kiện cần theo định lý 7.1.14 đã chứng minh trên đây.

Ta lưu ý thêm rằng mặt phẳng \mathbb{C} chỉ đẳng cấu với $\overline{\mathbb{C}} \setminus \{z_0\}$, $z_0 \neq \infty$ (hoặc đẳng cấu với bản thân nó). Điều đó được suy ra từ chỗ là mọi hàm chỉnh hình đơn điệu trong \mathbb{C} đều là phân tuyến tính (xem định lý 7.1.11 và hệ quả 7.1.3).

Toàn bộ sự khảo sát trong mục tiếp theo của chương này là dành để trình bày những điều kiện đảm bảo cho sự tồn tại và duy nhất của nghiệm bài toán cơ bản của lý thuyết ánh xạ bảo giác các miền đơn liên.

Sau khi loại trừ hai trường hợp đã nói trong định lý 7.1.14 và hệ quả của nó ta sẽ giả thiết rằng biên của miền được ánh xạ D có ít nhất là hai điểm khác nhau và do tính đơn liên của D nó có một tập hợp biên liên thông nối hai điểm ấy.

7.1.8 Điều kiện chuẩn

Giả sử lời giải đối với bài toán vừa nêu là tồn tại. Bây giờ ta chuyển sang xét những điều kiện xác định lời giải đó một cách duy nhất. Những điều kiện đó là cần thiết vì nếu hàm $f(z)$ ánh xạ miền đơn liên D lên hình tròn đơn vị thì theo định lý 9.9 ánh xạ thu được từ $f(z)$ bằng phép biến đổi phân tuyến tính dạng

$$e^{i\theta} \frac{f(z) - w_0}{1 - \overline{w_0}f(z)}, \quad \theta \in \mathbb{R}$$

(Phép tự đẳng cấu của hình tròn đơn vị) cũng là ánh xạ bảo giác miền D lên hình tròn đơn vị đó. Nói một cách khác: nếu ta chứng minh được rằng tồn tại một hàm $f(z)$ ánh xạ miền D lên hình tròn đơn vị thì sẽ tồn tại vô số hàm như vậy thực hiện ánh xạ đó. Do đó để ánh xạ được xét duy nhất, ngoài các điều kiện được nêu trong tiết 7.1.7, người ta còn đòi hỏi một trong ba điều kiện bổ sung (tương đương với nhau) sau đây (các điều kiện này sẽ *chuẩn hóa* ánh xạ bảo giác được xét!)

(I) *Điểm trong z_0 cho trước tùy ý của miền D được ánh xạ thành điểm cho trước w_0 của miền D^* và một hướng cho trước tại z_0 chuyển thành hướng cho trước tại w_0 :*

$$f(z_0) = w_0, \quad \arg f'(z_0) = \theta, \quad \theta \in \mathbb{R}. \quad (7.5)$$

Hệ thức (7.5) chứng tỏ rằng ánh xạ bảo giác hai miền cho trước D và D^* phụ thuộc vào ba tham số thực và về mặt hình học nó chứng tỏ rằng: qua ánh xạ $w = f(z)$, điểm z_0 cho trước biến thành điểm w_0 cho trước, các tiếp tuyến với mọi đường cong đi qua điểm z_0 sẽ quay một góc bằng θ khi chuyển qua các đường cong ảnh đi qua điểm w_0 .

Ta cũng nhận xét rằng, bằng các phép đổi biến phân tuyến tính điều kiện chuẩn (7.5) có thể viết dưới dạng

$$f(z_0) = 0, \quad f'(z_0) > 0. \quad (7.6)$$

(II) *Hai điểm cho trước tùy ý: điểm z_0 ở trong, điểm z_1 nằm trên biên của miền D , được ánh xạ thành các điểm cho trước tương ứng w_0 và w_1 ,*

trong đó w_0 là điểm trong còn w_1 là điểm biên:

$$f(z_0) = w_0, \quad f(z_1) = w_1. \quad (7.7)$$

Phương trình thứ nhất trong (7.7) sẽ đưa đến hai phương trình thực vì rằng vị trí của điểm trên biên được xác định bằng một tham số thực, chẳng hạn, bởi khoảng cách (dọc theo biên) từ một điểm biên cố định nào đó.

(III) Ba điểm biên cho trước tùy ý z_1, z_2 và z_3 của miền D được ánh xạ thành ba điểm biên cho trước tùy ý w_1, w_2 và w_3 tương ứng của miền D^* .

Trong mục sau ta sẽ chứng tỏ rằng tập hợp vô số các ánh xạ bảo giác biến miền D lên hình tròn đơn vị chỉ tồn tại một ánh xạ thỏa mãn một trong ba điều kiện chuẩn trên đây, tức là chỉ tồn tại một ánh xạ bảo giác được chuẩn hóa.

Ví dụ 1. Ánh xạ nửa mặt phẳng trên $\{\operatorname{Im} z > 0\}$ lên hình tròn đơn vị $\{|w| < 1\}$ sao cho $w(i) = 0$, $\arg w'(i) = -\frac{\pi}{2}$.

Giải. Dạng tổng quát của hàm ánh xạ nửa mặt phẳng trên lên hình tròn đơn vị sao cho $w(i) = 0$ có dạng

$$w = e^{i\alpha} \frac{z - i}{z + i}.$$

Từ đó

$$\begin{aligned} w'(z) &= e^{i\alpha} \frac{2i}{(z + i)^2} \Rightarrow w'(i) = -\frac{1}{2}ie^{i\alpha} \\ &\Rightarrow \arg w'(i) = \alpha - \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Theo điều kiện của bài toán $\arg w'(i) = -\pi/2$ nên $\alpha = 0$. Như vậy, ánh xạ cần tìm có dạng

$$w = \frac{z - i}{z + i}.$$

Ví dụ 2. Ánh xạ phần ngoài hình tròn $\{|z - (1 + i)| < 1\}$ lên nửa mặt phẳng $\{\operatorname{Im} w > 0\}$ sao cho $w(0) = i$, $w(1) = 0$.

Giải. Ta cần chuyển đường tròn $\{|z - (1 + i)| = 1\}$ thành trục thực của mặt phẳng w . Để làm việc đó ta thực hiện ánh xạ biến điểm $z = i$ thành $z_1 = \infty$ và $z = 1$ thành $z_1 = 0$. Chẳng hạn ta có

$$z_1 = k \frac{z - 1}{z - i},$$

trong đó k chưa được xác định. Nhưng qua điểm $z_1 = 0$ và $z_1 = \infty$ ta có vô số đường thẳng đi qua và ta cần thu được trục thực. Để có được điều đó, góc quay tại điểm $z = 1$ qua ánh xạ z_1 phải bằng π , tức là

$$\arg z_1'(z) \Big|_{z=1} = \pi.$$

Từ đó

$$\arg k + \arg \frac{1 - i}{(z - i)^2} \Big|_{z=1} = \pi \Rightarrow \arg k = \frac{3\pi}{4}.$$

Để xác định k , ta không có một điều kiện nào cho trước nên để đơn giản ta lấy $k = -1 + i$, và từ đó

$$z_1 = (-1 + i) \frac{z - 1}{z - i}.$$

Qua ánh xạ này điểm $z = 0 \mapsto z_1 = 1 + i$, $z = 1 \mapsto z_1 = 0$. Do đó ánh xạ thu được chưa thỏa mãn các điều kiện đã cho.

Bây giờ ta cần ánh xạ nửa mặt phẳng $\{\operatorname{Im} z_1 > 0\}$ lên nửa mặt phẳng $\{\operatorname{Im} w > 0\}$ sao cho

$$\begin{aligned} z_1 = 1 + i & \mapsto w = i, \\ z_1 = 0 & \mapsto w = 0. \end{aligned}$$

Vì ánh xạ biến nửa mặt phẳng trên lên nửa mặt phẳng trên có dạng

$$w = \frac{az_1 + b}{az_1 + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

nên với hai cặp điểm tương ứng ở trên ta có

$$i = \frac{a(1 + i) + b}{c(1 + i) + d}, \quad 0 = \frac{b}{d} \Rightarrow b = 0, \quad c = a, \quad d = 2a.$$

Do đó

$$w = \frac{-z_1}{z_1 - 2} = i \frac{z - 1}{(1 - 2i)z - 1}.$$

Ví dụ 3. Tìm ánh xạ biến băng $D = \{z \in \overline{\mathbb{C}} : -\pi/4 < \operatorname{Re} z < \pi/4\}$ lên hình tròn đơn vị $U = \{|w| < 1\}$ sao cho ba điểm biên sau đây tương ứng $f(\pm\pi/4) = \pm 1$, $f(i\infty) = i$ ($i\infty$ là ký hiệu điểm vô cùng phía trên của băng).

Bằng các ánh xạ trung gian

a) $z_1 = 2iz$, b) $z_2 = e^{z_1}$

ta biến băng D đã cho thành nửa mặt phẳng bên phải $\operatorname{Re} z_2 > 0$. Qua các ánh xạ của các điểm $z = \frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, i\infty$ sẽ là các điểm $z_2 = i, -i, 0$ tương ứng. Bây giờ ta cần ánh xạ nửa mặt phẳng $\operatorname{Re} z_2 > 0$ lên hình tròn đơn vị sao cho các điểm $z_2 = i, -i, 0$ chuyển thành các điểm $w = 1, -1, i$ tương ứng. Hàm ánh xạ thỏa mãn điều kiện vừa nêu sẽ được rút ra từ công thức (9.3) (định lý 9.6):

$$\begin{aligned} \frac{w-1}{w-i}(1+i) &= \frac{z_2-i}{z_2} \\ \Rightarrow w &= \frac{1}{i} \frac{z_2-1}{z_2+1} \\ \Rightarrow w &= \frac{1}{i} \frac{e^{2iz}-1}{e^{2iz}+1} = \operatorname{tg} z. \end{aligned}$$

7.2 Định lý cơ bản của lý thuyết ánh xạ bảo giác

Trong mục này ta sẽ giải quyết vấn đề có tính chất nguyên tắc là sự tồn tại hàm ánh xạ biến miền đơn liên D cho trước trong mặt phẳng phức z lên miền đơn liên D^* cho trước trong mặt phẳng w . Cụ thể ta sẽ chứng minh rằng: *đối với hai miền đơn liên bất kỳ D và $D^* \subset \overline{\mathbb{C}}$ với biên có ít nhất là hai điểm khác nhau luôn luôn tồn tại ánh xạ bảo giác biến miền này lên miền kia.*

Đó là nội dung của định lý cơ bản trong lý thuyết ánh xạ bảo giác - định lý Riemann. Định lý này được Riemann phát biểu đầu tiên trong luận án tiến sĩ của mình “Cơ sở của lý thuyết tổng quát về hàm biến phức” năm 1851. Phép chứng minh mà ta sẽ trình bày là của Feijer và Riesz.

7.2.1 Tập hợp bị chặn trong $\mathcal{H}(D)$

Giả sử D là miền thuộc \mathbb{C} và giả sử trong D cho tập hợp các hàm chỉnh hình $M(D) = \{f(z)\}$. Đặc biệt là: $M(D)$ có thể là dãy hàm

$$\left\{f_n(z)\right\}_{n=1}^{\infty}.$$

Định nghĩa 7.2.1. Tập hợp $M(D)$ được gọi là bị chặn đều trên từng compắc $K \subset D$ nếu $\forall K \subset D, \exists \sigma(K) > 0$:

$$|f(z)| \leq \sigma(K), \quad \forall z \in K, \quad \forall f \in M(D).$$

Tập hợp bị chặn đều trên D cũng sẽ gọi là họ bị chặn.

Khái niệm tập hợp bị chặn đều trên từng compắc của miền D là khái niệm rộng hơn so với khái niệm bị chặn trong miền D . Chẳng hạn, các hàm $\frac{\cos \theta}{1-z}$, $\theta \in \mathbb{R}$ không lập thành tập hợp bị chặn đều trong hình tròn đơn vị $\{|z| < 1\}$ nhưng lại là tập hợp bị chặn đều trên từng compắc của hình tròn ấy.

Định lý 7.2.1. Ánh xạ $f \mapsto f'$ không gian $\mathcal{H}(D)$ vào chính nó biến tập hợp bị chặn đều thành tập hợp bị chặn đều.

Chứng minh. Giả sử $S = \{|z - z_0| < r\}$ là hình tròn bất kỳ nằm trọn trong D và $V = \{|z - z_0| < r', r' > r\}$ cũng là hình tròn nằm trọn trong D . Đối với $f \in M(D)$ bất kỳ ta có

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial V} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta, \quad z \in V.$$

Bây giờ giả sử $z \in S$. Khi đó với mọi $\zeta \in \partial V$ ta có

$$|\zeta - z| > r' - r.$$

Và từ tính chất bị chặn của $M(D)$ ta có

$$|f'(z)| \leq \frac{r'}{(r' - r)^2} \sigma(V) = \sigma_1(S)$$

và do đó $|f'(z)|$ bị chặn trong các hình tròn $S \subset D$.

Mỗi tập hợp compact $K \subset D$ bất kỳ đều có thể phủ bởi các hình tròn S , nằm trọn trong D . Do đó theo định lý Heine-Borel ta có thể chọn phủ con hữu hạn $\{S_\nu\}_{\nu=1}^k$ phủ K . Giả sử

$$\sigma_1(K) = \max_{\nu} \{\sigma_1(S_\nu)\}.$$

Khi đó với mọi $z \in K$ và mọi $f \in M(D)$ ta sẽ có

$$|f'(z)| \leq \sigma_1(K)$$

và định lý được chứng minh. \square

7.2.2 Tập hợp liên tục đồng bậc

Định nghĩa 7.2.2. Tập hợp $M(D)$ các hàm được gọi là *tập hợp liên tục đồng bậc* trên từng compact $K \subset D$ nếu

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0, \forall K \subset D, \exists \delta(\varepsilon, K) : \forall z', z'' \in K (|z' - z''| < \delta) \\ \Rightarrow |f(z') - f(z'')| < \varepsilon, \quad \forall f \in M(D). \end{aligned}$$

Ta có

Định lý 7.2.2. Nếu $M(D)$ là tập hợp bị chặn đều trên từng compact thì nó là liên tục đồng bậc trên từng compact $K \subset D$.

Chứng minh. Giả sử compact $K \subset D$ và $4d, d > 0$ là khoảng cách giữa K và biên ∂D của miền D . Tập hợp các điểm mà khoảng cách từ đó đến K không vượt quá $2d$ được ký hiệu là B . Vì $B \subset D$ và B là tập hợp đóng nên do tính bị chặn đều của $M(D)$ tìm được số $M = M(B) > 0$ sao cho trên B ta có $|f| \leq M, \forall f \in M(D)$.

Ta sẽ chứng minh rằng với $\varepsilon > 0$ bất kỳ và với cặp điểm $z_1, z_2 \in K$ bất kỳ mà $|z_1 - z_2| < \delta, \delta = \min \left\{ d, \frac{d}{M}\varepsilon \right\}$ ta sẽ có

$$|f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon.$$

Thật vậy, theo công thức Cauchy áp dụng cho $f(z)$ trong hình tròn $Q = \{z : |z - z_1| < 2d\} \subset B$ (kể cả biên) ta có

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial Q} \frac{f(t)}{t - z} dt.$$

Do đó

$$\begin{aligned} |f(z_1) - f(z_2)| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial Q} f(t) \frac{z_1 - z_2}{(t - z_1)(t - z_2)} dt \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} M \frac{|z_1 - z_2|}{2d \cdot d} 2\pi \cdot 2d \\ &= \frac{M}{d} |z_1 - z_2| < \frac{M}{d} \delta \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Như vậy $M(D)$ là tập hợp liên tục đồng bậc. □

7.2.3 Nguyên lý compact

Định nghĩa 7.2.3. 1) Họ hàm $M(D) \subset \mathcal{H}(D)$ được gọi là *họ compact trong miền D* nếu từ mỗi dãy hàm $\{f_n(z)\} \subset M(D)$ đều có thể chọn dãy con f_{n_k} hội tụ đều trên từng compact $K \subset D$.

2. Họ compact các hàm $M(D)$ được gọi là *họ compact trong nó* nếu hàm giới hạn của mỗi dãy $f_n \subset M(D)$ hội tụ đều trên từng compact $K \subset D$ đều thuộc $M(D)$.

Ví dụ 1. Giả sử $U = \{|z| < 1\}$. Tập hợp hàm $M(U) = \{\alpha z : 0 < \alpha \leq 1\}$ là tập hợp compact nhưng không compact trong nó (dãy $\left\{\frac{z}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ hội tụ đều trên từng compact của U đến hàm $f \equiv 0$ không thuộc $M(U)$).

Bổ đề 7.2.1. *Giả sử: 1) $f_n(z)$, $n = 1, 2, \dots$; $f_n \in \mathcal{H}(D)$ là dãy bị chặn đều trên từng compact; 2) dãy f_n hội tụ trên tập hợp $E \subset D$ nào đó trù mật khắp nơi trong D . Khi đó dãy f_n hội tụ đều trên từng compact $K \subset D$.*

Chứng minh. Ta cố định $\varepsilon > 0$ và tập hợp $K \subset D$. Vì dãy f_n bị chặn đều nên theo định lý vừa chứng minh trong tiết trước nó là dãy liên tục đồng bậc. Bằng cách sử dụng tính liên tục đồng bậc và bằng cách chọn phép chia D thành các hình vuông với các cạnh song song với các trục tọa độ trong mặt phẳng z bé đến mức sao cho với các điểm z' và $z'' (\in K)$ bất kỳ thuộc cùng một hình vuông và với $f \in \{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ bất kỳ ta có

$$|f(z') - f(z'')| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (7.8)$$

Tập hợp K được phủ bởi một số hữu hạn các hình vuông Q_p , $p = 1, 2, \dots, P$. Vì E trù mật khắp nơi nên trong mỗi hình vuông Q_p tìm được điểm $z_p \in E$. Vì f_n hội tụ trên E nên $\exists N \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|f_m(z_p) - f_n(z_p)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad (7.9)$$

$$\forall m, n > N, z_p, p = 1, 2, \dots, P.$$

Bây giờ giả sử z là điểm tùy ý của K . Khi đó tìm được điểm z_p nằm trong cùng một hình vuông với z và $\forall m, n \in \mathbb{N}$ từ (7.9) ta có

$$\begin{aligned} |f_m(z) - f_n(z)| &\leq |f_m(z) - f_m(z_p)| + |f_m(z_p) - f_n(z_p)| \\ &\quad + |f_n(z_p) - f_n(z)| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Từ đó theo tiêu chuẩn hội tụ Cauchy ta kết luận rằng dãy $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ hội tụ đối với mọi $z \in K$ và sự hội tụ đó là đều trên K . Vì K là cố định tùy ý nên dãy đã cho hội tụ đều trên từng compact $K \subset D$. \square

Bây giờ ta chứng minh định lý chủ yếu của tiết này

Định lý Montel (nguyên lý compact). *Giả sử: 1) D là miền của \mathbb{C} ; 2) $M(D)$ là họ hàm chỉnh hình trong miền D . Khi đó hai điều kiện sau đây là tương đương với nhau.*

(I) *Họ $M(D)$ là compact.*

(II) *Họ $M(D)$ bị chặn đều trên từng compact.*

Chứng minh. 1. Ta chứng minh rằng từ các điều kiện 1) - 2) và (I) suy ra (II). Giả sử ngược lại. Khi đó trong D tồn tại compact $K \subset D$ mà trên đó môđun của các hàm thuộc $M(D)$ nhận giá trị lớn bao nhiêu tùy ý. Do đó: $\forall n \in \mathbb{N}, \exists f_n \in M(D) : |f_n(z_n)| > n$ tại điểm $z_n \in K$ nào đó. Vì $M(D)$ là compact nên từ dãy $\{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ có thể chọn dãy con $\{f_{n_k}(z)\}_{k=1}^{\infty}$ hội tụ đều trên từng compact mà đặc biệt là hội tụ đều trên K đến hàm chỉnh hình f nào đó. Nghĩa là đối với $\varepsilon = 1, \exists N = N(K) : \forall k > N, \forall z \in K \Rightarrow |f_{n_k}(z) - f(z)| < 1$.

Do đó

$$|f_{n_k}(z)| \leq 1 + \max_{z \in K} |f(z)| = 1 + \mathcal{L}, \quad \mathcal{L} = \max_{z \in K} |f|.$$

Nhưng hệ thức này lại mâu thuẫn với điều là $f_{n_k}(z_{n_k}) \rightarrow \infty$ khi $k \rightarrow \infty$. Phần thứ nhất của định lý được chứng minh.

2. Bây giờ ta chứng minh rằng từ 1) - 2) và (II) suy ra (I). Để chứng minh (I) ta cần chứng minh rằng mọi dãy hàm $f_n \in M(D)$ đều chứa dãy con hội tụ đều trên từng compact $K \subset D$. Nhưng theo bổ đề đã chứng minh trên, ta chỉ cần chứng minh rằng từ dãy $f_n \in M(D)$ bất kỳ có thể chọn dãy con hội tụ tại mọi điểm của tập hợp $E \subset D$ nào đó trù mật khắp nơi là đủ.

Ta lấy tập hợp E là tập hợp các điểm $z = x + iy \in D$, trong đó x và y đều là hữu tỷ. Tập hợp E trù mật khắp nơi trong D . Mặt khác E là tập hợp đếm được. Do đó ta có thể sắp xếp và đánh số nó thành dãy $\{\alpha_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$:

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots$$

Dãy

$$f_1(\alpha_1), f_2(\alpha_1), \dots, f_n(\alpha_1), \dots \quad (7.10)$$

lập thành tập hợp điểm bị chặn. Do đó từ (7.10) có thể chọn dãy con

$$f_{n_1}^1(\alpha_1), f_{n_2}^1(\alpha_1), \dots, f_{n_p}^1(\alpha_1), \dots$$

hội tụ đến giới hạn hoàn toàn xác định. Như vậy từ dãy hàm $f_n(z)$ có thể chọn dãy con

$$f_{n_1}^1(z), f_{n_2}^1(z), \dots, f_{n_p}^1(z), \dots \quad (7.11)$$

hội tụ tại điểm $z = \alpha_1$.

Dãy

$$f_{n_1}^1(\alpha_2), f_{n_2}^1(\alpha_2), \dots, f_{n_p}^1(\alpha_2), \dots$$

thỏa mãn mọi điều kiện như dãy (7.10), do đó có thể chọn từ dãy đó một dãy con

$$f_{n_1}^2(\alpha_2), f_{n_2}^2(\alpha_2), \dots, f_{n_p}^2(\alpha_2), \dots$$

hội tụ đến giới hạn hữu hạn hoàn toàn xác định. Như vậy dãy hàm

$$f_{n_1}^2(z), f_{n_2}^2(z), \dots, f_{n_p}^2(z), \dots$$

hội tụ khi $z = \alpha_2$. Và vì các số hạng của dãy này cũng là của dãy (7.11) nên nó hội tụ cả khi $z = \alpha_1$.

Tiếp tục quá trình này ta thu được tập hợp các dãy

$$\left. \begin{array}{l} f_{n_1}^1(z), f_{n_2}^1(z), \dots, f_{n_p}^1(z), \dots, \\ f_{n_1}^2(z), f_{n_2}^2(z), \dots, f_{n_p}^2(z), \dots, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ f_{n_1}^q(z), f_{n_2}^q(z), \dots, f_{n_p}^q(z), \dots, \end{array} \right\} \quad (7.12)$$

trong đó mỗi dãy của (7.2.5) là dãy con của dãy đứng trước nó và dãy với số hiệu q hội tụ tại mỗi điểm

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q.$$

Bằng cách áp dụng phương pháp đường chéo của Cantor, ta có thể chọn dãy đường chéo

$$f_{n_1}^1(z), f_{n_2}^2(z), \dots, f_{n_p}^p(z), \dots \quad (7.13)$$

Dãy này hội tụ tại mọi điểm của tập hợp E vì theo cách xây dựng mọi số hạng của dãy (7.13), bắt đầu từ số hạng nào đó đều được chọn từ dãy (7.2.5) với số hiệu q (q là số cho trước tùy ý).

Như vậy theo bổ đề đã chứng minh, dãy (7.13) hội tụ đều trên từng compact. \square

Nhận xét 7.2.1. Nếu miền $D \ni \infty$ thì dãy (7.13) hội tụ đều trên mọi tập đóng thuộc D .

Thật vậy, ta dựng đường tròn $\gamma(R) = \{z \in \mathbb{C} : |z| = R\}$ với bán kính đủ lớn sao cho $\gamma(R) \subset D$. Giả sử \mathcal{K}' là tập hợp đóng tùy ý của D và

$$\mathcal{K} = \{z \in \mathcal{K}' : |z| \leq R\} \cup \gamma(R).$$

Theo định lý Montel, dãy (7.13) hội tụ đều trên \mathcal{K} và do đó hội tụ đều trên $\gamma(R)$. Bằng cách áp dụng nguyên lý môđun cực đại, ta có thể kết luận rằng dãy (7.13) hội tụ đều trong $\overline{U(R)} = \{z \in \overline{\mathbb{C}} : |z| \geq R\}$. Như vậy dãy (7.13) hội tụ đều trên $K \cup \overline{U(R)} \supset \mathcal{K}'$ và do đó trên mọi tập hợp đóng của D .

7.2.4 Phiếm hàm liên tục

Định nghĩa 7.2.4. 1. Giả sử cho họ hàm $\{f\}$ xác định trong miền D . Khi đó ánh xạ

$$I(f) : \{f\} \rightarrow \mathbb{C}$$

được gọi là *một phiếm hàm* trên f .

2. Phiếm hàm $I(f)$ được gọi là *liên tục tại điểm* f_0 nếu $\forall f_n \in \{f\}$ hội tụ đều đến $f_0 \in \{f\}$ trên từng compact $K \subset D$, ta có

$$\lim_n I(f_n) = I(f_0).$$

3. Phiếm hàm $I(f)$ được gọi là *liên tục trên họ* $\{f\}$ nếu $I(f)$ liên tục tại mọi điểm $f \in \{f\}$.

Ví dụ 2. Ta xét họ hàm chỉnh hình $\mathcal{H}(D)$ và điểm a tùy ý của miền D . Khi đó

$$c_p(f) = \frac{f^{(p)}(a)}{p!}$$

là hệ số thứ p trong khai triển Taylor của hàm f tại lân cận điểm a . Đó là phiếm hàm trên họ $\mathcal{H}(D)$. Phiếm hàm $c_p(f)$ là phiếm hàm liên tục.

Thật vậy nếu $f_n \rightarrow f_0$ là đều trên từng compact $K \subset D$ thì lấy đường tròn $\gamma(r) = \{|z - a| = r\} \subset D$ làm K , với $\varepsilon > 0$, $\exists N : |f_n(z) - f_0(z)| < \varepsilon$, $\forall n > N, \forall z \in \gamma(r)$. Khi đó, áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$|c_p(f_n) - c_p(f_0)| < \frac{\varepsilon}{r^p} \quad \forall n > N.$$

Điều đó chứng tỏ rằng $c_p(f)$ liên tục.

Ta có

Định lý 7.2.3. Mọi phiếm hàm liên tục trên họ compact trong nó $\{f\}$ đều bị chặn và đạt cận trên của nó, nghĩa là

$$\exists f_0 \in \{f\} : |I(f_0)| \geq |I(f)|, \quad \forall f \in \{f\}.$$

Chứng minh. Giả sử $A = \sup_{f \in \{f\}} |I(f)|$, đó là số hữu hạn và cũng có thể bằng ∞ . Theo định nghĩa cận trên, tìm được dãy $f_n \in \{f\}$, $n = 1, 2, \dots$ sao cho $|I(f_n)| \rightarrow A$.

Vì $\{f\}$ là compact trong nó nên tồn tại dãy con f_n hội tụ đều trên từng compact $K \subset D$ đến hàm $f_0 \in \{f\}$ nào đó. Vì $I(f)$ liên tục nên

$$|I(f_0)| = \lim_n |I(f_n)| = A.$$

Từ đó ta kết luận được, thứ nhất là $A < \infty$, và thứ hai $|I(f_0)| \geq |I(f)|$, $\forall f \in \{f\}$. \square

7.2.5 Đơn giản hóa cách đặt bài toán Riemann

Như đã nói ở trên, sự khảo sát của ta chủ yếu là liên quan đến các miền đơn liên (và đơn điệu!). Do đó bài toán cơ bản được đặt ra có thể đơn giản hóa mà không làm mất tính tổng quát của nó.

Ta có thể cho rằng *một trong hai miền được xét là hình tròn*, nghĩa là đối với mọi miền đơn liên D với biên có ít nhất là hai điểm luôn luôn tồn tại ánh xạ bảo giác lên hình tròn $\{|w| < R\}$. Thật vậy, nếu

$$\begin{aligned} w &= f(z) : D \rightarrow U = \{|w| < R\} \\ w' &= f(z') : D^* \rightarrow U^* = \{|w'| < R'\} \end{aligned}$$

thì hàm $w' = \frac{R'}{R}w$ sẽ ánh xạ bảo giác U lên U^* và hàm $z' = F^{-1}(w')$ ánh xạ $\{|w'| < R'\}$ lên D^* . Do đó $z' = F^{-1}\left(\frac{R'}{R}f(z)\right)$ ánh xạ D lên D^* . Vì vậy định lý Riemann có thể phát biểu dưới dạng:

Mọi miền đơn liên D trong mặt phẳng \mathbb{C} ($D \neq \mathbb{C}$) với biên có ít nhất là hai điểm đều đẳng cấu với hình tròn mở $\{|w| < 1\}$.

Tiếp theo, miền D trong phát biểu của định lý vừa nêu có thể giả thiết là miền bị chặn. Điều đó dựa trên cơ sở định lý sau đây.

Định lý 7.2.4. *Giả sử D là miền đơn liên với biên có ít nhất là hai điểm trong mặt phẳng \mathbb{C} , $D \neq \mathbb{C}$. Khi đó tồn tại đẳng cấu biến miền D lên miền bị chặn nào đó của mặt phẳng phức \mathbb{C} .*

Chứng minh. 1. Nếu miền D bị chặn thì phép đẳng cấu cần tìm có thể lấy là $f(z) = z$.

2. Giả sử miền D không bị chặn. Ta cần phân biệt hai trường hợp

a) Miền D có điểm ngoài a , tức là miền D không chứa các điểm của hình tròn $S(a, r)$ với tâm a và bán kính r . Trong trường hợp này hàm

$$w = f(z) = \frac{1}{z - a}$$

ánh xạ miền D lên miền D' nằm trong hình tròn $\left\{|w| < \frac{1}{r}\right\}$, tức là D' là miền bị chặn. Đó là đẳng cấu muốn tìm.

b) Miền D không có một điểm ngoài nào cả, tức là phần bù của miền D đối với cả mặt phẳng không chứa một hình tròn nào. Theo giả thiết biên của miền D có ít nhất là hai điểm khác nhau α và β . Do tính đơn liên miền D sẽ có một tập hợp biên liên thông nối α với β . Ta xét hàm

$$w = F(z) = \sqrt{\frac{z - \alpha}{z - \beta}}.$$

Hàm này thác triển được trong miền đơn liên D theo mọi tuyến, và do đó theo định lý Monodromic có thể tách nhánh đơn trị $F(z)$ (vì biểu thức dưới căn không triệt tiêu cũng như không bằng ∞ trong D).

Hàm $F(z)$ là đơn diệp trong D . Thật vậy từ hệ thức

$$\frac{z_1 - \alpha}{z_1 - \beta} = \frac{z_2 - \alpha}{z_2 - \beta}$$

và tính đơn diệp của ánh xạ phân tuyến tính suy ra rằng $z_1 = z_2$. Do đó F đơn diệp và nó ánh xạ đơn diệp miền D lên miền D^* .

Miền D^* có tính chất là: nếu điểm $w_0 \in D^*$ thì điểm $(-w_0)$ là điểm ngoài của D^* vì cặp điểm $w_0, -w_0$ tùy ý luôn luôn tương ứng với một điểm z . Như vậy miền D^* có điểm ngoài. Tiếp theo ta áp dụng lý luận trong phần a) cho miền D^* . Định lý được chứng minh. \square

Như vậy, về sau ta sẽ cho rằng miền D trong định lý Riemann là miền bị chặn. Hơn thế nữa, trong trường hợp cần thiết bằng phép tịnh tiến và đồng dạng ta có thể giả thiết miền $f(D)$ nằm trong hình tròn đơn vị và hàm ánh

xạ $w = f(z)$ thỏa mãn điều kiện

$$f(a) = 0, \quad f'(a) > 0, \quad a \in D.$$

Do đó để chứng minh định lý cơ bản của lý thuyết ánh xạ bảo giác ta chỉ cần chứng minh rằng:

Mọi miền đơn liên bị chặn D đều đẳng cấu với hình tròn mở $\{|w| < 1\}$.

7.2.6 Định lý Riemann

Tư tưởng chủ đạo của phép chứng minh định lý Riemann là như sau:

1. Đầu tiên ta xét họ $S(f; D)$ các hàm chỉnh hình và đơn điệu trong D sao cho

- a) $|f(z)| \leq 1 \quad \forall f \in S(f; D), \forall z \in D;$
- b) $f(a) = 0, \quad f'(a) > 0.$

do tính đơn điệu của f trong D nên $f'(z) \neq 0 \quad \forall z \in D$. Hiển nhiên $S(f; D) \neq \emptyset$. Thật vậy, vì D bị chặn nên $D \subset \{|z - a| < R, a \in D, R < \infty\}$. Do đó ta có thể lấy hàm f là

$$f(z) = \frac{z - a}{R}, \quad z \in D \Rightarrow |f(z)| \leq 1, \quad \forall z \in D,$$

$$f(a) = 0, \quad f'(a) > 0.$$

2. Tiếp theo, hàm ánh xạ cần tìm $w = f(z)$ sẽ được xác định từ các hàm của họ $S(f; D)$ bởi một tính chất cực trị sau đây. Từ họ hàm $S(f; D)$ hãy tìm hàm $f_0 \in S(f; D)$ sao cho

$$|f'_0(a)| \geq |f'(a)|, \quad \forall f \in S(f; D),$$

nghĩa là đại lượng độ giãn $|f'(a)|$ đạt cực đại khi $f = f_0$.

3. Hàm f_0 - lời giải của bài toán cực trị sẽ là đẳng cấu muốn tìm; nó ánh xạ miền D lên hình tròn đơn vị chứ không phải vào hình tròn đơn vị như đối với các hàm còn lại của $S(f; D)$.

Bây giờ ta chuyển sang chứng minh định lý cơ bản của lý thuyết ánh xạ bảo giác - định lý Riemann.

Định lý Riemann. Mọi miền đơn liên D trong mặt phẳng \mathbb{C} và $D \neq \mathbb{C}$ đều đẳng cấu với hình tròn mở $\{|w| < 1\}$.

Chứng minh. I. Theo định lý vừa chứng minh cuối tiết trước và nhận xét sau chứng minh định lý đó, mọi miền D thỏa mãn các giả thiết của định lý Riemann đều đẳng cấu với một miền nào đó nằm trong hình tròn đơn vị. Ta xét họ $S(f; D)$ tất cả những hàm chỉnh hình đơn điệu trong D sao cho môđun của chúng bị chặn bởi 1 và $f(a) = 0$, $f'(a) > 0$, trong đó a là điểm cố định nào đó của D . Đó là họ tất cả những hàm ánh xạ bảo giác miền D vào hình tròn đơn vị U . Theo định lý vừa nhắc đến trên đây, họ $S(f; D) \neq \emptyset$, và theo định lý Montel $S(f; D)$ là họ compact.

II. Bây giờ từ họ $S(f; D)$ ta sẽ tìm hàm f_0 sao cho độ giãn $|f'_0(a)|$ là cực đại. Ta xét tập hợp con $S_1(f; D) \subset S(f; D)$:

$$S_1(f; D) = \{f \in S(f; D) : |f'(a)| \geq |f'_1(a)| > 0\},$$

trong đó f_1 là hàm cố định nào đó của $S(f; D)$. Ta sẽ chứng minh rằng $S_1(f; D)$ là compact trong nó. Giả sử dãy $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, $f_n \in S_1(f; D)$, $\forall n$ hội tụ đều trên từng compact của miền D đến hàm giới hạn f_0 . Hàm f_0 thỏa mãn các tính chất sau đây.

1. Hàm $f_0 \in \mathcal{H}(D)$, $|f_0| \leq 1$. Thật vậy, vì $f_n \in \mathcal{H}(D)$, $\forall n$ nên theo định lý Weierstrass hàm $f_0 \in \mathcal{H}(D)$. Vì $|f_n| \leq 1 \forall n$ nên $|f_0| \leq 1$ trong D .

2. $f_0(a) = 0$, $f'_0(a) > 0$. Thật vậy, ta có

$$f_0(a) = \lim_n f_n(a) = 0.$$

Tiếp theo, vì $f_n \in \mathcal{H}(D) \forall n$ và f_n hội tụ đều trên từng compact của D nên theo định lý Weierstrass dãy các đạo hàm f'_n cũng hội tụ đều trên từng compact của D đến f'_0 và

$$f'_0(a) = \lim_n f'_n(a) \geq f'_1(a) > 0.$$

Như vậy hàm $f_0(z)$ không phải là hằng số trong D .

3. Hàm f_0 đơn điệu trong D . Thật vậy vì f_0 là giới hạn của dãy hàm đơn điệu trong D và f_0 không phải là hằng số nên f_0 đơn điệu trong D (xem định lý 7.1.7).

Như vậy hàm $f_0 \in S_1(f; D)$ và do đó $S_1(f; D)$ là compact trong nó.

Bây giờ ta xét ánh xạ

$$I(f) : f \mapsto |f'(a)|.$$

Đó là phiếm hàm liên tục như đã chứng minh trong tiết 4° của mục này. Ta biết rằng hàm liên tục trên tập hợp compact thì đạt giá trị lớn nhất của nó. Nghĩa là $\exists f_0 \in S_1(f; D)$ thỏa mãn điều kiện

$$|f'(a)| \leq |f'_0(a)| \quad \forall f \in S_1(f; D).$$

Như vậy sự tồn tại lời giải của bài toán cực trị được chứng minh.

III. Bây giờ ta chứng minh rằng f_0 ánh xạ miền D lên toàn bộ hình tròn U . Vì f_0 chỉnh hình đơn điệu trong D nên nó ánh xạ bảo giác D lên $f_0(D)$. Vì $|f_0(z)| \leq 1 \quad \forall z \in D$ nên ảnh $f_0(D)$ nằm trong hình tròn đơn vị $\{|w| < 1\}$. Ta chứng minh rằng từ tính cực trị của f_0 suy ra rằng $f_0(D) \equiv U = \{|w| < 1\}$.

Giả sử ngược lại. Ta giả thiết tồn tại điểm b ($|b| < 1$) không thuộc ảnh $f_0(D)$, $b \notin f_0(D)$. Ta sẽ chứng minh rằng khi đó $\exists h(z) \in S(f; D)$ sao cho

$$|h'(a)| > |f'_0(a)|$$

và như vậy mâu thuẫn với tính cực trị của hàm f_0 .

Vì $f_0(a) = 0 \Rightarrow b \neq 0$. Khi đó điểm $b^* = \frac{1}{\bar{b}}$ cũng không thuộc ảnh $f_0(D)$ vì $|b^*| > 1$.

Ta xét hàm

$$\psi(z) = \sqrt{\frac{f_0(z) - b}{1 - \bar{b}f_0(z)}}.$$

Hàm $\psi(z)$ chỉnh hình đơn điệu trong D . Thật vậy vì giá trị của hàm f_0 nằm trong hình tròn đơn vị nên giá trị của biểu thức dưới căn cũng nằm trong hình tròn đơn vị (xem định lý 9.9). Vì miền D đơn liên nên theo định

lý Monodromie ta có thể tách nhánh đơn trị của căn thức. Nhánh này đơn điệu trong D , điều đó được kiểm tra hết như trong chứng minh định lý 7.2.4 ở tiết trước. Hiển nhiên $|\psi| < 1 \forall z \in D$.

Bây giờ ta xét hàm

$$h(z) = e^{i\theta} \frac{\psi(z) - \psi(a)}{1 - \overline{\psi(a)}\psi(z)}, \quad -\pi < \theta \leq \pi.$$

Hàm $h(z)$ có các tính chất sau đây:

1. $h(z) \in S(f; D)$. Thật vậy, $h(z)$ chỉnh hình và đơn điệu trong D ; $h(a) = 0$ và $|h| \leq 1 \forall z \in D$.

$$h'(a) = e^{i\theta} \frac{\psi'(a)}{1 - |\psi(a)|^2} = e^{i\theta} \frac{1 + |b|}{2\sqrt{-b}} f'_0(a).$$

Với $\theta = \arg \sqrt{-b}$ ta có

$$h'(a) = \frac{1 + |b|}{2\sqrt{|b|}} f'_0(a) \Rightarrow h(z) \in S(f; D).$$

2. $h'(a) > f'_0(a)$. Thật vậy, ta có

$$1 + |b| > 2\sqrt{|b|}.$$

Do đó $\frac{1 + |b|}{2\sqrt{|b|}} > 1$. Từ đó suy ra $h'(a) > f'_0(a)$.

Điều này trái với tính chất cực trị của hàm $f_0(z)$. Định lý Riemann được chứng minh. \square

Nhận xét 7.2.2. Nhược điểm cơ bản của chứng minh vừa trình bày là ở chỗ nó chỉ thuần túy chứng minh sự tồn tại mà chưa đưa ra một phương pháp có tính chất kiến thiết để xây dựng hàm ánh xạ. Phép chứng minh có tính chất kiến thiết định lý này, xin mời xem các sách giáo khoa [2], [6], [14] và [20].

Hệ quả 7.2.1. *Nếu các điều kiện của định lý Riemann được thỏa mãn thì tồn tại duy nhất $F(z)$ chỉnh hình trong D , được chuẩn hóa tại điểm $z_0 \in D$, $z_0 \neq \infty$ bởi các điều kiện $F(z_0) = 0$, $F'(z_0) = 1$ và ánh xạ bảo giác D lên hình tròn với tâm tại điểm $w = 0$.*

Chứng minh. Nếu f_0 là hàm được chỉ ra trong định lý Riemann thì hàm $F(z) = \frac{f_0(z)}{f'_0(z_0)}$. Hàm F ánh xạ D lên hình tròn $\{|w| < R\}$, $R = 1/f'_0(z_0)$. Nếu còn tồn tại một hàm $F_1(z)$ nữa thỏa mãn điều khẳng định của hệ quả và ánh xạ D lên hình tròn $\{|w| < R_1\}$ nào đó thì $\frac{F_1(z)}{R_1} = f_0(z)$ sẽ là hàm được chỉ ra trong định lý Riemann. Từ đó suy ra

$$\frac{1}{R_1} = f'_0(z_0), \quad F_1(z) = \frac{f_0(z)}{f'_0(z_0)} = F(z).$$

□

Số $R = \frac{1}{f'_0(z_0)}$ được gọi là *bán kính bảo giác* của miền D tại điểm $z_0 \in D$.

Hệ quả 7.2.2. Hai miền đơn liên tùy ý D_1 và D_2 trong mặt phẳng \mathbb{C} và $\neq \mathbb{C}$ đều đẳng cấu với nhau.

Chứng minh. Theo định lý Riemann tồn tại đẳng cấu

$$f_j : D_j \rightarrow \{|w| < 1\}, \quad j = 1, 2$$

biến các miền đó lên hình tròn đơn vị. Nhưng khi đó

$$f = f_2^{-1} \circ f_1$$

sẽ là đẳng cấu biến D_1 lên D_2 . □

Hệ quả 7.2.3. Hai miền đơn liên tùy ý D_1 và D_2 trong mặt phẳng \mathbb{C} là đồng phôi với nhau.

Chứng minh. 1. Nếu D_1 và D_2 không trùng với \mathbb{C} thì hệ quả này được suy từ hệ quả 7.2.1.

2. Nếu một trong hai miền trùng với \mathbb{C} thì hệ quả được rút ra từ chỗ là mặt phẳng \mathbb{C} và hình tròn $\{|z| < 1\}$ đồng phôi với nhau. □

Hệ quả 7.2.4. Nếu hàm $w = f(z)$ chỉnh hình trong \mathbb{C} và không nhận những giá trị nằm trên cung l nào đó của mặt phẳng thì hàm đó là hằng số.

Chứng minh. Giả sử $\omega = \varphi(w)$ ánh xạ bảo giác phần ngoài l lên phần trong hình tròn đơn vị (nó tồn tại theo định lý Riemann). Ta xét hàm

$$\omega = \varphi[f(z)] = \Phi(z).$$

Hàm $\omega = \Phi(z)$ chỉnh hình trong \mathbb{C} và bị chặn. Do đó, theo định lý Liouville $\Phi(z) \equiv \text{const}$. Nhưng $\varphi(z) \neq \text{const}$ nên $f(z) = \text{const}$. \square

7.2.7 Định lý duy nhất của ánh xạ bảo giác

Trong n^o6 mục trước ta đã bàn đến các điều kiện để chuẩn hóa ánh xạ. Ở đây ta đã nêu ra ba cách đặt điều kiện chuẩn tương đương với nhau.

Bây giờ ta chứng minh định lý duy nhất của ánh xạ bảo giác.

Định lý 7.2.5. *Nếu miền D đẳng cấu với hình tròn đơn vị $U = \{|w| < 1\}$ thì tập hợp mọi ánh xạ bảo giác D lên U phụ thuộc ba tham số thực và tồn tại ánh xạ bảo giác duy nhất f biến D lên U được chuẩn hóa bởi các điều kiện*

$$f(z_0) = 0, \quad \arg f'(z_0) = \theta, \quad (7.14)$$

trong đó z_0 là điểm tùy ý thuộc D , còn θ là số thực tùy ý.

Chứng minh. Điều khẳng định thứ nhất được suy từ định lý 7.1.10 vì nhóm $\text{Aut}U$ phụ thuộc tham số thực: hai tọa độ của điểm a và số α trong định lý 7.1.13.

Để chứng minh điều khẳng định thứ hai ta giả thiết rằng có hai ánh xạ f_1 và f_2 biến miền D lên U được chuẩn hóa bởi điều kiện (7.14). Khi đó

$$\varphi = f_1 \circ f_2^{-1}$$

sẽ là một tự đẳng cấu của U và $\varphi(0) = 0$, $\arg \varphi'(0) = 0$. Từ định lý 7.1.13 suy ra rằng $a = 0$ và $\alpha = 0$ và do đó $\varphi \equiv z$ hay là $f_1(z) \equiv f_2(z)$. \square

7.2.8 Sự tương ứng giữa các biên và công thức Christoffel-Schwarz

Nếu hàm chỉnh hình được định nghĩa như ánh xạ miền này lên miền kia thì ánh xạ đó luôn luôn phải được hiểu là sự tương ứng một - một giữa các điểm trong của các miền. Vì các điểm biên không được liệt vào điểm của miền nên để nghiên cứu sự tương ứng giữa các điểm biên ta cần nghiên cứu vấn đề khó khăn hơn - đáng điệu của hàm ánh xạ khi gần đến biên của miền. Thế nhưng, trong nhiều vấn đề ta cần phải biết một số tính chất của hàm ánh xạ ở gần biên của miền.

Trong phạm vi giáo trình, ta thường sử dụng kết quả sau đây của Caratheodory - gọi là nguyên lý tương ứng biên.

Định lý 7.2.6. (Caratheodory) *Giả sử miền D và D^* được giới hạn bởi các đường cong Jordan ∂D và ∂D^* và*

$$f : D \rightarrow D^*$$

là ánh xạ bảo giác miền D lên miền D^ .*

Khi đó

- 1) *hàm $f(z)$ có thể thác triển liên tục ra miền đóng \overline{D} ,*
- 2) *hàm đã được thác triển đó xác lập một phép đồng phôi giữa các miền đóng \overline{D} và $\overline{D^*}$.*

Ta sẽ không dừng lại để chứng minh kết quả này mà xin mời bạn đọc nào quan tâm đến vấn đề đáng điệu của ánh xạ bảo giác ở trên biên hãy tìm xem cuốn sách của C. Caratheodory “Conformal Representation” hoặc cuốn sách của A. Hurwitz và R. Courant “Теория функций” М., 1968.

Bây giờ ta sẽ trình bày công thức cho phép tìm ánh xạ bảo giác nửa mặt phẳng trên $\{\operatorname{Im} z > 0\}$ lên đa giác trong mặt phẳng w .

Không đi sâu vào chi tiết, ở đây ta sẽ trình bày những kết quả cơ bản trong việc xây dựng biểu thức giải tích đối với hàm $w = f(z)$ ánh xạ nửa mặt phẳng trên

$$P = \{\operatorname{Im} z > 0\}$$

lên đa giác Δ_n trong mặt phẳng w .

Ở đây ta sử dụng các ký hiệu sau: A_k là các đỉnh liên tiếp của đa giác Δ_n , $k = 1, 2, \dots, n$; α_k là độ lớn của góc tại đỉnh A_k tương ứng trong đó $0 < \alpha_k \leq 2$, $\sum_{k=1}^n \alpha_k = n - 2$ (định lý về tổng các góc trong của đa giác); các điểm a_k , $k = \overline{1, n}$ nằm trên trục thực của mặt phẳng z

$$a_k < a_{k+1} \quad \forall k = \overline{1, n-1}$$

là nghịch ảnh của A_k qua ánh xạ $w = f(z)$, tức là $f(a_k) = A_k$.

Từ định lý Riemann suy ra hàm $w = f(z)$ tồn tại. Từ nguyên lý tương ứng biên trong ánh xạ bảo giác cũng suy được rằng hàm này liên tục trong nửa mặt phẳng đóng $\overline{P} = \{\operatorname{Im} z \geq 0\}$ và hàm ngược của nó liên tục trong đa giác đóng $\overline{\Delta}_n$.

Có thể chứng minh

Định lý 7.2.7. (Christoffel-Schwarz) *Giả sử:*

1) a_k và α_k , $k = \overline{1, n}$ là những số thực thỏa mãn các điều kiện

$$\begin{aligned} -\infty < a_1 < a_2 < \dots < a_n < +\infty \\ 0 < \alpha_k \leq 2, \quad \sum_{k=1}^n \alpha_k = n - 2. \end{aligned}$$

2) Hàm $w = f(z)$ ánh xạ nửa mặt phẳng trên $P = \{\operatorname{Im} z > 0\}$ lên đa giác bị chặn Δ_n với các đỉnh liên tiếp A_1, A_2, \dots, A_n sao cho $f(a_k) = A_k$, $k = \overline{1, n}$. Khi đó ta có công thức Christoffel-Schwarz

$$w = f(z) = A \int_{z_0}^z (z - a_1)^{\alpha_1-1} (z - a_2)^{\alpha_2-1} \dots (z - a_n)^{\alpha_n-1} dz + B \quad (7.15)$$

trong đó tích phân được lấy theo đường cong nằm trong nửa mặt phẳng trên; A, B là các hằng số.

Ta xét hai trường hợp đặc biệt sau đây.

I. Giả sử một trong các đỉnh của đa giác là ảnh của điểm vô cùng, chẳng hạn là ảnh của $a_n = \infty$. Ta thực hiện phép biến đổi tuyến tính biến nửa mặt phẳng trên $\{\operatorname{Im} z > 0\}$ lên nửa mặt phẳng trên $\{\operatorname{Im} \zeta > 0\}$ bởi $\zeta = -\frac{1}{z} + a'_n$ nếu $a_k \neq 0$ hoặc bởi $\zeta = \frac{-1}{z-a} + a'_n$ nếu có một $a_k = 0$ (trong đó $a \neq a_k \forall k = \overline{1, n}$) biến các điểm $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n = \infty$ thành các điểm hữu hạn a'_1, a'_2, \dots, a'_n . Khi đó theo (7.15) và hệ thức $\sum_{k=1}^n \alpha_k = n - 2$ ta có

Hệ quả 7.2.5. *Giả sử hàm $w = f(z)$ ánh xạ nửa mặt phẳng trên $\{\operatorname{Im} z > 0\}$ lên đa giác bị chặn Δ_n sao cho $a_k \neq \infty$ với $k = \overline{1, n-1}$ và $a_n = \infty$. Khi đó ta có công thức*

$$w = f(z) = A_1 \int_{z_0}^z (z - a_1)^{\alpha_1-1} (z - a_2)^{\alpha_2-1} \cdots (z - a_{n-1})^{\alpha_{n-1}-1} dz + B_1. \quad (7.16)$$

Từ (7.16) ta thấy rằng trong công thức Christoffel-Schwarz thừa số liên quan đến đỉnh tương ứng với $a_n = \infty$ là không hiện diện. Điều đó đưa đến việc công thức (7.16) thường được sử dụng nhiều hơn.

II. Xét trường hợp khi đa giác Δ_n có một hay một số đỉnh nằm tại ∞ . Trong trường hợp này ta sẽ xem góc giữa hai cạnh với đỉnh tại ∞ được xác định như là góc tại giao điểm hữu hạn giữa hai cạnh đó với dấu ngược lại. Với quy ước đó công thức (7.15) và (7.16) vẫn có hiệu lực, tức là ta có

Định lý 7.2.8. (Christoffel-Schwarz) *Ánh xạ bảo giác $w = f(z)$ biến nửa mặt phẳng trên lên đa giác Δ_n được thực hiện bởi*

- 1) hàm (7.15) nếu $a_k \neq \infty \quad \forall k = \overline{1, n}$;
- (2) hàm (7.16) nếu $a_k \neq \infty, k = \overline{1, n-1}, a_n = \infty$.

Công thức Christoffel-Schwarz cho phép ta tìm hàm $w = f(z)$ ánh xạ bảo giác nửa mặt phẳng $\{\operatorname{Im} z > 0\}$ lên đa giác Δ_n đã được cho (tức là cho các đỉnh A_k và các góc $\pi\alpha_k, k = \overline{1, n}$) thì bài toán tìm hàm $w = f(z)$ được đưa về tìm các điểm $a_k, k = \overline{1, n}$ và các hằng số A, B . Ba điểm bất kỳ trong

số các điểm a_k $k = \overline{1, n}$ được cho tùy ý (7.1.8), các điểm a_k còn lại và các hằng số A, B sẽ được xác định đơn trị vì các đỉnh $A_k = f(a_k)$ đã cho. Tuy nhiên việc xác định các hằng số này (gọi là *các hằng số Christoffel-Schwarz*) trong thực tế là cực kỳ phức tạp. Bạn đọc muốn tìm hiểu sâu vấn đề này xin mời xem cuốn sách M. A. Лаврентьев, Б. В. Шабат. Методы теории функций комплексного переменного. М., “Наука”, 1973. Ch II, còn bây giờ ta sẽ nêu một vài ví dụ đơn giản để minh họa việc xác định các hằng số Christoffel-Schwarz.

Ví dụ 3. Ánh xạ nửa mặt phẳng trên $\{\operatorname{Im} z > 0\}$ lên băng nằm ngang

$$\{0 < \operatorname{Im} w < h\}.$$

Hình VII. 1

Giải. Băng nằm ngang đã cho (hình VII.1) là một “nhị giác” với các đỉnh là $A_1 = +\infty$ và $A_2 = -\infty$ với các góc đỉnh $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Vì để chuẩn hóa ánh xạ ta cần cho trước sự tương ứng của ba điểm, nên ta bổ sung cho “nhị giác” đã cho một đỉnh nữa là $A_3 = 0$ với góc đỉnh bằng π (hiển nhiên điều đó không ảnh hưởng gì đến hình dạng của “nhị giác”).

Để tiện lợi, ta ghi các số liệu đã biết thành bảng sau đây

a_k	A_k	α_k
∞	$+\infty$	0
0	$-\infty$	0
1	0	1

Để ý đến bảng vừa lập dễ dàng thấy rằng trong trường hợp này tích phân Christoffel-Schwarz có dạng

$$w = A \int_1^z \frac{dz}{z} + B.$$

Vì điểm $a_3 = 1$ tương ứng với đỉnh $A_3 = 0$ nên

$$\begin{aligned} 0 &= A \int_1^1 \frac{dz}{z} + B, \\ B &= 0. \end{aligned}$$

Do đó

$$w = A \int_1^z \frac{dz}{z} = A \ln z,$$

trong đó hằng số A được xác định bởi độ rộng và hướng của băng đã cho.

Vì bán trục dương của mặt phẳng z được ánh xạ lên trục thực của mặt phẳng w nên hằng số A là một số thực.

Ta xác định hằng số A .

Để làm việc đó, thông thường ta sử dụng định lý sau đây của (R. Courant).

Giả sử γ_r là nửa đường tròn với bán kính vô cùng bé r và với tâm tại điểm $z = a$ và giả sử qua ánh xạ bảo giác $w = f(z)$ điểm $z = a$ biến thành điểm $w = \infty$. Khi đó, với sự sai khác một vô cùng bé bậc cao hơn so với r , ảnh của nửa đường tròn γ_r sẽ là một đoạn thẳng. (xem P. Курант, Геометрическая теория функций комплексного переменного М-Л, 1934).

Áp dụng định lý vừa phát biểu, ta thấy rằng ảnh của nửa đường tròn

$$\gamma_r = \{|z| = r, \operatorname{Im} z \geq 0\}$$

là đoạn thẳng nối các tia A_1A_2 với A_2A_3 và thẳng góc với các tia ấy. Do đó với sự sai khác vô cùng bé $\theta(r)$, khi vòng qua điểm $z = 0$ theo nửa đường tròn γ_r (theo chiều kim đồng hồ), giá trị Δw_0 của $w = A \ln z$ sẽ bằng hiệu các giá trị của phần thực của w lần lượt trên A_2A_3 và A_1A_2 , nghĩa là

$$\Delta w_0 = -hi + o(r), \quad r \rightarrow 0.$$

Nhưng mặt khác ta lại có

$$\Delta w_0 = A \int_{\gamma_r} \frac{dz}{z} = Ai \int_{\pi}^0 d\theta = -A\pi i \quad (r \rightarrow 0).$$

Từ đó suy ra

$$A = \frac{h}{\pi}, \quad \text{và} \quad w = \frac{h}{\pi} \ln z.$$

Ví dụ 4. Ánh xạ nửa mặt phẳng trên $\{\operatorname{Im} z > 0\}$ lên nửa băng $\{-\frac{\pi}{2} < \operatorname{Re} w < \frac{\pi}{2}, \operatorname{Im} w > 0\}$ là một “tam giác” với các đỉnh (hình VII. 2)

$$A_1 = -\frac{\pi}{2}, \quad A_2 = \frac{\pi}{2}, \quad A_3 = \infty.$$

Giải. Tam giác $A_1A_2A_3$ có các góc tương ứng là

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{2}, \quad \alpha_3 = 0$$

($\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1!$). Các số liệu đã cho có thể ghi thành bảng sau đây

a_k	A_k	α_k
-1	$-\pi/2$	1/2
1	$\pi/2$	1/2
∞	∞	0

Hình VII. 2

Tích phân Christoffel-Schwarz có dạng

$$\begin{aligned} W &= A \int_0^z (z+1)^{-\frac{1}{2}}(z-1)^{-\frac{1}{2}} dz + B \\ &= A' \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} + B \\ &= A' \arcsin z + B. \end{aligned}$$

Sử dụng sự tương ứng giữa các điểm đã ghi trên bảng ta có

$$-\frac{\pi}{2} = -A' \frac{\pi}{2} + B, \quad \frac{\pi}{2} = A' \frac{\pi}{2} + B,$$

và từ đó

$$B = 0, \quad A' = 1.$$

Như vậy

$$W = \arcsin z.$$

7.3 Bài tập

1. Hàm thực $G(z, z_0, D)$, trong đó z_0 là điểm thuộc D bất kỳ, được gọi là hàm Green đối với miền D nếu nó thỏa mãn các điều kiện:

1. $G(z, z_0, D)$ là hàm điều hòa theo z trong $D \setminus \{z_0\}$;

2. $G(z, z_0, D) \rightarrow +\infty$ khi $z \rightarrow z_0$;

3. $G(z, z_0, D) \rightarrow 0$ khi $z \rightarrow \partial D$.

Chứng minh rằng

$$G(z, z_0, D) = G(z_0, z, D).$$

2. Chứng minh rằng hàm Green đối với miền đơn liên D có thể biểu diễn qua hàm ánh xạ bảo giác D lên hình tròn đơn vị theo công thức

$$G(z, z_0, D) = \frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{w(z) - w(z_0)}{1 - \overline{w(z_0)}w(z)} \right|, \quad (*)$$

trong đó $w(z)$ là ánh xạ bảo giác D lên hình tròn đơn vị

$$U = \{|w| < 1\}.$$

3. Áp dụng công thức (*) để viết công thức biểu diễn hàm Green đối với các hình tròn $S = \{|z| < R\}$ và nửa mặt phẳng trên.

4. Chứng minh rằng nếu D và D^* là những miền đơn liên và f là ánh xạ bảo giác nào đó biến D^* lên D thì hàm Green đối với miền D và D^* liên hệ với nhau theo công thức

$$G(z, z_0, D^*) = G(f(z), f(z_0), D).$$

5. Giả sử $f \in \mathcal{H}(D)$, $f'(z) \neq 0 \forall z \in D$. Khi đó miền D có thể phân hoạch thành tập hợp hữu hạn hoặc đếm được miền mà trong mỗi miền đó hàm $f(z)$ đơn điệu.

6. Tìm hàm ánh xạ nửa mặt phẳng trên lên chính nó sao cho $w(a) = b$, $\arg w'(a) = \alpha$ ($\operatorname{Im} a > 0, \operatorname{Im} b > 0$).

$$(\text{Trả lời: } \frac{w - b}{w - \bar{b}} = e^{i\alpha} \frac{z - a}{z - \bar{a}}.)$$

7. Tìm hàm ánh xạ nửa mặt phẳng trên lên nửa mặt phẳng dưới sao cho $w(a) = \bar{a}$, $\arg w'(a) = -\frac{\pi}{2}$. ($\operatorname{Im} a > 0$).

$$(\text{Trả lời: } \frac{w - \bar{a}}{w - a} = i \frac{z - a}{z - \bar{a}})$$

8. Ánh xạ hình tròn $S = \{z : |z| < 2\}$ lên nửa mặt phẳng $P = \{z : \operatorname{Re} w > 0\}$ sao cho

$$w(0) = 1, \quad \arg w'(0) = \frac{\pi}{2}.$$

$$(\text{Trả lời: } w = -\frac{z - 2i}{z + 2i})$$

9. Ánh xạ hình tròn $S = \{z : |z - 4i| < 2\}$ lên nửa mặt phẳng $P = \{w : \operatorname{Im} w > \operatorname{Re} w\}$ sao cho tâm của hình tròn chuyển thành điểm $w = -4$ và điểm $z = 2i$ của đường tròn biến thành gốc tọa độ.

$$(\text{Trả lời: } w = -4 \frac{zi + 2}{z - 2 - 4i})$$

10. Ánh xạ hình tròn $S(R_1) = \{z : |z| < R_1\}$ lên hình tròn $S(R_2) = \{z : |z| < R_2\}$ sao cho $w(a) = b$, $\arg w'(a) = \alpha$ ($|a| < R_1, |b| < R_2$).

$$(\text{Trả lời: } R_2 \frac{w - b}{R_2^2 - \bar{b}w} = e^{i\alpha} R_1 \frac{z - a}{R_1^2 - \bar{a}z})$$

11. Tìm hàm ánh xạ nửa hình tròn $S = \{z : |z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$ lên hình tròn $S^* = \{w : |w| < 1\}$ sao cho $w(\pm 1) = \pm 1$, $w(0) = -i$.

$$(\text{Trả lời: } w = \frac{z^2 + 2iz + 1}{iz^2 + 2z + i})$$

Tài liệu tham khảo

A - HÀM MỘT BIẾN PHỨC

1. Ahlors L. V., Complex analysis, New York, 1953.
2. Бицадзе А. В. Основы теории аналитических функций комплексного переменного, “Наука”, 1969
3. Волковский Л. И., Лунц Г. Л., Араманович И. Г., Сборник задач по теории функций комплексного переменного, “Наука” 1975.
4. Голузин Г. М. Геометрическая теория функций комплексного переменного, “Наука”, 1966.
5. Гюнтер Н. М., Кузьмин Р. О. Сборник задач по высшей математике. Том 2. М., 1958.
6. Гурвиц А., Курант Р., Теория функций, “Наука”, 1968.
7. Дьедонне Ж., Основы современного анализа, “Мир”, 1964. (có bản dịch tiếng Việt của NXB Đại học và Trung học Chuyên nghiệp, Hà Nội 1973).
8. Евграфов М. А. Аналитические функции “Наука”, 1968.
9. Евграфов М. А., Сидоров Ю. В., Шабунин М. И., Бежанов К. А. Сборник задач по теории аналитических функций, “Наука”, 1969.

10. Картан А., Элементарная теория аналитических функций одного и нескольких комплексных переменных. И. Л., Москва, 1973.
11. Компенфелс В., Штальман Ф., Практика конформных отображений И. Л., 1963.
12. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного, “Наука”, 1973.
13. Лаврик В. И., Савенков В. Н. Справочник по конформным отображениям “Наукова Думка”, Киев 1970.
14. Лунц Г. Л., Эльсгольц Л. Э. Функций комплексного переменного с элементами операционного исчисления, М., 1958.
15. Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, Том 1 (1967), Том 2 (1968), “Наука”.
16. Привалов И. И. Введение в теорию функций комплексного переменного, М., 1960. (Bản dịch tiếng Việt của NXB Giáo dục, Hà Nội, 1964).
17. Свешников А. Г., Тихонов А. Н. Теория функций комплексного переменного, “Наука”, 1974.
18. Смирнов В. И. Курс высшей математики, Том 3 (часть 2), “Наука”, 1974.
19. Спрингер Дж., Введение в теорию римановых, поверхностей И. Л., 1960.
20. Стойлов С. И. Теория функций комплексного переменного, том 1, 2, И. Л., 1962. 2. Лекции по топологических принципах теории аналитических функций, “Наука”, 1964.
21. Титчмарш Е., Теория функций, М., 1980.
22. Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н., Курс современного анализа Том 1, Л., 1963.

23. Фукс Б. А., Шабат Б. В. Функции комплексного переменного и некоторые их приложения. М., 1959 (Bản dịch tiếng Việt của NXB Khoa học kỹ thuật, Hà Nội, 1969).
24. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ. “Наука”, Часть I, 1976. (Có bản dịch của NXB Đại học và Trung học Chuyên nghiệp, 1974).
25. Шварц Л., Анализ. Том II, “Мир”, 1972.
26. Шилов Г. Е. Математический анализ. Функций одного переменного, Часть 1-2. “Наука”, 1969.
27. Nguyễn Thủy Thanh. Hướng dẫn giải bài tập hàm biến phức NXB Đại học Quốc gia Hà Nội, 2003.

B - HÀM NHIỀU BIẾN PHỨC

28. Ганнинг Р., Россей Ж., Аналитические функции многих комплексных переменных, “Мир” М. 1969.
29. Хёрмандер Л., Введение в теорию Функций нескольких комплексных переменных “Мир”, 1968.
30. Шабат Б. В., Введение в комплексный анализ. Часть II, “Наука”, 1975.
31. Ронкин Л. И., Элементы теории аналитических функции многих переменных “Наука Думка” Киев, 1977.