CHƯƠNG 1: HÀM GIẢI TÍCH

§1. SỐ PHỨC VÀ CÁC PHÉP TÍNH

1. Dạng đại số của số phức: Ta gọi số phức là một biểu thức dạng (x + jy) trong đó x và y là các số thực và j là đơn vị ảo. Các số x và y là phần thực và phần ảo của số phức. Ta thường kí hiệu:

$z = x + jy$

$x = \mathrm{Re}z = \mathrm{Re}(x + jy)$

$y = \mathrm{Im}z = \mathrm{Im}(x + jy)$

Tập hợp các số phức được kí hiệu là **C**. Vậy:

$C = \{ z = x + jy \mid x \in R , y \in R\}$

trong đó R là tập hợp các số thực.

Nếu y = 0 ta có z = x, nghĩa là số thực là trường hợp riêng của số phức với phần ảo bằng 0. Nếu x = 0 ta z = jy và đó là một số thuần ảo.

Số phức $\overline{z} = x - jy$ được gọi là số phức liên hợp của z = x + jy. Vậy $\mathrm{Re}(\overline{z}) = \mathrm{Re}(z)$, $\mathrm{Im}(\overline{z}) = -\mathrm{Im}(z)$, $\overline{\overline{z}} = z$.

Số phức -z = -x - jy là số phức đối của z = x + jy.

Hai số phức $z_1 = x_1 + jy_1$ và $z_2 = x_2 + jy_2$ gọi là bằng nhau nếu $x_1 = x_2$ và $y_1 = y_2$.

2. Các phép tính về số phức:

a. Phép cộng: Cho hai số phức $z_1 = x_1 + jy_1$ và $z_2 = x_2 + jy_2$. Ta gọi số phức

$z = (x_1 + x_2) + j(y_1 + jy_2)$

là tổng của hai số phức z_1 và z_2.

Phép cộng có các tính chất sau:

$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ (giao hoán)

$z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$ (kết hợp)

b. Phép trừ: Cho 2 số phức $z_1 = x_1 + jy_1$ và $z_2 = x_2 + jy_2$. Ta gọi số phức

$z = (x_1 - x_2) + j(y_1 - jy_2)$

là hiệu của hai số phức z_1 và z_2.

c. Phép nhân: Cho 2 số phức $z_1 = x_1 + jy_1$ và $z_2 = x_2 + jy_2$. Ta gọi số phức

$z = z_1.z_2 = (x_1x_2-y_1y_2) + j(x_1y_2 + x_2y_1)$

là tích của hai số phức z_1 và z_2.

Phép nhân có các tính chất sau:

$z_1,z_2 = z_2.z_1$ (tính giao hoán)

$(z_1.z_2).z_3 = z_1.(z_2.z_3)$ (tính kết hợp)

$z_1(z_2 + z_3) = z_1.z_2 + z_2.z_3$ (tính phân bố)

$(-1.z) = -z$

$z.0 = 0. z = 0$

$j.j = -1$

d. Phép chia: Cho 2 số phức $z_1 = x_1 + jy_1$ và $z_2 = x_2 + jy_2$. Nếu $z_2 \neq 0$ thì tồn tại một số phức z = x + jy sao cho $z.z_2 = z_1$. Số phức:

$$z=\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+j\frac{y_1x_2-y_2x_1}{x_2^2+y_2^2}$$

được gọi là thương của hai số phức z_1 và z_2.

e. Phép nâng lên luỹ thừa: Ta gọi tích của n số phức z là luỹ thừa bậc n của z và kí hiệu:

$$z^n=z.z\cdots z$$

Đặt $w = z^n =(x + jy)^n$ thì theo định nghĩa phép nhân ta tính được Rew và Imw theo x và y.

Nếu $z^n = w$ thì ngược lại ta nói z là căn bậc n của w và ta viết:

$$z=\sqrt[n]{w}$$

f. Các ví dụ:

Ví dụ 1: $j^2 = -1$

$j^3 = j^2.j = -1.j = -j$

Ví dụ 2: $(2+j3) + (3-5j) = 5-2j$

$$\frac{1}{j}=-j$$

$$\frac{2+5j}{1-j}=\frac{(2+5j)(1+j)}{1-j^2}=\frac{-3+7j}{2}=-\frac{3}{2}+\frac{7}{2}j$$

Ví dụ 3: $z+\overline{z}=(x+jy)+(x-jy)=2x=2\,\mathrm{Re}\,z$

Ví dụ 4: Tìm các số thực thoả mãn phương trình:

$$(3x - j)(2 + j)+ (x - jy)(1 + 2j) = 5 + 6j$$

Cân bằng phần thực và phần ảo ta có:

$$x=\frac{20}{17}\quad y=-\frac{36}{17}$$

Ví dụ 5: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}z+j\varepsilon=1\\2z+\varepsilon=1+j\end{cases}$$

Ta giải bằng cách dùng phương pháp Cramer và được kết quả:

$$z=\frac{\begin{vmatrix}1 & j\\1+j & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & j\\2 & 1\end{vmatrix}}=\frac{2-j}{1-2j}=\frac{(2-j)(1+2j)}{5}=\frac{4+3j}{5}$$

$$\varepsilon=\frac{\begin{vmatrix}1 & j\\2 & 1+j\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & j\\2 & 1\end{vmatrix}}=\frac{j-1}{1-2j}=\frac{(j-1)(1+2j)}{5}=\frac{-3-j}{5}$$

Ví dụ 6: Chứng minh rằng nếu đa thức P(z) là một đa thức của biến số phức z với các hệ số thực:

$P(z) = a_0z^n + a_1z^{n-1} + \cdots + a_n$ thì $\overline{P(z)} = P(\overline{z})$

Thật vậy ta thấy là số phức liên hợp của tổng bằng tổng các số phức liên hợp của từng số hạng, số phức liên hợp của một tích bằng tích các số phức liên hợp của từng thừa số. Do vậy:

$$\overline{a_k z^{n-k}} = \overline{a_k}.\overline{z^{n-k}}$$

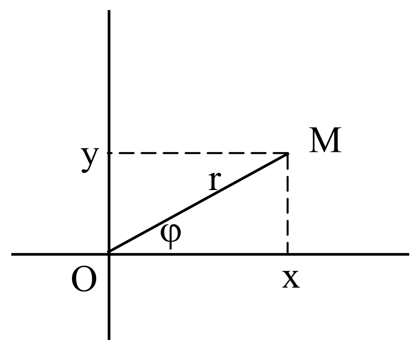
Do đó:

$$\overline{P(z)} = \overline{\sum_{k=0}^{n} a_k z^{n-k}} = \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k z^{n-k}} = \sum_{k=0}^{n} a_k \overline{z^{n-k}} = P(\overline{z})$$

Từ kết quả này suy ra nếu đa thức P(z) có các hệ số thực và nếu α là một nghiệm phức của nó tức $P(\alpha) = 0$ thì $\overline{\alpha}$ cũng là nghiệm của nó, tức $P(\overline{\alpha}) = 0$.

3. Biểu diễn hình học: Cho số phức $z = x + jy$. Trong mặt phẳng xOy ta xác định điểm M(x,y) gọi là toạ vị của số phức z. Ngược lại cho điểm M trong mặt phẳng, ta biết toạ độ (x,y) và lập được số phức $z = x + jy$. Do đó ta gọi xOy là mặt phẳng phức. Ta cũng có thể biểu diễn số phức bằng một vec tơ tự do có toạ độ là (x,y).

4. Mođun và argumen của số phức z: Số phức z có toạ vị là M. Ta gọi độ dài r của vec tơ $\overrightarrow{OM}$ là mođun của z và kí hiệu là $|z|$.



Góc φ xác định sai khác $2k\pi$ được gọi là argumen của z và kí hiệu là Argz:

$$r = |z| = OM$$

$$\mathrm{Arg}z = \left(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM}\right) = \varphi + 2k\pi$$

đặc biệt, trị số của Argz nằm giữa $-\pi$ và π gọi là giá trị chính của Argz và kí hiệu là argz. Trường hợp z = 0 thì Argz không xác định.

Giữa phần thực, phần ảo, mođun và argumen có liên hệ:

$$x = r\cos\varphi$$

$$y = r\sin\varphi$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{y}{x}$$

$$\arg z = \begin{cases} \mathrm{acrtg}\dfrac{y}{x} & \text{khi } x > 0 \\ \pi + \mathrm{acrtg}\dfrac{y}{x} & \text{khi } x < 0, y \geq 0 \\ -\pi + \mathrm{acrtg}\dfrac{y}{x} & \text{khi } x < 0, y < 0 \end{cases}$$

Với x = 0 từ định nghĩa ta có:

$$\arg z = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & \text{khi } y > 0 \\ -\dfrac{\pi}{2} & \text{khi } y < 0 \end{cases}$$

Hai số phức bằng nhau có mođun và argumen bằng nhau.

$$|\,z\,| = |\,\overline{z}\,|$$

$$z.\overline{z} = |\,z\,|^2$$

Từ cách biểu diễn số phức bằng vec tơ ta thấy số phức $(z_1 - z_2)$ biểu diễn khoảng cách từ điểm M_1 là toạ vị của z_1 đến điểm M_2 là toạ vị của z_2. Từ đó suy ra $|\ z\ | = r$ biểu thị đường tròn tâm O, bán kính r. Tương tự $|\ z - z_1\ | = r$ biểu thị đường tròn tâm z_1, bán kính r; $|\ z - z_1\ | > r$ là phần mặt phức ngoài đường tròn và $|\ z - z_1\ | < r$ là phần trong đường tròn đó.

Hơn nữa ta có các bất đẳng thức tam giác:

$$|\ z_1 + z_2\ | \le |\ z_1\ | + |\ z_2\ | \ ; \ |\ z_1 - z_2\ | \ge ||\ z_1\ | - |\ z_2\ ||$$

Từ định nghĩa phép nhân ta có:

$$z_1.z_2 = r_1.r_2\,[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) - j(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_2\cos\varphi_2)]$$
$$= r_1.r_2\,[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + j\sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$$

Vậy: $|\ z_1.z_2\ | = |\ z_1\ |.|\ z_2\ |$

$$\mathrm{Arg}(z_1.z_2) = \mathrm{Arg}z_1 + \mathrm{Arg}z_2 + 2k\pi$$

Tương tự, nếu $z_2 \neq 0$ thì:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + j\sin(\varphi_1 - \varphi_2)]$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

$$\mathrm{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \mathrm{Arg}z_1 + \mathrm{Arg}z_2 + 2k\pi$$

5. Các ví dụ:

Ví dụ 1: $|\,3 + 2j\,| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$

Ví dụ 2: Viết phương trình đường tròn $A(x^2 + y^2) + 2Bx + 2Cy + D = 0$ với các hệ số A, B, C, D là các số thực trong mặt phẳng phức.

Ta đặt $z = x + jy$ nên $\overline{z} = x - jy$.

Mặt khác $x^2 + y^2 = |\,z\,|^2 = z.\overline{z}$

$$2x = z + \overline{z}$$

$$2y = \frac{z - \overline{z}}{j} = -j(z - \overline{z})$$

Thay vào phương trình ta có:

$$Az\overline{z} + B(z + \overline{z}) - Cj(z - \overline{z}) = 0$$

hay $\quad Az\bar{z} + \bar{E}z + E\bar{z} + D = 0$

6. Dạng lượng giác của số phức: Nếu biểu diễn số phức z theo r và φ ta có:

$$z = x + jy = r(\cos\varphi + j\sin\varphi)$$

Đây là dạng lượng giác số phức z.

Ví dụ: $z = -2 = 2(\cos\pi + j\sin\pi)$

Các phép nhân chia dùng số phức dưới dạng lượng giác rất tiên lợi. Ta có:

$$z_1 = r_1(\cos\varphi + j\sin\varphi)$$

$$z_2 = r_2(\cos\psi + j\sin\psi)$$

$$z = z_1.z_2 = r_1r_2[\cos(\varphi+\psi) + j\sin(\varphi+\psi)]$$

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi-\psi) + j\sin(\varphi-\psi)]$$

Áp dụng công thức trên để tính tích n thừa số z, tức là z^n ta có:

$$[r(\cos\varphi + j\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + j\sin n\varphi)$$

Đặc biệt khi r = 1 ta có công thức Moivre:

$$(\cos\varphi + j\sin\varphi)^n = (\cos n\varphi + j\sin n\varphi)$$

Thay φ bằng -φ ta có:

$$(\cos\varphi - j\sin\varphi)^n = (\cos n\varphi - j\sin n\varphi)$$

Ví dụ: Tính các tổng:

$$s = \cos\varphi + \cos2\varphi + \cdots + \cos n\varphi$$

$$t = \sin\varphi + \sin2\varphi + \cdots + \sin n\varphi$$

Ta có $jt = j\sin\varphi + j\sin2\varphi + \cdots + j\sin n\varphi$

Đặt $z = \cos\varphi + j\sin\varphi$ và theo công thức Moivre ta có:

$$s + jt = z + z^2 + \cdots + z^n$$

Vế phải là một cấp số nhân gồm n số, số hạng đầu tiên là z và công bội là z. Do đó ta có:

$$s + jt = z\frac{z^n - 1}{z - 1} = \frac{z^{n+1} - z}{z - 1} = \frac{\cos(n+1)\varphi + j\sin(n+1)\varphi - \cos\varphi - j\sin\varphi}{\cos\varphi + j\sin\varphi - 1}$$

$$= \frac{[\cos(n+1)\varphi - \cos\varphi] + j[\sin(n+1)\varphi - \sin\varphi]}{(\cos\varphi - 1) + j\sin\varphi}$$

$$= \frac{[\cos(n+1)\varphi - \cos\varphi] + j[\sin(n+1)\varphi - \sin\varphi]}{(\cos\varphi - 1) + j\sin\varphi}.\frac{(\cos\varphi - 1) - j\sin\varphi}{(\cos\varphi - 1) - j\sin\varphi}$$

Như vậy:

$$s = \mathrm{Re}(s + jt) = \frac{\cos(n+1)\varphi.\cos\varphi - \cos^2\varphi - \cos(n+1)\varphi + \cos\varphi + \sin(n+1)\varphi.\sin\varphi - \sin^2\varphi}{(\cos\varphi - 1)^2 + \sin^2\varphi}$$

$$= \frac{\cos(n+1)\varphi.\cos\varphi + \sin(n+1)\varphi.\sin\varphi - \cos(n+1)\varphi + \cos\varphi - 1}{2 - 2\cos\varphi}$$

$$= \frac{\cos\varphi - \cos(n+1)\varphi + \cos n\varphi - 1}{2(1 - \cos\varphi)}$$

Tương tự ta tính được

$t = Im(s+jt)$

Khi biểu diễn số phức dưới dạng lượng giác ta cũng dễ tính được căn bậc n của nó. Cho số phức $z = r(\cos\varphi + j\sin\varphi)$ ta cần tìm căn bậc n của z, nghĩa là tìm số phức ζ sao cho:

$\zeta^n = z$

trong đó n là số nguyên dương cho trước.

Ta đặt $\zeta = \rho(\cos\alpha + j\sin\alpha)$ thì vấn đề là phải tìm ρ và α sao cho:

$$\rho^n(\cos n\alpha + j\sin n\alpha) = r(\cos\varphi + j\sin\varphi)$$

Nghĩa là $\rho^n = r$

và $n\alpha = \varphi$

Kết quả là: $\zeta = \sqrt[n]{r}$; $\alpha = \dfrac{\varphi + 2k\pi}{n}$

Cụ thể, căn bậc n của z là số phức:

$$\zeta_o = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + j\sin\frac{\varphi}{n}\right)$$

$$\zeta_1 = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi}{n} + j\sin\frac{\varphi + 2\pi}{n}\right)$$

. . . . . .

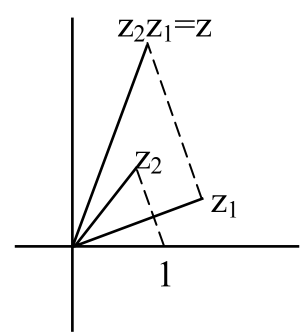
$$\zeta_{n-1} = \sqrt[n]{r}\left[\cos\frac{\varphi + 2(n-1)\pi}{n} + j\sin\frac{\varphi + 2(n-1)\pi}{n}\right]$$

với k là số nguyên và chỉ cần lấy n số nguyên liên tiếp (k = 0, 1, 2,...,n-1) vì nếu k lấy hai số nguyên hơn kém nhau n thì ta có cùng một số phức.

7. Toạ vị của số phức tổng, hiệu, tích và thương hai số phức:

a. Toạ vị của tổng và hiệu: Toạ vị của tổng hai số phức là tổng hay hiệu 2 vec tơ biểu diễn số phức đó.

b. Toạ vị của tích hai số phức: Ta có thể tìm toạ vị của tích hai số phức bằng phương pháp dựng hình. Cho hai số phức z_1 và z_2 như hình vẽ. Ta dựng trên cạnh Oz_1 tam giác Oz_1z đồng dạng với tam giác $O1z_2$. Như vậy Oz là tích của hai số phức z_1 và z_2.



Thật vậy, do tam giác Oz_1z đồng dạng với tam giác $O1z_2$ nên ta có:

$$\frac{z}{z_1} = \frac{z_2}{1} \text{ hay } z = z_1.z_2$$

c. Toạ vị của thương hai số phức: Việc tìm thương hai số phức đưa về tìm tích $z_1.\dfrac{1}{z_2}$. Vì vậy ta chỉ cần tìm $w = \dfrac{1}{z}$. Trước hết ta giả thiết | z | < 1(hình a)

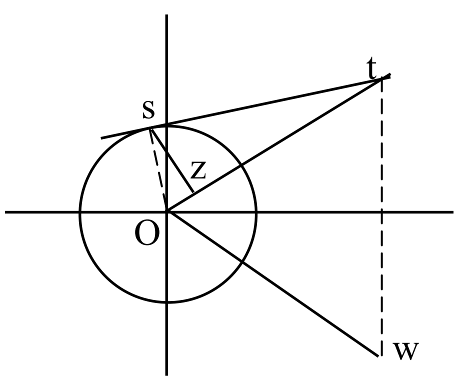
Ta tìm w theo các bước sau:

- vẽ đường tròn đơn vị và z

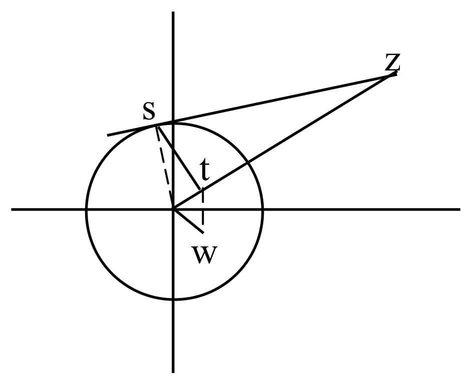
- dựng tại z đường vuông với Oz và cắt đường tròn đơn vị tại s
- vẽ tiếp tuyến với đường tròn tại s và cắt Oz tại t.
- do ΔOzs & ΔOst đồng dạng nên ta có $|\,t\,|=\dfrac{1}{|\,z\,|}$
- lấy w đối xứng với t.

Trường hợp | z | > 1 ta vẽ như hình b:

- vẽ đường tròn đơn vị và z
- từ z vẽ tiếp tuyến với đường tròn tại s
- dựng tại s đường vuông với Oz cắt Oz tại t
- do Ozs và Ost đồng dạng nên ta có $|\,t\,|=\dfrac{1}{|\,z\,|}$
- lấy w đối xứng với t.



a



b

8. Dạng mũ của số phức: Nhờ công thức Euler $e^{j\varphi}=\cos\varphi+j\sin\varphi$ ta có thể biểu diễn số phức dưới dạng số mũ:

$$z=re^{j\varphi}=|\,z\,|e^{jArgz}$$

Ví dụ $z=-1-j=\sqrt{2}e^{-j\frac{3\pi}{4}}$

Biểu diễn số phức dưới dạng mũ rất tiện lợi khi cần nhân hay chia các số phức:

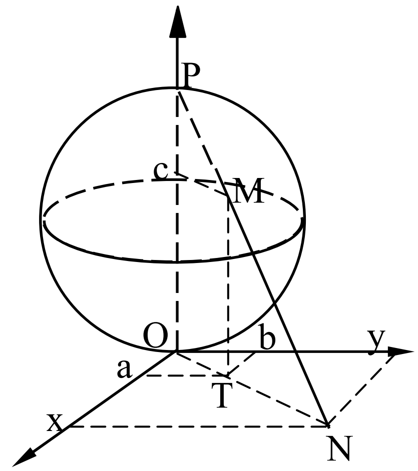
$$z_1=r_1e^{j\varphi}\qquad z_2=r_2e^{j\alpha}$$

$$z_1z_2=r_1r_2e^{j(\varphi+\alpha)}$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}e^{j(\varphi-\alpha)}$$

9. Mặt cầu Rieman: Ta xét một mặt cầu S tâm (0, 0, 0.5), bán kính 0.5 (tiếp xúc với mặt phẳng xOy tại O). Mặt phẳng xOy là mặt phẳng phức z với Ox là trục thực và Oy là trục ảo. Đoạn thẳng nối điểm z = x + jy có toạ vị là N của mặt phẳng phức với điểm P(0, 0, 1) của mặt cầu cắt mặt cầu tại điểm M(a, b, c). Ta gọi M là hình chiếu nổi của điểm z lên mặt cầu S với cực P. Phép ánh xạ này lập nên một tương ứng một - một giữa tất cả các điểm của mặt phẳng z và của mặt cầu S thủng tại P. Vì các điểm P, M, và N cùng nằm trên một đường thẳng nên ta có:

$$\frac{OT}{ON} = \frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{PM}{PN} = \frac{1-c}{1}$$



hay $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{1-c}{1}$

hay: $x = \frac{a}{1-c}\,; y = \frac{b}{1-c}\,; z = \frac{a+jb}{1-c}$

Từ đó: $|z|^2 = \frac{(a^2+b^2)}{(1-c)^2}$

và do : $a^2 + b^2 + c^2 - c = 0$

suy ra: $|z|^2 = \frac{c}{1-c}$

hay: $c = \frac{|z|^2}{1+|z|^2}\ ; a = \frac{x}{1+|z|^2}\ ; b = \frac{y}{1+|z|^2}$

Hình chiếu nổi có tính chất đáng lưu ý sau: mỗi đường tròn của mặt phẳng z(đường thẳng cũng được coi là đường tròn có bán kính ∞) chuyển thành một đường tròn trên mặt cầu và ngược lại. Thật vậy để ý $x = \frac{z+\overline{z}}{2}; y = \frac{z+\overline{z}}{2j}$ ta thấy mỗi đường tròn của mặt phẳng z thoả mãn một phương trình dạng:

$$Az\overline{z} + \frac{1}{2}B(z+\overline{z}) - \frac{j}{2}C(z-\overline{z}) + D = 0$$

Trong đó A, B, C, D là các số thực thỏa mãn $A \geq 0$, $B^2 + C^2 > 4AD$, đặc biệt đối vơsi đường thẳng A = 0. Áp dụng các gái trị của z, x, y ta có:

$$(A - D)c + Ba + Cb + D = 0$$

đây là một đường tròn trên mặt cầu S.

§2. HÀM MỘT BIẾN PHỨC

1. Khái niệm về miền và biên của miền:

a. Điểm trong của một tập: Giả sử E là tập hợp điểm trong mặt phẳng phức z và z_o là một điểm thuộc E. Nếu tồn tại một số ε lân cận của z_o nằm hoàn toàn trong E thì z_o được gọi là điểm trong của tập E.

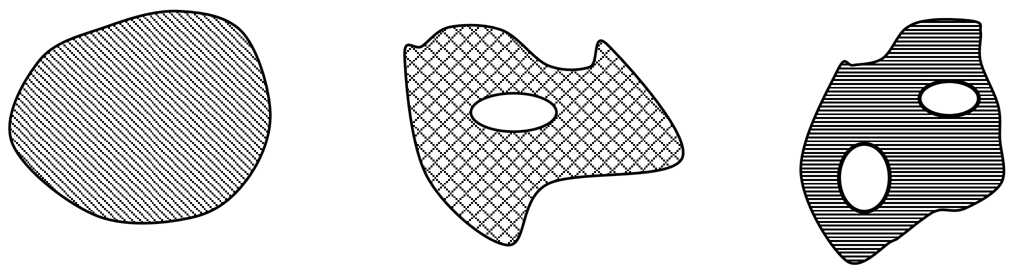
b*. *Biên của một tập: Điểm ζ thuộc E hay không thuộc E được gọi là điểm biên của tập E nếu mọi hình tròn tâm ζ đều chứa cả những điểm thuộc E và không thuộc E. Tập hợp các điểm biên của tập E được gọi là biên của tập E. Nếu điểm η không thuộc E và tồn tại hình tròn tâm η không chứa điểm nào của E thì η được gọi là điểm ngoài của tập E.

Ví dụ: Xét tập E là hình tròn | z | < 1. Mọi điểm của E đều là điểm trong. Biên của E là đường tròn | z | = 1. Mọi điểm | η | > 1 là điểm ngoài của E.

c. Miền: Ta gọi miền trên mặt phẳng phức là tập hợp G có các tính chất sau:

- G là tập mở, nghĩa là chỉ có các điểm trong.
- G là tập liên thông, nghĩa là qua hai điểm tuỳ ý thuộc G, bao giờ cũng có thể nói chúng bằng một đường cong liên tục nằm gọn trong G.

Tập G, thêm những điểm biên gọi là tập kín và kí hiệu là $\overline{G}$. Miền G gọi là bị chặn nếu tồn tại một hình trong bán kính R chứa G ở bên trong.



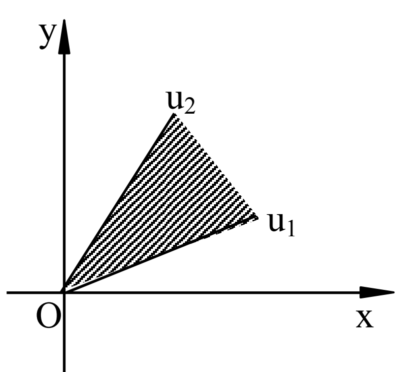
a *b* *c*

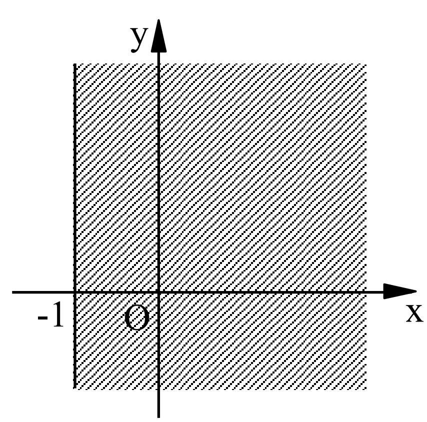
Trên hình a là miền đơn liên, hình b là miền nhị liên và hình c là miền tam liên. Hướng dương trên biên L của miền là hướng mà khi đi trên L theo hướng đó thì phần của miền G kề với người đó luôn nằm bên trái.

Ví dụ 1: Vẽ miền $\frac{\pi}{6} < \arg z < \frac{\pi}{3}$

Ta vẽ tia $\overrightarrow{Ou_1}$ sao cho $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Ou_1}) = \frac{\pi}{6}$. Sau đó vẽ tia $\overrightarrow{Ou_2}$ sao cho $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Ou_2}) = \frac{\pi}{3}$. Mọi điểm z nằm trong u_1Ou_2 đều có argumen thoả mãn điều kiện bài toán. Ngược lại các điểm có argumen nằm giữa $\frac{\pi}{6}$ và $\frac{\pi}{3}$ đều ở trong góc u_1Ou_2

Vậy miền $\frac{\pi}{6} < \arg z < \frac{\pi}{3}$ là phần mặt phẳng giới hạn bởi hai cạnh Ou_1 và Ou_2





Ví dụ 2: Vẽ miền Rez > -1

Mọi điểm nằm bên phải đường thẳng x = -1 đều thoả mãn Rez > -1. Ngược lại mọi điểm z có phần thực lớn hơn -1 đều nằm bên phải đường thẳng x = -1. Vậy miền Rez > -1 là nửa mặt phẳng phức gạch chéo trên hình vẽ.

2. Định nghĩa hàm biến phức:

a. Định nghĩa: Giả sử E là một tập hợp điểm trên mặt phẳng phức. Nếu có một quy luật cho ứng với mỗi số phức $z\in E$ một số phức xác định w thì ta nói rằng w là một hàm số đơn trị của biến phức z xác định trên E và ký hiệu:

$$w = f(z),\ z\in E \qquad (1)$$

Tập E được gọi là miền xác định của hàm số. Nếu ứng với một giá trị $z\in E$ ta có nhiều giá trị của w thì ta nói w là một hàm đa trị. Sau này khi nói đến hàm số mà không nói gì thêm thì đó là một hàm đơn trị.

Ví dụ: Hàm $w = \frac{1}{z}$ xác định trong toàn bộ mặt phẳng phức trừ điểm z = 0

Hàm $w = \frac{z}{z^2+1}$ xác định trong toàn bộ mặt phẳng phức trừ điểm $z = \pm j$ vì $z^2+1 = 0$ khi $z = \pm j$

Hàm $w = z + \sqrt{z+1}$ xác định trong toàn bộ mặt phẳng phức. Đây là một hàm đa trị. Chẳng hạn, với z = 0 ta có $w = \sqrt{1}$. Vì 1 = cos0 + j sin0 nên w có hai giá trị:

$$w_1 = \cos\frac{0}{2} + j\sin\frac{0}{2} = 1$$

$$w_2 = \cos\frac{0+2\pi}{2} + j\sin\frac{0+2\pi}{2} = \cos\pi + j\sin\pi = -1$$

nên ứng với z = 0 ta có hai giá trị $w_1 = 1$ và $w_1 = -1$

b. Phần thực và phần ảo của hàm phức: Cho hàm w = f(z) nghĩa là cho phần thực u và phần ảo v của nó. Nói khác đi u và v cũng là hai hàm của z. Nếu z= x+jy thì có thể thấy u và v là hai hàm thực của các biến thực độc lập x và y. Tóm lại. cho hàm phức w = f(z) tương đương với việc cho hai hàm biến thưc u = u(x, y) và v = v(x, y) và có thể viết w = f(z) dưới dạng:

$$w = u(x, y) + jv(x, y) \qquad (2)$$

Ta có thể chuyển về dạng (2) hàm phức cho dưới dạng (1).

Ví dụ 1: Tách phần thực và phần ảo của hàm phức $w = \frac{1}{z}$

Ta có:

$$w = \frac{1}{z} = \frac{1}{x+jy} = \frac{x-jy}{(x+jy)(x-jy)} = \frac{x-jy}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{jy}{x^2+y^2}$$

Vậy:

$$u = \frac{x}{x^2+y^2} \qquad v = -\frac{y}{x^2+y^2}$$

Ví dụ 2: Tách phần thực và phần ảo của hàm $w = z^3$

Ta có: $w = z^3 = (x+jy)^3 = x^3 + 3jx^2y + 3j^2xy^2 + j^3y^3 = (x^3 - 3xy^2) + j(3x^2y - y^3)$

Vậy: $u = x^3 - 3xy^2 \qquad v = 3x^2y - y^3$

Ví dụ 3: Cho hàm $w = x^2 - y + j(x + y^2)$. Hãy biểu diễn w theo z = x + jy và $\overline{z}$= x - jy

Vì $x = \dfrac{z+\overline{z}}{2}$ và $y = \dfrac{z-\overline{z}}{2j}$ nên:

$$w = \left(\frac{z+\overline{z}}{2}\right)^2 - \frac{j}{2}\left(\overline{z} - z\right) + j\left[\frac{z+\overline{z}}{2} + \left(\frac{\overline{z}-z}{2}\right)^2\right]$$

Rút gọn ta có:

$$w = \frac{1}{4}(1-j)(z^2 + \overline{z^2}) + \frac{1}{2}(1+j)z\overline{z} + jz$$

Ví dụ 4: Cho w = x^2 - y^2 + 2jxy. Hãy biểu diễn w theo z

Ta có: $w = \left(\dfrac{z+\overline{z}}{2}\right)^2 + j^2\left(\dfrac{\overline{z}-z}{2}\right)^2 + 2j\left(\dfrac{z+\overline{z}}{2}\right)\left(\dfrac{\overline{z}-z}{2j}\right)$

Hay: $w = \left(\dfrac{z+\overline{z}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{\overline{z}-z}{2}\right)^2 + 2\left(\dfrac{z+\overline{z}}{2}\right)\left(\dfrac{\overline{z}-z}{2}\right) = \dfrac{z+\overline{z}^2}{2} + \dfrac{z-\overline{z}^2}{2} = z^2$

3. Phép biến hình thực hiện bởi hàm biến phức: Để biểu diễn hình học một hàm biến số thực ta vẽ đồ thị của hàm số đó. Để mô tả hình học một hàm biến số phức ta không thể dùng phương pháp đồ thị nữa mà phải làm như sau:

Cho hàm biến phức w = f(z), $z\in E$. Lấy hai mặt phẳng phức xOy (mặt phẳng z) và uOv (mặt phẳng w). Ví mỗi điểm $z_0\in E$ ta có một điểm $w_0 = f(z_0)$ trong mặt phẳng w. Cho nên về mặt hình học, hàm w = f(z0 xác định một phép biến hình từ mặt phẳng z sang mặt phẳng w. Điểm w_0 được gọi là ảnh của z_0 và z_0 là nghịch ảnh của w_0.

Cho đường cong L có phương trình tham số x = x(t), y = y(t). Ảnh của L qua phép biến hình w = f(z) = u(x, y) + jv(x, y) là tập hợp các điểm trong mặt phẳng w có toạ độ:

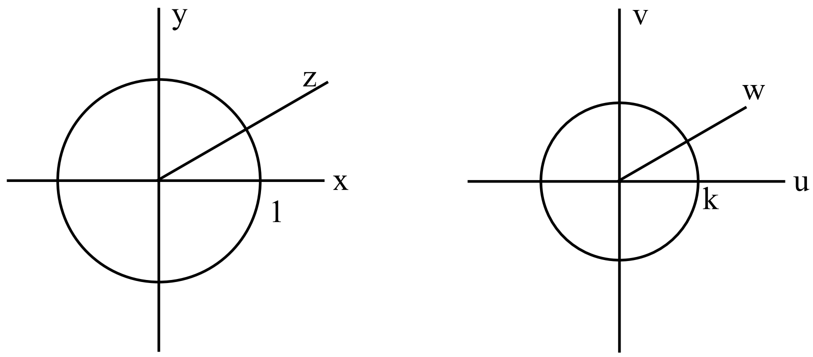
u = u[x(t), y(t)] (3)
v = v[x(t), y(t)]

Thông thường thì ảnh của đường cong L là đường cong Γ có phương trình tham số (3) Muốn được phương trình quan hệ trực tiếp giữa u và v ta khử t trong (3). Muốn tìm ảnh của một miền G ta coi nó được quét bởi họ đường cong L.Ta tìm ảnh Γ của L. Khi L quét nên miền G thì Γ quét nên miền Δ là ảnh của G.

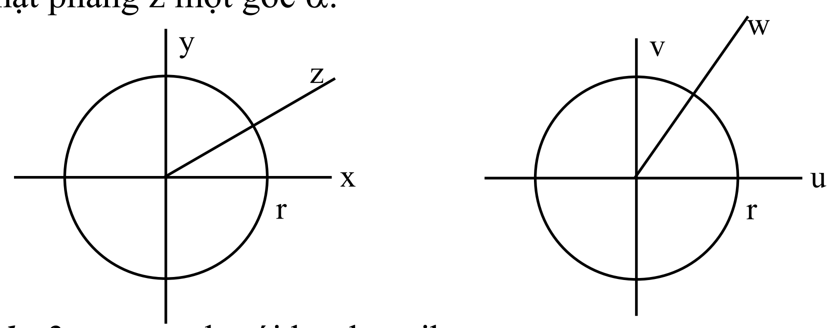
4. Các hàm biến phức thường gặp:

a. Ví dụ 1: Hàm w = kz (k > 0)

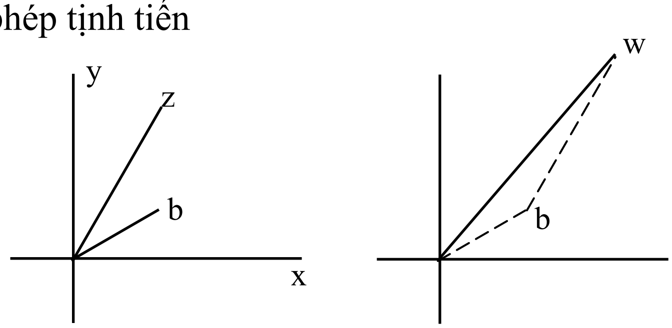
Đặt $z = re^{j\varphi}$, $w = \rho e^{j\theta} = kre^{j\varphi}$. Ta có $\rho = kr$, $\theta = \varphi + 2k\pi$. Vậy đây là một phép co dãn hay phép đồng dạng với hệ số k



b. Ví dụ 2: w = $ze^{j\alpha}$ ($\alpha \in R$)
Đặt $z = re^{j\varphi}$, $w = \rho e^{j\theta} = re^{j\varphi}e^{j\alpha} = re^{j(\alpha+\varphi)}$. Ta có $\rho = r$, $\theta = \varphi + \alpha + 2k\pi$. Như vậy đây là phép quay mặt phẳng z một góc α.



c. Ví dụ 3: w = z + b với $b = b_1 + jb_2$
Đặt z = x + jy w = u + jv, ta có:
$u = x + b_1$; $v = y + b_2$
Vậy đây là một phép tịnh tiến



d. Ví dụ 4: w = az + b với $a = ke^{j\alpha}$ là phép biến hình tuyến tính nguyên. Nó là hợp của ba phép biến hình:

- phép co dãn s = kz
- phép quay $t = s^{j\alpha}$
- phép tịnh tiến w = t + b

e. Ví dụ 5: $w = z^2$
Đặt $z = re^{j\varphi}$, $w = \rho e^{j\theta}$ ta có: $\rho = r^2$; $\theta = 2\varphi + 2k\pi$. Mỗi tia $z = \varphi_o$ biến thành tia $\arg w = 2\varphi_o$, mỗi đường tròn $| z | = r_o$ biến thành đường tròn $| w | = r_o^2$. Nếu D = {z: $0 < \varphi < 2\pi$ } thì f(D) = {-w: $0 < \theta < 2\pi$ } nghĩa là nửa mặt phẳng phức có Imz > 0 biến thành toàn bộ mặt phẳng phức w.

f. Ví dụ 6: w = | z |. z
Đặt $z = re^{j\varphi}$, $w = \rho e^{j\theta}$ ta có: $\rho = r^2$; $\theta = \varphi + 2k\pi$. Miền D = {z: $0 < \varphi < \pi$ } được biến đơn diệp lên chính nó, nghĩa là nửa mặt phẳng phức Imz > 0 được biến thnàh nửa mặt phẳng phức Imw > 0.

g. Ví dụ 7: $w = \sqrt[3]{z}$
Với $z \neq 0$ thì w có 3 giá trị khác nhau. Đặt $z = re^{j\varphi}$, $w = \rho e^{j\theta}$ ta có: $\rho = \sqrt[3]{r}$; $\theta_k = \frac{\varphi}{3} + \frac{2k\pi}{3}$. Miền D = {z: $0 < \varphi < \pi$ } có ảnh là ba miền: $B_1 = \left\{w : 0 < \theta < \frac{\pi}{3}\right\}$; $B_2 = \left\{w : \frac{2\pi}{3} < \theta < \pi\right\}$; $B_3 = \left\{w : -\frac{2\pi}{3} < \theta < -\frac{\pi}{3}\right\}$

§3. ĐẠO HÀM CỦA HÀM PHỨC

1. Giới hạn của hàm biến phức: Định nghĩa giới hạn và liên tục của hàm biến phức cũng tương tự như hàm biến thực.
a. Định nghĩa 1: Giả sử f(z) là hàm xác định trong lân cận của z_o(có thể trừ z_o). Ta nói số phức A là giới hạn của f(z) khi z dần tới z_o nếu khi $| z - z_o | \to 0$ thì $| f(z)-A \to 0$. Nói khác đi, với mọi $\varepsilon > 0$ cho trước, luôn luôn tồn tại $\delta > 0$ để khi $| z - z_o | < \delta$ thì $|f(z)-A| < \varepsilon$.
Ta kí hiệu: $\lim\limits_{z \to z_o} f(z) = A$
Dễ dàng thấy rằng nếu f(z) = u(x,y) +jv(x,y) ; $z_o = x_o + jy_o$; $A = \alpha + j\beta$ thì:

$$\lim_{z \to z_o} f(z) = A \Leftrightarrow \lim_{\substack{x \to x_o \\ y \to y_o}} u(x,y) = \alpha \quad \lim_{\substack{x \to x_o \\ y \to y_o}} v(x,y) = \beta$$

Trong mặt phẳng phức, khi z dần tới z_o nó có thể tiến theo nhiều đường khác nhau. Điều đó khác với trong hàm biến thực, khi x dần tới x_o, nó tiến theo trục Ox.

b. Định nghĩa 2: Ta nói số phức A là giới hạn của hàm w = f(z) khi z dần ra vô cùng, nếu khi $| z | \to +\infty$ thì $| f(z) - A | \to 0$. Nói khác đi, với mọi $\varepsilon > 0$ cho trước, luôn luôn tồn tại R > 0 để khi | z | > R thì $| f(z) - A | < \varepsilon$.
Ta kí hiệu: $\lim\limits_{z \to \infty} f(z) = A$

c. Định nghĩa 3: Ta nói hàm w = f(z) dần ra vô cùng khi z dần tới z_o, nếu khi $| z - z_o | \to 0$ thì $| f(z) | \to +\infty$. Nói khác đi, với mọi M > 0 cho trước lớn tuỳ ý, luôn luôn tồn tại $\delta > 0$ để khi $| z - z_o | < \delta$ thì | f(z) | > M.
Ta kí hiệu: $\lim\limits_{z \to z_o} f(z) = \infty$

d. Định nghĩa 4: Ta nói hàm w = f(z) dần ra vô cùng khi z dần ra vô cùng, nếu khi $| z | \to +\infty$ thì $| f(z) | \to +\infty$. Nói khác đi, với mọi M > 0 cho trước lớn tuỳ ý, luôn luôn tồn tại R > 0 để khi | z | > R thì | f(z) | > M.
Ta kí hiệu: $\lim\limits_{z \to \infty} f(z) = \infty$

2. Hàm liên tục: Ta định nghĩa hàm liên tục như sau:

Định nghĩa: Giả sử w = f(z) là một hàm số xác định trong một miền chứa điểm z_o. Hàm được gọi là liên tục tại z_o nếu $\lim\limits_{z \to z_o} f(z) = f(z_o)$

Dễ thấy rằng nếu f(z) = u(x, y) + jv(x, y) liên tục tại $z_o = x_o + jy_o$ thì u(x, y) và v(x, y) là những hàm thực hai biến, liên tục tại (x_o, y_o) và ngược lại. Hàm w = f(z) liên tục tại mọi điểm trong miền G thì được gọi là liên tục trong miền G.

Ví dụ: Hàm $w = z^2$ liên tục trong toàn bộ mặt phẳng phức vì phần thực $u = x^2 - y^2$ và phần ảo v = 2xy luôn luôn liên tục.

3. Định nghĩa đạo hàm: Cho hàm w = f(z) xác định trong một miền chứa điểm z = x + jy. Cho z một số gia $\Delta z = \Delta x + j\Delta y$. Gọi Δw là số gia tương ứng của hàm:

$$\Delta w = f(z + \Delta z) - f(z)$$

Nếu khi $\Delta z \to 0$ tỉ số $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ dần tới một giới hạn xác định thì giới hạn đó được gọi là đạo hàm của hàm w tại z và kí hiệu là f'(z) hay w'(z) hay $\frac{dw}{dz}$. Ta có:

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \qquad (4)$$

Về mặt hình thức, định nghĩa này giống định nghĩa đạo hàm của hàm biến số thực. Tuy nhiên ở đây đòi hỏi $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ phải có cùng giới hạn khi $\Delta z \to 0$ theo mọi cách.

Ví dụ 1: Tính đạo hàm của $w = z^2$ tại z.

Ta có : $\Delta w = (z + \Delta z)^2 - z^2 = 2z.\Delta z + \Delta z^2$

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = 2z + \Delta z$$

Khi $\Delta z \to 0$ thì $\frac{\Delta w}{\Delta z} \to 2z$. Do vậy đạo hàm của hàm là 2z.

Ví dụ 2: Hàm $w = \overline{z} = x - jy$ có đạo hàm tại z không

Cho z một số gia $\Delta z = \Delta x + j\Delta y$. Số gia tương ứng của w là:

$$\Delta w = \overline{z + \Delta z} - \overline{z} = \overline{z} + \overline{\Delta z} - \overline{z} = \overline{\Delta z} = \Delta x - j\Delta y$$

Nếu $\Delta y = 0$ thì $\Delta z = \Delta x$ khi đó $\Delta w = \Delta x$; $\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\Delta w}{\Delta x} = 1$ nên $\lim\limits_{\substack{\Delta y \to 0 \\ \Delta x \to 0}} \frac{\Delta w}{\Delta x} = 1$

$\Delta x = 0$ thì $\Delta z = -j\Delta y$ khi đó $\Delta w = -j\Delta y$; $\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\Delta w}{j\Delta y} = -1$ nên $\lim\limits_{\substack{\Delta y \to 0 \\ \Delta x \to 0}} \frac{\Delta w}{\Delta x} = -1$

Như vậy khi cho $\Delta z \to 0$ theo hai đường khác nhau tỉ số $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ có những giới hạn khác nhau. Vậy hàm đã cho không có đạo hàm tại mọi z.

3. Điều kiện khả vi: Như thế ta phải tìm điều kiện để hàm có đạo hàm tại z. Ta có định lí sau:

Định lí: Nếu hàm w = f(z) = u(x, y) + jv(x, y) có đạo hàm tại z, thì phần thực u(x, y) và phần ảo v(x, y) của nó có đạo hàm riêng tại (x, y) và các đạo hàm riêng đó thoả mãn hệ thức:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y};\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \qquad (5)$$

(5) là điều kiện Cauchy - Riemann. Đây là điều kiện cần.

Ngược lại nếu các hàm số u(x, y) và v(x, y) có các đạo hàm riêng liên tục, thoả mãn điều kiện C - R thì hàm w = f(z) có đạo hàm tại z = x + jy và được tính theo công thức:

$$f'(z) = u'_x + jv'_x$$

Đây là điều kiện đủ.

Ta chứng minh điều kiện cần: Giả sử f'(z) tồn tại, nghĩa là giới hạn của tỉ số:

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{u(x+\Delta x, y+\Delta y) + jv(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x,y) - v(x,y)}{\Delta x + j\Delta y}$$

$$= \frac{[u(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x,y)] + j[v(x+\Delta x, y+\Delta y) - v(x,y)]}{\Delta x + j\Delta y} = \frac{\Delta u + j\Delta v}{\Delta x + j\Delta y}$$

bằng f'(z) khi $\Delta z \to 0$ theo mọi cách. Đặc biệt khi $\Delta z = \Delta x$ thì:

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\Delta_x u}{\Delta x} + j\frac{\Delta_x v}{\Delta x}$$

Trong đó $\Delta u = \Delta_x u$ là số gia riêng của u đối với x.

Cho $\Delta x \to 0$, theo giả thiết thì vế trái dần tới f'(z). Do đó vế phải cũng có giới hạn là f'(z). Từ đó suy ra:

$$\frac{\Delta_x u}{\Delta x} \text{ có giới hạn là } \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\frac{\Delta_x v}{\Delta x} \text{ có giới hạn là } \frac{\partial v}{\partial x}$$

và: $$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + j\frac{\partial v}{\partial x} \qquad (6)$$

Tương tự, khi $\Delta z = \Delta y$ thì:

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\Delta_y u + j\Delta_y v}{j\Delta y} = \frac{\Delta_y v}{\Delta y} - j\frac{\Delta_y u}{\Delta y}$$

Cho $\Delta z \to 0$ ta có: $$f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} - j\frac{\partial u}{\partial y} \qquad (7)$$

So sánh (6) và (7) ta có:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + j\frac{\partial v}{\partial x} \equiv \frac{\partial v}{\partial y} - j\frac{\partial u}{\partial y}$$

Từ đây ta rút ra điều kiện C - R:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

Tiếp theo ta chứng minh điều kiện đủ: Giả sử các hàm u(x, y) và v(x, y) có các đạo hàm riêng liên tục tại (x, y) và các đạo hàm đó thoả mãn điều kiện C - R. Ta cần chứng minh $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ có giới hạn duy nhất khi $\Delta z \to 0$ theo mọi cách.

Ta viết: $$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\Delta u + j\Delta v}{\Delta x + j\Delta y} \quad (8)$$

Từ giả thiết ta suy ra u(x, y) và v(x, y) khả vi, nghĩa là:

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \alpha_1\Delta x + \alpha_2\Delta y$$

$$\Delta v = \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y + \beta_1\Delta x + \beta_2\Delta y$$

Trong đó $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \to 0$ khi $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0$(tức là $\Delta z \to 0$). Thay vào (8) các kết quả này ta có:

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \alpha_1\Delta x + \alpha_2\Delta y + j\left(\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y + \beta_1\Delta x + \beta_2\Delta y\right)}{\Delta x + j\Delta y}$$

$$= \frac{\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + j\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + j\frac{\partial v}{\partial y}\Delta y}{\Delta x + j\Delta y} + \frac{(\alpha_1 + j\beta_1)\Delta x + (\alpha_2 + j\beta_2)\Delta y}{\Delta x + j\Delta y}$$

Do điều kiện C - R, ta có thể lấy $\Delta x + j\Delta y$ làm thừa số chung trong tử số của số hạng thứ nhất bên vế phải:

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + j\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + j\frac{\partial v}{\partial y}\Delta y = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y - j\frac{\partial u}{\partial y}\Delta x + j\frac{\partial u}{\partial x}\Delta y$$

$$= (\Delta x + j\Delta y)\frac{\partial u}{\partial x} + (\Delta x + j\Delta y)\left(-j\frac{\partial u}{\partial y}\right) = (\Delta x + j\Delta y)\left(\frac{\partial u}{\partial x} - j\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

Vậy: $$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} - j\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{(\alpha_1 + j\beta_1)\Delta x + (\alpha_2 + j\beta_2)\Delta y}{\Delta x + j\Delta y} \quad (9)$$

Chú ý là khi $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0$ thì số hạng thứ 2 bên vế phải dần tới 0. Thật vậy:

$$\left|\frac{\Delta x}{\Delta x + j\Delta y}\right| = \frac{|\Delta x|}{|\Delta x + j\Delta y|} = \frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \le 1$$

$$\left|(\alpha_1 + j\beta_1)\frac{\Delta x}{\Delta x + j\Delta y}\right| \le |\alpha_1 + j\beta_1|$$

Khi $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0$ thì $\alpha_1 \to 0$ và $\beta_1 \to 0$, Vậy $(\alpha_1 + j\beta_1)\frac{\Delta x}{\Delta x + j\Delta y} \to 0$

Tương tự ta chứng minh được rằng $(\alpha_2 + j\beta_2)\frac{\Delta y}{\Delta x + j\Delta y} \to 0$

Cho nên nếu cho $\Delta z \to 0$ theo mọi cách thì vế phải của (9) sẽ có giới hạn là $\frac{\partial u}{\partial x} - j\frac{\partial u}{\partial y}$.

Vậy vế trái cũng dần tới giới hạn đó, nghĩa là ta đã chứng minh rằng tồn tại $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - j\frac{\partial u}{\partial y}$.

Do điều kiện C - R nên ta có thể tính đạo hàm bằng nhiều biểu thức khác nhau:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + j\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - j\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - j\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + j\frac{\partial v}{\partial x}$$

Ví dụ 1: Tìm đạo hàm của hàm số $w = e^x\cos y + je^x\sin y$.

Hàm có đạo hàm tại mọi điểm vì điều kiện C - R luôn luôn thoả mãn.

Thật vậy: $u = e^x\cos y$, $v = e^x\sin y$

$$u'_x = e^x\cos y = v'_y$$

$$u'_y = -e^x\sin y = -v'_x$$

$$\frac{dw}{dz} = e^x\cos y + je^x\sin y = w$$

Ví dụ 2: Tìm đạo hàm của hàm $w = x + 2y + j(2x + y)$

$u = x + 2y$

$v = 2x + y$

$u'_x = 1 = v'_y, \quad u'_y = 2 \neq -v'_x = -2$

Ví dụ 3: Xét sự khả vi của hàm $w = z^2 = (x^2 - y^2) + 2jxy$.

Vì $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x = \frac{\partial v}{\partial y}; \frac{\partial u}{\partial y} = -2y = \frac{\partial v}{\partial x}$ tại mọi điểm hữu hạn. $w = z^2$ khả vi tại mọi điểm $z \neq \infty$ và $z' = 2z$.

Ví dụ 4: Xét sự khả vi của hàm $w = z.\mathrm{Re}z = x^2 + jxy$.

Do hệ phương trình:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x = x = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0 = -y = \frac{\partial v}{\partial x}$$

chỉ thoả mãn tại điểm (0, 0) nên w chỉ khả vi tại $z = 0$

4. Các quy tắc tính đạo hàm: Vì định nghĩa đạo hàm của hàm biến phức giống định đạo hàm của hàm biến thực, nên các phép tính đạo hàm của tổng, tích, thương hàm hợp hoàn toàn tương tự như đối với hàm thực.

Giả sử các hàm f(z) và g(z) có đạo hàm tại z. Khi đó:

$[\, f(z) + g(z) \,]' = f'(z) + g'(z)$

$$[\, f(z).g(z)\,]' = f'(z).g(z) + g'(z).f(z)$$

$$\left[\frac{f(z)}{g(z)}\right]' = \frac{f'(z).g(z) - f(z).g'(z)}{g^2(z)}$$

Nếu w = f(z) , z = φ(ζ) đều là các hàm có đạo hàm, thì đạo hàm của hàm hợp w = f[φ(ζ)] là:

$$\frac{dw}{d\zeta} = \frac{dw}{dz}.\frac{dz}{d\zeta}$$

Nếu f(z) là hàm đơn diệp có hàm ngược là h(w), thì:

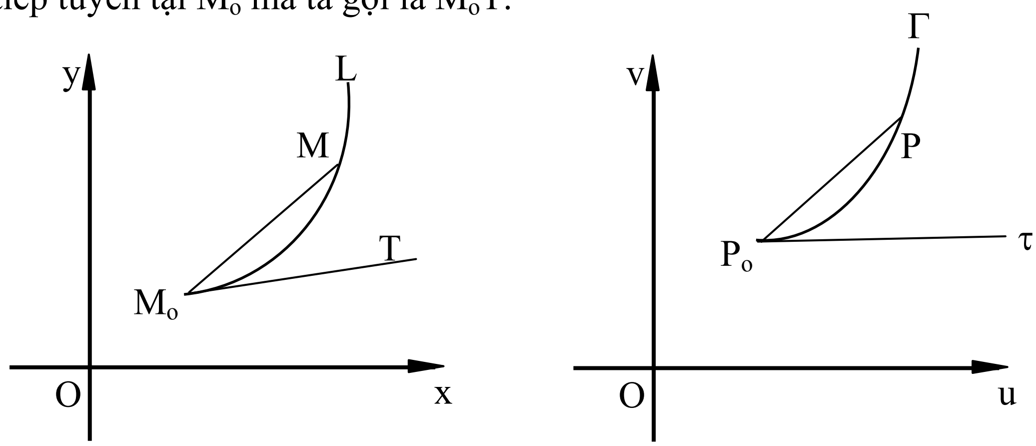
$$f'(z) = \frac{1}{h'(w)},\ \ h'(w) \neq 0$$

5. Ý nghĩa hình học của đạo hàm: Giả thiết hàm w = f(z) có đạo hàm tại mọi điểm trong lân cận điểm z_o và $f'(z_o) \neq 0$.

a. Ý nghĩa hình học của Arg f'(z_o): Phép biến hình w = f(z) biến điểm z_o thành điểm $w_o = f(z_o)$. Gọi M_o là toạ vị của z_o và P_o là toạ vị của w_o. Cho một đường cong bất kì đi qua M_o và có phương trình là z(t) = x(t) + jy(t). Giả sử:

$$z'(t_o) = x'(t_o) + jy'(t_o) \neq 0$$

nghĩa là hai số $x'(t_o)$ và $y'(t_o)$ không đồng thời triệt tiêu khi $t = t_o$. Vậy đường cong L có tiếp tuyến tại M_o mà ta gọi là M_oT.



Gọi Γ là ảnh của đường cong L qua phép biến hình. Hiển nhiên đường cong đi qua điểm P_o và có phương trình w = w(t) = f[z(t)]. Theo công thức đạo hàm hàm hợp ta có $w'(t_o) = f'(z_o).z'(t_o)$. Theo giả thiết thì $f'(z_o) \neq 0$, $z'(t_o) \neq 0$ nên $w'(t_o) \neq 0$. Như vậy tại P_0, đường cong Γ có tiếp tuyến $P_o\tau$. Bây giờ ta lấy z là điểm khác thuộc L. Nó có ảnh là $w \in \Gamma$. Theo định nghĩa đạo hàm:

$$\lim_{z\to z_o} \frac{w - w_0}{z - z_0} = f'(z_o) \qquad (12)$$

Vậy $\quad \operatorname{Arg} f'(z_o) = \lim_{z\to z_o}\left[\operatorname{Arg}\frac{w - w_o}{z - z_o}\right] = \lim_{z\to z_o}\left[\operatorname{Arg}(w - w_o) - \operatorname{Arg}(z - z_o)\right]$

Gọi M, P lần lượt là toạ vị của z và w thì đẳng thức trên được viết là:

$$\text{Arg}f'(z_o) = \lim_{\substack{P\to P_o \\ P\in\Gamma}}\left(\overrightarrow{Ou}, \overrightarrow{P_oP}\right) - \lim_{\substack{M\to M_o \\ P\in L}}\left(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{M_oM}\right)$$

Vì khi $P \to P_o$, cát tuyến P_oP dần tới tiếp tuyến $P_o\tau$ với Γ; khi $M \to M_o$, cát tuyến M_oM dần tới tiếp tuyến M_oT với L nên:

$$\text{Arg}f'(z_o) = \left(\overrightarrow{Ou}, \overrightarrow{P_o\tau}\right) - \left(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{M_oT}\right) \tag{13}$$

hay: $\left(\overrightarrow{Ou}, \overrightarrow{P_o\tau}\right) = \text{Arg}f'(z_o) + \left(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{M_oT}\right)$

Từ đó suy ra Argf'(z_o) là góc mà ta cần quay tiếp tuyến M_oT với đường cong L tại M_o để được hướng của tiếp tuyến $P_o\tau$ với đường cong Γ tại P_o.

Bây giờ ta xét hai đường cong bất kì L và L' đi qua M_o, lần lượt có tiếp tuyến tại M_o là M_oT và M_oT'. Gọi Γ và Γ' là ảnh của L và L'qua phép biến hình w = f(z). Γ và Γ' lần lượt có tiếp tuyến tại P_o là $P_o\tau$ và $P_o\tau'$. Theo kết quả trên:

$$\text{Arg}f'(z_o) = \left(\overrightarrow{Ou}, \overrightarrow{P_o\tau}\right) - \left(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{M_oT}\right)$$

Do (13) được thiết lập với L và Γ bất kì nên:

$$\text{Arg}f'(z_o) = \left(\overrightarrow{Ou}, \overrightarrow{P_o\tau'}\right) - \left(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{M_oT'}\right)$$

Từ đó suy ra:

$$\left(\overrightarrow{Ou}, \overrightarrow{P_o\tau'}\right) - \left(\overrightarrow{Ou}, \overrightarrow{P_o\tau}\right) = \left(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{M_oT'}\right) + \left(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{M_oT}\right)$$

Vậy góc giữa hai đường cong L và L' bằng góc giữa hai ảnh Γ và Γ' cả về độ lớn và hướng. Ta nói phép biến hình w = f(z) bảo toàn góc giữa hai đường cong hay phép biến hình w = f(z) là bảo giác.

b. Ý nghĩa của | f'(z_o) |: Do (12) ta có:

$$|f'(z_0)| = \lim_{z\to z_o}\left|\frac{w-w_o}{z-z_o}\right| = \lim_{z\to z_o}\frac{|w-w_o|}{|z-z_o|} = \frac{\lim\limits_{P\to P_o} P_oP}{\lim\limits_{M\to M_o} M_oM}$$

Với $\Delta z = z - z_o$ khá nhỏ thì Δw cũng khá nhỏ và ta có:

$$|f'(z_0)| \approx \frac{P_oP}{M_oM}$$

hay: $P_oP \approx |f'(z_0)|.M_oM$ (15)

Nếu $|f'(z_o)| > 1$ thì $P_oP > M_oM$ và ta có một phép biến hình dãn. Nếu $|f'(z_o)| < 1$ thì $P_oP < M_oM$ và ta có một phép biến hình co.

Công thức (15) đúng với mọi cặp M và P nên ta nói $|f'(z_o)|$ là hệ số co dãn của phép biến hình tại z_o.

Trên đây ta đã giả thiết $f'(z_o) \neq 0$. Nếu $f'(z_o) = 0$ thì kết quả trên không đúng nữa.

Ví dụ: Xét hàm $w = z^2$.

Qua phép biến hình này, nửa trục dương Ox (argz = 0), có ảnh là nửa trục dương Ou(argw = 0). Nửa trục Oy dương $\left(\arg z = \frac{\pi}{2}\right)$ có ảnh là nửa trục Ou âm (argw = π).

Như vậy góc giữa hai tia Ox và Oy không được bảo toàn qua phép biến hình. Sở dĩ như vậy vì w’(0) = 0.

6. Hàm giải tích:

a. Định nghĩa 1: Giả sử G là một miền mở. Nếu hàm w = f(z) có đạo hàm f’(z) tại mọi điểm thuộc G thì nó được gọi là giải tích trong miền G. Hàm số w = f(z) được gọi là giải tích tại điểm z nếu nó giải tích trong một miền lân cận nào đó của z. Trên kia ta chỉ định nghĩa hàm số giải tích trong một miền mở. Giả sử miền G giới hạn bởi đường cong kín L. Nếu hàm w = f(z) giải tích trong một miền mở chứa $\overline{G}$, thì để cho gọn ta nói nó giải tích trong miền kín $\overline{G}$.

b. Định nghĩa 2: Những điểm tại đó w = f(z) không giải tích, được gọi là các điểm bất thường của hàm số đó.

Ví dụ:- Hàm $w = z^2$ giải tích trong toàn C

- Hàm $w = e^x\cos y + j\,e^x\sin y$ giải tích trong toàn C

- Hàm $w = \overline{z}$ không giải tích $\forall z \in C$

- $w = \dfrac{1}{z}$ giải tích trong toàn C trừ z = 0. Điểm z = 0 là điểm bất thương duy nhất của hàm

- Hàm w = zRez chỉ thoả mãn điều kiện C - R tại z = 0. Vậy nó không giải tích trong toàn C.

c. Tính chất của hàm giải tích:

- Tổng, tích của hai hàm giải tích là một hàm giải tích

- Thương của hai hàm giải tích là một hàm giải tích trừ điểm làm cho mẫu số triệt tiêu.

- Hợp của hai hàm giải tích là một hàm giải tích.

- Hàm ngược của một hàm giải tích đơn diệp có đạo hàm khác không là một hàm giải tích đơn diệp.

Ví dụ: - $w = z^2 + z$ là một hàm giải tích trong toàn C vì nó là tổng của hai hàm giải tích trong C

- $w = \dfrac{z}{z^2+1}$ giải tích tại mọi điểm trừ $z = \pm j$

7. Quan hệ giữa hàm giải tích và hàm điều hoà: Cho hàm $w = f(z) = u(x,y) + jv(x,y)$ giải tích trong miền đơn liên G. Phần thực u(x, y) và phần ảo v(x, y) là những hàm điều hoà trong G, nghĩa là chúng thoả mãn phương trình Laplace:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad \Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \quad (x,y) \in G$$

Thật vậy, theo giả thiết, điều kiện C - R thoả mãn, tức là:

$$u'_x = v'_y \qquad u'_y = -v'_x$$

Lấy đạo hàm hai vế của đẳng thức thứ nhất theo x và đạo hàm hai vế đẳng thức thứ hai theo y ta có:

$$u''_{xx} = v''_{yx} \qquad u''_{y} = -v''_{xy}$$

Cộng hai đẳng thức ta có: $\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

Tương tự ta chứng minh được: $\Delta v = \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$

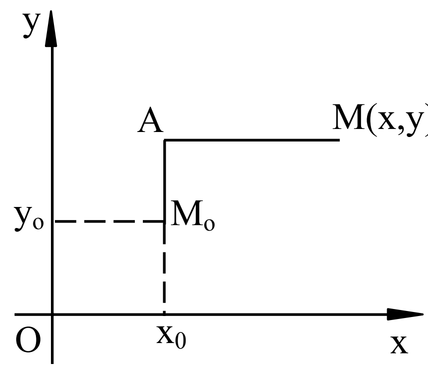
Ngược lại, cho trước hai hàm điều hoà bất kì u(x, y) và v(x, y) thì nói chung, hàm w = u(x, y)+ jv(x, y) không giải tích. Muốn w = u + jv giải tích thì u và v phải là hai hàm điều hoà liên hợp, nghĩa là thoả mãn điều kiện C - R. Vì cho trước một hàm điều hoà, ta có thể tìm được hàm điều hoà liên hợp với nó nên cho trước phần thực hay phần ảo của một hàm giải tích ta tìm được hàm giải tích đó. Phương pháp tìm hàm v(x, y) điều hoà liên hợp với u(x, y) cho trước trong một miền đơn liên G như sau:

Do điều kiện C - R ta biết được các đạo hàm riêng của v(x, y) là:

$$v'_x = -u'_y \qquad v'_y = u'_x$$

Vậy bài toán được đưa về tìm hàm v(x, y) biết rằng trong miền đơn liên G nó có vi phân :

$$dv = v'_x dx + v'_y dy = -u'_y dx + u'_x dy$$



Bài toán này có nghĩa vì vế phải là vi phân toàn phần. Thật vậy, nếu đặt $P = -u'_y$ và $Q = u'_x$ thì điều kiện $\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} = u''_{xx} + u''_{yy} = 0$ được thoả mãn. Theo kết quả giải tích thì:

$$v(x, y) = \int_{(x_o, y_o)}^{(x,y)} -u'_y dx + u'_x dy + C \qquad (16)$$

Trong đó tích phân (không phụ thuộc đường đi) được lấy dọc theo đường bất kì nằm trong G, đi từ điểm (x_o, y_o) đến điểm (x, y), còn C là một hằng số tuỳ ý. Nếu tích phân được tính dọc theo đường gấp khúc M_oAM thì:

$$v(x, y) = -\int_{x_o}^{x} u'_y(x, y)dx + \int_{y_o}^{y} u'_x(x, y)dy + C$$

Ví dụ 1: Cho hàm u = x^2 - y^2 +2x. Tìm v(x,y) và f(z)

Đây là một hàm điều hoà trong toàn mặt phẳng vì $\Delta u = 0 \ \forall (x,y)$.

Theo (16) ta chọn $x_o = y_o = 0$

$$v(x, y) = \int_0^x 2y dx + \int_0^y 2dy + C = 2xy + 2y + C$$

Vậy: f(z) = u + jv = x^2 - y^2 +2x + j(2xy + 2y + C) = (x^2 + 2jxy - y^2) + (2x + 2jy) + jC
= $(x + jy)^2$ + 2(x + jy) = jC = z^2 + 2z + jC

f(z) là một hàm giải tích trong toàn C.

Ví dụ 2: Cho hàm $u(x, y) = \dfrac{1}{2}\ln(x^2 + y^2)$. Tìm f(z)

Đây là một hàm điều hoà trong toàn bộ miền G trừ điểm gốc toạ độ. Dùng (16) ta xác định được hàm điều hoà liên hợp:

$$v(x,y) = \mathrm{Arg}(x + jy) + C$$

Vì Argz xác định sai khác $2k\pi$, nên $v(x, y)$ là một hàm đa trị.

CHƯƠNG 2: PHÉP BIẾN HÌNH BẢO GIÁC VÀ CÁC HÀM SƠ CẤP CƠ BẢN

§1. KHÁI NIỆM VỀ BIẾN HÌNH BẢO GIÁC

1. Phép biến hình bảo giác:

a. Định nghĩa: Một phép biến hình được gọi là bảo giác tại z nếu nó có các tính chất:

- Bảo toàn góc giữa hai đường cong bất kì đi qua điểm z (kể cả độ lớn và hướng)

- Có hệ số co dãn không đổi tại điểm đó, nghĩa là mọi đường cong đi qua z đều có hệ số co dãn như nhau qua phép biến hình.

Nếu phép biến hình là bảo giác tại mọi điểm của miền G thì nó được gọi là bảo giác trong miền G.

b. Phép biến hình thực hiện bởi hàm giải tích: Cho hàm w = f(z) đơn diệp, giải tích trong miền G. Do ý nghĩa hình học của f'(z) ta thấy rằng phép biến hình được thực hiện bởi hàm w = f(z) là bảo giác tại mọi điểm mà $f'(z) \neq 0$.

Nếu chỉ xét trong một lân cận nhỏ của điểm z, thì phép biến hình bảo giác là một phép đồng dạng do tính chất bảo toàn góc. Các góc tương ứng trong hai hình là bằng nhau. Mặt khác nếu xem hệ số co dãn là không đổi thì tỉ số giữa hai cạnh tương ứng là không đổi.

Ngược lại người ta chứng minh được rằng phép biến hình w = f(z) đơn diệp là bảo giác trong miền G thì hàm w = f(z) giải tích trong G và có đạo hàm $f'(z) \neq 0$.

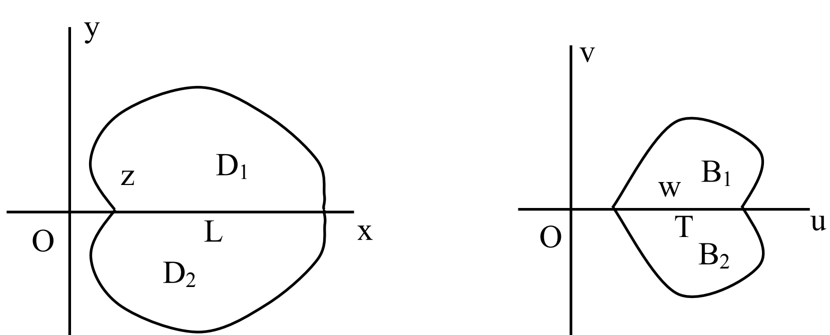
2. Bổ đề Schwarz: Giả sử hàm f(z) giải tích trong hình tròn | z | < R và f(0) = 0. Nếu | z) | ≤ M với mọi z mà | z | < R thì ta có:

$$|f(z)| \leq \frac{M}{R}|z|, \ |z| < R$$

Trong đó đẳng thức xảy ra tại z_1 với 0 < | z | < R chỉ khi $f(z) = \frac{Me^{j\alpha}}{R}z$, α thực.

3. Nguyên lí đối xứng: Trước hết ta thừa nhận một tính chất đặc biệt của hàm biến phức mà hàm biến số thực không có, đó là tính duy nhất, được phát biểu như sau: Giả sử hai hàm f(z) và g(z) cùng giải tích trong miền D và thoả mãn f(z) = g(z) trên một cung L nào đó nằm trong D, khi đó f(z) = g(z) trên toàn miền D.

Giả sử D_1 và D_2 nằm kề nhau và có biên chung là L



Giả sử $f_1(z)$ giải tích trong D_1 và $f_2(z)$ giải tích trong D_2. Nếu $f_1(z) = f_2(z)$ trên L thì ta gọi $f_2(z)$ là thác triển giải tích của $f_1(z)$ qua L sang miền D_2. Theo tính duy nhất của hàm giải tích nếu $f_3(z)$ cũng là thác triển giải tích của $f_1(z)$ qua L sang miền D_2 thì ta phải có $f_3(z) = f_2(z)$ trong D_2. Cách nhanh nhất để tìm thác triển giải tích của một hàm cho trước là áp dụng nguyên lí đối xứng sau đây:

Giả sử biên của miền D_1 chứa một đoạn thẳng L và $f_1(z)$ biến bảo giác D_1 lên B_1 trong đó L chuyển thành đoạn thẳng T thuộc biên của B_1. Khi đó tồn tại thác triển giải tích $f_2(z)$ của $f_1(z)$ qua L sang miền D_2 nằm đối xứng với D_1 đối với L. Hàm $f_2(z)$ biến bảo giác D_2 lên B_2nằm đối xứng với B_1 đối với T và hàm:

$$f(z) = \begin{cases} f_1(z) & \text{trong}\, D_1 \\ f_1(z) = f_2(z) & L \\ f_2(z) & \text{trong}\, D_2 \end{cases}$$

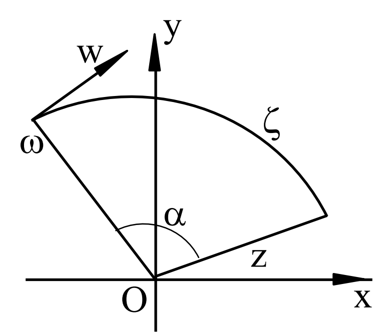
biến bảo giác D thành B.

Nguyên lí đối xứng thường dùng để tìm phép biến hình bảo giác hai miền đối xứng cho trước.

§2. CÁC PHÉP BIẾN HÌNH QUA CÁC HÀM SƠ CẤP

1. Phép biến hình tuyến tính: Xét hàm tuyến tính w = az + b trong đó a, b là các hằng số phức. Giả thiết $a \neq 0$. Nếu $a = |a|e^{j\alpha}$ thì $w = |a|e^{j\alpha}z + b$. Phép biến hình tuyến tính là bảo giác trong toàn mặt phẳng phức vì $f'(z) = a \neq 0\ \forall z \in C$. Hàm tuyến tính có thể coi là hợp của 3 hàm sau:

- $\zeta = kz$ $(k = |a| > 0)$
- $\omega = e^{j\alpha}.\zeta$ $(\alpha = \text{Arg}a)$
- $w = \omega + b$



Nếu biểu diễn các điểm ζ, ω, w trong cùng một mặt phẳng thì dựa vào ý nghĩa hình học của phép nhân và phép cộng các số phức ta suy ra rằng:

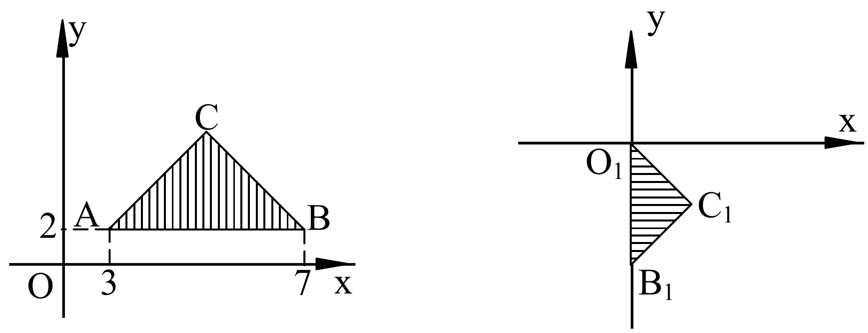
- điểm ζ nhận được từ điểm z bằng phép co dẫn với hệ số k

- điểm ω nhận được từ điểm ζ bằng phép quay tâm O, góc quay α.

- điểm w nhận được từ điểm ω bằng phép tịnh tiến xác định bởi vec tơ biểu diễn số phức b.

Như vậy muốn được ảnh w của z ta phải thực hiện liên tiếp một phép co dãn, một phép quay và một phép tịnh tiến. Tích của 3 phép biến hình trên là một phép đồng dạng. Vậy phép biến hình tuyến tính là một phép đồng dạng. Nó biến một hình bất kì thành một hình đồng dạng với hình ấy. Đặc biệt, ảnh của một đường tròn là một đường tròn, ảnh của một đường thẳng là một đường thẳng.

Ví dụ: Tìm hàm w = f(z) biến hình tam giác vuông cân A(3+ 2j), B(7 + 2j), C(5 + 4j) thành tam giác vuông cân có đỉnh tại O_1, B_1(-2j) và C_1(1 - j)



Vì các tam giác ABC và $O_1B_1C_1$ đồng dạng nên phép biến hình được thực hiện bằng một hàm bậc nhất w = az + b. Phép biến hình này có thể phân tích thành các phép biến hình liên tiếp sau đây:

* phép tịnh tiến từ A về gốc, xác định bằng vec tơ (-3 - 2j). Phép tịnh tiến này được xác định bởi hàm $\zeta = z - (3 + 2j)$

* phép quay quanh gốc một góc $-\frac{\pi}{2}$, ứng với hàm $\omega = \zeta e^{-j\frac{\pi}{2}}$

* phép co dãn tâm O, hệ số $k = \frac{O_1B_1}{AB} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, được thực hiên bằng hàm $w = \frac{1}{2}\omega$

Vậy: $w = \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{2}}(z - 3 - 2j) = -\frac{j}{2}(z - 3 - 2j) = -jz + \frac{3}{2}j - 1$

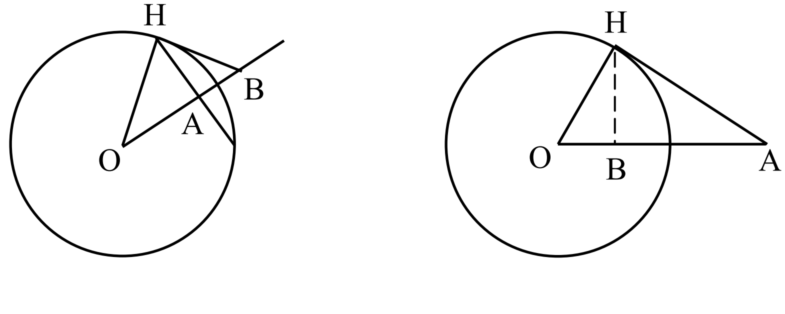
2. Phép nghịch đảo:

a. Định nghĩa: Hai điểm A và B được gọi là đối xứng đối với đường tròn C' tâm O, bán kính R nếu chúng cùng nằm trên một nửa đường thẳng xuất phát từ O và thoả mãn đẳng thức:

$OA.OB = R^2$

Dĩ nhiên, vì $OB = \frac{R^2}{OA} = \frac{R}{OA}.R$ nên nếu OA < R $\left(\frac{R}{OA} > 1\right)$ thì OB > R. Ngược lại nếu OA > R thì OB < R. Nghĩa là trong hai điểm A và B thì một điểm nằm trong và một điểm nằm ngoài đường tròn.

Nếu A nằm trong đường tròn thì muốn được B kẻ đường AH ⊥ OA và sau đó vẽ tiếp tuyến HB.



Nếu A nằm ngoài đường tròn thì muốn được điểm B ta vẽ tiếp tuyến AH, sau đó kẻ HB $\perp$ OA.

b. Định lí 1: Nếu A và B đối xứng với đường tròn C' và C" là đường tròn bất kì đi qua A và B thì C' và C" trực giao với nhau.

Chứng minh: Gọi I là tâm và r là bán kính của C". Kí hiệu $P_{C''}O$ là phương tích của điểm O đối với đường tròn C".

Theo giả thiết vì A và B đối xứng qua C' nên OA.OB = R^2. Mặt khác theo cách tính phương tích ta có:

$$P_{C''}O = OA.OB = OI^2 - r^2$$

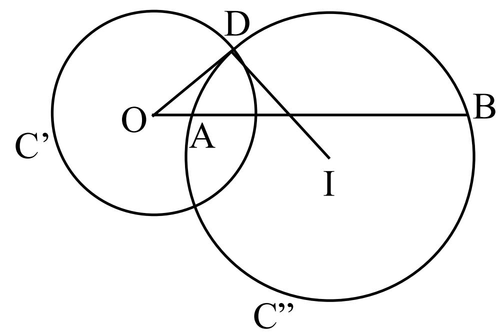
Từ đó suy ra:

$$R^2 = OI^2 - r^2$$

hay:

$$OI^2 = R^2 + r^2 = OD^2 + ID^2.$$

Vậy OD $\perp$ DI



c. Định lí 2: Giả sử hai đường tròn C' và C" cùng trực giao với đường tròn C. Nếu C' và C" cắt nhau tại A và B thì hai điểm A và B đối xứng qua C

Chứng minh: Gọi I_1 và I_2 lần lượt là tâm của đường tròn C' và C"; r_1 và r_2 là bán kính của chúng. Gọi R là bán kính của đường tròn C. Ta có:

$$P_{C'}O = OI_1^2 - r_1^2$$

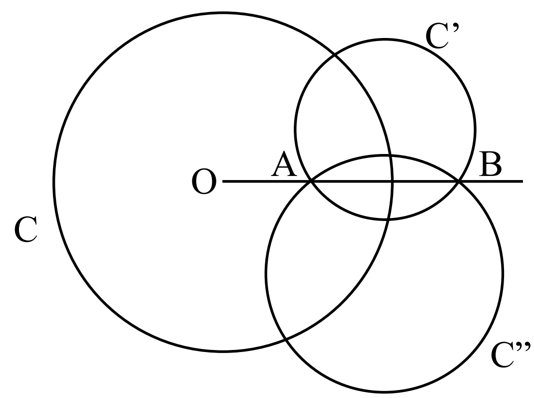
$$P_{C''}O = OI_2^2 - r_2^2$$

Nhưng do giả thiết trực giao ta có:

$$OI_1^2 - r_1^2 = R^2$$

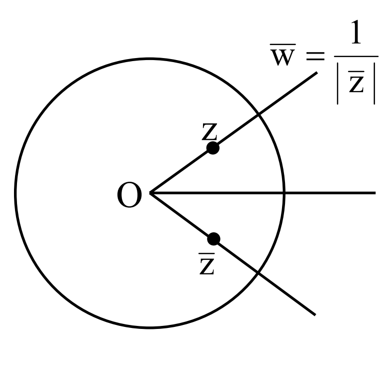
$$OI_2^2 - r_2^2 = R^2$$

Vây: $P_{C'}O = P_{C''}O$



Vì điểm O có cùng phương tích với cả hai đường tròn C' và C" nên O nằm trên trục đẳng phương AB của cặp vòng tròn đó. Mặt khác do $P_{C'}O$ = OA.OB = R^2 nên A và B đối xứng qua C.

d. Phép biến hình $\boldsymbol{w = \dfrac{1}{z}}$: Phép biến hình này đơn diệp, biến mặt phẳng phức mở rộng z (tức mặt phẳng phức có bổ sung thêm điểm z = ∞) lên mặt phẳng phức mở rộng w. Ảnh của điểm z = 0 là điểm w = ∞. Ngược lại ảnh của điểm z = ∞ là điểm w = 0. Vì $w' = -\dfrac{1}{z^2}$ nên phép biến hình bảo giác tại z $\neq$ 0 và z $\neq$ ∞.



Ta sẽ nêu ra cách tìm ảnh của một điểm z bất kì. Chú ý là hai điểm z và $\frac{1}{\overline{z}} = \overline{w}$ đối xứng nhau qua đường tròn đơn vị vì $\text{Arg}\frac{1}{\overline{z}} = -\text{Arg}\overline{z} = \text{Arg}z$. Mặt khác $|z|.\frac{1}{|\overline{z}|} = 1$.

Vậy muốn được w, ta dựng $\overline{w}$ đối xứng với z qua đường tròn đơn vị rồi lấy đối xứng qua trục thực. Nói khác đi, phép biến hình $w = \frac{1}{z}$ là tích của hai phép đối xứng:

* phép đối xứng qua đường tròn đơn vị
* phép đối xứng qua trục thực

e. Tính chất của phép biến hình: ☞Phép biến hình $w = \frac{1}{z}$ biến:

* một đường tròn đi qua gốc toạ độ thành một đường thẳng
* một đường tròn không đi qua gốc toạ độ thành một đường tròn
* một đường thẳng đi qua gốc toạ độ thành một đương thẳng
* một đường thẳng không đi qua gốc toạ độ thành một đường tròn đi qua gốc toạ độ.

Nếu coi đường thẳng là một đường tròn có bán kính vô hạn thì tính chất trên được phát biểu gọn lại là: Phép biến hình $w = \frac{1}{z}$ biến một đường tròn thành một đường tròn.

Chứng minh: Xét đường cong C' có phương trình:

$$A(x^2 + y^2) + 2Bx + 2Cy + D = 0$$

Trong đó A, B, C, D là những hằng số thực. Viết phương trình ấy dưới dạng phức ta có:

$$Az\overline{z} + Ez + \overline{Ez} + D = 0 \qquad (1)$$

Trong đó E = B - jC

Nếu A ≠ 0, D = 0 thì C' là đường tròn đi qua gốc toạ độ. Nếu A = 0 thì C' là đường thẳng. Nếu A = D = 0 thì C' là đường thẳng đi qua gốc toạ độ. Ảnh của C' qua phép biến hình $w = \frac{1}{z}$ là đường cong L có phương trình:

$$A\frac{1}{w}.\frac{1}{\overline{w}} + \frac{E}{w} + \frac{\overline{E}}{\overline{w}} + D = 0$$

hay: $Dw\overline{w} + \overline{E}w + E\overline{w} + A = 0$ (2)

Nếu D = 0 thì L là đường thẳng. Nếu D = A = 0 thì L là đường thẳng đi qua gốc toạ độ. Nếu A = 0 thì L là đường tròn đi qua gốc toạ độ.

☞ Giả sử z_1 và z_2 là hai điểm đối xứng với nhau qua đường tròn C'. Khi đó nếu gọi w_1 và w_2 và L là ảnh của z_1, z_2 và C' qua phép biến hình $w = \frac{1}{z}$ thì w_1 và w_2 đối xứng nhau qua C. Nói khác đi, phép biến hình $w = \frac{1}{z}$ bảo toàn tính đối xứng qua một đường tròn.

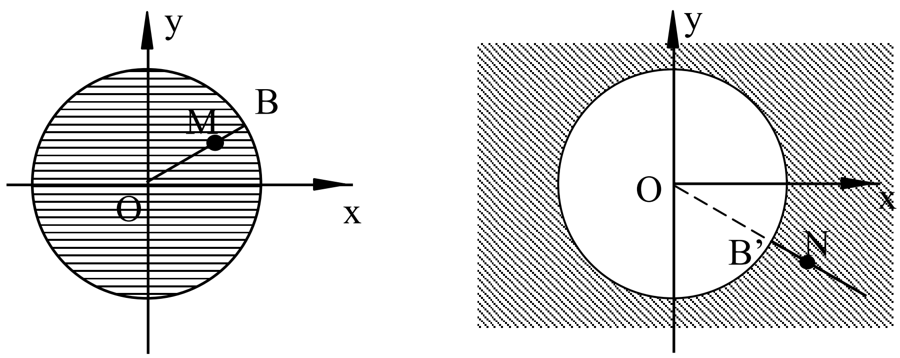
Chứng minh: Lấy 2 đường tròn bất kì P và Q qua z_1 và z_2.Theo định lí 1 thì P và Q cùng trực giao với C'. Qua phép biến hình, P và Q sẽ biến thành hai đường tròn L_1 và L_2 cắt nhau tại w_1 và w_2. Vì phép biến hình bảo giác nên L_1 và L_2 trực giao với C'. Theo định lí 2 thì w_1 và w_2 sẽ đối xứng với nhau qua L.

Ví dụ 1: Tìm ảnh của hình tròn | z | < 1 qua phép biến hình $w = \frac{1}{z}$

Dễ dàng thấy rằng ảnh của đường tròn | z | = a (0 < a < 1) là đường tròn $|w| = \frac{1}{a}$. Khi a biến thiên từ 0 đến 1, thì $\frac{1}{a}$ giảm từ +∞ đến 1. Trong khi đường tròn | z | = a quét nên hình tròn | z | < 1 thì ảnh của nó quét nên miền | w | > 1.

Tóm lại ảnh của miền | z | < 1 là miềm | w | > 1. Ảnh của đường tròn | z | = 1 là đường tròn | w | + 1.

Ví dụ 2: Tìm ảnh của bán kinh OB: argz = π/6; | z | < 1 qua phép biến hình w = 1/z



Lấy M bất kì trên OB. Thực hiện liên tiếp phép đối xứng qua đường tròn đơn vị và phép đối xứng qua trục thực ta được ảnh N của nó nằm trên nửa đường thẳng sao cho:

OM.ON = 1

Khi M chạy từ O đến B, N chạy từ ∞ đến B'.

3. Phép biến hình phân tuyến tính $\mathbf{w = \frac{az+b}{cz+d}}$: Phép biến hình chỉ có ý nghĩa khi c và d không đồng thời triệt tiêu. Ta không xét trường hợp ad = bc vì đây là trường hợp tầm thường . Thật vậy nếu ad = bc thì ta có thể viết:

$$w = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{adz+bd}{cbz+db}.\frac{b}{d} = \frac{b}{d}$$

Tức là mọi $z \neq -\frac{d}{c}$ đều có cùng một ảnh $w = \frac{b}{d}$.

Vậy ta chỉ xét các trường hợp ad - bc ≠ 0. Nếu c = 0 ta được hàm tuyến tính đã xét:

$$w = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$$

cho nên ta giả thiết c ≠ 0. Phép biến hình $w = \frac{az+b}{cz+d}$ là đơn diệp và biến toàn bộ mặt phẳng mở rộng z lên mặt phẳng mở rộng w. Mỗi điểm $z \neq -\frac{d}{c}$ có ảnh là điểm $w = \frac{az+b}{cz+d}$. Ngược lại, giải z theo w, ta được hàm ngược $z = \frac{-dw+b}{cw-a}$; tức là mỗi điểm $w \neq \frac{a}{c}$ có nghịch ảnh là $z = \frac{-dw+b}{cw-a}$. Ảnh của điểm $z = -\frac{d}{c}$ là điểm $w = \infty$. Ảnh của điểm $z = \infty$ là $w = \frac{a}{c}$

Vì $w' = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2}$ nên phép biến hình phân tuyến tính bảo giác tại mọi điểm $z \neq -\frac{d}{c}$ và $z \neq \infty$. Phân tích biểu thức của w ta được:

$$w = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{acz+bc}{c(cz+d)} = \frac{acz+ad+bc-ad}{c(cz+d)} = \frac{a(cz+d)+bc-ad}{c(cz+d)}$$

$$= \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c}.\frac{1}{cz+d}$$

Từ đó suy ra phép biến hình phân tuyến tính là tích của 3 phép biến hình:

$\zeta = cz + d$ phép biến hình tuyến tính

$\omega = \frac{1}{\zeta}$ phép nghịch đảo

$w = \frac{bc-ad}{c}.\omega + \frac{a}{c}$ phép biến hình tuyến tính

Vì mỗi phép biến hình thành phần đều biến một đường tròn thành một đường tròn và bảo toàn tính đối xứng của 2 điểm đối với đường tròn nên phép biến hình phân tuyến tính cũng có các tính chất ấy.

Phép biến hình phân tuyến tính tổng quát chứa 4 tham số a, b, c, d nhưng thực chất chỉ có 3 tham số là độc lập. Thật vậy, với giả thiết $c \neq 0$, ta có:

$$w = \frac{\frac{a}{c}z + \frac{b}{c}}{z + \frac{d}{c}}$$

Nếu ta đặt $a_1 = \frac{a}{c}$, $b_1 = \frac{b}{c}$, $d_1 = \frac{d}{c}$ thì ta có:

$$w = \frac{a_1 z + b_1}{z + d_1}$$

Vậy muốn phép biến hình phân tuyến tính hoàn toàn xác định, ta phải cho 3 điều kiện. Chẳng hạn ta có thể buộc nó biến 3 điểm cho trước z_1, z_2 và z_3 lần lượt thành 3 điểm w_1, w_2 và w_3. Khi đó các tham số a_1, b_1 và d_1 là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} \dfrac{a_1z_1+b_1}{z+d_1}=w_1 \\ \dfrac{a_1z_2+b_1}{z+d_1}=w_2 \\ \dfrac{a_1z_3+b_1}{z+d_1}=w_3 \end{cases}$$

Giải hệ này ta tính được a_1, b_1 và d_1 rồi thay vào $w=\dfrac{a_1z+b_1}{z+d_1}$ ta được hàm phải tìm dưới dạng đối xứng:

$$\frac{w-w_2}{w-w_3}.\frac{w_1-w_3}{w_1-w_2}=\frac{z-z_2}{z-z_3}.\frac{z_1-z_3}{z_1-z_2} \qquad (4)$$

Ví dụ 1: Tìm phép biến hình bảo giác biến nửa mặt phẳng trên lên hình tròn đơn vị sao cho z = a với Ima > 0 thành w = 0

Theo tính bảo toàn vị trí điểm đối xứng thì điểm $z=\overline{a}$ phải chuyển thành điểm w=∞. Vậy phép biến hình phải tìm có dạng:

$$w=k\frac{z-a}{z-\overline{a}}$$

Vì z = 0 chuyển thành một điểm nào đó trên đường tròn | w | = 1 nên suy ra | k | = 1 hay k = $e^{j\alpha}$. Vậy:

$$w=e^{j\alpha}\frac{z-a}{z-\overline{a}}$$

Ví dụ 2: Biến hình tròn đơn vị thành chính nó sao cho z = a với | a | < 1 thành w = 0.

Theo tính bảo toàn vị trí đối xứng thì điểm $b=\dfrac{1}{\overline{a}}$ nằm đối xứng với a qua đường tròn | z | = 1phải chuyển thành điểm w = ∞. Phép biến hình cần tìm có dạng:

$$w=k\frac{z-a}{z-b}=K\frac{z-a}{1-\overline{a}z}$$

Trong đó k và K là các hằng số nào đó. Vì z = 1 thì | w | = 1 nên ta có:

$$\left|K\frac{1-a}{1-\overline{a}}\right|=|K|=1 \text{ nên } K=e^{i\alpha}$$

và: $$w=e^{j\alpha}\frac{z-a}{1-\overline{a}z}$$

Ví dụ 3: Biến nửa mặt phẳng trên thành chính nó

Phép biến hình này được thực hiện bằng hàm phân tuyến tính biến 3 điểm z_1, z_2 và z_3 trên trục thực theo chiều dương của mặt phẳng z thành 3 điểm w_1, w_2, w_3 trên trục thực theo chiều dương của mặt phẳng w.

4. Phép biến hình Giucovski: Ta gọi hàm phức $w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$ là hàm Giucovski. hàm này có rất nhiều ứng dụng trong kĩ thuật. Nó có một điểm bất thường hữu hạn là z = 0. Đạo hàm của nó là $w'=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{z^2}\right)$, w' = 0 tại các điểm z = ±1. Vậy phép biến hình Giucovski bảo giác tại mọi điểm z hữu hạn khác với điểm O và ±1. Ta hãy tìm miền đơn diệp của hàm. Giả sử $z_1 \neq z_2$ nhưng:

$$\frac{1}{2}\left(z_1+\frac{1}{z_1}\right)=\frac{1}{2}\left(z_2+\frac{1}{z_2}\right) \text{ hay } (z_1-z_2)\left(1-\frac{1}{z_1z_2}\right)=0 \qquad (5)$$

Ta thấy rằng đẳng thức (5) xảy ra khi $z_1.z_2 = 1$. Vậy phép biến hình sẽ đơn diệp trong mọi miền không chứa hai điểm nghịch đảo của nhau. Chẳng hạn miền | z | < 1 là miền đơn diệp của hàm số; miền | z | > 1 cũng là một miền đơn diệp khác.

Ví dụ 1: Tìm ảnh của phép biến hình Giucovski của:

* đường tròn | z | = h 0 < h < 1
* đoạn thẳng Argz = α, | z | < 1
* hình tròn đơn vị | z | < 1
* nửa mặt phẳng trên, nằm ngoài hình tròn đơn vị tâm O.

• Ta đặt $z = re^{j\varphi}$. Hàm Giucovski được viết thành:

$$w=u+jv=\frac{1}{2}\left(re^{j\varphi}+\frac{1}{re^{j\varphi}}\right)=\frac{1}{2}\left[r(\cos\varphi+j\sin\varphi)+\frac{1}{r}(\cos\varphi-j\sin\varphi)\right]$$

Tách phần thực và phần ảo ta có:

$$u=\frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{2}\right)\cos\varphi$$

$$v=\frac{1}{2}\left(r-\frac{1}{2}\right)\sin\varphi$$

Từ đó suy ra ảnh của đường tròn | z | = r = h có phương trình tham số là:

$$\begin{cases} u=\frac{1}{2}\left(h+\frac{1}{h}\right)\cos\varphi \\ v=\frac{1}{2}\left(h-\frac{1}{h}\right)\sin\varphi=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{h}-h\right)\sin\varphi \end{cases}$$

Trong đó φ là tham số. Đó là một elip (γ), có tâm O và các bán trục $a=\frac{1}{2}\left(h+\frac{1}{h}\right)$ và $b=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{h}-h\right)$, tiêu cự $2c=\sqrt{a^2-b^2}=2\sqrt{\frac{1}{4}\left(h+\frac{1}{h}\right)^2-\frac{1}{4}\left(h-\frac{1}{h}\right)^2}=2$. Các tiêu điểm của elip là $F_1(-1, 0)$ và $F_2(1, 0)$. Khi φ biến thiên từ 0 đến 2π, điểm z chạy dọc đường tròn | z | = h theo hướng dương trong khi ảnh w tương ứng của nó chạy trên ellip theo hướng âm của mặt phẳng.

Vì khi $0 < \varphi < \pi$ thì $v < 0$ và khi $\pi < \varphi < 2\pi$ thì $v > 0$ nên ảnh của nửa đường tròn trên là nửa elip dưới, ảnh của nửa đường tròn dưới là elip trên.

Chú ý là khi $h \to 0$ thì các bán trục a, b của elip dần ra ∞, nghĩa là nếu đường tròn $| z | = h$ càng nhỏ thì ảnh của nó có các bán trục càng lớn. Khi $h \to 1$thì $a \to 1$ và $b \to 0$, nghĩa là nếu đường tròn $| z | = h$ càng dần vào đường tròn đơn vị thì elip ảnh dẹt dần và tiến tới đoạn kép F_1F_2 (sở dĩ gọi là đoạn kép vì F_1F_2 đồng thời là ảnh của nửa cung tròn đơn vị trên và nửa cung tròn đơn vị dưới). Ta quy ước bờ trên của đoạn là ảnh của nửa cung tròn đơn vị nằm trong nửa mặt phẳng dưới; bờ dưới của đoạn thẳng là ảnh của nửa cung tròn đơn vị nằm trong nửa mặt phẳng trên.

• Nếu gọi L là ảnh của đoạn thẳng:

$$\begin{cases} \text{Arg}z = \alpha \\ |z| < 1 \end{cases}$$

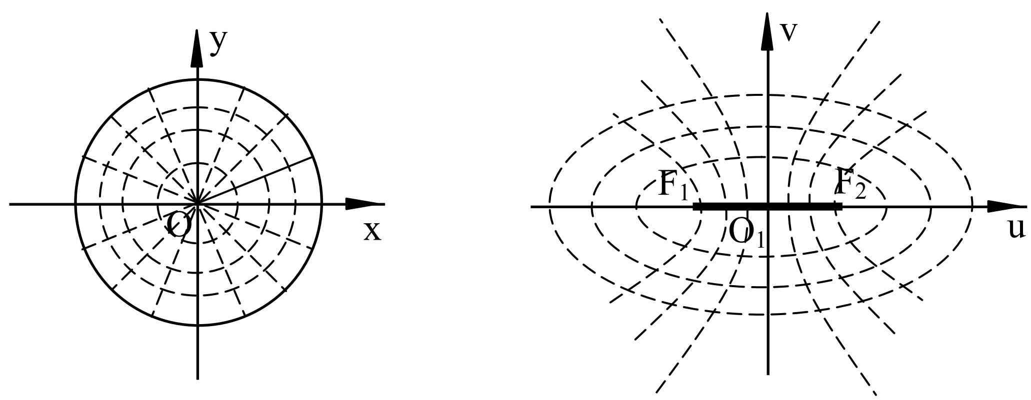
thì phương trình tham số của L là:

$$\begin{cases} u = \dfrac{1}{2}\left(r + \dfrac{1}{r}\right)\cos\alpha \\ v = -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{r} - r\right)\sin\alpha \end{cases}$$

Khử r trong các phương trình này ta có:

$$\frac{u^2}{\cos^2\alpha} - \frac{v^2}{\sin^2\alpha} = 1 \qquad (6)$$

Đây là một hyperbol có các tiêu điểm trùng với F_1 và F_2.



Nếu $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ thì ảnh (L) là nhánh hyperbol (6) nằm trong góc phần tư thứ tư. Khi điểm z chạy trên đoạn bán kính từ gốc toạ độ tới đường tròn đơn vị thì ảnh w của nó chạy trên nhánh hyperbol nằm trong góc phần tư thứ tư từ ∞ tới trục thực O_1u.

• Khi cho h biến thiên từ 0 đến 1 thì đường tròn $| z | = h$ sẽ quét nên hình tròn $| z | < 1$. Ảnh (γ) của L trong mặt phẳng w sẽ quét nên mặt phẳng w, bỏ đi lát cắt dọc đoạn F_1F_2. Bờ dưới của lát cắt là ảnh của cung tròn đơn vị trên. Bờ trên của lát cắt là ảnh của cung tròn đơn vị dưới. Nửa hình tròn đơn vị trên có ảnh là nửa mặt phẳng dưới. Ngược lại nửa hình tròn đơn vị dưới có ảnh là nửa mặt phẳng trên.

• Tương tự như ở câu đầu tiên ảnh của nửa đường tròn trên:

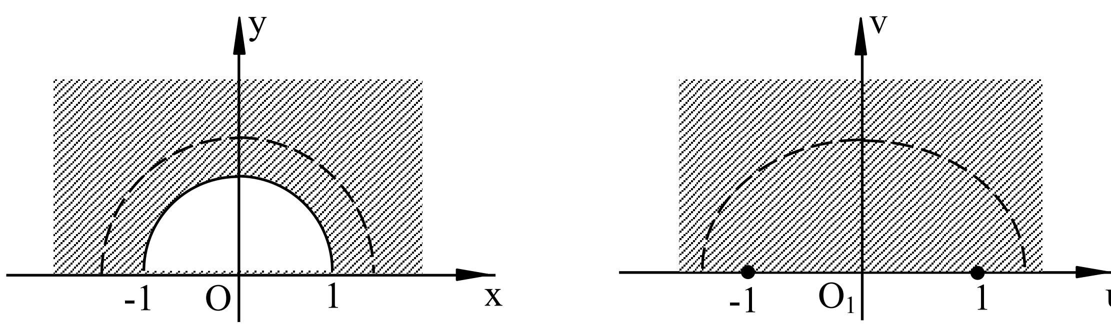
$r = h\ (h > 1) \quad 0 < \varphi < \pi$

có phương trình tham số là:

$$\begin{cases} u = \dfrac{1}{2}\left(h + \dfrac{1}{h}\right)\cos\varphi \\ v = \dfrac{1}{2}\left(h - \dfrac{1}{h}\right)\sin\varphi \end{cases} \quad 0 < \varphi < \pi$$

Đây là một cung ellip nằm trong nửa mặt phẳng trên , có các bán trục là $a = \dfrac{1}{2}\left(h + \dfrac{1}{h}\right)$ và $b = \dfrac{1}{2}\left(h - \dfrac{1}{h}\right)$

Khi nửa đường tròn trên tâm O, bán kính h quét nên phần nửa mặt phẳng trên nằm ngoài đường tròn đơn vị thì ảnh của nó quét nên nửa mặt phẳng trên Imz > 0 xem hình vẽ).



Ví dụ 2: Tìm phép biến hình biến nửa hình đơn vị | z | = 1, Imz > 0 thành nửa mặt phẳng trên.

Dễ thấy rằng phép biến hình phải tìm là hợp của hai phép:

$$t = -z = e^{j\pi}z$$

$$w = \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right)$$

5. Hàm luỹ thừa $w = z^n$: Ta xét hàm $w = z^n$ với n nguyên dương, lớn hơn hay bằng 2. Nếu $z = r(\cos\alpha + j\sin\alpha)$ thì $w = r^n(\cos n\alpha + j\sin n\alpha)$. Vậy ảnh của tia $\operatorname{Arg}z = \alpha$ là tia $\operatorname{Arg}w = n\alpha$ nhận được bằng cách quay tia $\operatorname{Arg}z = \alpha$ quanh gốc toạ độ góc $(n - 1)\alpha$. ảnh của đường tròn $| z | = R$ là đường tròn $| w | = R^n$. Ảnh của mặt phẳng z là mặt phẳng w.

Tuy nhiên phép biến hình từ mặt phẳng z lên mặt phẳng w không đơn diệp vì nếu hai số phức z_1 và z_2 có cùng môđun và có argumen sai khác nhau một số nguyên lần $\dfrac{2\pi}{n}$ thì $z_1^n = z_2^n$.

Muốn hàm $w = z^n$ đơn diệp trong một miền G nào đó thì miền G này phải không chứa bất kì cặp điểm nào có cùng môđun và có argumen sai khác nhau góc $\frac{2\pi}{n}$. Chẳng hạn miền quạt $0 < \arg z < \frac{2\pi}{n}$ là một miền đơn diệp của hàm $w = z^n$. Ảnh của miền quạt này, qua phép biến hình, là mặt phẳng w, bỏ đi một lát cắt dọc theo nửa trục thực $u > 0$. Bờ trên của lát cắt là ảnh của tia argz = 0 và bờ dưới của lát cắt là ảnh của tia $\arg z = \frac{2\pi}{n}$.

Miền quạt $\frac{\pi}{n} < \arg z < \frac{3\pi}{n}$ cũng là một miền đơn diệp khác của hàm. Ảnh của miền quạt này qua phép biến hình là mặt phẳng w, bỏ đi một lát cắt dọc theo nửa trục thực âm.

Hàm $w = z^n$ giải tích trong toàn mặt phẳng, vì ta có:

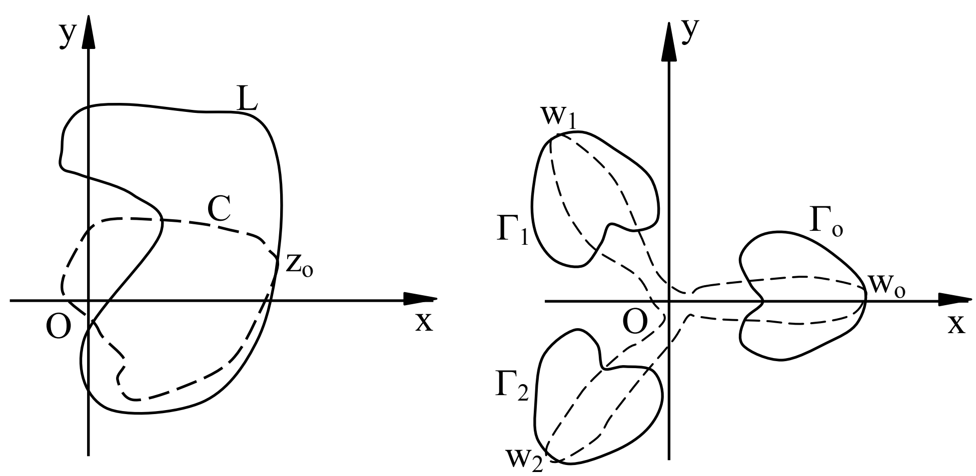
$$\frac{dw}{dz} = nz^{n-1} \quad \forall z \in C$$

Phép biến hình $w = z^n$ bảo giác tại mọi điểm $z \neq 0$.

6. Hàm $w = \sqrt[n]{z}$ **:** Đây là hàm ngược của hàm $w = z^n$. Nó là một hàm đa trị vì với mỗi số phức $z = r(\cos\varphi + j\sin\varphi) \neq 0$ có n căn bậc n cho bởi:

$$w = \sqrt[n]{r}\left[\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + j\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right] \quad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

Toạ vị của n số phức này là các đỉnh của một đa giác đều n cạnh tâm O. Giả zử điểm z vạch thành một đường cong kín L không bao quanh gốc toạ độ O, xuất phát từ z_o.



Khi đó điểm $w = \sqrt[n]{z}$ trong đó $\sqrt[n]{z}$ là một giá trị nào đó của căn thức mà ta chọn trước sẽ vạch nên đường cong kín Γ_o, xuất phát từ $w_o = \sqrt[n]{z_o}$ vì khi z xuất phát từ z_o chạy một vòng trên C thì Argz biến thiên từ giá trị ban đầu $\text{Arg}z_o$ rồi quay về đúng giá trị ấy. Các giá trị căn thức khác với giá trị đã chọn sẽ vạch nên đường cong kín Γ_k, được suy ra từ Γ_o bằng cách quay các góc $2\pi/n$ quanh gốc toạ độ.

Bây giờ ta giả thiết điểm z vạch nên đường cong kín C bao quanh gốc toạ độ một vòng theo hướng dương, xuất phát từ điểm z_o. Trong trường hợp này, khi z chạy một vòng thì arumen của z tăng thêm 2π. Do vậy argumen của w tăng thêm $2\pi/n$. Điểm w sẽ vạch nên một đường cong liên tục từ điểm w_o tới $w_1 = w_o\left(\cos\frac{2\pi}{n} + j\sin\frac{2\pi}{n}\right)$. Nghĩa là w đi từ giá trị w_o của căn thức tới một giá trị khác của căn thức. Do đó điểm w chỉ trở về vị trí xuất phát sau khi z chạy n vòng trên C. Điều đó chứng tỏ rằng muốn tách được một hàm đơn trị liên tục từ hàm đa trị $w = \sqrt[n]{z}$ thì miền xác định E của hàm đơn trị này không được chứa bất kì một đường cong kín nào bao quanh gốc O. Muốn vậy ta có thể lấy E là mặt phẳng phức z cắt di một lát cắt γ từ gốc toạ độ ra ∞. Chẳng hạn, có thể chọn γ là nửa trục Ox dương. Khi đó các hàm đơn trị tách ra từ hàm đa trị $w = \sqrt[n]{z}$, mà ta thường gọi là các nhánh đơn trị cuả hàm $w = \sqrt[n]{z}$ là những hàm biến phức biến E(mặt phẳng phức với lát cắt dọc theo nửa trục Ox dương) lên mỗi hình quạt:

$$0 < \arg z < \frac{2\pi}{n}$$

$$\frac{2\pi}{n} < \arg z < \frac{4\pi}{n}$$

……

Muốn chọn ra một nhánh xác định trong n nhánh trên ta có thể buộc nhánh này phải lấy một giá trị w_o khi $z = z_o$ với w_o là căn bậc n nào đó của z_o. Mỗi nhánh đơn trị của hàm $w = \sqrt[n]{z}$ trong miền xác định E có đạo hàm:

$$(\sqrt[n]{z})' = \frac{1}{(w^n)'} = \frac{1}{nw^{n-1}} = \frac{1}{n}z^{\frac{1}{n}-1}$$

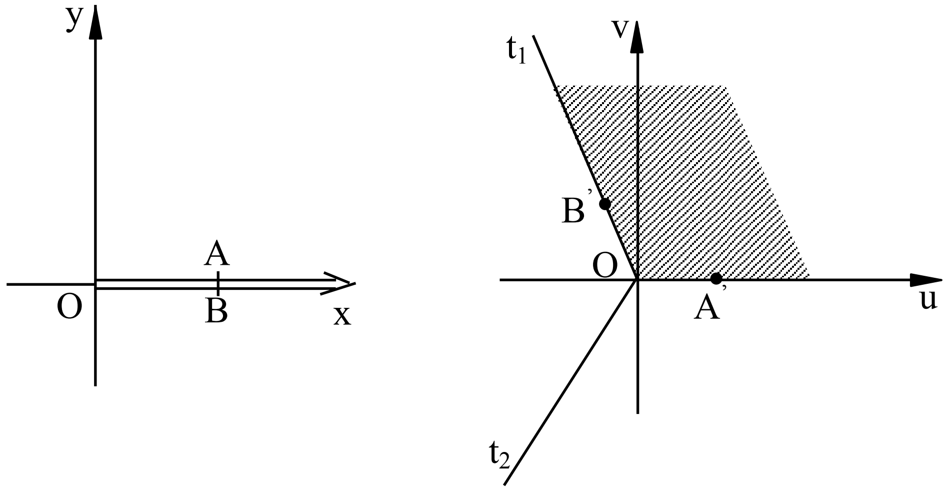
nên nó là hàm giải tích trong E.

Nếu ta không dùng lát cắt γ thì không thể tách được các nhánh đơn trị vì khi điểm z vạch nên đường cong kín thì điểm w sẽ chuyển từ nhánh nọ sang nhánh kia. Vì vậy O còn được gọi là điểm rẽ nhánh của hàm đa trị $w = \sqrt[n]{z}$.

Ví dụ: Xét hàm đa trị $w = \sqrt[3]{z}$

Gọi Ot_1 là tia $\mathrm{Arg}w = \frac{2\pi}{3}$; Ot_2 là tia $\mathrm{Arg}w = \frac{4\pi}{3}$. Những nhánh đơn trị của của hàm $w = \sqrt[3]{z}$ là các phép biến hình đơn diệp, biến mặt phẳng phức z, bỏ đi lát cắt dọc theo nửa trục Ox dương lên mỗi góc uOt_1, t_1Ot_2, t_2Ou.

Nhánh $w = \sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{r(\cos\varphi + j\sin\varphi)} = \sqrt[3]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{3} + j\sin\frac{\varphi}{3}\right)$ với $0 < \varphi < 2\pi$ biến hai điểm A và B nằm lần lượt ở bờ trên và bờ dưới của lát cắt thành hai điểm A' thuộc tia argw = 0 và B' thuộc tia $\arg w = \frac{2\pi}{3}$. Điều đó chứng tỏ nửa trục Ox là đường gián đoạn của nhánh này.



7. Hàm mũ:

a. Định nghĩa: Ta gọi hàm phức có phần thực $u(x,y) = e^x\cos y$ và phần ảo $v(x,y)=e^x\sin y$ là hàm mũ biến phức và kí hiệu là e^z.

$$w = e^z = e^{x + jy} = e^x(\cos y + j\sin y) \qquad (1)$$

Cho $y = 0$ ta có $w = e^x$, nghĩa là khi $z = x$ thực ta có hàm biến thực e^x đã biết. Ta nói rằng hàm mũ $w = e^z$ là thác triển của hàm mũ thực e^x từ trục thực ra toàn bộ mặt phẳng phức. Theo định nghĩa trên ta có:

$$|\, w\, | = e^x \text{ và } \mathrm{Arg}w = y + 2k\pi,\ k \text{ nguyên} \qquad (2)$$

b. Các phép tính về hàm mũ:

$$e^{z_1}.e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$$

$$\frac{e^{z_1}}{e^{z_1}} = e^{z_1-z_2} \qquad (3)$$

$$(e^z)^n = e^{nz}, \text{ n nguyên}$$

Ta chứng minh công thức đầu tiên. Các công thức sau cũng tương tự. Ta có:

$$z_1 = x_1 + jy_1\ ;\ z_2 = x_2 + jy_2$$

Theo định nghĩa ta có:

$$e^{z_1} = e^{x_1}(\cos y_1 + j\sin y_1) \text{ và } e^{z_2} = e^{x_2}(\cos y_2 + j\sin y_2)$$

Vậy: $e^{z_1}.e^{z_2} = e^{x_1}(\cos y_1 + j\sin y_1)\, e^{x_2}(\cos y_2 + j\sin y_2)$

Hay: $e^{z_1}.e^{z_2} = e^{x_1+x_2}\left[\cos(y_1 + y_2) + j\sin(y_1 + y_2)\right]$

Theo định nghĩa hàm mũ phức ta có:

$$e^{z_1}.e^{z_2} = e^{(x_1+x_2)+j(y_1+y_2)} = e^{z_1+z_2}$$

c. Chu kỳ của hàm mũ: Theo đinh nghĩa, ta có:

$$e^{2jk\pi} = \cos 2k\pi + j\sin 2k\pi = 1 \ (\text{ k nguyên})$$

Theo (3) thì:

$$e^{2jk\pi+z} = e^z.\ e^{2jk\pi} = e^z \qquad (4)$$

Công thức này cho thấy rằng hàm $w = e^z$ là hàm tuần hoàn với chu kỳ $2j\pi$. Vậy hai điểm nằm trên một đường song song với trục ảo và các nhau một khoảng bằng bội số của $2j\pi$ thì có cùng ảnh.

Cần chú ý là nếu $e^{z_1} = e^{z_2}$ thì:

$$e^{z_1} = e^{z_2} = z_2 = z_1 + 2jk\pi \qquad (5)$$

vì: $\dfrac{e^{z_1}}{e^{z_1}} = e^{z_1 - z_2} = 1 = e^{2jk\pi}$ và $z_1 - z_2 = 2jk\pi$

d. Công thức Euler: Trong (1), cho x = 0 ta có công thức Euler:

$$e^{jy} = \cos y + j\sin y \qquad (6)$$

Thay y bằng -y ta có:

$$e^{-jy} = \cos y - j\sin y \qquad (7)$$

Nhờ có công thức Euler mà số phức $z = r(\cos\varphi + j\sin\varphi)$ viết được dưới dạng mũ $z = re^{j\varphi}$. Ta có: $z = r(\cos\varphi + j\sin\varphi) = re^{j\varphi}$

Ví dụ: $1 = \cos 0 + j\sin 0 = e^{j0}$

$$j = \cos\frac{\pi}{2} + j\sin\frac{\pi}{2} = e^{j\frac{\pi}{2}}$$

$$1 + j = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + j\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}}$$

$$3 + 4j = 5\left[\cos\left(\mathrm{arctg}\frac{4}{3}\right) + j\sin\left(\mathrm{arctg}\frac{4}{3}\right)\right] = 5e^{j\,\mathrm{arctg}\frac{4}{3}}$$

$$e^{2+3j} = e^2(\cos 3 + j\sin 3)$$

$$e^{-2j} = \cos 2 - j\sin 2$$

f. Tính giải tích của hàm w = e^z: Hàm $w = e^z$ giải tích trong toàn bộ mặt phẳng vì $\forall z$, điều kiện C - R được thoả mãn:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(e^x \cos y\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(e^x \sin y\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(e^x \cos y\right) = -\frac{\partial}{\partial x}\left(e^x \sin y\right)$$

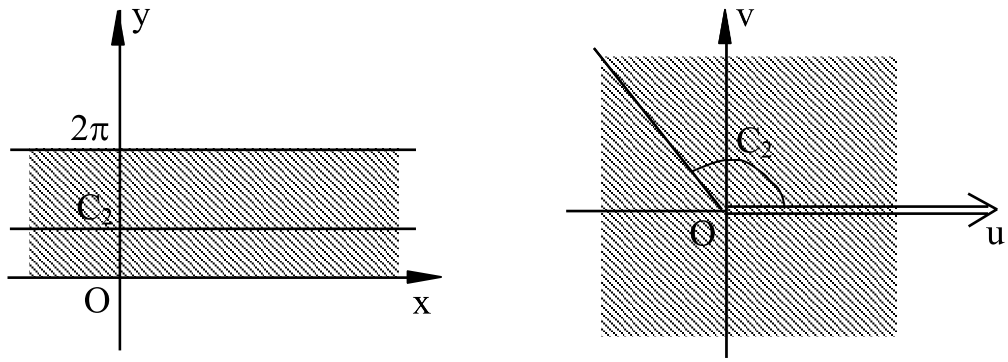
$$w'(z) = \frac{\partial}{\partial x}\left(e^x \cos y\right) + j\frac{\partial}{\partial x}\left(e^x \sin y\right)$$

g. Phép biến hình w = e^z: Vì $|w| = e^x$ nên ảnh của đường thẳng $x = C_1$ là đường tròn $\left|w\right| = e^{C_1}$. Vì y là một giá trị của Argw, nên đường thẳng $y = C_2$ có ảnh là tia Argw= C_2. Khi C_2 biến thiên từ 0 đến 2π ($0 < C_2 < 2\pi$) thì đường $y = C_2$ sẽ quét nên miền G là băng $0 < y < 2\pi$. Ảnh của đường thẳng $y = C_2$ là tia Argw = C_2 sẽ quét nên miền Δ là ảnh của G. Rõ ràng Δ là mặt phẳng w, bỏ đi lát cắt dọc theo nửa trục thực u dương; bờ trên của lát cắt này ứng với đường y = 0, bờ dưới của lát cắt là ảnh của đường $y = 2\pi$.

Phép biến hình từ băng G lên miền Δ là một phép biến hình đơn diệp. Tương tự, phép biến hình $w = e^z$ cũng biến mọi băng $2k\pi < y < 2(k+1)\pi$(k nguyên), có chiều rộng k, lên miền Δ nói trên.

Phép biến hình $w = e^z$ biến cả mặt phẳng z lên mặt phẳng w, nhưng không đơn diệp.

Thật vậy, nghịch ảnh của mọi điểm $w \neq 0$ gồm vô số điểm, vì nếu z thuộc nghịch ảnh của w , tức là $e^z = w$ thì các điểm $z = 2jk\pi$ cũng thuộc nghịch ảnh của w vì $e^{z+2jk\pi} = e^{z}$.



8. Hàm loga:

a. Định nghĩa: hàm ngược của hàm $z = e^w$ được gọi là hàm loga và kí hiệu là:

$w = \mathrm{Ln}z$

b. Phần thực và phần ảo của hàm w = Lnz: Đặt $w = \mathrm{Ln}z = u + jv$, thì theo định ta có:

$e^{u+jv} = z$

Vậy $e^u = |\, z\,|$ hay $u = \ln|\, z\,|$ và $v = \mathrm{Arg}z$. Tóm lại:

$$w = \mathrm{Ln}z = \ln|\, z\,| + j\mathrm{Arg}z \qquad (9)$$

hay: $$w = \ln|\, z\,| + j(\arg z + 2k\pi) \qquad (10)$$

Hàm w = Lnz là một hàm đa trị. Với mỗi giá trị của z có vô số giá trị của w. Các giá trị này có phần thực bằng nhau còn phần ảo hơn kém nhau một bội số nguyên của 2π. Ảnh của điểm z là những điểm w nằm trên đường thăng song song với trục ảo và cách nhau một đoạn có độ dài bằng bội số nguyên của 2π.

b. Tách nhánh đơn trị: Để tách một nhánh đơn trị của hàm w = Lnz, ta làm như sau. Trong công thức (10) ta giả sử $k = k_1$ là một số nguyên cố định. Khi đó ta có một nhánh đơn trị của hàm loga và kí hiệu là $(w)_1$. Nhánh này biến miền $-\pi < \arg z < \pi$ của mặt phẳng z (tức là mặt phẳng z với lát cắt dọc theo nửa trục $x < 0$) lên băng $(2k_1-1)\pi < \mathrm{Im}z < (2k_1+1)\pi$ của mặt phẳng w. Nếu không vẽ một lát cắt đi từ điểm z = 0 ra ∞, thì khi điểm z vạch nên một đường cong kín quanh gốc O theo hướng dương, argumen của z sẽ tăng thêm 2π, và như vậy ta sẽ đi từ nhánh đơn trị này sang nhánh đơn trị khác. Vậy điểm O cũng là một điểm rẽ nhánh của hàm đa trị w = Lnz. đặc biệt, nếu trong (10) ta chọn k = 0 thì sẽ được một nhánh đơn trị được gọi là nhánh chính của hàm đa trị w = Lnz. Nhánh này được kí hiệu là lnz:

$$\ln z = \ln|\, z\,| + j\arg z \qquad (11)$$

Nếu z là số thực dương $z = x > 0$ thì $\arg z = 0$, $|\, z\,| = x$ nên $\ln z = \ln x$, nghĩa là giá trị chính của hàm loga trùng với hàm biến thực lnx. Nói khác đi, lnz là thác triển của hàm thực lnx , từ trục thực x >0 ra mặt phẳng phức z.

Ví dụ: Tính Ln(-1); ln(-1) ; ln(1 + j) ; Lnj

* $\mathrm{Ln}(-1) = \ln|\,-1\,| + j[\arg(-1) + 2k\pi] = j(\pi + 2k\pi) = j(2k + 1)\pi$

* $\ln(-1) = \ln|\,-1\,| + j\arg(-1) = j\pi$

* Vì $|1 + j| = \sqrt{2}$; $\arg(1 + j) = \dfrac{\pi}{4}$ nên $\ln(1 + j) = \ln\sqrt{2} + j\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{1}{2}\ln 2 + j\dfrac{\pi}{4}$

* Vì $|j| = 1$; $\arg j = \dfrac{\pi}{2}$ nên $\mathrm{Ln} = j\left(\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$

d. Tính chất giải tích: Nhánh đơn trị w = lnz là một hàm giải tích trong mặt phẳng phức, bỏ đi lát cắt dọc theo nửa trục x < 0. Theo công thức tính đạo hàm của hàm ngược ta có:

$$(\ln z)' = \frac{1}{(e^w)'} = \frac{1}{e^w} = \frac{1}{z}$$

e. Các phép tính: Hàm Lnz có các tính chất:

$$\mathrm{Ln}(z_1.z_2) = \mathrm{Ln}z_1 + \mathrm{Ln}z_2$$

$$\mathrm{Ln}\frac{z_1}{z_2}\mathrm{Ln}z_1 - \mathrm{Ln}z_2 \qquad (12)$$

$$\mathrm{Ln}(z^n) = n\mathrm{Ln}z + 2jk\pi$$

Ta chứng minh, chẳng hạn, công thức đầu:

$$\mathrm{Ln}(z_1.z_2) = \ln|z_1.z_2| + j\mathrm{Arg}(z_1.z_2) = \ln|z_1| + \ln|z_2| + j[\mathrm{Arg}z_1 + \mathrm{Arg}z_2]$$

$$= (\ln|z_1| + j\mathrm{Arg}z_1) + (\ln|z_2| + j\mathrm{Arg}z_2) = \mathrm{Ln}z_1 + \mathrm{Ln}z_2$$

9. Hàm lượng giác:

a. Định nghĩa: Từ công thức Euler ta có:

$$2\cos y = e^{jy} + e^{-jy} \Rightarrow \cos y = \frac{e^{jy} + e^{-jy}}{2}$$

$$2\sin y = e^{jy} - e^{-jy} \Rightarrow \sin y = \frac{e^{jy} - e^{-jy}}{2j}$$

Các hàm lượng giác biến số phức được định nghĩa như sau:

$$\sin z = \frac{e^{jz} - e^{-jz}}{2j} \qquad \cos z = \frac{e^{jz} + e^{-jz}}{2}$$

$$\mathrm{tg}z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{e^{jz} - e^{-jz}}{j(e^{jz} + e^{-jz})} \qquad \cot gz = \frac{\cos z}{\sin z} = \frac{e^{jz} + e^{-jz}}{e^{jz} - e^{-jz}} \qquad (13)$$

Vì e^{jz} và e^{-jz} là những hàm đơn trị nên các hàm lượng giác biến phức cũng là các hàm đơn trị.

b. Đạo hàm của các hàm lượng giác: Vì e^{jz} và e^{-jz} là những hàm giải tích trong toàn C nên các hàm lượng giác biến phức w = cosz và w = sinz cũng là các hàm giải tích trong toàn C. Ta có:

$$(\sin z)' = \frac{1}{2j}\left[(e^{jz})' - (e^{-jz})'\right] = \frac{1}{2j}\left[je^{jz} + je^{-jz}\right] = \frac{1}{2}\left[e^{jz} + e^{-jz}\right] = \cos z$$

Tương tự ta có:

(cosz)’ = -sinz

Hàm w = tgz giải tích tại mọi điểm có cosz ≠ 0. Xét phương trình cosz = 0. Ta có:

$$\cos z = 0 = e^{jz} = -e^{-jz}$$

hay: $e^{2jz} = e^{j\pi}$.

Do đó: $2jz = j\pi + 2jk\pi$

Phương trình này có nghiệm là:

$$z = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

Như vậy tgz giải tích tại mọi điểm $z \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$. Ta dễ dàng tính được:

$$(\text{tg}z)' = \frac{1}{\cos^2 z}$$

Tương tự :

$$(\cot gz)' = -\frac{1}{\sin^2 z}$$

c. Tính chất: Hàm lương giác biến số phức có các tính chất sau:

cos(-z) = cosz sin(-z) = -sinz tg(-z) = -tgz

cos(z + 2π) = cosz sin(z + 2π) = sin z trong(z + π) = tgz

Thật vậy: $\cos(-z) = \frac{1}{2}\left[e^{j(-z)} + e^{-j(-z)}\right] = \frac{1}{2}\left[e^{-jz} + e^{jz}\right] = \cos z$

$$\cos(z + 2\pi) = \frac{1}{2}\left[e^{j(z+2\pi)} + e^{-j(z+2\pi)}\right] = \frac{1}{2}\left[e^{-jz} + e^{jz}\right] = \cos z$$

vì $e^{2j\pi} = e^{-2j\pi} = 1$

Tương tự ta chứng minh được các tính chất còn lại.

d. Các phép tính: Ta có các công thức quen biết:

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1$$
$$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \sin z_2 \cos z_1$$
$$\cos 2z = \cos^2 z - \sin^2 z \qquad (15)$$
$$\sin z_1 + \sin z_2 = 2\sin\frac{z_1 + z_2}{2}\cos\frac{z_1 + z_2}{2}$$

Ta chứng minh, chẳng hạn, công thức đầu tiên:

$$\sin^2 z + \cos^2 z = \cos^2 z - j^2\sin^2 z = (\cos z + j\sin z)(\cos z - j\sin z) = e^{jz}.e^{-jz} = 1$$

Ví dụ 1: Tính cosj

Theo định nghĩa:

$$\cos j = \frac{e^{-1} + e^{1}}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{e} + e\right) \approx 1{,}543$$

Qua ví dụ này ta thấy có những số phức có | cosz | > 1. Điều này không thể xảy ra đối với số thực.

Ví dụ 2: Giải phương trình sinz = sinz_o với z_o là số phức cho trước.

Phương trình trên được viết thành: sinz - sin z_o = 0, hay:

$$\sin z_1 - \sin z_o = 2\sin\frac{z - z_o}{2}\cos\frac{z + z_o}{2} = 0$$

Cho $\sin\frac{z - z_o}{2} = 0$ ta có $\frac{z - z_o}{2} = k\pi$. Vậy nghiệm của phương trình $z = z_o + 2k\pi$

Cho $\cos\frac{z + z_o}{2} = 0$ ta có $\frac{z + z_o}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi$, vậy nghiệm của phương trình $z = \pi - z_o + 2k\pi$

Tóm lại nghiệm của phương trình là: $z = z_o + 2k\pi$ và $z = \pi - z_o + 2k\pi$.

10. Hàm hyperbol:

a. Định nghĩa: Các hàm hyperbol biến phức được định nghĩa theo các công thức sau:

$$\mathrm{ch}z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \qquad \mathrm{sh}z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \qquad \mathrm{th}z = \frac{\mathrm{sh}z}{\mathrm{ch}z} \quad \coth z = \frac{\mathrm{ch}z}{\mathrm{sh}z} \qquad (16)$$

Những hàm này là thác triển của hàm hyperbol biến thực từ trục thực ra mặt phẳng phức. Dễ dàng thấy rằng hàm chz là hàm chẵn còn các hàm shz, thz, cothz là các hàm lẻ. Vì e^z tuần hoàn với chu kì $2j\pi$ nên các hàm shz và chz cũng tuần hoàn với chu kì $2j\pi$. Hàm thz tuần hoàn với chu kì $j\pi$. Thật vậy:

$$\mathrm{th}z = \frac{\mathrm{sh}z}{\mathrm{ch}z} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} = \frac{e^{2z} - 1}{e^{2z} + 1} \qquad (17)$$

Dễ dàng kiểm tra thấy $\mathrm{th}(z + j\pi) = \mathrm{th}z$

b. Các phép tính: Ta có các công thức giống như trong giải tích thực:

$e^z = \mathrm{ch}z + \mathrm{sh}z$

$e^{-z} = \mathrm{ch}z - \mathrm{sh}z$

$\mathrm{ch}^2z - \mathrm{sh}^2z = 1$ (18)

$\mathrm{sh}(z_1 + z_2) = \mathrm{sh}z_1\mathrm{ch}z_2 + \mathrm{sh}z_2\mathrm{ch}z_1$

$\mathrm{ch}2z = \mathrm{ch}^2z + \mathrm{sh}^2z$

. . . .

c. Quan hệ với các hàm lượng giác: Từ định nghĩa ta suy ra:

$\sin jz = j\,\mathrm{sh}z$

$\cos jz = \mathrm{ch}z$

d. Tách phần thực và phần ảo của hàm lượng giác và hàm hyperbol: Ta có:

$\sin z = \sin(x + jy) = \sin x\cos jy + \sin jy\cos x = \sin x\,\mathrm{ch}y + j\,\mathrm{sh}y\cos x$

Tương tự:

$\cos z = \cos x\,\mathrm{ch}y - j\sin x\,\mathrm{sh}y$

$\mathrm{sh}z = \mathrm{sh}x\cos y + j\sin y\,\mathrm{ch}x$ (20)

$\mathrm{ch}z = \mathrm{ch}x\cos y + j\sin x\,\mathrm{sh}y$

e. Đạo hàm của hàm hyperbol: Các hàm w = shz và w = chz giải tích trong toàn bộ mặt phẳng và có đạo hàm:

$(\mathrm{sh}z)' = \mathrm{ch}z$

$(\mathrm{ch}z)' = \mathrm{sh}z$

Hàm w = thz giải tích trong toàn mặt phẳng trừ tại điểm z mà $e^{2z} + 1 = 0$ hay $e^{2z} = -1 = e^{2\pi}$, tức là:

$$z = j\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)$$

Ta có: $(\text{th}z)' = \dfrac{1}{\text{ch}^2 z}$

Ví dụ 1: Tính sin(1 - 2j)

Ta có: sin(1 - 2j) = sin1.cos2j - sin2jcos1 = sin1.ch2 - jsh2.cos1

Theo (19) thì cos2j = ch2, sin2j = sh2. Tra bảng số ta có sin1 ≈ sin57°19' ≈ 0,8415 cos1 ≈ 0,5463 ch2 ≈ 3,7622 sh2 ≈ 3,6269. Kết quả là:

sin(1 - 2j) = 0,8415×3,7622 - j×0,5463×3,6269 = 3,1659 - 1,9595j

Ví dụ 2: Cho phép biến hình w = sinz. Tìm ảnh của băng $-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$

Trước hết ta tìm ảnh của đường thẳng x = C. Theo (20):

u(x, y) = Re(sinz) = sinxchy

v(x, y) = Im(sinz) = cosxshy

nên phương trình tham số của đường thẳng x = C là:

$$\begin{cases} u(x, y) = \sin C\text{ch}y \\ v(x, y) = \cos C\text{sh}y \end{cases} \qquad y \text{ là tham số } -\infty < y < \infty \qquad (21)$$

Nếu C = 0 thì các phương trình (21) biểu diễn trục ảo u. Nếu C ≠ 0 thì nó biểu diễn một cung hyperbol. Thật vậy, khử C trong (21) ta được:

$$\frac{u^2}{\sin^2 C} - \frac{v^2}{\cos^2 C} = 1 \qquad (22)$$

Ta được cung hyperbol bên phải nếu $0 < C < \dfrac{\pi}{2}$ và cung hyperbol bên trái nếu $-\dfrac{\pi}{2} < C < 0$. Hyperbol (22) có tiêu trục là trục thực, các tiêu điểm F_1(w = -1) và F_2(w = 1), các bán trục là | sinC | và | cosC |. Tiệm cận của nó là cặp đường thẳng v = ±cotgCu.

Cho C biến thiên từ $-\dfrac{\pi}{2}$ đến $\dfrac{\pi}{2}$, đường thẳng x = C sẽ quét băng $-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$. Ảnh của C trong mặt phẳng w sẽ quét nên miền G là ảnh của băng $-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$. Chú ý là theo (21) thì ảnh của đường thẳng $x = \dfrac{\pi}{2}$ có phương trình tham số u = chy, v = 0 và đó là tia F_2u.Tương tự ta có ảnh của đường thẳng $x = -\dfrac{\pi}{2}$ là tia F_1u'. Vậy miền G là mặt phẳng w bỏ đi hai tia F_2u và F_1u'.

11. Hàm lượng giác ngược:Hàm ngược của z = sinw được kí hiệu là w = Arcsinz. Ta có:

$$z = \sin w = \frac{e^{jw} - e^{-jw}}{2j} = \frac{e^{2jw} - 1}{2je^{jw}}$$

hay: e^{2jw} - $2jze^{jw}$ - 1 = 0

Ta xem đây là phương trình bậc hai đối với e^{jw}. Giải ra ta có:

$$e^{jw} = jz + \sqrt{1 - z^2}$$

Vậy $$jw = \mathrm{Ln}\left(jz + \sqrt{1 - z^2}\right)$$

hay: $$w = \frac{1}{j}\mathrm{Ln}\left(jz + \sqrt{1 - z^2}\right)$$

Như vậy: $$w = \mathrm{Arc}\sin z = -j\mathrm{Ln}(jz + \sqrt{1 - z^2}) \qquad (23)$$

Tính đa trị của hàm w = Arcsinz được suy ra từ tính lưỡng trị của căn thức và tính đa trị của hàm loga. Tương tự ta định nghĩa:

w = Arccosz là hàm ngược của z = cosw
w = Arctgz là hàm ngược của z = tgw
w = Arccotgz là hàm ngược của z = cotgw

Lập luận tương tự trên ta có:

$$w = \mathrm{Arc}\cos z = -j\mathrm{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1})$$

$$w = \mathrm{Arctg}z = -\frac{j}{2}\mathrm{Ln}\frac{1 + jz}{1 - jz} \qquad (24)$$

$$w = \mathrm{Arc}\cot gz = \frac{j}{2}\mathrm{Ln}\frac{z - j}{z + j}$$

Ví dụ 1: Tính Arcsinj

Theo (23) ta có:

$$\mathrm{Arc}\sin j = j\mathrm{Ln}(-1 \pm \sqrt{2})$$

Nếu trước căn lấy dấu + ta có:

$$\mathrm{Arc}\sin j = j\mathrm{Ln}(-1 + \sqrt{2n}) = j\left[\ln(\sqrt{2} - 1) + j(0 + 2k\pi)\right] = 2k\pi - j\ln(\sqrt{2} - 1)$$

Nếu trước căn lấy dấu - ta có:

$$\mathrm{Arc}\sin j = -j\mathrm{Ln}(-1 - \sqrt{2}) = -j\left[\ln(\sqrt{2} + 1) + j(\pi + 2k\pi)\right] = 2(k + 1)\pi - j\ln(\sqrt{2} + 1)$$

Viết gộp lại ta có:

$$\mathrm{Arc}\sin j = n\pi - j\ln\left[\sqrt{2} - (-1)^n\right] \text{ n nguyên}$$

Ví dụ: Tính Arctg2j

Theo (24) ta có:

$$\mathrm{Arctg}2j = -\frac{j}{2}\mathrm{Ln}\frac{1-2}{1+2} = -\frac{j}{2}\mathrm{Ln}\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{j}{2}\left[\ln\frac{1}{3} + j(\pi + 2k\pi)\right] = \frac{(2k+1)\pi}{2} + j\frac{\ln 3}{2}$$

Ví dụ 2: Giải phương trình 4cosz + 5 = 0

Ta có: $\cos z = -\dfrac{5}{4}$, $z = \mathrm{Arc}\cos\left(-\dfrac{5}{4}\right) = -j\mathrm{Ln}\left(-\dfrac{5}{4} \pm \sqrt{\dfrac{25}{16} - 1}\right) = -j\mathrm{Ln}\left(-\dfrac{5}{4} \pm \dfrac{3}{4}\right)$

Nếu trước căn lấy dấu + ta có:

$$z = -j\mathrm{Ln}\left(-\frac{5}{4} + \frac{3}{4}\right) = -j\mathrm{Ln}\left(-\frac{1}{2}\right) = -j\left[\ln\frac{1}{2} + j(\pi + 2k\pi)\right] = (2k+1)\pi + j\ln 2$$

Nếu trước căn lấy dấu - ta có:

$$z = -j\mathrm{Ln}\left(-\frac{5}{4} - \frac{3}{4}\right) = -j\mathrm{Ln}(-2) = -j[\ln 2 + j(\pi + 2k\pi)] = (2k+1)\pi - j\ln 2$$

Tóm lại: $z = (2k+1)\pi \pm j\ln 2$

12. Hàm hyperbol ngược:

Ta gọi w = Arshz là hàm ngược của z = shw

w = Arshz là hàm ngược của z = shw

w = Arshz là hàm ngược của z = shw

Biểu diễn các hàm này qua logarit ta có:

$$\mathrm{Arshz} = \mathrm{Ln}(z + \sqrt{z^2 + 1})$$

$$\mathrm{Archz} = \mathrm{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1})$$

$$\mathrm{Archz} = \frac{1}{2}\mathrm{Ln}\frac{1+z}{1-z}$$

Ví dụ: $\mathrm{Arshj} = \mathrm{Lnj} = j\left(\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$

13. Hàm luỹ thừa phức tổng quát w = z^n: Giả sử a là một số phức bất kỳ, a = α + jβ.

Ta định nghĩa:

$$z^a = e^{a\mathrm{Ln}z} \tag{25}$$

Đặt $z = re^{j\varphi}$ ta có: Lnz = lnr + j(φ + 2kπ). Do đó:

$$z^a = e^{\alpha\ln r - \beta(\varphi + 2k\pi)}e^{j[(\alpha\varphi + 2k\pi) + \beta\ln r]}$$

Trong đó k là một số nguyên tuỳ ý.

Từ biểu thưc trên ta thấy, nếu β ≠ 0 thì hàm z^a có vô số trị.Toạ vị của chúng nằm trên đường tròn

$$|\, w \,| = e^{\alpha\ln r - \beta(\varphi + 2k\pi)}, \ k = 0, \pm1, \pm2, \pm3, ...$$

còn argumen của chúng là:

$$\alpha(\varphi + 2k\pi) + \beta \ln r\ , \ , k = 0, \pm1, \pm2, \pm3, ...$$

Nếu $\beta = 0$, nghĩa là a là một số thực thì các toạ vị của z^a nằm trên vòng tròn $|\ w\ | = e^{\alpha \ln r} = r^{\alpha}$ và argumen của z^{α} là

$$\alpha\varphi + 2k\pi\alpha$$

Có thể chứng minh được rằng nếu α là một số hữu tỉ, chẳng hạn $\alpha = \dfrac{p}{q}$, thì chỉ có q toạ vị khác nhau của z^{α}. Trong trường hợp này hàm $w = z^{\alpha}$ là hữu hạn trị. Nếu α là một số vô tỷ thì hàm $w = z^{\alpha}$ là vô số trị. Ta cũng có thẻ tách được nhánh đơn trị của hàm $w = z^a$. Điểm $z = 0$ là điểm rẽ nhánh của nó.

Ví dụ: Tìm j^j và 3^{2+j}

Theo định nghĩa ta có:

$$j^j = e^{jLnj} = e^{j\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)j} = e^{-\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)}$$

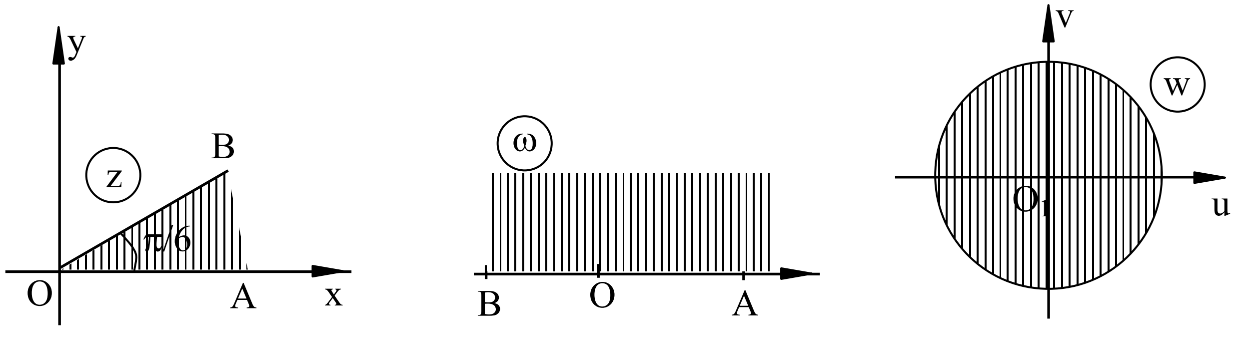
$$3^{2+j} = e^{(2+j)Ln3} = e^{(2+j)(\ln 3 + 2jk\pi)} = e^{(2\ln 3 - 2k\pi) + j(\ln 3 + 4k\pi)} = e^{(2\ln 3 - 2k\pi)}\left[\cos(\ln 3) + j\sin(\ln 3)\right]$$

§3. MỘT SỐ VÍ DỤ VỀ PHÉP BIẾN HÌNH BẢO GIÁC

Muốn làm một bài toán về phép biến hình bảo giác ta phải biết vận dụng các phép biến hình cơ bản.

Nếu là phép đồng dạng, ta dùng hàm tuyến tính. Muốn biến một cung tròn thành cung tròn (hay đường thẳng) ta dùng hàm phân tuyến tính. Muốn biến một góc thành nửa mặt phẳng ta dùng hàm luỹ thừa. Muốn biến một băng song song với trục thực lên nửa mặt phẳng ta nghĩ tới hàm mũ. Công thức Schwartz - Christophell cho phép biến đa giác thành nửa mặt phẳng. Hàm Giucovski biến miền ngoài đường tròn đơn vị lên mặt phẳng bỏ đi lát cắt dọc theo đoạn [-1, 1]

Ví dụ 1: Tìm phép biến hình đơn diệp và bảo giác biến miền hình quạt $0 < \arg z < \dfrac{\pi}{6}$ lên hình tròn đơn vị $|\ w\ | < 1$ sao cho ảnh của các điểm $z_1 = e^{\frac{j\pi}{12}}, z_2 = 0$ lần lượt là các điểm $w_1 = 0$ và $w_2 = j$



Dễ dàng thấy hàm $\omega = z^6$ biến miền quạt $0 < \arg z < \frac{\pi}{6}$ lên nửa mặt phẳng ω trên ($0 < \arg z < \pi$). Mặt khác ta lại biết phép biến hình, biến nửa mặt phẳng trên lên hình tròn đơn vị $|w| < 1$ là:

$$w = e^{j\varphi}\frac{\omega - a}{\omega - \bar{a}}$$

Vậy phép biến hình miền quạt $0 < \arg z < \frac{\pi}{6}$ lên hình tròn đơn vị có dạng

$$w = e^{j\varphi}\frac{z^6 - a}{z^6 - \bar{a}}.$$

Ta sẽ xác định φ và a sao cho các điều kiện phụ được thỏa mãn. Từ $w(e^{j\varphi/12}) = 0$ hay

$$w = e^{j\varphi}\frac{e^{\frac{j\pi}{2}} - a}{e^{\frac{j\pi}{2}} - \bar{a}} = 0$$ suy ra $a = e^{\frac{j\pi}{2}} = j,\ \bar{a} = -j$. Vậy:

$$w = e^{j\varphi}\frac{z^6 - j}{z^6 + j}$$

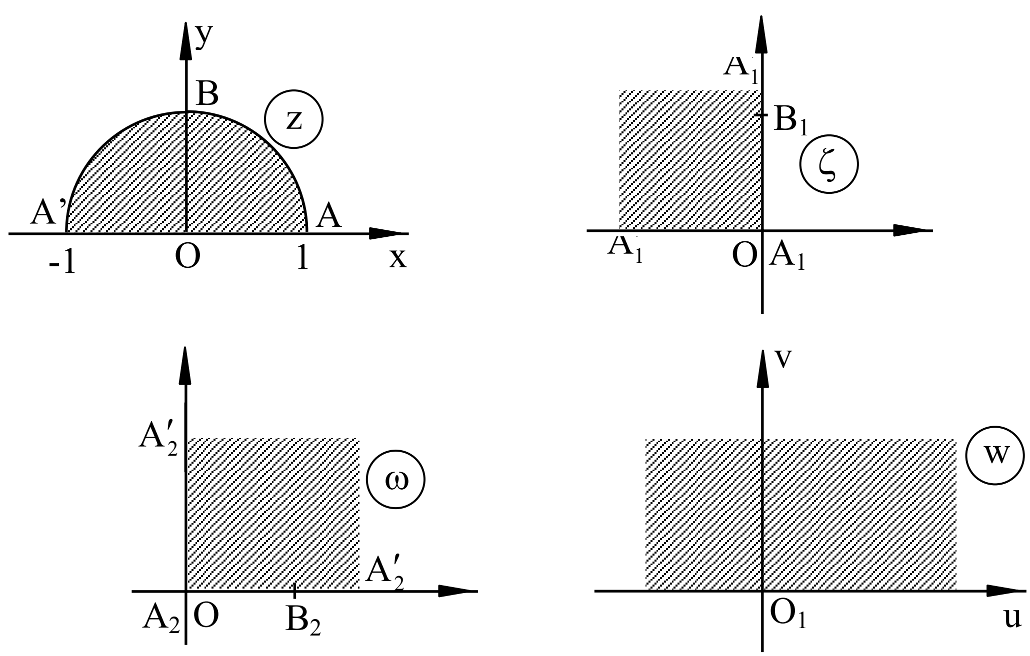
Cuối cùng, phép biến hình phải tìm là:

$$w = -j\frac{z^6 - j}{z^6 + j}$$

Ví dụ 2: Tìm phép biến hình, biến nửa mặt phẳng trên của hình tròn đơn vị

$G=\{|z| < 1.\ \mathrm{Im}z > 0\}$

lên mặt phẳng trên



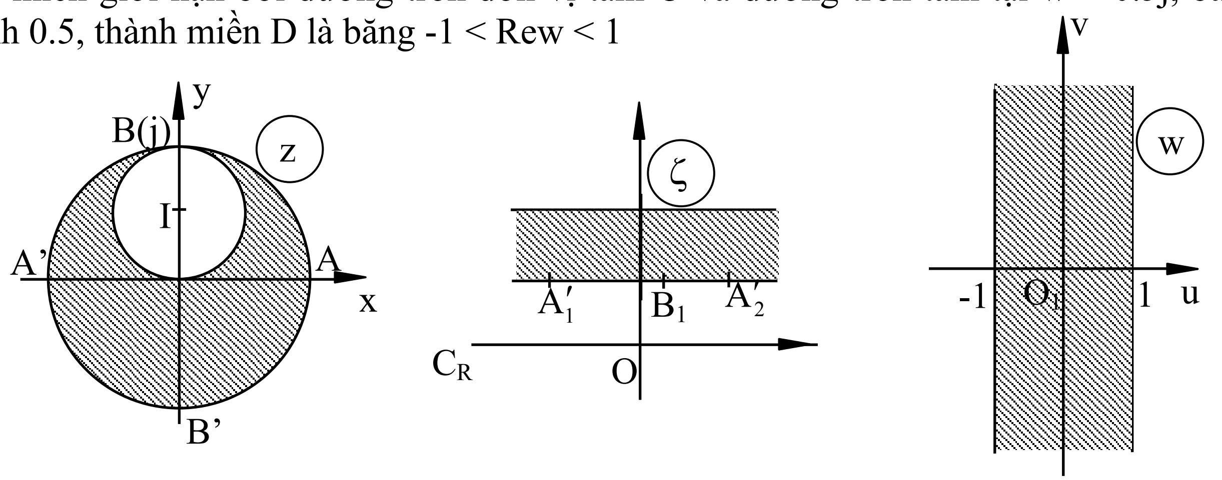
Ta dùng hàm phân tuyến tính $\zeta = \frac{z-1}{z+1}$ biến điểm z = 1 thành điểm ζ = 0, điểm z = -1 thành điểm ζ = ∞. Như vậy đoạn AA' được biến thành nửa trục thực âm. Do tính chất bảo giác, cung tròn ABA' được biến thanh nửa trục ảo trên. Vậy hàm $\zeta = \frac{z-1}{z+1}$ đã biến miền G thành góc phần tư thứ hai $\frac{\pi}{2} < \arg\zeta < \pi$. Thực hiện phép quay một góc $-\frac{\pi}{2}$ quanh gốc toạ độ bằng phép biến đổi ω = -jζ ta được góc phần tư thứ nhất $0 < \arg\zeta < \frac{\pi}{2}$. Sau đó ta đặt w = ω^2 ta sẽ tăng góc ở đỉnh A lên gấp đôi để biến thành nửa mặt phẳng trên Imw > 0. Tóm lại phép biến hình phải tìm là:

$$w = (-j\zeta)^2 = -\zeta^2 = -\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2$$

Ví dụ 3: Tìm phép biến hình bảo giác biến miền G

$$\begin{cases} |z| < 1 \\ \left|z - \frac{j}{2}\right| > \frac{1}{2} \end{cases}$$

tức miền giới hạn bởi đường tròn đơn vị tâm O và đường tròn tâm tại w = 0.5j, bán kính 0.5, thành miền D là băng -1 < Rew < 1



Nếu ta dùng một hàm phân tuyến tính biến điểm z = j thành điểm w = ∞ thì hai đường tròn | z | =1 và $\left|z - \frac{j}{2}\right| = \frac{1}{2}$ sẽ biến thành hai đường thẳng song song. Hàm phân tuyến tính có thể chọn là $\zeta = \frac{1}{z-j}$

Ta có $\zeta(1) = \frac{1}{1-j} = \frac{1}{2}(1+j)$, $\zeta(-1) = \frac{-1}{1+j} = \frac{1}{2}(-1+j)$, $\zeta(0) = j$, $\zeta(-j) = \frac{j}{2}$

Từ đó ta suy ra ảnh của đường tròn | z | = 1 là đường thẳng $\operatorname{Im}\zeta = \frac{1}{2}$, ảnh của đường tròn $\left|z-\frac{j}{2}\right|=\frac{1}{2}$ là đường thẳng $\mathrm{Im}\zeta=1$. Miền G đã được biến thành băng $\frac{1}{2}<\mathrm{Im}\zeta<1$. Bây giờ ta chỉ cần thực hiện phép đồng dạng tức là phép biến hình tuyến tính để biến miền D thành mặt phẳng w:

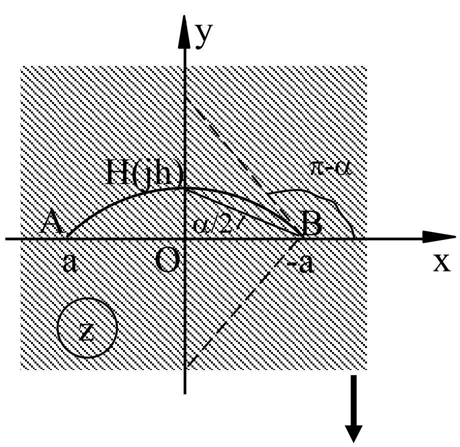
$$w=4j\left(\zeta-\frac{3j}{4}\right)=4j\zeta+3$$

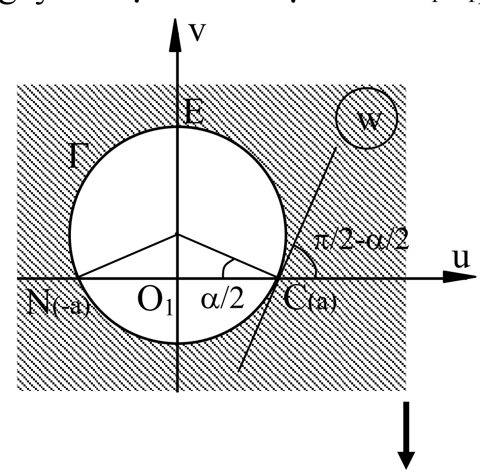
Tóm lại $w=4j\frac{1}{z-j}+3=\frac{3z+j}{z-j}$ là phép biến hình phải tìm.

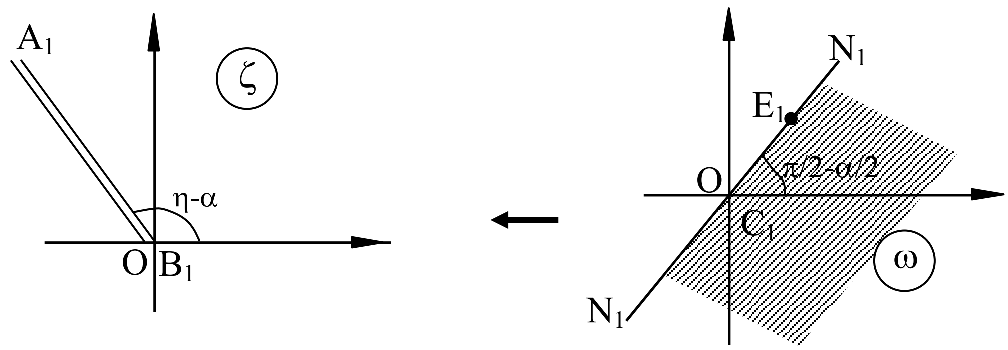
Ví dụ 4: Trong mặt phẳng z cho cung tròn AB: A là toạ vị của z = a, B là toạ vị của z = -a, trung điểm H của cung tròn AB là tạo vị của z = jh. Trong mặt phẳng w cho đường tròn Γ đi qua hai điểm w = ±a và tâm tại w = jh. Hãy tìm một phép biến hình bảo giác biến miền ngoài G của cung AB(tức là mặt phẳng z có một lát cắt dọc theo cung AB) thành miền D là miền bên ngoài hình tròn Γ.

Chú ý là với các giả thiết đã cho , tiếp tuyến tại mút B với cung AB tạo với trục Ox một góc (π - α) với $\alpha=\mathrm{arctg}\frac{h}{a}$. Còn trong mặt phẳng w tiếp tuyến với đường tròn Γ tại w = a tạo với trục Ou một góc $\left(\frac{\pi-\alpha}{2}\right)$.

Ta dùng hàm $\zeta=\frac{z-a}{z+a}$ biến cung AB thành tia B_1A_1 trong mặt phẳng ζ. Qua phép biến hình này ảnh của B là B_1 trùng với gốc toạ độ. Ảnh của A là $A_1=\infty$. Vì $\left.\frac{d\zeta}{dz}\right|_{z=a}=\frac{1}{2a}>0$ vậy $\arg\left.\frac{d\zeta}{dz}\right|_{z=a}=0$ nên tia A_1B_1 cũng nghiêng với trục thực một góc (π-α). Qua phép biến hình này, miền ngoài của cung tròn AB được biến thành miền G_1 là miền ngoài của tia B_1A_1 (tức là mặt phẳng ζ có một lát cắt dọc theo A_1B_1)







Về phía mặt phẳng w, ta cũng thực hiện một phép biến hình phân tuyến tính để biến cung tròn Γ thành đường thẳng. Phép biến hình được chọn là:

$$\omega = \frac{w-a}{w+a}$$

Qua phép biến hình này, đường tròn Γ biến thành đường thẳng $C_1E_1N_1$ đi qua gốc. Ảnh của C là C_1 trùng với gốc toạ độ. Ảnh của N là $N_1 = \infty$. Vì $\left.\frac{d\zeta}{dw}\right|_{w=a} = \frac{1}{2a} > 0$ nên đường thẳng $C_1E_1N_1$ cũng tạo với trục thực góc $\left(\frac{\pi-\alpha}{2}\right)$. Miền ngoài của đường tròn Γ được biến thành miền D_1 là nửa mặt phẳng ω nằm bên phải đường thẳng $N_1C_1E_1$. Nhờ phép biến hình $\zeta = \omega^2$ miền D_1 được biến thành miền G_1. Qua phép bình phương này đường thẳng C_1N_1 gộp lại thành tia B_1A_1.

Tóm lại, miền G bên ngoài cung tròn AB trong mặt phẳng z được biến thành miền D là miền ngoài đường tròn Γ nhờ phép biến hình:

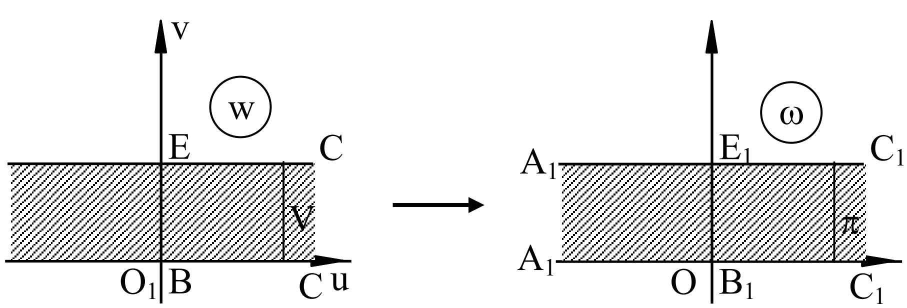
$$\frac{z-a}{z+a} = \left(\frac{w-a}{w+a}\right)^2$$

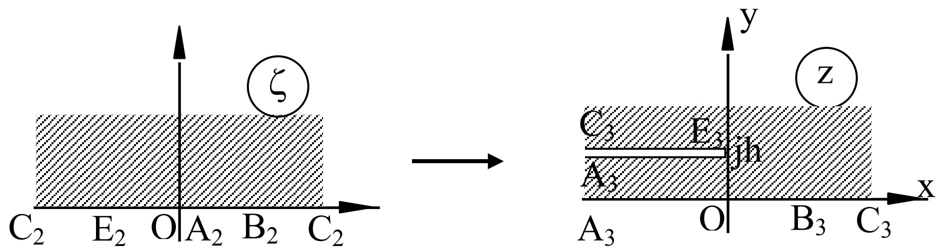
Từ đó rút ra:

$$z = \frac{1}{2}\left(w + \frac{a^2}{w}\right) \text{ hay } w = z + \sqrt{z^2 - a^2}$$

Ví dụ 5: Tìm phép biến hình biến miền D = { -V < Imw < V } của mặt phẳng w lên miền G là mặt phẳng z bỏ đi hai lát cắt Imz = ±jh và Rez < 0.

Ta sẽ tìm phép biến hình biến băng 0 < Imw < V lên nửa mặt phẳng Imw > 0 bỏ đi lát cắt I = jh sao cho ảnh của trục thực Imw = 0 là Imz = 0. Sau đó dùng nguyên lí đối xứng.





✯Trước hết ta dùng phép biến hình tuyến tính $\omega = \frac{\pi}{V}w$ biến băng 0 < Imw < V thành băng 0 < Imω<π trong mặt phẳng ω. Qua phép biến hình này trục thực của mặt phẳng w được biến thành trục thực của mặt phẳng ω; đường thẳng Imw = V biến thành đường thẳng Imω = π.

✯ Tiếp theo ta dùng phép biến hình $\zeta = e^{\omega}$ biến băng 0 < Imω < π thành nửa mặt phẳng trên. ảnh của trục thực Imω = 0 là nửa trục thực dương trong mặt phẳng ζ.

✯ Để biến nửa mặt phẳng trên Imζ > 0 lên nửa mặt phẳng trên Imw > 0, bỏ đi lát cắt Imz = jh, ta dùng hàm :

$$z = \frac{h}{\pi}(\zeta + 1 + \ln\zeta)$$

Qua phép biến hình này nửa trục thực dương trong mặt phẳng ζ được biến thành cả trục thực trong mặt phẳng z.

✯ Tóm lại để biến băng 0 < Imw < V lên nửa mặt phẳng Imz > 0, bỏ đi lát cắt Imz = jh, Rez < 0, ta dùng phép biến hình:

$$z = \frac{h}{\pi}\left(e^{\omega} + 1 + \ln e^{\omega}\right) = \frac{h}{\pi}\left(e^{\frac{\pi w}{V}} + 1 + \frac{\pi w}{V}\right) \qquad (17)$$

Dùng nguyên lí đối xứng ta thấy phép biến hình (17) cũng biến băng -V < Imw < V lên miền G.

CHƯƠNG 3: TÍCH PHÂN HÀM PHỨC

§1. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG CỦA HÀM BIẾN PHỨC

1. Định nghĩa: Cho đường cong C định hướng, trơn từng khúc và trên C cho một hàm phức f(z). Tích phân của f(z) dọc theo C được định nghĩa và kí hiệu là:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(t_k)(z_k - z_{k-1}) = \int_C f(z)dz \qquad (1)$$

Trong đó $a = z_o$, $z_1,..,z_n = b$ là những điểm kế tiếp nhau trên C; a và b là hai mút, t_k là một điểm tuỳ ý của C nằm trên cung [z_k, z_{k-1}]. Giới hạn (1) thực hiện sao cho max l_k $\to 0$ với l_k là độ dài cung [z_k, z_{k-1}].

2. Cách tính: Đặt $f(z) = u(x,y) + jv(x,y)$, $z_k = x_k + jy_k$

$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $\Delta y_k = y_k - y_{k-1}$

$t_k = \alpha_k + j\beta_k$;

$u(\alpha_k , \beta_k) = u_k$; $v(\alpha_k , \beta_k) = v_k$

ta có: $$\sum_{k=1}^{n} f(t_k)(z_k - z_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n}(u_k\Delta x_k - v_k\Delta y_k) + j\sum_{k=1}^{n}(u_k\Delta x_k + v_k\Delta y_k) \qquad (2)$$

Nếu đường cong C trơn từng khúc và f(z) liên tục từng khúc, giới nội thì khi $n\to\infty$ vế phải của (2) tiến tới các tích phân đường của hàm biến thực. Do đó tồn tại:

$$\int_C f(z) = \int_C (udx - vdy) + j\int_C (udy + vdx) \qquad (3)$$

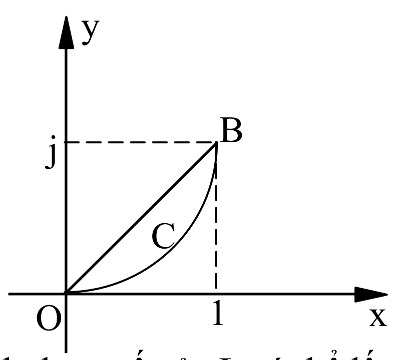
Nếu đường cong L có phương trình tham số là $x = x(t)$, $y = y(t)$ và $\alpha \le t \le \beta$ thì ta có thể viết dưới dạng hàm biến thực:

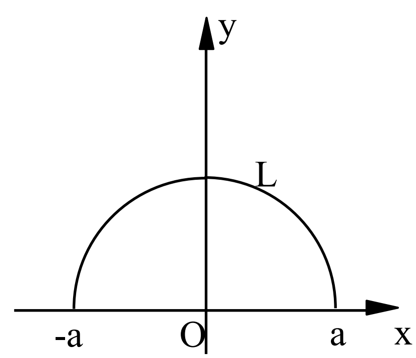
$z = x(t) + jy(t) = z(t) \qquad \alpha \le t \le \beta$

với $z(a) = \alpha$; $z(b) = \beta$. Khi đó ta có công thức tiện dụng:

$$\int_C f(z)dz = \int_\alpha^\beta f\left[\,z(t)\,\right].z'(t)\,dt \qquad (4)$$

Ví dụ 1: Tính $I = \int_L \mathrm{Re}z dz$, L là đoạn thẳng nối 2 điểm 0 và 1 + j theo chiều từ 0 đến 1+j.





Phương trình tham số của L có thể lấy là:

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t \end{cases}$$ Vậy $z(t) = (1 + j)t$, t thực $t \in [0, 1]$

Điểm O ứng với t = 0 và điểm B ứng với t = 1. Theo (4):

$$I = \int_0^1 \mathrm{Re}(1+j)t.z'(t)dt = \int_0^1 (1+j)tdt = (1+j)\int_0^1 tdt = \frac{1+j}{2}$$

Ví dụ 2:Tính $I = \int_L \frac{dz}{z}$, L là nửa cung tròn nằm trong nửa mặt phẳng trên, nối điểm -a và a, chiều lấy tích phân từ -a đến a.

Phương trình tham số của đường cong L là:

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \end{cases}$$

Vậy z(t) = a(cost + jsint) = ae^{jt}, z'(t) = jae^{jt}.

Điểm -a ứng với t = π, điểm a ứng với t = 0. Theo (4):

$$I = \int_L \frac{dz}{z} = \int_\pi^0 \frac{jae^{jt}dt}{ae^{jt}} = j\int_\pi^0 dt = -j\pi$$

Ví dụ 3: Tính $I = \int_C (1 + j - 2\overline{z})dz$, C là cung parabol y = x^2, nối gốc O và điểm B có toạ độ (1,1).

Hàm f(z) = $1 + j - 2\overline{z} = 1 + j - 2(x - jy)$. Tách phần thực và phần ảo ta có u(x, y)=1-2x v(x, y) = 1 + 2y. Dùng (3) ta có:

$$I = \int_C (1-2x)dx - (1+2y)dy + j\int_C (1+2y)dx + (1-2x)dy$$

Chuyển mỗi tích phân đường loại 2 thành tích phân xác định ta có:

$$\int_C (1-2x)dx - (1+2y)dy = \int_0^1 (1-2x)dx - (1+2x^2)2xdx = \int_0^1 (-4x^3 - 4x + 1)dx = -2$$

$$\int_C (1+2y)dx + (1-2x)dy = \int_0^1 (1+2x^2)dx + (1-2x)2xdx = \int_0^1 (-2x^2 + 2x + 1)dx = \frac{4}{3}$$

Thay vào trên ta có:

$$I = -2 + \frac{4j}{3}$$

Ví dụ 4: Tính $I = \int_{AB} z^2 dz$, AB là đoạn thẳng nối điểm A là toạ vị của số phức 2 và điểm B là toạ vị của số phức j.

f(z) = $z^2 = (x + jy)^2 = (x^2 - y^2 + 2jxy)$ nên u = $x^2 - y^2$ và v = 2xy. Theo (3) ta có:

$$I = \int_{AB} (x^2 - y^2)dx - 2xydy + j\int_{AB} (x^2 - y^2)dy + 2xydx$$

Vì AB có phương trình x = 2 - 2y, dx = -2dy (chọn y làm tham số) nên:

$$\int_{AB} (x^2 - y^2)dx - 2xydy = \int_0^1 (4 + 4y^2 - 8y - y^2)(-2dy) - 2(2-2y)ydy = -\frac{8}{3}$$

$$\int_{AB} (x^2 - y^2)dy + 2xydx = \int_0^1 (4 + 4y^2 - 8y - y^2)dy + 2y(2-2y)(-2ydy) = -\frac{1}{3}$$

Thay vào ta có:

$$I = -\frac{8+j}{3}$$

Ví dụ 5: Tính $I_k = \int_C (\overline{z})^2 dz \;\; k = 1, 2$

với C_1 là đoạn thẳng nối 0 và 1 + j và C_2 là đường gấp khúc nối 0, 1, 1 + j
Áp dụng (4) với C_1 ta có z = (1 + j)t, t đi từ 0 đến 1 nên:

$$I_1 = \int_{C_1} (\overline{z})^2 dz = \int_o^1 (1-j)^2 t^2 (1+j)dt = \frac{2}{3}(1-j)$$

Tương tự:

$$I_1 = \int_{C_2} (\overline{z})^2 dz = \int_o^1 t^2 dt + \int_o^1 (1-jt)^2 dt = \frac{2}{3}(2+j)$$

3. Các tính chất của tích phân: Từ công thức (3) ta suy ra rằng tích phân của hàm biến phức dọc theo một đường cong có tất cả các tính chất thông thường của một tích phân đường loại 2. Ta nêu lại các tính chất đó:

- Tích phân không phụ thuộc tên gọi biến số tích phân

$$\int_{AB} f(z)dz = \int_{AB} f(\zeta)d\zeta$$

- $\int_{AB} [f(z) + g(z)]dz = \int_{AB} f(z)dz + \int_{AB} g(z)dz$
- Nếu a là hằng số phức thì:

$$\int_{AB} af(z)dz = a\int_{AB} f(z)dz$$

- $\int_{AB} f(z)dz = -\int_{BA} f(z)dz$
- Nếu A, B và C là 3 điểm cùng nằm trên một đường cong thì:

$$\int_{AC} f(z)dz = \int_{AB} f(z)dz + \int_{BC} f(z)dz$$

- $\int_{z_o}^{z} dz = z - z_o$

4. Các công thức ước lượng tích phân: Nếu M là giá trị lớn nhất của | f(z) | trên đường cong L (nghĩa là | f(z) | ≤ M ∀z ∈ L) thì ta có:

$$\left|\int_L f(z)dz\right| \le \int_L |f(z)dz|\,|dz| \le Ml \qquad (5)$$

Chứng minh: Vì môđun của một tổng nhỏ hoặc bằng tổng các môđun nên:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k\right| \le \sum_{k=1}^{n} |f(\zeta_k)|\,|\Delta z_k|$$

Nhưng theo giả thiết | $f(\zeta_k)$ | ≤ M nên:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k\right| \le \sum_{k=1}^{n} M\left|\Delta z_k\right| = M\sum_{k=1}^{n}\left|\Delta z_k\right|$$

Vậy: $\left|\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k\right| \le M\sum_{k=1}^{n}\left|\Delta z_k\right|$

Chú ý là $\sum_{k=1}^{n}\left|\Delta z_k\right|$ bằng chiều dài đường gấp khúc có các đỉnh tại z_o, z_1, z_2 ,..,z_n. Khi $\max|\Delta z_k| \to 0$ thì $\sum_{k=1}^{n}\left|\Delta z_k\right|$ dần tới độ dài l của đường cong L. Chuyển qua giới hạn trong (6) ta có:

$$\left|\int_L f(z)dz\right| \le Ml \qquad (5)$$

§2. ĐỊNH LÍ CAUCHY CHO MIỀN ĐƠN LIÊN

1. Định lí: Nếu f(z) giải tích trong miền đơn liên D và C là một đường cong kín nằm trong D thì:

$$\oint_L f(z)dz = 0 \qquad (6)$$

Chứng minh: Giả thiết chỉ đòi hỏi f(z) giải tích trong D, nhưng với giả thiết này, cách chứng minh sẽ khó hơn. Để đơn giản cách chứng minh, ta giả thiết thêm f'(z) liên tục trong $\overline{D}$. Vậy u(x, y) và v(x, y) liên tục và có đạo hàm riêng liên tục trong $\overline{D}$. Theo (3) thì:

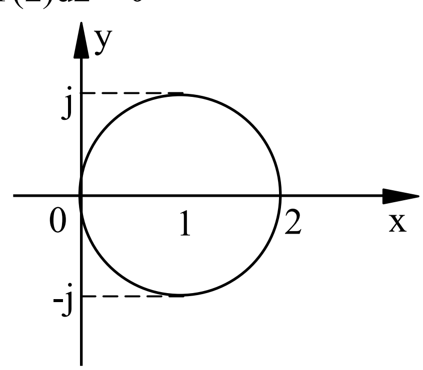
$$\oint_L f(z)dz = \oint_L udx - vdy + j\oint_L vdx + udy$$

Trong giải tích, nếu đã biết P(x, y), Q(x, y) liên tục và có đạo hàm riêng liên tục trong $\overline{D}$ thì điều kiện cần và đủ để $\oint_C Pdx + Qdy = 0\ \forall C \in \overline{D}$ là $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$

Áp dụng kết quả đó cho, ta thấy $\oint_L udx - vdy = 0$. Thật vậy, ở đây P = u và Q = -v. Do giả thiết f(z) giải tích nên các điều kiện C - R được thoả mãn, vậy $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial(-v)}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x}$

Tương tự ta chứng minh được $\oint_L vdx + udy = 0$. Do đó $\oint_L f(z)dz = 0$

Ví dụ 1: Nếu L là đường cong kín bất kì giới hạn một miền đơn liên G, thì $\oint_L e^z dz = 0$ vì f(z) = e^z giải tích trong cả mặt phẳng.



Ví dụ 2: Tính $I = \oint_L \frac{\sin z}{z^2+1}dz$, L là đường tròn | z - 1| = 1.

Hàm $f(z) = \frac{\sin z}{z^2+1}$ có hai điểm bất thường là nghiệm của phương trình $z^2 + 1 = 0$ là ±j.
Vậy f(z) giải tích trong miền | z - 1 | ≤ 1 . Áp dụng định lí Cauchy ta có I = 0.

Ví dụ 3: Tính $I = \oint_L \frac{dz}{z-z_0}$, L là đường tròn tâm z_o, bán kính R, tích phân lấy theo chiều dương.

Phương trình tham số của L là:

$$\begin{cases} x = x_o + a\cos t \\ y = y_o + a\sin t \end{cases}$$

Vậy $z(t) = x(t) + jy(t) = z_o + ae^{jt}$; $z'(t) = jae^{jt}$.

Theo (4) ta có:

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{jae^{tj}}{ae^{tj}}dt = 2\pi j$$

Sở dĩ I ≠ 0 vì hàm $f(z) = \frac{1}{z-z_0}$ có điểm bất thường tại $z = z_o$ và giả thiết của định lí Cauchy không được thoả mãn.

Qua ví dụ này ta thấy nếu f(z) có điểm bất thường trong G thì định lí Cauchy không còn đúng nữa.

Ví dụ 4: Tính $I = \int_o^j ze^z dz$

Ta có thể viết: $I = \int_o^j ze^z dz = ze^z\Big|_o^j - \int_o^j e^z dz = je^j - (e^j - 1) = 1 + (j-1)(\cos 1 + j\sin 1)$

$$= (1 - \cos 1 - \sin 1) + j(\cos 1 - \sin 1)$$

Ví dụ 5: Tính $I = \int_1^{j+1} (z-1)^{100} z dz$

Đặt t = z - 1 ta có:

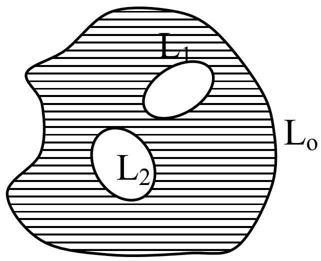
$$I = \int_o^j t^{100}(t+1)dt = \int_o^j (t^{101} + t^{100})dt = \left(\frac{t^{102}}{102} + \frac{t^{101}}{101}\right)\Bigg|_0^j = \frac{j^{102}}{102} + \frac{j^{101}}{101} = -\frac{1}{102} + \frac{j}{102}$$

§3. ĐỊNH LÍ CAUCHY CHO MIỀN ĐA LIÊN

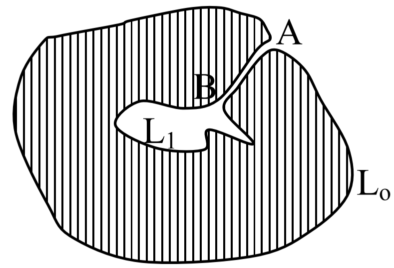
1. Định lí: Giả sử miền G là đa liên mà biên L gồm đường cong bên ngoài L_o, và các đường cong bên trong $L_1, L_2, .., L_n$.(hình a)

Nếu f(z) là một hàm giải tích trong $\overline{G}$ thì:

$$\oint_{L_o} f(z)dz = \oint_{L_1} f(z)dz + \oint_{L2} f(z)dz + \cdots + \oint_{Ln} f(z)dz \qquad (7)$$



a



b

Các tích phân đều lấy theo hướng dương, nghĩa là ngược chiều kim đồng hồ.
Chứng minh: Ta sẽ chứng minh

$$\oint_{L_o} f(z)dz = \oint_{L_1} f(z)dz$$

nếu biên bên trong chỉ có một đường cong kín L_1(hình b). Cách chứng minh tương tự nếu biên bên trong có nhiều đường.

Giả sử AB là lát cắt nối điểm A trên đường L_o và điểm B trên đường L_1. Do lát cắt AB, miền G trở thành đơn liên, do đó có thể áp dụng định lí Cauchy nêu ở phần trên. Ta có:

$$\oint_{L_o} f(z)dz + \oint_{AB} f(z)dz + \oint_{\overline{L}_1} f(z)dz + \oint_{BA} f(z)dz = 0$$

Kí hiệu $\oint_{\overline{L}_1} f(z)dz$ chỉ tích phân theo hướng thuận chiều kim đồng hồ.

Theo tính chất của tích phân ta có:

$$\oint_{\overline{L}_1} f(z)dz = -\oint_{L_1} f(z)dz$$

$$\oint_{AB} f(z)dz = -\oint_{BA} f(z)dz$$

Thay vào trên ta có:

$$\oint_{L_o} f(z)dz - \oint_{L_1} f(z)dz = 0$$

Đây là điều cần chứng minh.
Ghi chú: Công thức (7) có thể viết thành:

$$\oint_{L_o} f(z)dz - \oint_{L_1} f(z)dz - \oint_{L2} f(z)dz - \cdots - \oint_{Ln} f(z)dz = 0$$

hay: $$\oint_{L_o} f(z)dz + \oint_{\overline{L}_1} f(z)dz + \oint_{\overline{L}_2} f(z)dz + \cdots + \oint_{\overline{L}_n} f(z)dz = 0$$

hay gọn hơn:

$$\oint_{L_o + \overline{L}_1 + \cdots + \overline{L}_n} f(z)dz = 0$$

Gọi L là biên có hướng dương của miền G thì đẳng thức trên được viết là:

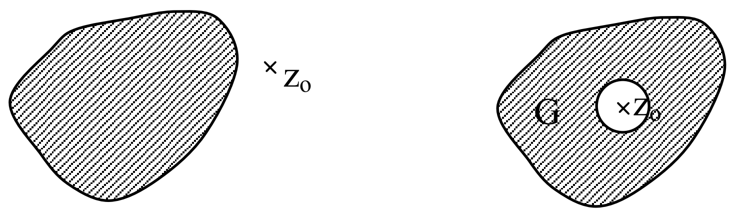
$$\oint_{L} f(z)dz = 0$$

Đây là công thức (1) suy rộng cho miền đa liên.

Hệ quả: Giả sử f(z) giải tích trong miền D có biên C và liên tục trong $\overline{D}$ thì với mọi $r_o \in D$ thì:

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_o} = 2\pi j f(z_o)$$

Ví dụ :Tính $I = \int_L \frac{dz}{(z-z_o)^n}$ với n nguyên dương, z_o cho trước. L là đường cong kín không qua z_o



Gọi G là miền giới hạn bởi đường cong L.

Giả sử $z_o \notin G$. Khi đó $f(z) = \frac{1}{(z-z_o)^n}$ là hàm giải tích trong $\overline{G}$ nên theo định lí Cauchy thì I = 0

Giả sử $z_o \in G$. Loại khỏi G một miền là hình tròn tâm z_o , bán kính a. Như vậy f(z) sẽ giải tích trong miền nhị liên còn lại. Theo (8) thì:

$$I = \int_L \frac{dz}{(z-z_o)^n} = \int_\gamma \frac{dz}{(z-z_o)^n}$$

γ là đường tròn $| z - z_o | = a$.
Nếu n = 1 thì $I = 2j\pi$
Nếu $n \neq 1$, chú ý là khi $z \in \gamma$ thì: $z = z_o + ae^{jt}$, $dz = jae^{jt}dt$ $0 \le t \le 2\pi$
Vậy:

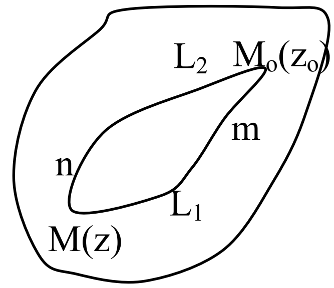
$$I = \int_L \frac{dz}{(z-z_o)^n} = \int_0^{2\pi} \frac{jae^{jt}dt}{a^n e^{jnt}} = \frac{j}{a^{n-1}} \int_0^{2\pi} e^{j(1-n)t}dt = \frac{1}{(1-n)a^{n-1}} e^{j(1-n)t}\Big|_0^{2\pi} = 0 \text{ vì } e^{j(1-n)2\pi} = e^o = 1$$

Ta tóm tắt kết quả để dùng sau này:

$$\oint_L \frac{dz}{(z-z_o)^n} = \begin{cases} 2j\pi & \text{khi } n = 1, L \text{ bao } z_o \\ 0 & \forall z \neq \end{cases}$$

2. Tích phân không phụ thuộc đường đi:

Định lí: Giả sử f(z) là một hàm giải tích trên miền đơn liên G và z_o là một điểm cố định thuộc G. Khi đó tích phân của hàm f(z) dọc theo một đường cong kín nằm trọn trong G, đi từ điểm z_o đến điểm z $\int_{z_o}^{z} f(z)dz$ không phụ thuộc vào đường lấy tích phân



Nếu cận trên z thay đổi thì tích phân đó là một hàm giải tích của z trong G và có đạo hàm được xác định bởi công thức:

$$\frac{d}{dz}\left(\int_{z_o}^{z} f(z)dz\right) = f(z) \qquad (10)$$

Chứng minh: Lấy hai đường cong bất lì L_1 và L_2 nằm trong G và đi từ z_o đến z. Do f(z) giải tích nên áp dụng định lí Cauchy cho đường cong kín M_omMnM_o:

$$\int_{M_omM} f(z)dz + \int_{MnM_o} f(z)dz = 0$$

hay: $$\int_{M_omM} f(z)dz - \int_{M_onM} f(z)dz = 0$$

tức là: $\int_{L_1} f(z)dz = \int_{L_2} f(z)dz$

Vì L_1 và L_2 là bất kì nên ta có thể kết luận rằng tích phân đi từ z_o đến z không phụ thuộc đường lấy tích phân mà chỉ phụ thuộc cận trên z.

Bây giờ ta còn phải chứng minh rằng nếu đặt $F(z) = \int_{z_o}^{z} f(z)dz$ thì F'(z) = f(z). Vì tích phân không phụ thuộc đường đi nên ứng với mỗi z tích phân có một giá trị hoàn toàn xác định. Vậy F(z) là một hàm đơn trị. Ta có:

$$\Delta F = F(z+\Delta z) - F(z) = \int_{z_o}^{z+\Delta z} f(\zeta)d\zeta - \int_{z_o}^{z} f(\zeta)d\zeta = +\int_{z}^{z_o} f(\zeta)d\zeta = \int_{z}^{z+\Delta z} f(\zeta)d\zeta$$

Vì $f(\zeta)$ giải tích, nên nó liên tục tại z. Do đó có thể viết $f(\zeta) = f(z) + \alpha(\zeta)$ với $\alpha(\zeta)$ là hàm giải tích, dần tới 0 khi $\zeta\to 0$. Vậy:

$$\Delta F = \int_{z}^{z+\Delta z} [f(z)+\alpha(\zeta)]d\zeta = \int_{z}^{z+\Delta z} f(z)d\zeta + \int_{z}^{z+\Delta z} \alpha(\zeta)d\zeta = f(z)\int_{z}^{z+\Delta z} d\zeta + \int_{z}^{z+\Delta z} \alpha(\zeta)d$$

$$= f(z)\Delta z + \int_{z}^{z+\Delta z} \alpha(\zeta)d\zeta$$

hay $$\frac{\Delta F}{\Delta z} = f(z) + \frac{\int_{z}^{z+\Delta z} \alpha(\zeta)d\zeta}{\Delta z} \qquad (11)$$

Cho $\Delta z\to 0$ thì $z + \Delta z \to z$. Số hạng thứ hai bên vế phải dần tới 0. Thật vậy, do tích phân không phụ thuộc đường đi nên trong tích phân $\int_{z}^{z+\Delta z} \alpha(\zeta)d\zeta$ ta chọn đường đi từ z tới $z + \Delta z$ là đoạn thẳng nối hai điểm đó. Chiều dài đoạn thẳng này là $|\Delta z|$. Sau đó áp dụng công thức ước lượng tích phân ta có:

$$\left|\int_{z}^{z+\Delta z} \alpha(\zeta)d\zeta\right| \le \max|\alpha(\zeta)|.|\Delta z|$$

Vậy: $$\left|\frac{\int_z^{z+\Delta z}\alpha(\zeta)d\zeta}{\Delta z}\right| \le \max\left|\alpha(\zeta)\right|$$

Cho $\Delta z \to 0$ thì max | $\alpha(\zeta)$ | $\to$ 0. Do đó $\frac{\int_z^{z+\Delta z}\alpha(\zeta)d\zeta}{\Delta z} \to 0$. Từ (11) ta suy ra F'(z) = f(z).

§4. TÍCH PHÂN BẤT ĐỊNH

Ta gọi F(z) là nguyên hàm f(z) nếu F'(z) = f(z). Hiển nhiên, nếu F(z) là nguyên hàm của f(z) thì F(z) + C , trong đó C là một hằng số phức cũng là nguyên hàm của f(z). Ngược lại nếu Φ(z) và F(z) đều là nguyên hàm của f(z) thì chúng phải khác nhau một hằng số phức C:

$$\Phi(z) - F(z) = C$$

Thật vậy, đặt g(z) = Φ(z) - F(z) = u(x, y) + jv(x, y).
Ta phải chứng minh rằng u và v là những hằng số.
Ta có:

$$g'(z) = \Phi'(z) - F'(z) = 0 \tag{12}$$

Nhưng theo công thức tính đạo hàm:

$$g'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + j\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - j\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

Như vậy:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

Nghĩa là u(x, y) và v(x, y) là các hằng số. Ta suy ra rằng nếu F(z) là nguyên hàm của f(z) thì họ hàm số F(z) + C với C là một hằng số phức tuỳ ý, chứa tất cả các nguyên hàm của f(z). Ta gọi họ hàm số này là tích phân bất định của hàm f(z) và kí hiệu là $\int f(z)dz$.

Tóm lại: $\int f(z)dz = F(z) + C: \ F'(z) = f(z)$

Theo bảng đạo hàm ta có thể suy ra bảng nguyên hàm, giống như trong tích phân thực:

$$\int e^z dz = e^z + C$$

$$\int z^n dz = \frac{z^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int \sin z dz = \cos z + C$$

$$\int \frac{1}{z} dz = \ln z + C$$

§5. CÔNG THỨC NEWTON - LEIBNITZ

Định lí: Giả sử f(z) là một hàm giải tích trong miền đơn liên G và có nguyên hàm F(z). Khi đó:

$$\int_{z_1}^{z_2} f(\zeta)d\zeta = F(z_2) - F(z_1) \tag{13}$$

Chứng minh: Ta đã biết là $\int_{z_o}^{z} f(\zeta)d\zeta$ cũng là một nguyên hàm f(z). Vậy:

$$\int_{z_o}^{z} f(\zeta)d\zeta = F(z) + C$$

Thay $z = z_o$ vào 2 vế ta có: $0 = F(z_o) + C$. Do đó $C = -F(z_o)$. Như vậy:

$$\int_{z_o}^{z} f(\zeta)d\zeta = F(z) - F(z_o)$$

Khi $z = z_1$:

$$\int_{z_o}^{z_1} f(\zeta)d\zeta = F(z_1) - F(z_o) = F(z)\Big|_{z_o}^{z_1}$$

Công thức này được gọi là công thức Newton - Leibnitz. Khi tính tích phân của một hàm giải tích ta dùng trực tiếp công thức này mà không đưa về tính tích phân đường loại 2.

Ví dụ 1: Tính $I = \int_{2}^{j} z^2 dz$

$$I = \int_{2}^{j} z^2 dz = \frac{z^3}{3}\Bigg|_{2}^{j} = -\frac{j+8}{3}$$

Vi dụ 2: Tính $I = \int_{L} \frac{dz}{z}$, L là cung tròn đi từ điểm z = -a đến điểm z = a(a> 0)

$$I = \int_{L} \frac{dz}{z} = \int_{-a}^{a} \frac{dz}{z} = \ln z\Big|_{-a}^{a} = \ln a - \ln(-a) = \ln a - \left[\ln a + j\arg(-a)\right] = -j\pi$$

Ví dụ 3: Tính $I = \int_{0}^{j} ze^z dz$

$$I = \int_{0}^{j} ze^z dz = ze^z\Big|_{0}^{j} - \int_{0}^{j} e^z dz = ze^z\Big|_{0}^{j} - e^z\Big|_{0}^{j} = -0.381 - 0.301j$$

§6. CÔNG THỨC TÍCH PHÂN CAUCHY

1. Tích phân Cauchy:

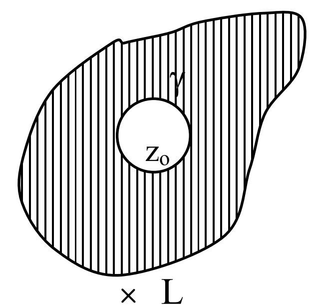
Định lí: Giả sử G là một miền đơn liên hoặc đa liên giới hạn bởi biên L và z là một điểm bên trong G. Nếu f(z) giải tích trong $\overline{G}$ thì ta có công thức:

$$f(z)=\frac{1}{2j\pi}\oint_L \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z} \tag{14}$$

Tích phân bên vế phải được gọi là tích phân Cauchy của hàm f(z). Công thức (14) được gọi là công thức tích phân Cauchy.

Ý nghĩa: Công thức này cho phép ta tính được giá trị của hàm giải tích ở bên trong miền G khi biết giá trị của nó trên biên.

Nói khác đi, giá trị của hàm giải tích trong miền, hoàn toàn được xác định bởi giá trị của nó trên biên.



Chứng minh: Lấy z_o bất kì trong miền G, ta sẽ chứng minh rằng:

$$f(z_o)=\frac{1}{2j\pi}\oint_L \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z_o} \tag{15}$$

Đặt $\varphi(z)=\dfrac{f(z)}{z-z_o}$. Loại khỏi miền G một hình tròn bán kính r bất kì đủ nhỏ có tâm tại z_o thì φ(z) sẽ giải tích trong miền đa liên còn lại.

Áp dụng định lí Cauchy cho miền đa liên ta có:

$$\oint_L \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z_o}=\oint_\gamma \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z_o}$$

γ là đường tròn $|\zeta - z_o| = r$

Vì công thức trên đúng với mọi r khá bé nên (để đường tròn γnằm trong miền G) ta có thể viết:

$$\int_L \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z_o}=\lim_{r\to 0}\oint_\gamma \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z_o}$$

Ta có:

$$\oint_\gamma \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z_o}=\oint_\gamma \frac{f(\zeta)-f(z_o)+f(z_o)}{\zeta-z_o}d\zeta=\oint_\gamma \frac{f(\zeta)-f(z_o)}{\zeta-z_o}d\zeta+f(z_o)\oint_\gamma \frac{1}{\zeta-z_o}d\zeta$$

$$=\oint_\gamma \frac{f(\zeta)-f(z_o)}{\zeta-z_o}d\zeta+2j\pi f(z_o) \tag{16}$$

Do tính liên tục của hàm f(ζ) nên $\forall\varepsilon > 0$ ta có thể chọn r khá bé để $|f(\zeta) - f(z_o)| < \varepsilon$.

Khi đó $\forall\zeta \in \gamma$ ta có $|\zeta - z_o| = r$ và:

$$\left|\frac{f(\zeta)-f(z_o)}{\zeta-z_o}\right|<\frac{\varepsilon}{r}$$

Áp dụng công thức ước lượng tích phân ta có:

$$\left|\oint_\gamma \frac{f(\zeta)-f(z_o)}{\zeta-z_o}\right|\le\frac{\varepsilon}{r}2\pi r=2\pi\varepsilon$$

Vì ε bé tuỳ ý nên:

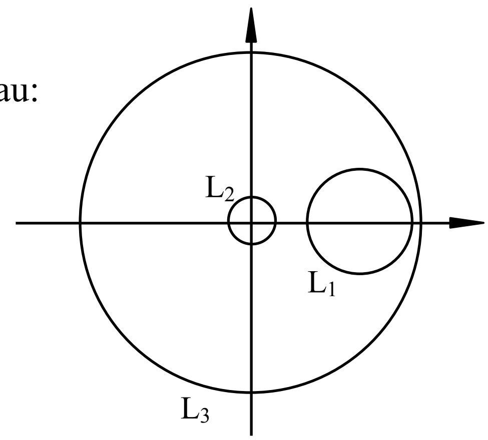
$$\lim_{r\to 0}\oint_{\gamma}\frac{f(\zeta)-f(z_o)}{\zeta - z_o}d\zeta = 0$$

Từ (16) suy ra:

$$\lim_{r\to 0}\oint_{\gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z_o}d\zeta = 2\pi\varepsilon f(z_o)$$

Đó là điều cần chứng minh.

Nhờ công thức tích phân Cauchy ta có thể tính một số tích phân lấy dọc theo một đường cong kín.



Ví dụ 1: Tính $I = \oint_L \frac{e^z dz}{z(z-3)}$ trong các trường hợp sau:

- L là đường tròn tâm tại 2, bán kính 1.5(đường L_1)
- L là đường trón tâm O, bán kính 0.25(đường L_2)
- L là đường trón tâm 0.5, bán kính 5(đường L_3)
- Để tính tích phân $I = \oint_{L_1} \frac{e^z dz}{z(z-3)}$ ta dùng (15)

Chọn $f(z) = \frac{e^z}{z}$, $z_o = 3$; hàm f(z) giải tích trong hình tròn $|z-2| \le \frac{3}{2}$. Vậy giả thiết của định lí được thoả mãn. Ta có:

$$I = \oint_{L_1}\frac{e^z dz}{z(z-3)} = 2j\pi f(3) = 2j\pi\frac{e^z}{3}$$

- Để tính $I = \oint_{L_2}\frac{e^z dz}{z(z-3)}$ ta đặt $f(z) = \frac{e^z}{z-3}$, $z_o = 0$; hàm f(z) giải tích trong hình tròn $|z| \le \frac{1}{4}$. Vậy giả thiết của định lí được thoả mãn. Ta có:

$$I = \oint_{L_1}\frac{e^z dz}{z(z-3)} = 2j\pi f(0) = 2j\pi\frac{e^0}{0-3} = -\frac{2j\pi}{3}$$

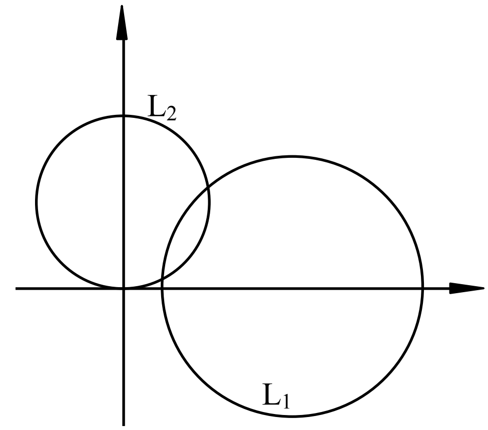
- Hàm dưới dấu tích phân $f(z) = \frac{e^z}{z(z-3)}$ giải tích trong miền đa liên mà biên ngoài là L_o và hai biên trong là L_1 và L_2. Áp dụng định lí Cauchy cho miền đa liên ta có:

$$\oint_{L}\frac{e^z dz}{z(z-3)} = \oint_{L_1}\frac{e^z dz}{z(z-3)} + \oint_{L_2}\frac{e^z dz}{z(z-3)} = 2j\pi\left[-\frac{1}{3}+\frac{e^z}{3}\right]$$

Ví dụ 2: Tính $I = \oint_L \frac{dz}{z^2+1}$ trong 2 trường hợp:

- L là đường tròn | z - 2 | = 3/2(đường L_1)
- L là đường tròn | z - j | = 1 (đường L_1)

Vì hàm $f(z)=\frac{1}{z^2+1}$ giải tích trong hình tròn $|z-2|\le\frac{3}{2}$ nên theo định lí Cauchy ta có:



$$I=\oint_{L_1}\frac{dz}{z^2+1}=0$$

$$I=\oint_{L_2}\frac{dz}{z^2+1}=\oint_{L_2}\frac{dz}{(z+j)(z-j)}.$$

Ta đặt $f(z)=\frac{1}{z+j}$, $z_o = j$. Hàm f(z) giải tích trong hình tròn | z - j | ≤ 1. Áp dụng (15) ta có:

$$\frac{1}{2j\pi}\oint_{L_2}\frac{dz}{z^2+1}=f(j)=\frac{1}{2j}$$

Như vậy:

$$\oint_{L_2}\frac{dz}{z^2+1}=\pi$$

2. Tích phân loại Cauchy:

Định nghĩa: Giả sử L là một đường cong trơn và f(t) là một hàm liên tục trên L. Xét hàm:

$$\Phi(z)=\frac{1}{2j\pi}\int_L\frac{f(t)dt}{t-z}, \text{ z bất kì } \overline{\in} \text{ L} \tag{17}$$

Nếu z $\overline{\in}$ L thì hàm số dưới dấu tích phân là một hàm liên tục. Vậy tích phân tồn tại và cho ta một hàm số của z xác định khắp nơi, trừ các điểm thuộc L.

Định lí: Hàm Φ(z) xác định bởi tích phân loại Cauchy một hàm giải tích tại mọi điểm z ∈ L. Đạo hàm cấp n của nó được tính theo công thức:

$$\Phi^{(n)}(z)=\frac{n1}{2\pi j}\int_L\frac{f(\xi)d\xi}{t-z},\ \text{ z bất kì } \notin \text{ L}$$

§7. ĐẠO HÀM CẤP CAO CỦA MỘT HÀM GIẢI TÍCH

1. Đạo hàm cấp cao của một hàm giải tích:

Định lí: Nếu f(z) giải tích trong miền giới nội D và liên tục trong $\overline{D}$ với biên C thì tại mọi z ∈ D hàm f(z) có đạo hàm mọi cấp và:

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2j\pi}\oint_C\frac{f(t)dt}{(t-z)^{n+1}};\ n=1,2,... \tag{20}$$

Trong đó chiều đi trên biên C là chiều dương.

Chứng minh: Theo định nghĩa đạo hàm và công thức tích phân Cauchy ta có:

$$f'(z)=\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}=\frac{1}{2j\pi}\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\oint_C f(t)\left[\frac{1}{t-z-h}-\frac{1}{t-z}\right]dt$$

$$=\frac{1}{2j\pi}\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\oint_C\frac{f(t)dt}{(t-z-h)(t-z)}=\frac{1}{2j\pi}\oint_C\frac{f(t)dt}{(t-z)^2}$$

Việc qua giới hạn dưới dấu tích phân thực hiện được vì hàm $g(t)=\dfrac{1}{t-z-h}$ z cố định thuộc D và t chạy trên C hội tụ đều trên C đến $\dfrac{1}{t-z}$ khi $h\to 0$.

Ta đã chứng minh công thức trên với n = 1. Với n > 1 ta chứng minh bằng cách quy nạp.

Như vậy ta suy ra nếu f(z) giải tích trong miền đơn liên giới hạn bởi đường cong C và liên tục trong $\overline{D}$, $z_o\in D$ thì :

$$\oint_C\frac{f(z)dz}{(z-z_o)^{n-1}}=\frac{2j\pi}{n!}f^{(n)}(z_o)\quad n = 0, 1, 2,...$$

với quy ước 0! = 1, $f^{(o)}(z_o)=f(z_o)$.

Ví dụ: Tính $I=\oint_L\dfrac{\cos z dz}{(z-j)^3}$, L là đường tròn | z - j | = 1

Ta viết công thức (20) dưới dạng khác:

$$f^{(n)}(z_o)=\frac{n!}{2j\pi}\oint_L\frac{f(z)dz}{(z-z_o)^{n+1}}$$

Trong công thức này f(z) = cosz, z_o = j, n = 2. Ta có:

$$I=\oint_L\frac{\cos z dz}{(z-j)^3}=\frac{2j\pi f''(j)}{2!}=j\pi f''(j)$$

Do f’(z) - -sinz, f’’(z) = -cosz nên f’’(j) = -cosj = -ch1. Vậy:

I = -πjch1

2. Bất đẳng thức Cauchy và định lí Liouville:

a. Bất đẳng thức Cauchy: Giả sử G là một miền có biên L và f(z) là hàm giải tích trong $\overline{G}$. Gọi M là giá trị lơn nhất của | f(z) | trong miền $\overline{G}$, R là khoảng chá từ điểm $z_o\in G$ tới biên, l là độ dài của L thì từ (20) suy ra:

$$\left|f^{(n)}(z_o)\right|\le\frac{n!}{2\pi}\left|\int_L\frac{f(t)dt}{(t-z_o)^{n+1}}\right|\le\frac{n!Ml}{2\pi R^{n+1}}$$

Nếu G là hình tròn | z - z_o | < R thì l = 2pR và công thức trên trở thành:

$$\left|f^{(n)}(z_o)\right|\le\frac{n!M}{R^{n1}}\qquad(21)$$

Bất đẳng thức trên gọi là bất đẳng thức Cauchy.

b. Định lí Liouville: Nếu hàm f(z) giải tích trong toàn mặt phẳng và bị chặn thì nó là một hằng số.

Chứng minh: Giả thiết | f(z) | < M $\forall z \in C$. Từ (21) suy ra $\left|f'(z)\right| \le \dfrac{M}{R}$ với R đủ lớn.

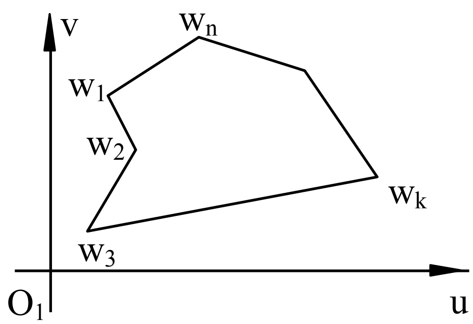
Vì vế trái không phụ thuộc R nên | f'(z) | = 0 $\forall z \in C$.
Tóm lại f'(z) = 0 trong toàn mặt phẳng, áp dụng công thức Newton - Leibnitz, chọn z_o cố định ta được:

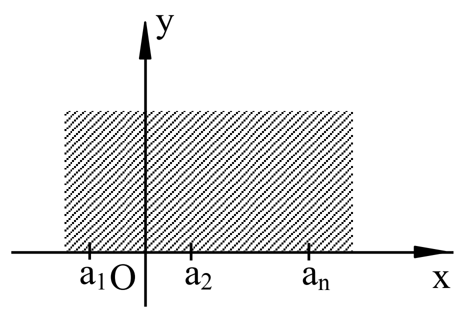
$$f(z) - f(z_o) = \int_{z_o}^{z} f'(z)dz = 0$$

Vậy $f(z) = f(z_o)\ \forall z$.

§8. CÔNG THỨC SCHWARTZ - CHRISTOPHELL

a. Định lí: Gọi P là một đa giác trong mặt phẳng w có n đỉnh là $w_1, w_2, w_3,..,$ w_n với $w_k \neq \infty\ \forall k$





Gọi α_k là góc trong của đa giác tại đỉnh w_k và

$$0 < \alpha_k < 2\pi : \sum_{k=1}^{n} \alpha_k = (n-2)\pi$$

Hàm w = f(z) biến nửa mặt phẳng trên Imz > 0 lên miền trong của đa giác P sao cho ảnh của các điểm $a_1, a_2,..a_n$

$-\infty < a_1 < a_2 < \cdots < a_n < \infty$

trên trục thực Ox là các đỉnh $w_1, w_2,.., w_n$ của đa giác P, được xác định bởi công thức Schwartz - Christophell:

$$f(z) = C\int_{z_o}^{z} (\zeta - a_1)^{\frac{\alpha_1}{\pi}-1}.(\zeta - a_2)^{\frac{\alpha_2}{\pi}-1} \cdots (\zeta - a_n)^{\frac{\alpha_n}{\pi}-1} d\zeta + C_1 \qquad (10)$$

Trong đó z_o, C và C_1 là các hằng số phức.

b. Dạng khác của công thức Schwartz - Christophell: Nếu một đỉnh của đa giác tương ứng với điểm ∞, chẳng hạn đỉnh w_1 tương ứng với $a_1 = \infty$, thì (10) được thay bởi:

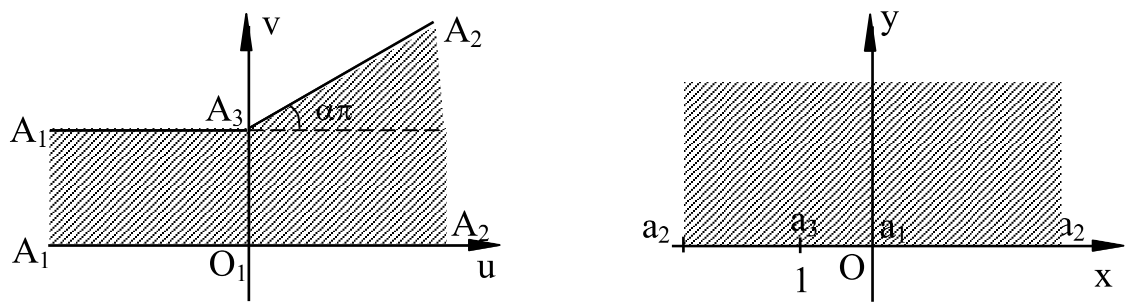
$$f(z) = C\int_{z_o}^{z} (\zeta - a_2)^{\frac{\alpha_2}{\pi}-1}.(\zeta - a_3)^{\frac{\alpha_3}{\pi}-1} \cdots (\zeta - a_n)^{\frac{\alpha_n}{\pi}-1} d\zeta + C_1 \qquad (11)$$

Như vậy trong (11) vắng mặt thừa số $(\zeta - a_2)^{\frac{\alpha_2}{\pi}-1}$

Trái lại nếu một trong các đỉnh của đa giác là điểm ∞, chẳng hạn $w_k = \infty$ thì trong (10) ta phải đặt $\alpha_k = -\beta_k$ trong đó β_k là góc giữa hai cạnh cùng đi qua w_k tại giao điểm hữu hạn của chúng.

c. Sử dụng công thức Schwartz - Christophell: Khi ta phải biến một đa giác P cho trước trong mặt phẳng w lên nửa mặt phẳng Imz > 0 thì ta sử dụng công thức (10). Chú ý là ta chưa biết a_k là ảnh của các đỉnh đa giác và các hằng số z_o, C_1 và C_2. Theo định lí Rieman, ta có thể chọn tuỳ ý ảnh của 3 đỉnh đa giác, nghĩa là chọn tuỳ ý 3 số a_1, a_2 và a_3. Các số a_n còn lại và những hằng số tích phân z_o, C_1, C_2 sẽ được xác định tuỳ theo điều kiện bài toán,

Ví dụ 1: Biến miền G gạch chéo lên nửa mặt phẳng Imz > 0



Miền G có thể coi là một tam giác có đỉnh $A_1 = \infty$, $A_2 = \infty$ và A_3 có toạ vị w = jh. Các góc ở đỉnh tam giác là $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = -\alpha\pi$, $\alpha_3 = \pi + \alpha\pi$. Ta sẽ biến các điểm A_1, A_2 và A_3 lần lượt thành các điểm a_1, a_2 và a_3. Ta có:

$$w = C\int_{z_o}^{z} z^{-1}(z+1)^{\alpha}\,dz + C_1$$

Vì w(-1) = jh nên ta có thể lấy $z_o = -1$ và $C_1 = jh$. Vậy:

$$w = C\int_{-1}^{z} \frac{(z+1)^{\alpha}}{z}\,dz + jh$$

Để xác định hằng số tích phân C, ta sẽ làm như sau: cho điểm z chạy trên nửa cung tròn γ bán kính r khá bé $z = re^{j\varphi}$ sao cho φ biến thiên từ π đến 0. Gọi Δw là số gia tương ứng của w khi z chạy trên cung tròn đó. Ta có:

$$\Delta w = C\int_{\gamma} \frac{(z+1)^{\alpha}}{z}\,dz$$

Khai triển $(1 + z)^{\alpha}$ theo luỹ thừa của z ta có:

$$w = C\int_{\gamma}\left[\frac{1}{z} + \alpha + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}z + \cdots\right]dz$$

Đặt $z = re^{j\varphi}$ rồi tích phân theo φ từ π đến 0 ta được:

$\Delta w = -C\pi j + O(r)$ trong đó $O(r) \to 0$ khi $r \to 0$

Mặt khác trong mặt phẳng w điểm w tương ứng chuyển từ tia A_1A_3 sang tia A_1A_2 nên ta được:

$\Delta w = -jh + O(r)$

Từ đó suy ra -jh = - Cπj hay $C = \dfrac{h}{\pi}$

Tóm lại phép biến hình phải tìm là hàm ngược của hàm:

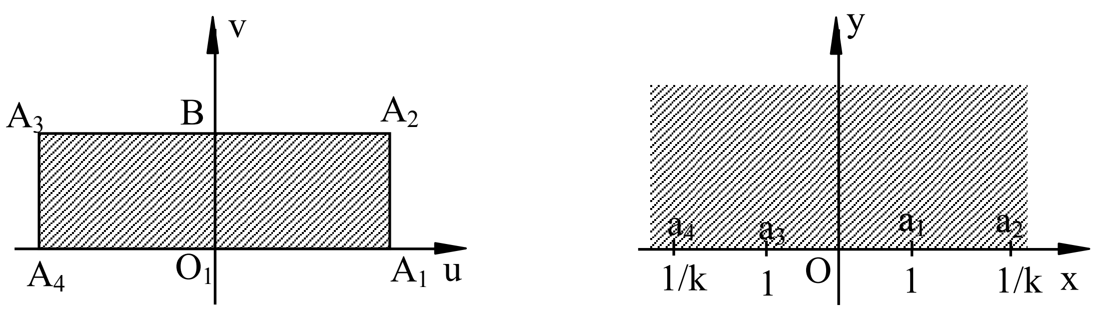
$$w = \frac{h}{\pi}\int_{-1}^{z}\frac{(z+1)^{\alpha}}{z}dz + jh \qquad (13)$$

Trường hợp $\alpha = 1$ ta có:

$$w = \frac{h}{\pi}\int_{-1}^{z}\frac{(z+1)}{z}dz + jh = \frac{h}{\pi}(z + \ln z)\Big|_{-1}^{z} + jh = \frac{h}{\pi}(z + 1 + \ln z) \qquad (14)$$

đây là phép biến hình , biến nửa mặt phẳng Imw > 0 có một lát cắt dọc theo A_1A_3 thành nửa mặt phẳng trên Imz > 0.

Ví dụ 2: Tìm phép biến hình bảo giác biến hình chữ nhật có các đỉnh $A_1(w_1 = k)$, $A_2(w_2 = h + jk)$, $A_3(w = -h + jk)$, $A_4(w_4 = -h)$ lên nửa mặt phẳng trên Imz > 0



Gọi $w = f_1(z)$ là phép biến hình biến góc phần tư thứ nhất (Rez > 0, Imz > 0) thành hình chữ nhật $O_1A_1A_2B$ sao cho o_1 ứng với O. A_1 ứng với điểm z = 1 B ứng với điểm $z = \infty$. Trong phép biến hình này A_2 sẽ ứng với điểm z = 1/k với k là một hằng số dương nhỏ hơn 1 mà ta phải xác định. Qua phép biến hình, đoạn BO_1 ứng với nửa trục Oy dương. Theo nguyên lí đối xứng, hàm w = f(z) là hàm phải tìm để biến nửa mặt phẳng trên Imz > 0 lên hình chữ nhật $A_1A_2A_3A_4$ là thác triển của hàm $f_1(z)$ qua trục ảo. Cũng theo nguyên lí đối xứng, các điểm đối xứng qua BO_1 ứng với các điểm đối xứng qua Oy. Vậy A_4 ứng điểm z = -1; A_3 ứng với điểm z = -1/k. Áp dụng công thức Schwartz - Christophell với $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \dfrac{\pi}{2}$ và $z_o = 0$ ta có:

$$w = f(z) = C\int_{0}^{z}(\zeta+1)^{\frac{1}{2}-1}(\zeta-1)^{\frac{1}{2}-1}\left(\zeta - \frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{2}-1}\left(\zeta + \frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{2}-1}d\zeta + C_1$$

Vì f(0) = 0 nên $C_1 = 0$, vậy:

$$w = C'\int_{0}^{z}\frac{d\zeta}{\sqrt{(\zeta^2-1)\left(\zeta^2 - \frac{1}{k^2}\right)}} = C\int_{0}^{z}\frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}}$$

Ta còn phải xác định hằng số C và k. Vì $A_1(w_1 = h)$ ứng với = 1 nên:

$$h = C\int_0^1 \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}}$$

Vì $A_2(w_2 = h + jk)$ ưng với $z = 1/k$ nên :

$$h + jk = C\int_0^{\frac{1}{k}} \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}} = C\left[\int_0^1 \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}} + j\int_0^{\frac{1}{k}} \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}}\right] \quad (15)$$

$$= h + j\int_0^{\frac{1}{k}} \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}}$$

Suy ra:

$$k = \int_0^{\frac{1}{k}} \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}} \quad (16)$$

Các đẳng thức (15) và (16) sẽ cho phép ta xác định C và k.

CHƯƠNG 4: CHUỖI HÀM PHỨC

§1. KHÁI NIỆM CHUNG

1. Định nghĩa: Cho dãy các hàm biến phức $u_1(z)$, $u_2(z)$, $u_3(z)$,... xác định trong miền E. Ta gọi biểu thức:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z) = u_1(z) + u_2(z) + \cdots + u_n(z) + \cdots \qquad (1)$$

là chuỗi hàm biến phức.

Tổng của n số hạng đầu tiên là:

$$S_n(z) = u_1(z) + u_2(z) + \cdots + u_n(z)$$

được gọi tổng riêng thứ n của chuỗi hàm (1). Nó là một hàm phức xác định trong miền E.

Nếu tại $z = z_o$, chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(z_o)$ hội tụ thì z_o được gọi là điểm hội tụ của chuỗi hàm (1). Nếu tại $z = z_o$, chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(z_o)$ không hội tụ thì z_o được gọi là điểm phân kì của chuỗi hàm (1). Tập hợp các điểm hội tụ của chuỗi hàm được gọi là miền hội tụ của nó. Nếu gọi f(z) là tổng của chuỗi (1) tại điểm hội tụ z thì f(z) hiển nhiên là một hàm biến phức xác định trong miền hội tụ G.

2. Khái niệm về hội tụ đều: Theo định nghĩa 1 ta có $\forall z \in G$:

$$\lim_{n\to\infty} S_n(z) = f(z) \qquad (2)$$

Nếu đặt $R_n(z) = f(z) - S_n(z)$ thì đẳng thức (2) được viết là:

$$\lim_{n\to\infty} R_n(z) = 0$$

Điều đó có nghĩa là $\forall\varepsilon > 0$ cho trước, tồn tại một số $N(\varepsilon, z)$ dương phụ thuộc vào ε và z sao cho khi $n > N$ thì $| R_n(z) | < \varepsilon$.

a. Định nghĩa: Chuỗi hàm (1) được gọi là hội tụ đều trên tập $G_o \subset G$, nếu $\forall\varepsilon>0$ cho trước, tồn tại một số N chỉ phụ thuộc ε: $N = N(\varepsilon)$ sao cho khi $n > N(\varepsilon)$ thì $| R_n(z) | < \varepsilon \ \forall z \in G_o$.

b. Tiêu chuẩn Weierstrass: Nếu $| u_n(z) | \le a_n \ \forall z \in G$ và nếu chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ thì chuỗi hàm (1) hội tụ đều trong miền G.

Nói vắn tắt hơn, chuỗi (1) sẽ hội tụ đều trong G nếu chuỗi các môđun của nó, thừa nhận một chuỗi số dương trội hội tụ.

Chứng minh: Cho trước $\varepsilon > 0$, ta sẽ chứng minh rằng tồn tại $N(\varepsilon)$ sao cho khi $n > N(\varepsilon)$ thì $| R_n(z) | < \varepsilon \ \forall z \in G$. Thật vậy vì chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ nên $\forall\varepsilon >$ luôn luôn tồn tại $N(\varepsilon)$ sao cho khi $n > N(\varepsilon)$ thì:

$$r_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots < \varepsilon$$

Nhưng vì $| u_{n+1}(z) | < a_{n+1}$, $| u_{n+2}(z) | < a_{n+2}$, $| u_{n+3}(z) | < a_{n+3}$... nên:

$$| R_n(z) | = | u_{n+1}(z) + u_{n+2}(z) + \cdots | < | u_{n+1}(z) | + | u_{n+2}(z) | + \cdots < a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots < \varepsilon$$

$\forall z \in G$.

Đó là điều cần chứng minh.

c. Tính chất của chuỗi hội tụ đều:

Định lí 1: Nếu tất cả các số hạng $u_n(z)$ của chuỗi hàm (10) đều liên tục trong miền G và nếu chuỗi hàm (1) hội tụ đều trong G thì tổng f(z) của nó cũng liên tục trong G.

Chứng minh: Giả sử z và z + h là hai điểm bất kì trong G. Ta có:

$$f(z) = S_n(z) + R_n(z)$$

$$f(z + h) = S_n(z + h) + R_n(z + h)$$

Cho trước ε > t phải chứng minh với | h | đủ nhỏ, ta có:

$$| f(z + h) - f(z) | < \varepsilon$$

Thật vậy:

$$\begin{aligned} | f(z + h) - f(z) | &= | S_n(z + h) + R_n(z + h) - S_n(z) - R_n(z) | \\ &= | S_n(z + h) - S_n(z) + R_n(z + h) - R_n(z) | \\ &\le | S_n(z + h) - S_n(z) | + | R_n(z + h) - R_n(z) | \qquad (4) \end{aligned}$$

Do tính hội tụ đều của chuỗi ta có thể tìm được số n chỉ phụ thuộc vào ε sao cho:

$$\left|R_n(z+h)\right| < \frac{\varepsilon}{3}; \quad \left|R_n(z)\right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Với n đã chọn ở trên, xét hàm $S_n(z)$. Đó là tổng của một số hữu hạn các hàm liên tục trong miền G. Vậy $S_n(z)$ cũng liên tục trong G. Do đó ta có thể chọn h khá nhỏ để:

$$\left|S_n(z+h) - S_n(z)\right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Thay vào (4) ta có:

$$| f(z + h) - f(z) | \le \varepsilon$$

Đó là điều cần chứng minh.

Định lí 2: Nếu tất cả các số hạng của chuỗi hàm (1) đều liên tục trên cung L và chuỗi hàm (1) hội tụ đều trên cung đó thì ta có thể tính tích phân từng số hạng của chuỗi hàm (1) dọc theo L_o, nghĩa là nếu f(z) là tổng của chuỗi hàm (1) thì:

$$\int_L f(z)dz = \int_L u_1(z)dz + \int_L u_2(z)dz + \cdots + \int_L u_n(z)dz + \cdots$$

Chứng minh: Trước hết ta nhận xét rằng vì f(z) liên tục trên L nên tồn tại tích phân $\int_L f(z)dz$. Đặt $\sigma_n = \int_L u_1(z)dz + \int_L u_2(z)dz + \cdots + \int_L u_n(z)dz$. Ta cần chứng minh rằng:

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \int_L f(z)dz$$

hay $$\lim_{n\to\infty}\left[\int_L f(z)dz - \sigma_n\right] = 0$$

hay $$\lim_{n\to\infty}\left(\int_L f(z)dz - \int_L \left[u_1(z) + u_2(z) + \cdots + u_n(z)\right]dz\right) = 0 \qquad (6)$$

Vì chuỗi (1) hội tụ đều trên L nên với mọi ε > 0 cho trước ta tìm được N(ε) sao cho khi n > N(ε) thì $| R_n(z) | < \varepsilon\ \forall z \in L$. Áp dụng công thức ước lượng tích phân ta có:

$$\left|\int_L R_n(z)dz\right| \le \varepsilon l\text{, l là chiều dài của cung L}$$

Vì ε bé nên $\lim\limits_{n\to\infty}\int_L R_n(z)dz = 0$. Đây là điều cần phải chứng minh.

d. Định lí Weierstrass: Nếu các số hạng của chuỗi hàm (1) là giải tích trong miền G và chuỗi (1) hội tụ đều trong miền đó thì tổng f(z) của chuỗi cũng là một hàm giải tích trong G. Đối với chuỗi hàm (1) ta có thể đạo hàm từng số hạng tới cấp tuỳ ý, nghĩa là:

$$f^{(m)}(z) = u_1^{(m)}(z) + u_2^{(m)}(z) + \cdots + u_n^{(m)}(z) + \cdots \quad z \in G\text{, m nguyên bất kì}$$

Chứng minh: Ta nhận thấy trong định lí này không giả thiết gì về tính hội tụ của chuỗi đạo hàm . Lấy z bất kì thuộc G. C là đường tròn tân z bán kính r khá nhỏ sao cho hình tròn G_o bao bởi C nằm trọn trong G. Để chứng minh f(z) giải tích trong G_o, ta sẽ chứng minh f(z) được biểu diễn bằng một tích phân loại Cauchy, cụ thể ta sẽ chứng minh rằng:

$$f(z) = \frac{1}{2j\pi}\oint_C \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} \tag{7}$$

Thật vậy, do giả thiết, chuỗi hàm (1) hội tụ đều trong G. Vậy nó hội tụ đều trên C. Ta có:

$$u_1(\zeta) + u_2(\zeta) + \cdots + u_n(\zeta) + \cdots = f(\zeta)\text{ đều } \forall z \in C \tag{8}$$

Vì với ζ∈C thì ζ - z ≠ 0 nên nhân 2 vế với $\frac{1}{2j\pi}\frac{1}{\zeta - z}$ ta có:

$$\frac{1}{2j\pi}\left[\frac{u_1(\zeta)}{\zeta - z} + \frac{u_2(\zeta)}{\zeta - z} + \cdots + \frac{u_n(\zeta)}{\zeta - z} + \cdots\right] = \frac{f(\zeta)}{2j\pi(\zeta - z)}\text{ đều } \forall z \in C$$

Vì chuỗi hàm ở vế trái hội tụ đều trên C nên theo định lí 2, ta có thể tích phân từng số hạng dọc theo C:

$$\frac{1}{2j\pi}\left[\oint_C \frac{u_1(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} + \oint_C \frac{u_2(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} + \cdots + \oint_C \frac{u_n(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} + \cdots\right] = \frac{1}{2j\pi}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)}d\zeta \tag{9}$$

Mặt khác vì mỗi số hạng $u_n(z)$ giải tích nên theo (9), tích phân Cauchy:

$$\frac{1}{2j\pi}\oint_C \frac{u_n(\zeta)}{(\zeta - z)}d\zeta = u_n(z)$$

Vậy (9) viết được:

$$u_1(z) + u_2(z) + \cdots + u_n(z) + \cdots = \frac{1}{2j\pi}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)}d\zeta$$

tức: $f(z) = \frac{1}{2j\pi}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)}d\zeta$

Vậy f(z) giải tích trong miền G. Vì trên kia đã lấy z bất kì trong G nên có thể kết luận f(z) giải tích trong G. Lập luận tương tự như trên ta chứng minh được rằng có thể đạo hàm từng số hạng của chuỗi (1) tới cấp tuỳ ý.

Nhân 2 vế của (8) với $\dfrac{m!}{2\pi j(\zeta - z)^{m+1}}$ ta có:

$$\frac{m!}{2\pi j}\left[\frac{u_1(\zeta)}{(\zeta - z)^{m+1}} + \frac{u_2(\zeta)}{(\zeta - z)^{m+1}} + \cdots + \frac{u_n(\zeta)}{(\zeta - z)^{m+1}} + \cdots\right] = \frac{m!f(\zeta)}{2\pi j(\zeta - z)^{m+1}}$$

đều $\forall\zeta \in C$. Do tính hội tụ đều ta có thể tích phân từng số hạng dọc theo C và được:

$$\frac{m!}{2\pi j}\left[\oint_C \frac{u_1(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z)^{m+1}} + \oint_C \frac{u_1(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z)^{m+1}} + \cdots + \oint_C \frac{u_1(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z)^{m+1}} + \cdots\right] = \frac{m!}{2\pi j}\oint_C \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z)^{m+1}} \quad (9')$$

Vì $u_n(z)$ giải tích theo giả thiết và f(z) giải tích do kết quả chứng minh ở trên nên theo (2) ở mục 12, chương 4 ta có :

$$\frac{m!}{2\pi j}\oint_C \frac{u_1(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z)^{m+1}} = u_n^{(m+1)}(z)\,; \quad \frac{m!}{2\pi j}\oint_C \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z)^{m+1}} = f^{(m)}(z)$$

Vậy (9') trở thành:

$$u_1^{(m+1)}(z) + u_2^{(m+1)}(z) + \cdots + u_n^{(m+1)}(z) + \cdots = f^{(m)}(z)$$

Đó là điều cần chứng minh.

§2. CHUỖI LUỸ THỪA

1. Định nghĩa: Ta gọi chuỗi luỹ thừa, chuỗi hàm mà các số hạng là các hàm luỹ thừa. Nó có dạng:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n = c_1(z-a)^n + c_2(z-a)^n + \cdots + c_n(z-a)^n + \cdots \qquad (10)$$

Trong đó c_n (n = 0, 1, 2,...) và a là những hằng số phức, a được gọi là tâm của chuỗi. Bằng cách đổi biến $\zeta = z - a$, chuỗi (1) có dạng:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n\zeta^n = c_1\zeta^n + c_2\zeta^n + \cdots + c_n\zeta^n + \cdots \qquad (11)$$

có tâm tại $\zeta = 0$.

2. Định lí Abel: Nếu chuỗi luỹ thừa (11) hội tụ tại $\zeta_o \neq 0$ thì nó hội tụ tuyệt đối trong trong hình tròn $|\zeta| < \zeta_o$. Trong mọi hình tròn $|\zeta| < \varphi$, (11) hội tụ đều.

Chứng minh: Lấy ρ là một số dương bất kì $\rho < |\zeta_o|$ ta sẽ chứng minh trong hình tròn $|\zeta| \leq \rho$ thì chuỗi (11) thừ nhận một chuỗi trội hội tụ. Thật vậy, theo giả thiết, chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} c_n\zeta_o^n$ hội tụ. Do đó $\lim_{n\to\infty} c_n\zeta_o^n = 0$. Dãy số $\{c_n\zeta_o^n\}$ có giới hạn. Vậy nó bị chặn, nghĩa là tồn tại số M > 0 sao cho:

$$|c_n\zeta_o^n| \leq M \ \ \forall n \text{ nguyên dương} \qquad (12)$$

Từ (12) suy ra rằng với bất kì ζ nào trong hình tròn kín $|\zeta| \leq \rho$ ta có:

$$|c_n\zeta^n| = \left|c_n\zeta_o^n\frac{\zeta^n}{\zeta_o^n}\right| = |c_n\zeta_o^n|\left|\frac{\zeta}{\zeta_o}\right|^n \leq M\left|\frac{\rho}{\zeta_o}\right|^n$$

Điều đó chứng tỏ rằng chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \zeta^n$ thừa nhận một chuỗi dương trội là chuỗi $M\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{\rho}{\zeta_o}\right|^n$. Chuỗi dương này là một cấp số nhân hội tụ vì công bội là $\frac{\rho}{|\zeta_o|} < 1$.

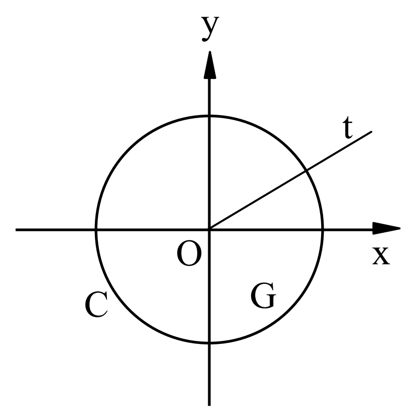
Vậy theo tiêu chuẩn Weierstrass, chuỗi (11) hội tụ tuyệt đối và đều trong mặt tròn $|\zeta| \le \rho$. Vì số ρ có thể chọn gần $|\zeta_o|$ bao nhiêu cũng được nên (11) hội tụ tuyệt đối tại mọi điểm của hình tròn mở $|\zeta| < \zeta_o$.

3. Hệ quả: Nếu chuỗi (11) phân kì tại ζ_1 thì nó phân kì tại mọi điểm của miền $|\zeta| < |\zeta_1|$.

Chứng minh: ta chứng minh bằng phản chứng. Giả sử chuỗi (11) hội tụ tại ζ_o thuộc miền $|\zeta| > |\zeta_1|$. Áp dụng định lý Abel suy ra chuỗi hội tụ trong hình tròn $|\zeta| < |\zeta_o|$, đặc biệt chuỗi hội tụ tại ζ_1 vì $|\zeta_1| < |\zeta_o|$. Điều này mâu thuẫn với giả thiết.

4. Bán kính hội tụ: Trước hết chú ý là điểm $\zeta = 0$ bao giờ cũng là điểm hội tụ của chuỗi (11). Tại đó chuỗi hàm tổng là c_o.

Bây giờ ta xét tia Ot bất kì, xuất phát từ gốc $\zeta = 0$. Có thể xảy ra 3 trường hợp:



* Trên tia Ot có cả những điểm hội tụ và những điểm phân kì.

Vì theo định lí Abel, mỗi điểm hội tụ đều nằm gần gốc hơn một điểm phân kì bất kì. Do đó trên tia Ot tìm được một điểm ζ^* ngăn cách những diểm hội tụ trên tia với những điểm phân kì. Bản thân ζ^*, tuỳ trường hợp, có thể là điểm hội tụ hay phân kì.

Cũng theo định lí Abel, chuỗi hội tụ trong hình tròn G: $|\zeta| < |\zeta^*|$ và phân kì bên ngoài tức trong miền $|\zeta| < |\zeta^*|$. Hình tròn G được gọi là hình tròn hội tụ của chuỗi hàm (11), bán kính của nó $R = |\zeta^*|$ được gọi là bán kính hội tụ. Trên biên C của hình tròn có thể có cả điểm hội tụ lẫn phân kì.

* Trên tia Ot, tất cả các điểm đều là điểm hội tụ. Khi đó, theo định lí Abel, chuỗi hàm hội tụ trong một hình tròn bán kính lớn tuỳ ý. Nghĩa là nó hội tụ trong toàn mặt phẳng ζ và ta nói rằng bán kính hội tụ là ∞.

* Trên tia Ot không có điểm nào là điểm hội tụ trừ $\zeta = 0$. Khi đó theo hệ quả của định lí Abel, chuỗi hàm phân kì bên ngoài một hình tròn mà bán kính cả nó nhỏ tuỳ ý. Nói cách khác, mọi điểm c khác 0 đều là điểm phân kì và ta nói bán kính hội tụ $R = 0$.

Lập luận tương tự giải tích thực, dựa vào tiêu chuẩn D'Alembert hay Cauchy, ta thấy bán kính hội tụ có thể tìm theo công thức:

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| \qquad (13)$$

hay: $$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}} \tag{14}$$

Ghi chú: Đối với chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ bằng phép đổi biến $\zeta = z - a$ ta đưa được về dạng $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \zeta^n$ nên ta suy ra hoặc chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ chỉ hội tụ tại tâm $z = a$, hoặc hội tụ trong cả mặt phẳng hoặc hội tụ trong hình tròn $|z - a| < R$ và phân kì bên ngoài hình tròn đó.

Ví dụ 1: Xét chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n + \cdots$.

Ta tính bán kính hội tụ R của nó bằng công thức (13):

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = 1 \text{ vì } c_n = c_{n+1} = 1$$

Vậy chuỗi hội tụ tuyệt đối trong hình tròn $|z| < 1$. Trong hình tròn $|z| \le \rho \le 1$, chuỗi hội tụ đều. Ta xét tổng riêng:

$$S_n(z) = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1} = \frac{1-z^n}{1-z}$$

Cho $n \to \infty$, nếu $|z| < 1$ thì $\lim_{n\to\infty} z^n = 0$. Vậy $\lim_{n\to\infty} S_n(z) = \frac{1}{1-z}$. Như vậy:

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n + \cdots = \frac{1}{1-z}; \ |z| < 1$$

Ví dụ 2: Xét sự hội tụ của chuỗi hàm:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{n!} = 1 + \frac{z-1}{1} + \frac{(z-1)^2}{2} + \cdots$$

Bán kính hội tụ của chuỗi đã cho bằng:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty} (n+1) = \infty$$

Vậy chuỗi hội tụ trong toàn mặt phẳng phức.

Ví dụ 3: Tìm hình tròn hội tụ của chuỗi $\sum_{0}^{\infty} \frac{(z-j)^{2n+1}}{(n+1)4^n}$

Áp dụng tiêu chuẩn D'Alembert cho chuỗi mođun các số hạng ta có:

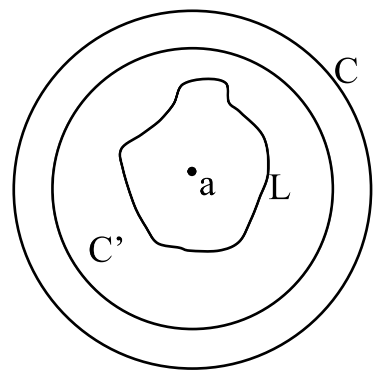
$$d = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{|z-j|^{2n+3}}{(n+2)4^{n+1}} \frac{(n+1)4^n}{|z-j|^{2n+1}} = \frac{|z-j|^2}{4} \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)}{(n+2)} = \frac{|z-j|^2}{4}$$

Như vậy miền hội tụ của chuỗi là $|z - j|^2 < 4$ hay $|z - j| < 2$.

§3. CHUỖI TAYLOR

Giả sử chuỗi luỹ thừa $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ có bán kính hội tụ là R = 0. Theo kết quả ở trên, trong hình tròn bán kính | z - a | ≤ ρ < R thì chuỗi hội tụ đều. Vì mỗi số hạng của chuỗi hạng của chuỗi đều là hàm giải tích và vì chuỗi hội tụ đều nên theo định lí Weierstrass tổng f(z) của chuỗi là một hàm giải tích trong miền | z - a | ≤ ρ. Bây giờ ta đặt vấn đề ngược lại: cho trước một hàm f(z) giải tích trong một lân cận điểm a. Hỏi có thể khai triển nó thành chuỗi luỹ thừa của (z - a) hay không. Nói khác đi, có thể tìm thấy chuỗi dạng $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ có tổng là f(z) trong lân cận a hay không?

Định lí 1: Mọi hàm f(z) giải tích trong hình tròn | z - a | < R đều có thể khai triển một cách duy nhất thành chuỗi luỹ thừa của (z - a).



Chứng minh: lấy z bất kì thuộc hình tròn | z - a | < R. Ta vẽ hình tròn C’ = {| z - a | = ρ} (ρ < R) bao điểm z bên trong. Gọi C là đường tròn | z - a | = R, C’ là đường tròn | z - a | = ρ. Theo công thức tích phân Cauchy ta có:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi j}\oint_{C'} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} \qquad (16)$$

Ta sẽ tìm cách khai triển hàm số dưới dấu tích phân thành chuỗi luỹ thừa của (z - a) hội tụ đều đối với biến ζ trên đường tròn C’.

Muốn vậy ta viết:

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - a - (z-a)} = \frac{1}{(\zeta - a)\left(1 - \dfrac{z-a}{\zeta - a}\right)}$$

Nhưng vì ζ∈ C’ nên | z - a | < | ζ - a | và $\left|\dfrac{z-a}{\zeta-a}\right| < 1$. Vậy theo công thức tính tổng của một chuỗi nhân (xem công thức 15) ta có:

$$\frac{1}{1 - \dfrac{z-a}{\zeta-a}} = 1 + \frac{z-a}{\zeta-a} + \left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^n + \cdots$$

Vậy: $$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta-a} + \frac{1}{\zeta-a}\left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right) + \frac{1}{\zeta-a}\left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{\zeta-a}\left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^n + \cdots$$

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \frac{f(\zeta)}{\zeta-a} + \frac{f(\zeta)}{\zeta-a}\left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right) + \frac{f(\zeta)}{\zeta-a}\left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^2 + \cdots + \frac{f(\zeta)}{\zeta-a}\left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^n + \cdots \quad (17)$$

Với z cố định, khi ζ biến thiên trên đường C' thì $\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ là một hàm liên tục đối với ζ.

Vậy nó bị chặn, tức $\left|\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\right| \le M$. Mặt khác $\left|\frac{z-a}{\zeta-a}\right| = \frac{|z-a|}{|\zeta-a|} = \frac{|z-a|}{\rho} = q < 1$ nên:

$$\left|\frac{f(\zeta)}{\zeta-a}\left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^n\right| \le Mq^n$$

Theo tiêu chuẩn Weierstrass, chuỗi bên vế phải của (17) hội tụ đều với tổng $\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ $\forall\zeta\in C'$. Vậy ta có thể tích phân từng số hạng dọc theo C' và được:

$$\oint_{C'}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z} = \oint_{C'}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-a} + \oint_{C'}\frac{f(\zeta)}{\zeta-a}\left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)d\zeta + \oint_{C'}\frac{f(\zeta)}{\zeta-a}\left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^2 d\zeta$$
$$+\cdots+\oint_{C'}\frac{f(\zeta)}{\zeta-a}\left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^n d\zeta + \cdots$$
$$= \oint_{C'}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-a} + (z-a)\oint_{C'}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^2}d\zeta + (z-a)^2\oint_{C'}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^3}d\zeta$$
$$+\cdots+(z-a)^n\oint_{C'}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta + \cdots$$

Thay vào (16) ta được:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi j}\oint_{C'}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-a} + \frac{(z-a)}{2\pi j}\oint_{C'}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^2}d\zeta + \frac{(z-a)^2}{2\pi j}\oint_{C'}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^3}d\zeta$$
$$+\cdots+\frac{(z-a)^n}{2\pi j}\oint_{C'}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta + \cdots$$

Như vậy tại mọi điểm z thuộc hình tròn | z - a | < R ta có thể viết:

$$f(z) = c_o + c_1(z - a) + c_2(z - a)^2 + \cdots + c_n(z - a)^n + \cdots$$

với $\quad c_n = \frac{1}{2\pi j}\oint_{C'}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}},\ \ n = 0,1,2,...$

Theo công thức tính đạo hàm cấp n của hàm giải tích ta có:

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi j}\oint_{C'}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}},\ \ n = 0,1,2,...$$

nên ta có:

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

Tóm lại ta đã khai triển được f(z) thành chuỗi luỹ thừa của (z - a):

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi j}\oint_{C'}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}}\right)(z-a)^n \tag{18}$$

Chuỗi luỹ thừa trên được gọi là chuỗi Taylor của hàm f(z) tại z = a. Nếu f(z) giải tích trong hình tròn | z - a | < R thì nó khai triển được thành chuỗi Taylor tại điểm a.

Bây giờ ta còn phải chứng minh tính duy nhất của khai triển.

Giả sử f(z) đã được khai triển thành chuỗi luỹ thừa:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n,\ \left|z-a\right|<R \qquad (19)$$

ta sẽ chứng minh rằng $c_n=\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$

Thật vậy,trong (18) cho z = a, ta được $c_o = f(a)$. Đạo hàm từng số hạng ta sẽ được:

$$f'(z)=\sum_{n=0}^{\infty}nc_n(z-a)^{n-1}$$

Như vậy f'(a) = c_1. Tiếp tục đạo hàm rồi thay z = a vào 2 vế, lần lượt ta được:

$f''(a) = 2c_2$, $f'''(a) = 3!c_3$,..., $f^{(n)}(a) = n!c_n$.

Vậy : $c_n=\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$

Nghĩa là chuỗi (19) đúng là chuỗi Taylor của hàm f(z). Đó là điều phải chứng minh.

Ghi chú: Trong (18) ta viết:

$$c_n=\frac{1}{2\pi j}\oint_{C'}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}}$$

Giả sử L là đường cong kín bất kì nằm hoàn toàn trong miền | z - a | < R. Vì hàm $\dfrac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}$ giải tích trong miền nhị liên có biên là L và C' nên theo định lí Cauchy ta có:

$$\oint_{C'}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}}=\oint_{L}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}}$$

Vậy ta có thể viết:

$$c_n=\frac{1}{2\pi j}\oint_{L}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}}$$

Ta sẽ khai triển Taylor một số hàm sơ cấp cơ bản. Trước hết ta lập chuỗi Taylor của hàm $f(z) = e^z$ tại z = 0:

Ta có $f(z) = e^z$, $f^{(n)}(0) = 1$; $\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}=\dfrac{1}{n!}$

Vậy: $e^z=1+\dfrac{z}{1!}+\dfrac{z^2}{2!}+\cdots+\dfrac{z^n}{n!}+\cdots$

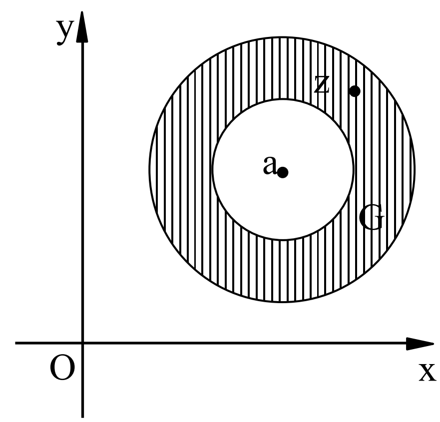
Công thức trên có nghĩa $\forall z \in C$ vì e^z giải tích trong toàn bộ C.

Tương tự ta có:

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{n!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots \quad (R = \infty)$$
$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots \quad (R = \infty)$$
$$\ln(z+1) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \cdots \quad (R = 1)$$
$$\text{arctg}z = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7} + \cdots \quad (R = 1)$$

§4. CHUỖI LAURENT

Trong mục trước ta đã thấy rằng nếu f(z) giải tích trong một hình tròn tâm a, thì nó khai triển được thành chuỗi Taylor tại a. Bây giờ ta giả thiết rằng f(z) giải tích trong một lân cận điểm a, trừ tại z = a hay tổng quát hơn f(z) giải tích trong một hình vành khăn tâm a.



1. Định lí Laurent: Giả sử f(z) là một hàm giải tích đơn trị trong hình vành khăn G:

$r < | z - a | < R$

Khi đó ta có $\forall z \in G$:

$$f(z) = c_o + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \cdots + c_n(z-a)^n + \cdots$$
$$+ \frac{c_{-1}}{z-a} + \frac{c_{-2}}{(z-a)^2} + \cdots + \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} + \cdots$$

(22)

Trong đó các hệ số c_n được tính theo công thức:

$$c_n = \frac{1}{2\pi j}\oint_L \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, ... \qquad (23)$$

L là một đường cong kín bất kỳ bao điểm a và nằm trọn trong hình vành khăn. Chuỗi bên phải hội tụ đều tới f(z) trong mọi hình vành khăn kín : r' ≤ | z - a | ≤ R' (r'>R, R'<R) và được gọi là chuỗi Laurent của hàm f(z) với tâm tại a.

Chứng minh: Lấy z bất kỳ thuộc G. Bao giờ ta cũng vẽ được 2 đường tròn:

$L_1 : | z - a | = r'$

$L_2 : | z - a | = R'$

mà r < r' < R' < R sao cho z thuộc hình vành khăn G_o: r' < | z - a | < R'. Vì f(z(giải tích trong G_o nên áp dụng công thức tích phân Cauchy cho miền nhị liên G_o mà biên ngoài là L_2 và biên trong là L_1 ta có:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi j}\oint_{L_2} \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}} - \frac{1}{2\pi j}\oint_{L_1} \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}} \qquad (24)$$

Tích phân thứ nhất trong (24) là một hàm giải tích bên trong đường tròn lớn L_2. Ta sẽ tìm cách khai triển nó theo chuỗi luỹ thừa của (z - a). Tích phân thứ hai là một hàm giải tích bên ngoài hình tròn nhỏ và dần tới 0 khi $z \to \infty$. Ta sẽ tìm cách khai triển nó theo chuỗi luỹ thừa của $\dfrac{1}{z-a}$.

Khi $\zeta \in L_2$ thì:

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - a - (z-a)} = \frac{1}{(\zeta - a)\left(1 - \dfrac{z-a}{\zeta - a}\right)}$$

Vì: $\left|\dfrac{z-a}{\zeta - a}\right| < 1$ nên:

$$\frac{1}{1 - \dfrac{z-a}{\zeta - a}} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{\zeta - a}\right)^n$$

Vậy: $\dfrac{1}{\zeta - z} = \dfrac{1}{\zeta - a}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{\zeta - a}\right)^n$

$$\frac{1}{2\pi j}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi j}\frac{f(\zeta)}{\zeta - a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{\zeta - a}\right)^n = \frac{f(\zeta)}{2\pi j}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-a)^n}{(\zeta - a)^{n+1}}$$

Lập luận tương tự ta thấy chuỗi bên vế phải hội tụ đều với $\zeta \in L_2$. Vậy có thể tich phân từng số hạng dọc theo L_2:

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_{L_2}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - a} = \sum_{n=0}^{\infty}(z-a)^n \cdot \frac{1}{2\pi j}\oint_{L_2}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - a)^{n+1}}$$

Nếu đặt:

$$c_n = \frac{1}{2\pi j}\oint_{L_2}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - a)^{n+1}}, \quad n = 0, 1, 2, ... \tag{25}$$

thì ta được:

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_{L_2}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - a} = \sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n \tag{26}$$

Chú ý là không được viết: $c_n = \dfrac{f^{(n)}(z)}{n!}$ vì trong giả thiết của định lí không nói gì tới tính giải tích của f(z) tại a.

Khi $\zeta \in L_1$ thì $\left|\dfrac{z-a}{\zeta - a}\right| > 1$; khi đó ta có thể làm như sau:

Hiển nhiên ta có $\left|\dfrac{\zeta - a}{z-a}\right| < 1$ nên:

$$-\frac{1}{\zeta - z} = \frac{-1}{\zeta - a - (z-a)} = \frac{1}{(z-a) - (\zeta - a)} = \frac{1}{(z-a)\left(1 - \dfrac{\zeta - a}{z-a}\right)} = \frac{1}{(z-a)}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\zeta - a}{z-a}\right)^k$$

$$\frac{-f(\zeta)}{2\pi j(\zeta - z)} == \frac{-f(\zeta)}{2\pi j}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\zeta-a)^k}{(z-a)^{k+1}}$$

Chuỗi bên phải hội tụ đều đối với $\zeta \in L_1$. Vậy ta có thể tích phân từng số hạng dọc theo L_1:

$$-\frac{1}{2\pi j}\oint_{L_1}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - a} = \frac{1}{2\pi j}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(z-a)^{k+1}}\oint_{L_2}(\zeta-a)^{k+1}f(\zeta)d\zeta$$

Trong vế phải, đổi kí hiệu của chỉ số chạy bằng cách đặt k + 1 = -n. Khi k = 0, 1, 2,.. thì n = -1, -2,...Vậy:

$$-\frac{1}{2\pi j}\oint_{L_1}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - a} = \frac{1}{2\pi j}\sum_{n=-1}^{-\infty}(z-a)^n.\oint_{L_2}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}}$$

Nếu đặt:

$$c_n = \frac{1}{2\pi j}\oint_{L_1}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}},\ n = -1, -2, ... \qquad (27)$$

thì: $$-\frac{1}{2\pi j}\oint_{L_1}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - a} = \sum_{n=-1}^{-\infty}c_n(z-a)^n \qquad (28)$$

Thay các kết quả vào (24) ta có:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n + \sum_{n=-1}^{-\infty}c_n(z-a)^n = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n(z-a)^n \qquad (29)$$

Với:

$$c_n = \frac{1}{2\pi j}\oint_{L_2}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}} \quad \text{nếu } n = 0, 1, 2, ...$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi j}\oint_{L_1}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}} \quad \text{nếu } n = -1, -2, ...$$

Nếu gọi L là một đường cong kín bất kì bao điểm a và nằm gọn trong vành khăn G thì trong biểu thức tính c_n có thể thay tích phân dọc theo đường L_1 và L_2 bởi tích phân dọc theo L, nghĩa là:

$$c_n = \frac{1}{2\pi j}\oint_{L}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}} \quad n = 0, \pm1, \pm2, \pm3, ... \qquad (30)$$

Tóm lại ta đã chứng minh được rằng với z bất kì thuộc G ta có khai triển (29) với c_n tính theo (30).

Trong khai triển Laurent chuỗi $\sum_{n=0}^{+\infty}c_n(z-a)^n$ gồm các luỹ thừa dương của (z - a), được gọi là tích phân đều của chuỗi Laurent và chuỗi $\sum_{n=-1}^{-\infty}c_n(z-a)^n$ gồm các luỹ thừa nguyên âm được gọi là phần chính . Như vậy chuỗi Laurent có thể xem là tổng của hai chuỗi phần đều và phần chính.

Theo định lí Abel, phần đều hội tụ bên trong hình tròn lớn $| z - a | < R$, và hội tụ đều trong hình tròn kín $| z -a | \le R'$ (R' bất kì nhỏ hơn R). Tương tự, phần chính hội tụ phần chính hội tụ bên ngoài vòng tròn nhỏ tứ là trong miền | z - a | > r và hội tụ đều trong miền | z - a | ≥ r’ (r’ bất kì lớn hơn r)

Muốn chứng minh tính duy nhất của khai triển Laurent ta làm tương tự như khi chứng minh tính duy nhất của khai triển Taylor.

2. Ghi chú: Nếu hình tròn nhỏ | z - a | ≤ r không chứa điểm bất thường của f(z), nghĩa là nếu f(z) giải tích trong hìn tròn lớn | z - a | < R thì $\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}$ (n = -1, -2, -3,...) cũng giải tích trong hình tròn đó. Vậy theo định lí Cauchy:

$$c_n = \frac{1}{2\pi j}\oint_L \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - a)^{n+1}} = 0, \quad n = -1, -2, -3,...$$

Phần chính sẽ triệt tiêu và khai triển Laurent trở thành khai triển Taylor. Nói khác đi, khia triển Taylor là trường hợp riêng của khai triển Laurent.

3. Một số phương pháp khai triển thành chuỗi Laurent: Trong một số trường hợp ta có thể dùng những phương pháp khai triển thành chuỗi Laurent đơn giản hơn là áp dụng công thức (23).

Chẳng hạn, nếu f(z) giải tích trong miền r < | z -a | < R, có thể viết được dưới dạng tổng của hai hàm :

$f(z) = f_1(z) + f_2(z)$

hay dưới dạng tích của 2 hàm:

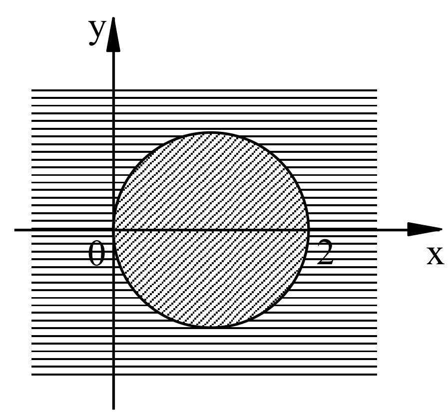
$f(z) = f_1(z).f_2(z)$

trong đó $f_1(z)$ giải tích trong hình tròn lớn | z - a | < R, còn $f_2(z)$ giải tích bên ngoài hình tròn nhỏ, tức trong miền | z - a | > r, thì ta tìm cách khai triển $f_1(z)$ thành chuỗi luỹ thừa đối với (z - a) và khai triển $f_2(z)$ thành chuỗi luỹ thừa đối với $(z - a)^{-1}$.

Cũng có thể dựa vào các khai triển Taylor của các hàm sơ cấp như e^z, cosz, sinz... để khai triển một số hàm siêu việt thành chuỗi Laurent.

Ví dụ 1: Khai triển hàm :

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$$



thành chuỗi Laurent tâm tại 1 trong các miền sau:

- hình tròn bỏ tâm 0 < | z - 1 | < 1
- miền ngoài hình tròn trên

Với hình tròn bỏ tâm 0 < | z - 1 | < 1ta viết:

$$f(z) = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}$$

Vì hàm $f_2(z) = \frac{1}{z-1}$ giải tích khắp nơi trừ tại z = 1. Bản thân hàm $f_2(z)$ đã là một luỹ thừa của (z - 1) nên chỉ cần khai triển $f_1(z)$.

Vì trong miền | z -1 | < 1, hàm $f_1(z)$ giải tích nên nó khai triển được thành chuỗi Taylor tại z = 1.

$$f_1(z) = \frac{1}{z-2} = \frac{1}{z-1-1} = \frac{-1}{-1-(z-1)}$$
$$= -\left[1 + (z-1) + (z-1)^2 + \cdots + (z-1)^n + \cdots\right]$$

Vậy trong miền 0 < | z -1 | < 1 ta có:

$$f(z) = -\frac{1}{z-1} - 1 - (z-1) - (z-1)^2 - \cdots - (z-1)^n - \cdots$$

Bây giờ ta tìm khai triển trong hình tròn | z -1| > 1. Trong miền này ta có:

$$f_1(z) = \frac{1}{z-2} = \frac{1}{z-1-1} = \frac{1}{(z-1)\left[1 - \frac{1}{z-1}\right]}$$

Vì $\frac{1}{|z-1|} < 1$ nên ta có khai triển :

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{z-1}} = 1 + \frac{1}{z-1} + \frac{1}{(z-1)^2} + \cdots$$

Vậy:

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z-1}\left[1 + \frac{1}{z-1} + \frac{1}{(z-1)^2} + \cdots\right] = \frac{1}{z-1} + \frac{1}{(z-1)^2} + \cdots + \frac{1}{(z-1)^2} + \cdots$$

$$f(z) = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} = \frac{1}{(z-1)^2} + \frac{1}{(z-1)^3} + \cdots + \frac{1}{(z-1)^n} + \cdots$$

Ví dụ 2: Viết khai triển của hàm $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$ theo các luỹ thừa của z khi z thuộc các miền sau:

- hình tròn | z | < 1
- hình vành khăn 1 < | z | < 2
- miền ngoài hình tròn tâm O, bán kính 2 : | z | > 2

Trong hình tròn | z | < 1, hàm f(z) giải tích, vậy nó khai triển được thành chuỗi Taylor. Ta phân tích F(z) rồi viết khai triển cho từng số hạng.

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{2\left(\frac{z}{2} - 1\right)} = -\frac{1}{2\left(1 - \frac{z}{2}\right)} = -\frac{1}{2}\left[1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{2^2} + \frac{z^3}{2^3} + \cdots\right]$$

$$-\frac{1}{z-1} = \frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots$$

Vậy:

$$f(z) = -\frac{1}{2}\left[1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{2^2} + \frac{z^3}{2^3} + \cdots\right] + \left[1 + z + z^2 + z^3 + \cdots\right]$$

Hay: $f(z) = \frac{1}{2} + \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)z + \left(1 - \frac{1}{2^3}\right)z^2 + \cdots + \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)z^n + \cdots$

Xét trong miền $1 < |z| < 2$. Vì hàm $\frac{1}{z-2}$ giải tích trong miền $|z| < 2$ nên nó khai triển được thành chuỗi Taylor đối với z:

$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2}\left[1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{2^2} + \frac{z^3}{2^3} + \cdots\right]$$

Còn hàm $\frac{1}{1-z}$ giải tích bên ngoài hình tròn đơn vị nên ta tìm cách khai triển nó theo chuỗi luỹ thừa của $\frac{1}{z}$. Ta có:

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{z\left(\frac{1}{z} - 1\right)} = -\frac{1}{z\left(1 - \frac{1}{z}\right)}$$

Vì ở đây $\left|\frac{1}{z}\right| < 1$ nên:

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \cdots$$

Vậy: $\frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z}\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \cdots\right) = -\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} - \cdots$

$$f(z) = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-1} = -\frac{1}{2}\left[1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{2^2} + \frac{z^3}{2^3} + \cdots\right] - \left[\frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \cdots + \frac{1}{z^n} + \cdots\right]$$

$$= -\frac{1}{2} - \frac{z}{2^2} - \frac{z^2}{2^3} - \cdots \frac{z^n}{2^{n+1}} - \cdots - \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} - \cdots - \frac{1}{z^n} - \cdots$$

Xét trong miền $|z| > 2$. Ta phải khai triển hai hàm số $\frac{1}{z-2}$ và $\frac{1}{z-1}$ theo chuỗi luỹ thừa của $\frac{1}{z}$:

$$\frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} - \cdots$$

$$\frac{1}{z-2}=\frac{1}{z\left(1-\frac{2}{z}\right)}$$

Vì ở đây $\left|\frac{2}{z}\right|<1$ nên: $\frac{1}{1-\frac{2}{z}}=1+\frac{2}{z}+\frac{2^2}{z^2}+\cdots$

Vậy: $\frac{1}{z-2}=\frac{1}{z}+\frac{2}{z^2}+\frac{2^2}{z^3}+\cdots+\frac{2^{n-1}}{z^n}+\cdots$

$$f(z)=\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z^2}+\frac{2^2-1}{z^3}+\cdots+\frac{2^{n-1}-1}{z^n}+\cdots$$

Ví dụ 3: Khai triển hàm số $f(z)=\sin\left(\frac{z}{z-1}\right)$ thành chuỗi Laurent tâm tại 1.

Ta viết:

$$f(z)=\sin\left(\frac{z}{z-1}\right)=\sin\left(1+\frac{1}{z-1}\right)=\sin 1.\cos\frac{1}{z-1}+\cos 1.\sin\frac{1}{z-1}$$

Dựa vào khai triển của sinz và cosz ta có:

$$\sin\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z-1}-\frac{1}{3!(z-1)^3}+\frac{1}{5!(z-1)^5}-\cdots$$

$$\cos\frac{1}{z-1}=1-\frac{1}{2!(z-1)^2}+\frac{1}{4!(z-1)^4}-\cdots$$

Hai khai triển trên đúng $\forall z\neq 1$. Vậy:

$$\sin\left(\frac{z}{z-1}\right)=\sin 1+\frac{\cos 1}{z-1}-\frac{\sin 1}{2!(z-1)^2}-\frac{\cos 1}{3!(z-1)^3}+\cdots+$$

$$(-1)^n\frac{\sin 1}{2n!(z-1)^{2n}}+(-1)^n\frac{\sin 1}{(2n+1)!(z-1)^{2n+1}}+\cdots$$

Ví dụ 4: Khai triển thành chuỗi Fourrier hàm số:

$$\varphi(t)=\frac{a\sin t}{1-2a\cos t+a^2}\qquad (|\,a\,|<1)\text{ , t là biến số thực}$$

Theo công thức Euler:

$$\cos t=\frac{e^{jt}+e^{-jt}}{2};\qquad \sin t=\frac{e^{jt}-e^{-jt}}{2}$$

Thay vào biểu thức của $\varphi(t)$ ta có:

$$\varphi(t)=\frac{1-e^{2jt}}{2j\left[e^{2jt}-\left(a+\frac{1}{a}\right)e^{jt}+1\right]}$$

Xét hàm:

$$f(z)=\frac{1-z^2}{2j\left[z^2-\left(a+\frac{1}{a}\right)z+1\right]}$$

Hiển nhiên $f(e^{jt}) = \varphi(t)$. Vậy $\varphi(t)$ là giá trị của hàm f(z) trên đường tròn đơn vị $z = e^{jt}$. Dễ thấy rằng hàm f(z) giải tích trong một hình vành khăn tâm O, chứa đường tròn đơn vị $| z | = 1$. Ta sẽ khai triển f(z) thành chuỗi Laurent trong hình vành khăn này. Trước hết ta phân tích f(z) thành tổng các phân thức đơn giản:

$$f(z)=\frac{1}{2j}\left(-1+\frac{1}{1-\frac{z}{a}}+\frac{1}{1-az}\right)$$

Chú ý rằng với $| az | < 1$ ta có:

$$\frac{1}{1-az}=1+az+(az)^2+(az)^3+\cdots$$

còn với $| z | > | a |$ ta có:

$$\frac{1}{1-\frac{z}{a}}=-\frac{1}{\frac{z}{a}\left(1-\frac{a}{z}\right)}=-\frac{a}{z}\left(1+\frac{a}{z}+\frac{a^2}{z^2}+\frac{a^3}{z^3}+\cdots\right)$$

Vậy trong miền $\left|a\right|<\left|z\right|<\frac{1}{\left|a\right|}$ ta có:

$$f(z)=\frac{1}{2j}\left(az+a^2z^2+a^3z^3+\cdots-\frac{a}{z}-\frac{a^2}{z^2}-\frac{a^3}{z^3}-\cdots\right)=\frac{1}{2j}\sum_{n=1}^{\infty}a^n\left(z^n-\frac{1}{z^n}\right)$$

Khi $z = z^{jt}$, $| z | = 1$, ta có:

$$\varphi(t)=\frac{1}{2j}\sum_{n=1}^{\infty}a^n\left(e^{njt}-e^{-njt}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}a^n\,\frac{e^{njt}-e^{-njt}}{2j}=\sum_{n=1}^{\infty}a^n\sin(nt)$$

Đó là khai triển Fourrier cần tìm.

§5. ĐIỂM BẤT THƯỜNG CỦA HÀM GIẢI TÍCH

1. Phân loại: Giả sử a là điểm bất thường cô lập của hàm f(z), nghĩa là tồn tại một lân cận khá bé của a trong đó chỉ có a là điểm bất thường. Như vậy f(z) sẽ giải tích trong hình vành khăn nhỏ tâm a. Theo mục 5, ta có thể khai triển f(z) thành chuỗi Laurent trong hình vành khăn này. Ta căn cứ vào khai triển Laurent để phân loại tính bất thường của điểm a.

Nếu khai triển Laurent không chứa phần chính tức là $c_n = 0\ \forall n < 0$. Do đó:

$$f(z)= c_o + c_1(z - a) + c_2(z - a)^2 +\cdots \qquad (31)$$

thì điểm a được gọi là điểm bất thường bỏ được.

Nếu a là điểm bất thường bỏ được, thì theo (3) ta có:

$$\lim_{z\to a} f(a)=c_o$$

Do đó nếu đặt f(a) = c_o thì hàm f(z) được bổ sung giá trị tại điểm a. Như vậy nó sẽ là một hàm giải tích trong cả lân cận nói trên của a. Điều đó giải thích ý nghĩa của thuật ngữ "bỏ được" được dùng ở đây.

Nếu trong phần chính chỉ có một số hữu hạn các số hạng thì a được gọi là cực điểm. Khi đó khai triển có dạng:

$$f(z)=\frac{c_{-n}}{(z-a)^n}+\frac{c_{-n+1}}{(z-a)^{n-1}}+\cdots+\frac{c_{-1}}{(z-a)}+c_o+c_1(z-a)+\cdots \tag{32}$$

Trong đó $c_{-n} \neq 0$. Số mũ n được gọi là cấp của cực điểm.
Nếu a là cực điểm thì từ (32) suy ra:

$$\lim_{z\to a} f(z)=\infty$$

Nếu phần chính của khai triển có vô số số hạng thì ta gọi a là điểm bất thường cốt yếu của f(z). Đối với điểm bất thường cốt yếu ta có định lí Xakhốtxki:

Nếu a là điểm bất thường cốt yếu của f(z) thì với mọi số A cho trước, luôn luôn tồn tại một dãy $\{z_k\}$ dần tới điểm a sao cho dãy {f(z)} dần tới A.

Ví dụ 1: Xét hàm $f(z)=\frac{\sin z}{z}$. Nó thừa nhận điểm z = 0 làm điểm bất thường cô lập.
Khai triển f(z) theo luỹ thừa của z ta có:

$$\frac{\sin z}{z}=\frac{1}{z}\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots\right)=1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}+\cdots$$

Vậy điểm z = 0 là điểm bất thường bỏ được của hàm. Nếu ta bổ sung như sau:

$$f(z)=\begin{cases}\dfrac{\sin z}{z} & \text{khi } z\neq 0\\ 1 & \text{khi } z=0\end{cases}$$

thì f(z) giải tích cả tại z = 0.

Ví dụ 2: Hàm $f(z)=\frac{e^z}{z^3}$ thừa nhận điểm z = 0 làm điểm bất thường cô lập. Khai triển theo luỹ thừa của z ta có:

$$\frac{e^z}{z^3}=\frac{1}{z^3}\left(1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots\right)=\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{2!z}+\frac{1}{3!}+\frac{z}{4!}+\cdots$$

Từ đó suy ra điểm z = 0 là cực điểm cấp 3 của f(z).

Ví dụ 3: Xét hàm $f(z)=e^{\frac{1}{z}}$. Điểm z = 0 là điển bất thường cốt yếu của hàm vì:

$$f(z)=e^{\frac{1}{z}}=1+\frac{1}{1!z}+\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{3!z^3}+\cdots+\frac{1}{n!z^n}+\cdots$$

2. Định lí: Giả sử $f(z)=\frac{f_1(z)}{f_2(z)}$ trong đó $f_1(z)$ và $f_2(z)$ là các hàm giải tích tại a. Nếu điểm a không phải là không điểm của tử số, tức $f_1(a) \neq 0$ và là không điểm cấp m của mẫu số, thì a là cực điểm cấp m của f(z).

Chứng minh: theo giả thiết ta có $f_2(z) = (z - a)^m\varphi(z)$ với $\varphi(z)$ giải tích tại a và $\varphi(a) = 0$.

Hàm $\frac{f_1(z)}{\varphi(z)}$ giải tích tại a nên có thể khai triển nó thành chuỗi Taylor ở lân cận điểm a

$$\frac{f_1(z)}{\varphi(z)} = b_o + b_1(z-a) + b_2(z-a)^2 + \cdots \text{ với } b_o = \frac{f_1(a)}{\varphi(a)} \neq 0$$

Từ đó suy ra khai triển Laurent của f(z) là:

$$f(z) = \frac{f_1(z)}{(z-a)^m\varphi(z0} = \frac{b_o}{(z-a)^m} + \frac{b_1}{(z-a)^{m-1}} + \cdots$$

Điều đó chứng tỏ a là cực điểm cấp m của f(z)

Ví dụ: Xét hàm $f(z) = \frac{z+1}{z^2+4}$

Vì $z^2 + 4 = (z + 2j)(z - 2j)$ nên mẫu số có hai không điểm đơn là $z = \pm 2j$. Vậy f(z) phải có hai cực điểm đơn là $z = \pm 2j$.

Ví dụ: Xét hàm $f(z) = \frac{\sin z}{(z^2+1)^3}$

Vì $(z^2 + 1)^3 = (z^2 +j)(z^2 - j)^3$ nên $z = \pm j$ là những không điểm cấp 3 của mãu số. Vù vậy $z = \pm j$ là những cực điểm cấp 3 của mẫu số.

CHƯƠNG 5: LÝ THUYẾT THẶNG DƯ

§1. KHÁI NIỆM VỀ THẶNG DƯ

1. Định nghĩa thặng dư: Giả sử f(z) là một hàm giải tích trong một lân cận của điểm a trừ chính điểm a (nghĩa là a là điểm bất thường cô lập của f(z)). Nếu C là đường cong kín bất kì bao lấy điểm a và nằm trong lân cận nói trên thì theo định lí Cauchy, tích phân $\oint_C f(z)dz$ là một số không phụ thuộc C. Ta gọi thặng dư của hàm f(z) tại a là kết quả phép chia $\oint_C f(z)dz$ cho $2\pi j$. Thặng dư được kí hiệu là Res[f(z), a]. Tóm lại:

$$\text{Res}[f(z), a] = \frac{1}{2\pi j}\oint_C f(z)dz \tag{1}$$

Ví dụ: $\text{Res}\left[\frac{1}{z-a}, a\right] = \frac{1}{2\pi j}\oint_C \frac{1}{z-a}dz = \frac{2\pi j}{2\pi j} = 1$

2. Cách tính thặng dư: Công thức chung để tính thặng dư là:

$$\text{Res}[f(z), a] = c_{-1} \tag{2}$$

Trong đó c_{-1} là hệ số của $\frac{1}{z-a}$ trong khai triển Laurent của hàm f(z) tại lân cận điểm a.

Chứng minh: Theo công thức tính hệ số của khai triển Laurent:

$$c_n = \frac{1}{2\pi j}\oint_C \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\xi - a)^{n+1}}$$

Khi n = -1 ta có:

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi j}\oint_C f(\zeta)d\zeta = \text{Res}[f(z), a]$$

a. Thặng dư tại cực điểm đơn: Nếu a là cực điểm đơn của hàm f(z) thì :

$$\text{Res}[f(z), a] = \lim_{z\to a}[(z-a)f(z)] \tag{3}$$

Ví dụ 1: Vì z = 2 là cực điểm đơn của $\frac{z^2}{z-2}$ nên

$$\text{Res}[f(z), a] = \lim_{z\to 2}\left[(z-2)\frac{z^2}{z-2}\right] = \lim_{z\to 2} z^2 = 4$$

Ví dụ 2: Cho $f(z) = \frac{1}{\sin z}$. Tính thặng dư tại a = 0

Ta đã biết :

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots = z\left(1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \cdots\right)$$

Căn cứ vào khai triển này ta thấy điểm z = 0 là không điểm đơn của sinz. vậy điểm z = 0 là cực điểm đơn của $f(z)=\dfrac{1}{\sin z}$. Theo (3) ta có:

$$\text{Res}[f(z), a] = \lim_{z\to 0}\left[z\frac{1}{\sin z}\right]=1$$

Định lí: Giả sử $f(z)=\dfrac{f_1(z)}{f_2(z)}$, trong đó $f_1(z)$ và $f_2(z)$ là những hàm giải tích tại a. Điểm a là không điểm đơn của f_2(z0 và không phải là không điểm của $f_1(z)$. Khi đó:

$$\text{Res}[f(z), a] = \frac{f_1(a)}{f_2'(a)} \qquad (4)$$

Chứng minh: Theo giả thiết ta thấy a là cực điểm đơn của f(z). Theo (3) ta có:

$$\text{Res}[f(z), a] = \lim_{z\to a}\left[(z-a)\frac{f_1(z)}{f_2(z)}\right]=\lim_{z\to a}\left[\frac{f_1(z)}{\frac{f_2(z)}{(z-a)}}\right]$$

Vì $f_2(a) = 0$ nên ta có thể viết:

$$\text{Res}[f(z), a] = \frac{\lim\limits_{z\to a} f_1(z)}{\lim\limits_{z\to a}\dfrac{f_2(z)-f_2(a)}{(z-a)}}=\frac{f_1(a)}{f_2'(a)}$$

Ví dụ 3: Tính thặng dư của f(z) = cotgz

Vì a = 0 là đơn của cotgz nên theo (4) ta có:

$$\text{Res}[f(z), a] = \frac{f_1(a)}{f_2'(a)}=\frac{\cos 0}{\cos 0}=1$$

Ví dụ 4: Tính thặng dư của hàm $f(z)=\dfrac{z+1}{z^2+4}$ tại a = 2j.

Vì 2j là không điểm đơn của $(z^2 + 4)$ nên nó là cực điểm đơn của f(z). Theo (4) ta có:

$$\text{Res}[f(z), a] = \frac{f_1(a)}{f_2'(a)}=\frac{2j+1}{4j}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}j$$

Ví dụ 5: Tính thặng dư của hàm $f(z)=\dfrac{e^z}{(z-j)(z+j)}$ tại a = ±j

Ta thấy f(z) có hai cực điểm đơn là ±j. Áp dụng công thức (4) ta có:

$$\text{Res}[f(z), j] = \lim_{z\to j}\frac{e^z}{z+j}=\frac{e^j}{2j}=-\frac{j}{2}(\cos 1+j\sin 1)$$

$$\text{Res}[f(z), -j] = \lim_{z\to -j}\frac{e^z}{z-j}=\frac{e^{-j}}{-2j}=\frac{j}{2}(\cos 1-j\sin 1)$$

b. Thặng dư tại cực điểm cấp m: Nếu a là cực điểm cấp m của f(z) thì:

$$\mathrm{Res}[f(z),a]=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-a)^m f(z)\right] \qquad (5)$$

Ví dụ 1: Tính thặng dư của hàm $f(z)=\dfrac{1}{(z^2+1)^3}$ tại a = j

Vì $(z^2 + 1)^3 = (z + j)^3(z - j)^3$ nên j là không điểm cấp 3 của $(z^2 + 1)^3$. Vậy j là cực điểm cấp 3 của hàm f(z). Theo (5) với m = 3 ta có:

$$\mathrm{Res}[f(z),a]=\frac{1}{2!}\lim_{z\to j}\frac{d^2}{dz^2}\left[(z-j)^3\frac{1}{(z^2+1)^3}\right]=\frac{1}{2}\lim_{z\to j}\frac{d^2}{dz^2}\left[\frac{1}{(z^2+j)^3}\right]$$

$$=\frac{1}{2!}\lim_{z\to j}\frac{12}{(z^2+j)^5}=\frac{6}{(2j)^5}=-\frac{3j}{16}$$

Ví dụ 2: Tìm thặng dư của hàm $f(z)=\dfrac{e^{-z}}{z^3}$

Ta thấy z = 0 là không điểm cấp 3 của z^3 nên z = 0 là cực điểm cấp 3 của hàm f(z). Dùng công thức (5) ta có:

$$\mathrm{Res}[f(z),a]=\frac{1}{2!}\lim_{z\to 0}\frac{d^2e^{-z}}{dz^2}=\frac{1}{2}$$

§2. ỨNG DỤNG THẶNG DƯ

1. Định lí 1: Nếu f(z) giải tích trong miền $\overline{G}$, giới hạn bởi đường cong kín L, ngoại trừ tại một số hữu hạn cực điểm $a_1, a_2, .., a_s$ ở bên trong thì:

$$\oint_L f(z)dz=2\pi j\sum_{k=1}^{s}\mathrm{Res}\left[f(z),a_k\right] \qquad (8)$$

Chứng minh: Loại đi khỏi miền G các hình tròn $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_s$ có tâm lần lượt là a_1, a_2, ..,a_s và có bán kính đủ nhỏ ta được một miền đa liên . Áp dụng định lý Cauchy cho miền đa liên này ta được:

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_L f(z)dz=\frac{1}{2\pi j}\oint_{\gamma_1} f(z)dz+\cdots+\frac{1}{2\pi j}\oint_{\gamma_s} f(z)dz$$

Nhưng vì:

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_{\gamma_k} f(z)dz=[\ \mathrm{Res}f(z),a_k],\ k=1,2,...,s$$

nên thay vào ta có:

$$\oint_L f(z)dz=2\pi j\mathrm{Res}[f(z),a_k]+\cdots+2\pi j\mathrm{Res}[f(z),a_k]$$

2. Định lí 2: Nếu f(z) giải tích trong toàn bộ mặt phẳng ngoại trừ tại một số hữu hạn cực điểm $a_1, a_2, .., a_s = \infty$ thì:

$$\sum_{k=1}^{s}\mathrm{Res}\left[f(z),a_k\right]+\mathrm{Res}\left[f(z),a_k\right]=0$$

Chứng minh: Chọn R đủ lớn để đường tròn | z | = R bao lấy tất cả các điểm $a_1, a_2, .., a_n$, Ta có:

$$\sum_{k=1}^{s} \mathrm{Res}[f(z), a_k] = \frac{1}{2\pi j}\oint_C f(z)dz$$

Theo định nghĩa thặng dư tại ∞:

$$\mathrm{Res}[f(z), \infty] = \frac{1}{2\pi j}\oint_{C^-} f(z)dz = -\frac{1}{2\pi j}\oint_C f(z)dz$$

Cộng các vế của hai đẳng thức này ta được điều cần phải chứng minh.

Ví dụ 1: Tính $\oint_L \frac{z^2 dz}{(z^2+1)(z+3)}$, L là đường tròn tâm | z | = 2

Hàm $f(z) = \frac{z^2}{(z^2+1)(z+3)}$ có 3 cực điểm là z = j, z = -j và z = -3.

Trong hình tròn | z | < 2 có hai cực điểm là $\pm$j, đều là các cực điểm đơn. Tính thặng dư tại các cực điểm đó ta có:

$$\mathrm{Res}[f(z), j] = \lim_{z\to j}(z-j)f(z) = \lim_{z\to j}\frac{z^2}{(z+j)+(z+3)} = \frac{j^2}{2j(z+3)} = \frac{j}{2z+6} = \frac{1+3j}{20}$$

$$\mathrm{Res}[f(z), -j] = \frac{f_1(-j)}{f_2'(-j)} = \left.\frac{\frac{z^2}{z+3}}{2z}\right|_{z=-j} = \left.\frac{z^2}{2z(z+3)}\right|_{z=-j} = \frac{j^2}{-2j(3-j)} = \frac{1-3j}{20}$$

Vậy

$$I = \mathrm{Res}[f(z), j] + \mathrm{Res}[f(z), -j] = 2\pi j\left(\frac{1+3j}{20} + \frac{1-3j}{20}\right) = \frac{\pi j}{5}$$

Ví dụ 2: Tính $I = \oint_L \frac{\cos z dz}{z^2(z-2)}$, L là đường tròn | z | = 2

Hàm $f(z) = \frac{\cos z}{z^2(z-2)}$ có z = 0 là cực điểm cấp 2 và điểm z = 2 là cực điểm cấp 1.

Trong hình tròn | z | < 1 chỉ có một cực điểm z = 0 nên:

$$I = 2\pi j.\mathrm{Res}[f(z), 0]$$

Nhưng vì:

$$\mathrm{Res}\left[\frac{\cos z}{z^2(z-2)}\right] = \lim_{z\to 0}\left[z^2\frac{\cos z}{z^2(z-2)}\right]' = \lim_{z\to 0}\left(\frac{\cos z}{z-2}\right) = \lim_{z\to 0}\frac{-\sin z(z-2)-\cos z}{(z-2)^2} = -\frac{1}{4}$$

nên $I = -\frac{\pi j}{2}$

Ví dụ 3: Tính $I = \oint_C \frac{e^z dz}{z^2+1}$ với C là đường tròn | z | = 3

Hàm f(z) dưới dấu tích phân có hai điểm bất thường j và -j nằm trong hình tròn biên C. Theo ví dụ ở mục trước ta có:

$$\text{Res}[f(z), j] = \frac{e^{j}}{2j} \text{ và } \text{Res}[f(z), -j] = \frac{e^{-j}}{2j}$$

Nên: $I = 2\pi j\sin 1$

Ví dụ 4: Tính $I = \oint\limits_C \frac{z+3}{(z-1)(z+1)^2}dz$ với C là đường tròn | z - 0.5 | =1

Trong miền giới hạn bởi C, hàm f(z) dưới dấu tích phân chỉ có một điểm bất thường là z = 1, cực điểm đơn. Do đó:

$$I = 2\pi j.\text{Res}[f(z), 1] = \lim_{z\to 1}(z-1)f(z) = 2\pi j$$

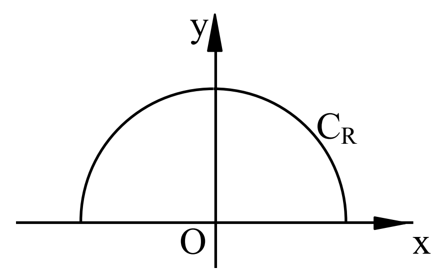
3.Tích phân thực dạng $\int\limits_{-\infty}^{\infty} R(x)dx$ trong đó R(x) là một phân thức hữu tỉ

a. Bổ đề 1: Giả sử C_R là một nửa đường tròn tâm O, bán kính R, nằm trong nửa mặt phẳng trên Imz > 0. Nếu f(z) giải tích trong nửa mặt phẳng trên, trừ tại một số hữu hạn điểm bất thường và thoả mãn:

$$\lim_{z\to\infty} zf(z) = 0 \quad 0 \le \arg z \le \pi$$

thì:

$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_{C_R} f(z)dz = 0$$



Chứng minh: Phương trình C_R có dạng $z = Re^{j\varphi}$ với φ là tham số biến thiên từ 0 đến π. Chọn R khá lớn sao cho các điểm bất thường của f(z) đều nằm trong miền | z | < R. Vậy hàm f(z) liên tục trên C_R và theo cách tính tích phân ta có:

$$\int\limits_{C_R} f(z)dz = \int\limits_0^{\pi} f(Re^{j\varphi})Re^{j\varphi}d\varphi$$

Ta ước lượng tích phân này. Vì $\lim_{z\to\infty} zf(z) = 0$ nên ∀ε > 0 cho trước ta luôn tìm được một số N > 0 sao cho khi | z | > N thì | z.f(z) | < ε. Vậy nếu z ∈ $C_{R+ \text{với}}$ R > N thì:

$$| f(Re^{j\varphi}).Re^{j\varphi} | = | z.f(z) | < \varepsilon$$

Do đó:

$$\left| \int\limits_{C_R} f(z)dz \right| \le \varepsilon\int\limits_0^{\pi} d\varphi = \varepsilon\pi$$

Vì ε bé tuỳ ý nên ta suy ra $\lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_{C_R} f(z)dz = 0$

b. Định lí 1: Giả sử R(z) là một phân thức mà đa thức mẫu số có bậc lớn hơn đa thức tử số ít nhất là hai đơn vị, R(z) có một số hữu hạn cực điểm $a_1, a_2, ..., a_n$ nằm trong nửa mặt phẳng trên và không có cực điểm nằm trên trục thực. Khi đó ta có:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} R(x)dx = 2\pi j\sum_{k=1}^{s} \text{Res}[R(z), a_k] \qquad (9)$$

Ta thừa nhận mà không chứng minh định lí này.

Ví dụ 1:Tính $I = \int\limits_0^\infty \frac{dx}{x^4+1}$

Vì hàm dưới dấu tích phân là chẵn nên ta có:

Ta có: $I = \int\limits_0^\infty \frac{dx}{x^4+1} = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^4+1}$

Đặt $R(z) = \frac{1}{z^4+1}$. Phương trình $z^4 + 1 = 0$ có hai nghiệm trong nửa mặt phẳng trên là:

$z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}, z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2}$. Rõ ràng R(z) đủ điều kiện để áp dụng (9). Ta có

$$I = \pi j\sum_{k=1}^{2} \mathrm{Res}[R(z), a_k] = \pi j\left(\frac{1}{4z_1^3} + \frac{1}{4z_2^3}\right) = \pi j\left(\frac{z_1}{4z_1^4} + \frac{z_2}{4z_2^4}\right) = -\frac{\pi j}{4}(z_1+z_2) = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$$

Ví dụ 2: Tính $I = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x-1}{(x^2+1)^2}dx$

Hàm $R(z) = \frac{z-1}{(z^2+1)^2} = \frac{z-1}{(z-j)^2(z+j)^2}$ thoả mãn các giả thiết của định lí. Trong nửa mặt phẳng trên, nó có cực điểm cấp 2 là z = j. Theo (9);

$$I = 2\pi j\mathrm{Res}[R(z), j]$$
$$= 2\pi j\lim_{z\to j}\frac{d}{dz}\left[(z-j)^2 R(z)\right] = 2\pi j\lim_{z\to j}\frac{d}{dz}\left[\frac{z-1}{(z+j)^2}\right] = 2\pi j\lim_{z\to j}\frac{2+j-z}{(z+j)^3} = -\frac{\pi}{2}$$

Ví dụ 3: Tính $I = \int\limits_0^\infty \frac{x^2dx}{x^4+1}$

Vì hàm dưới dấu tích phân là chẵn nên ta có:

Ta có: $I = \int\limits_0^\infty \frac{dx}{x^4+1} = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^4+1}$

Đặt $R(z) = \frac{z^2}{z^4+1}$. Phương trình $z^4 + 1 = 0$ có hai nghiệm trong nửa mặt phẳng trên là:

$z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}, z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2}$. Rõ ràng R(z) đủ điều kiện để áp dụng (9). Ta có

$$I = \pi j\sum_{k=1}^{2} \mathrm{Res}[R(z), a_k]$$

$$\mathrm{Res}[R(z), j] = \left.\frac{z^2}{(z^4+1)'}\right|_{z=z_1} = \left.\frac{z^2}{4z^3}\right|_{z=z_1} = \frac{1}{4z_1} = \frac{1}{4\frac{\sqrt{2}}{2}(1+j)} = \frac{1}{2\sqrt{2}(1+j)} = \frac{1-j}{4\sqrt{2}}$$

Tương tự:

$$\text{Res}[R(z), j] = \frac{1}{2\sqrt{2}(1-j)} = \frac{-1-j}{4\sqrt{2}}$$

Vậy: $I = \pi j\left(\frac{1-j}{4\sqrt{2}} + \frac{-1-j}{4\sqrt{2}}\right) = \frac{2\pi}{4\sqrt{2}} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$

c. Định lý 2: Giả sử R(z) là một phân thức hữu tỉ mà bậc của mẫu số lớn hơn bậc của tử số ít nhất 2 đơn vị. Hàm R(z) có các cực điểm trong nửa mặt phẳng trên là $a_1, a_2, .., a_s$ và có m cực điểm đơn trên trục thực là $b_1, b_2, .., b_m$. Khi đó ta có:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)dx = 2\pi j\sum_{k=1}^{s} \text{Res}[R(z), a_k] + \pi j\sum_{i=1}^{m} \text{Res}[R(z), b_i] \qquad (11)$$

4. Tích phân dạng $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\cos\alpha x dx$ và $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\sin\alpha x dx$ ($\alpha > 0$)

Theo công thức Euler thì $e^{j\alpha x} = \cos\alpha x + j\sin\alpha x$ nên $\cos\alpha x = \text{Re}(e^{j\alpha x})$ và $\sin\alpha x = \text{Im}(e^{j\alpha x})$. Vậy:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\cos\alpha x dx = \text{Re}\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{j\alpha x}dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\sin\alpha x dx = \text{Im}\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{j\alpha x}dx$$

Do đó muốn tính các tích phân đã cho, chỉ cần tính $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{j\alpha x}dx$ rồi lấy phần thực hay phần ảo của nó là được. Khi tính $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{j\alpha x}dx$ ta dùng bổ đề sau:

a. Bổ đề Jordan: Gọi C_R là cung tròn $|z| = R$ $\text{Im}z > a$ (a là số thực cố định cho trước) nghĩa là C_R là cung tròn tâm O, bán kính R và nằm phía trên đường thẳng y=a. Nếu F(z) có dạng $e^{j\alpha z}f(z)$ trong đó α là một số dương cố định còn f(z) giải tích trong nửa mặt phẳng $\text{Im}z \geq a$, trừ tại một số hữu hạn điểm bất thường và thoả mãn $\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$ thì:

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} F(z)dz = \lim_{R\to\infty}\int_{C_R} e^{j\alpha z}f(z)dz$$

Ta thừa nhận không chứng minh bổ đề này

b. Định lí 1: Giả sử R(z) là một phân thức hữu tỉ thoả mãn các điều kiện sau:

* R(z) giải tích trong nửa mặt phẳng trên, trừ tại một số hữu hạn các cực điểm $a_1, a_2, .., a_s$

* R(z) không có cực điểm trên trục thực

* trong biểu thức của R(z), bậc của mẫu số lớn hơn bậc của tử số ít nhất là 1 đơn vị.

Thế thì:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{j\alpha x}dx = 2\pi j\sum_{k=1}^{s} \text{Res}[R(z)e^{j\alpha x}, a_k] \qquad (14)$$

Trong α là một số cho trước.
Ta cũng không chứng minh định lí này.

Ví dụ 1: $I = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\cos x}{x^2 - 2x + 10} dx$

Ta có: $I = \text{Re}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{jx}}{x^2 - 2x + 10} dx$

Để tính I ta áp dụng (14). Muốn vậy ta phải tìm các cực điểm của $R(z) = \frac{z}{z^2 - 2z + 10}$. Giải phương trình $z^2 - 2z + 10 = 0$ ta có hai nghiệm là $z = 1 \pm 3j$.
Đó là hai cực điểm đơn của R(z). Cực điểm $z = 1 + 3j$ nằm trong nửa mặt phẳng trên.
Dùng công thức (14) ta có:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{jx}}{x^2 - 2x + 10} dx = 2\pi j.\text{Res}\left[\frac{ze^{jz}}{z^2 - 2z + 10}, 1 + 3j\right] = 2\pi j \left.\frac{ze^{jz}}{2z - 2}\right|_{z=1+3j} = 2\pi j\frac{(1+3j)e^{-3+j}}{6j}$$

$$= \frac{\pi}{3}e^{-3}(\cos 1 - 3\sin 1) + j\frac{\pi}{3}e^{-3}(3\cos 1 + \sin 1)$$

Từ đó suy ra:

$$I = \frac{\pi}{3}e^{-3}(\cos 1 - 3\sin 1)$$

c. Định lí 2: Giả sử R(z) là một phân thức hữu tỉ thoả mãn các điều kiện sau:

* R(z) giải tích trong nửa mặt phẳng trên, trừ tại một số hữu hạn các cực điểm $a_1, a_2, .., a_s$

* R(z) có m cực điểm trên trục thực $b_1. b_2, ..., b_n$

* trong biểu thức của R(z), bậc của mẫu số lớn hơn bậc của tử số ít nhất là 1 đơn vị.

Thế thì với α là một hằng số dương cho trước :

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{j\alpha x}dx = 2\pi j\sum_{k=1}^{s}\text{Res}[R(z)e^{j\alpha x}, a_k] + \pi j\sum_{k=1}^{m}\text{Res}[R(z)e^{j\alpha x}, b_k] \qquad (16)$$

Ví dụ: Tính $I = \int\limits_{0}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$

Vì $\frac{\sin x}{x}$ là hàm chẵn nên ta có thể viết được:

$$I = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

Mặt khác:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \text{Im}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{jz}}{z} dz$$

Vậy: $I = \frac{1}{2}\text{Im}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{jz}}{z} dz$

Vì hàm $R(z)=\frac{1}{z}$ có cực điểm duy nhất tại z = 0 nên theo (6) ta có:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{jz}}{z}dz=\pi j\,\mathrm{Res}\left[\frac{e^{jz}}{z},0\right]=\pi j\lim_{z\to 0}e^{jz}=\pi j$$

Thay vào trên ta được: $I=\frac{\pi}{2}$

5. Tích phân dạng $\int_0^{2\pi} f(\sin t,\cos t)dt$

Đặt $z=e^{jt}$ thì $\ln z = jt$, $dt=\frac{dz}{jz}$ và theo định nghĩa các hàm lượng giác ta có:

$$\cos t=\frac{z+\frac{1}{z}}{2},\ \sin t=\frac{z-\frac{1}{z}}{2j}.$$

Khi t chạy từ 0 đến 2π, điểm z vẽ nên đường tròn C: | z | = 1. Vậy:

$$\int_0^{2\pi} f(\sin t,\cos t)dt=\oint_L f\left[-\frac{j}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right),\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right]\frac{jdz}{z} \qquad (17)$$

Trong đó L là đường tròn | z | = 1

Ví dụ 1: Tính $I=\int_0^{2\pi}\frac{2+\cos t}{2-\sin t}dt$

Theo (17) ta có:

$$I=\oint_L\frac{2+\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)}{2+\frac{j}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)}\frac{jdz}{z}=-\oint_L\frac{4z+z^2+1}{4z+jz^2-j}\frac{jdz}{z}=-\oint_L\frac{z^2+4z+1}{z^2-4jz-1}\frac{dz}{z}$$

Hám dưới dấu tích phân có 3 điểm cực là z = 0, z = $2j\pm j\sqrt{3}$. Vì $\left|(2-\sqrt{3})j\right|=2-\sqrt{3}<1;\left|(2+\sqrt{3})j\right|=2+\sqrt{3}>1$nên bên trong L chỉ có 2 cực điểm là $a_1 = 0$ và $a_2 = 2-\sqrt{3}$. ta tính thặng dư:

$$\mathrm{Res}\left[\frac{z^2+4z+1}{z(z^2-4jz-1)},0\right]=\lim_{z\to 0}\frac{z^2+4z+1}{z^2-4jz-1}=-1$$

$$\mathrm{Res}\left[\frac{z^2+4z+1}{z(z^2-4jz-1)},(2-\sqrt{3})j\right]=\left.\frac{z^2+4z+1}{z(2z-4j)}\right|_{(2-\sqrt{3})j}=1+j\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Theo định lí 1 mục trước ta có:

$$I=-2\pi j\left[-1+\left(1+j\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)\right]=-2\pi j\left(j\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{4\pi\sqrt{3}}{3}$$

Ví dụ 2: Tính $I=\int_0^{\pi}\frac{dt}{2+\cos t}$

Đặt $z = e^{jt}$, vì hàm dưới dấu tích phân là chẵn nên ta có:

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{dt}{2+\cos t} = \frac{1}{2j}\oint_C \frac{dz}{\left[\frac{2+\left(z+\frac{1}{z}\right)}{2}\right]z} = \frac{1}{j}\oint_C \frac{dt}{z^2+4z+1} = \frac{1}{j}\oint_C \frac{dz}{(z-a)(z-b)}$$

Trong đó C là đường tròn | z | = 1, $a = -2+\sqrt{3}$ và $b = -2-\sqrt{3}$ là các nghiệm của phương trình $z^2 + 4z + 1 = 0$.

Vì | a | < 1 và | b | > 1 nên ta có:

$$I = 2\pi.\mathrm{Res}\left[\frac{1}{(z-a)(z-b)}, a\right] = \frac{2\pi}{a-b} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

CHƯƠNG 6: PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE

§1. PHƯƠNG PHÁP CỦA PHÉP TÍNH TOÁN TỬ

Cho hai tập hợp A và B. Một ánh xạ T cho ứng một phần tử của A với một phần tử xác định của B, kí hiệu là Tx, được gọi là một toán tử. Phần tử Tx được gọi là ảnh của x còn x được gọi là gốc của hay nghịch ảnh của Tx.

Ví dụ: ☞Nếu A = B = **R** thì toán tử T là một hàm số thực của biến số thực.

☞ Nếu A là tập hợp các số thực dương và B = R. Ánh xạ cho mỗi số a ∈ A thành một số thực thuộc B là Ta = lna được gọi là toán tử logarit. Nhờ có toán tử loga mà phép nhân các gốc được chuyển thành phép cộng các ảnh:

$$T(a_1.a_2) = Ta_1 + Ta_2 \qquad (1)$$

Do đó muốn tính tích $a_1.a_2$, ta tìm ảnh của nó theo (1) sau đó dùng bảng logarit tra ngược lại

☞ Cho A là tập hợp các hàm dao động hình sin có cùng tần số góc ω, B là tập hợp các hàm biến số thực t nhưng lấy giá trị phức. Cho ứng mỗi hàm $v(t) = V\sin(\omega t + \varphi) \in A$ với một hàm $Tv \in B$ theo công thức:

$$Tv = V.e^{j(\omega t + \varphi)}$$

cũng là một toán tử. Nhờ toán tử này mà các phép tính đạo hàm và tích phân gốc được chuyển thành các phép tính đại số đối với ảnh.

Trong chương này ta sẽ nghiên cứu toán tử Laplace. Bài toán đặt ra là biết gốc, tìm ảnh toán tử Laplace của nó và ngược lại biết ảnh của một hàm, tìm lại gốc của nó.

§2. ĐỊNH NGHĨA HÀM GỐC

Ta gọi hàm f(t) của biến thực t là hàm gốc nếu nó thoả mãn các điều kiện sau:

• Hàm f(t) liên tục từng khúc khi $t \geq 0$, nghĩa là nếu lấy một khoảng [a, b] bất kì trên nửa trục $t \geq 0$, bao giờ cũng có thể chia nó thành một số hữu hạn các khoảng nhỏ sao cho trong mỗi khoảng nhỏ f(t) liên tục và tại mút của mỗi khoảng nhỏ nó có giới hạn một phía

• Khi $t \to +\infty$, hàm f(t) tăng không nhanh hơn một hàm mũ, nghĩa là tồn tại một số $M>0$, $s_o \geq 0$ sao cho:

$$|f(t)| \leq Me^{s_o t} \quad \forall t > 0 \qquad (2)$$

trong đó s_o được gọi là chỉ số tăng của f(t)

• f(t) = 0 khi t < 0. Điều kiện này được đặt ra vì trong các ứng dụng thực tế t thường là thời gian.

Ví dụ 1: Hàm:

$$\eta(t) = \begin{cases} 0 & \text{khi } t < 0 \\ 1 & \text{khi } t > 0 \end{cases}$$

là hàm gốc.

Thật vậy vì $|\eta(t)| \leq 1$ nên điều kiện 2 được thoả mãn nếu chọn M = 1, $s_0 = 0$; dễ dàng kiểm tra được điều kiện 1.

Ví dụ 2: Hàm:

$$f(t) = \eta(t).\sin t = \begin{cases} 0 & \text{khi } t < 0 \\ \sin t & \text{khi } t > 0 \end{cases}$$

là hàm gốc.

Thật vậy vì | η(t).sint | ≤ 1 nên điều kiện 2 được thoả mãn nếu chọn M = 1, $s_0 = 0$; dễ dàng kiểm tra được điều kiện 1.

Ví dụ 3: Hàm:

$$f(t) = \eta(t).t^2 = \begin{cases} 0 & \text{khi } t < 0 \\ t^2 & \text{khi } t > 0 \end{cases}$$

là hàm gốc.

Thật vậy vì $| \eta(t).t^2 | \le 2e^t$ nên điều kiện 2 được thoả mãn nếu chọn M = 2, $s_0 = 1$; dễ dàng kiểm tra được điều kiện 1.

Quy ước:
- Ta viết φ(t) thay cho η(t).φ(t)
- giới hạn phải của f(t), tức là khi t → + 0 được viết là f(0)

§3. ĐỊNH LÝ CƠ BẢN

Nếu f(t) là hàm gốc có chỉ số tăng là s_0 thì tích phân:

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)dt \qquad (3)$$

trong đó p = s + jσ là một tham số phức sẽ hội tụ trong miền Rep = s > s_o (nửa mặt phẳng phức bên phải đường thẳng s = s_o)

Tích phân (3) là một hàm của biến số phức p. Hàm biến phức F(p) giải tích trong miền Rep > s_o và dần tới 0 khi p → ∞ sao cho Rep = s → +∞.

Chứng minh: Lấy p bất kì thuộc miền Rep > s_o, ta sẽ chứng minh tích phân (3) hội tụ. Muốn vậy ta chứng minh nó thừa nhận một tích phân trội hội tụ tuyệt đối. Thật vậy vì $\left| f(t) \right| \le Me^{s_o t}$ nên $\left| f(t)e^{-pt} \right| \le Me^{s_o t}e^{-st} = Me^{(s_o - s)t}$. Do đó:

$$\int_0^{+\infty} \left| f(t).e^{-pt} \right| dt \le M \int_0^{+\infty} e^{(s_o - s)t} dt = \left. \frac{Me^{(s_o - s)t}}{s_o - s} \right|_0^{+\infty}$$

Vì s_0 - s < 0 nên $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{(s_o - s)t} = 0$. Do đó:

$$\int_0^{+\infty} \left| f(t).e^{-pt} \right| dt \le \frac{M}{s_o - s} \qquad (4)$$

Điều đó chứng tỏ (3) hội tụ. Khi p = s + jσ → +∞ sao cho s →+∞ thì $\dfrac{M}{s_o - s} \to 0$ nên F(p) → 0.

Ta còn phải chứng minh F(p) giải tích trong miền Rep > s_o. Muốn vậy ta chứng minh đạo hàm của F(p) tồn tại tại mọi điểm của miền ấy. Xét tích phân $\int_0^{+\infty} -t.e^{-pt} f(t)dt$ thu được bằng cách lấy đạo hàm một cách hình thức $\int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)dt$ dưới dấu tích phân.

Trong nửa mặt phẳng Rep ≥ s_1 với s_1 bất kì lớn hơn s_o thì tích phân đó thừa nhận một tích phân trội hội tụ và không phụ thuộc tham số p:

$$\left|\int_0^{+\infty} f(t).e^{-pt}dt\right| \le M\int_0^{+\infty} t.e^{(s_o-s)t}dt < M\int_0^{+\infty} t.e^{(s_o-s_1)t}dt = \frac{M}{(s_1-s_o)^2} \qquad (5)$$

Vậy theo định lý Weierstrass, tích phân hội tụ đều đối với p trong miền đó vµ là đạo hàm của F(p). Tóm lại:

$$F'(p) = \int_0^{+\infty} -te^{-pt}f(t)dt \qquad (6)$$

§4. ĐỊNH NGHĨA TOÁN TỬ LAPLACE

Toán tử Laplace, còn gọi là phép biến đổi Laplace. Nếu f(t) là một hàm gốc thì hàm F(p) được xác định bằng tích phân (3) là một hàm giải tích trong nửa mặt phẳng Rep>s_o. Ta gọi nó là ảnh của f(t) qua phép biến đổi Laplace của f(t) và kí hiệu:

F(p) = L{ f(t) } hay f(t) $\fallingdotseq$ F(p). Ta có:

$$L\{f(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-pt}f(t)dt \qquad (7)$$

Chú ý: ® Các điều kiện trong định nghĩa hàm gốc f(t) chỉ là điều kiện đủ để ảnh tồn tại chứ không phải là điều kiện cần. Chẳng hạn hàm $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$ không phải là hàm gốc vì $\lim\limits_{t\to+0}\frac{1}{t} = \infty$. Tuy vậy tích phân $\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{t}}e^{-pt}dt$ vẫn tồn tại

• Không phải mọi hàm phức F(p) đều có nghịch ảnh là một hàm gốc. Chẳng hạn F(p) = p^2 không thể là ảnh của một hàm gốc nào cả vì $\lim\limits_{p\to\infty}F(p) = \infty$. Điều này mâu thuẫn với kết luận của định lí 1.

• Nếu F(p) giải tích tại ∞ thì F(p) → 0 khi p → ∞ một cách bất kì chứ không phải chỉ trong trường hợp p → ∞ sao cho Rep → +∞.

Ví dụ 1: Tìm ảnh qua phép biến đổi Laplace (gọi tắt là ảnh) của hàm η(t):

$$\eta(t) = \begin{cases} 0 & \text{khi } t < 0 \\ 1 & \text{khi } t > 0 \end{cases}$$

$$L\{f(t)\} = F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt}dt = -\left.\frac{e^{-pt}}{p}\right|_0^{\infty} = -\frac{1}{p}\left.\frac{e^{-(s+j\sigma)t}}{p}\right|_0^{\infty} = -\frac{1}{p}\left.\frac{e^{-st}e^{-j\sigma t}}{p}\right|_0^{\infty}$$

Nếu Rep = s > 0 thì khi t → ∞, e^{-st} → 0; khi t → 0, e^{-st} → 1. Vậy:

$$F(p) = \frac{1}{p} \qquad (8)$$

Ví dụ 2: Tìm ảnh của hàm f(t) = e^{at} trong đó a = α + jβ = const

Ta có $F(p) = \int_0^{+\infty} e^{at}e^{-pt}dt = \int_0^{+\infty} e^{(a-p)t}dt = \left.\frac{e^{(a-p)t}}{a-p}\right|_0^{\infty}$

Khi t → 0 thì $e^{(a-p)t}$ → 1. Nếu Rep>Rea (s>α) thì khi t → +∞, $e^{(a-p)t} = e^{(\alpha-s)t}e^{j(\beta-\sigma)t}$ → 0. Vậy:

$$F(p)=\frac{1}{p-a} \tag{9}$$

Ví dụ 3: Tìm ảnh của f(t) = t.

$$F(p)=\int_0^{+\infty} te^{-pt}dt=-\frac{1}{p}\int_0^{+\infty} tde^{-pt}=-\frac{te^{-pt}}{p}\Bigg|_0^{\infty}+\frac{1}{p}\int_0^{+\infty} te^{-pt}dt=-\frac{e^{-pt}}{p^2}\Bigg|_0^{\infty}$$

Khi t → 0 thì e^{-pt} → 1. Khi t → +∞, e^{-pt} → 0. Vậy:

$$F(p)=\frac{1}{p^2}$$

Ví dụ 4: Tìm ảnh của f(t) = t^n.

$$F(p)=\int_0^{+\infty} t^n e^{-pt}dt=-\frac{1}{p}\int_0^{+\infty} t^n de^{-pt}=-\frac{t^n e^{-pt}}{p}\Bigg|_0^{\infty}+\frac{1}{p}\int_0^{+\infty} t^{n-1}e^{-pt}dt$$

Sau n lần tích phân phân đoạn ta có:

$$F(p)=\frac{n!}{p^{n+1}}$$

§5. CÁC TÍNH CHẤT CỦA PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE

1. Tính chất tuyến tính của toán tử: Giả sử f(t) và g(t) là hai hàm gốc. A và B là hai hằng số thực hay phức. Nếu f(t) ≑ F(p), g(t) ≑ G(p) thì:

$$Af(t) + B\,g(t) \doteqdot F(p) + G(p) \tag{10}$$

Thật vậy theo định nghĩa:

$$L\{Af(t)+Bg(t)\}=\int_0^{+\infty} e^{-pt}[Af(t)+Bg(t)]dt$$

Do tính chất tuyến tính của tích phân ta có:

$$\int_0^{+\infty} e^{-pt}[Af(t)+Bg(t)]dt=A\int_0^{+\infty} e^{-pt}f(t)dt+B\int_0^{+\infty} e^{-pt}g(t)dt$$

Nhưng theo giả thiết :

$$\int_0^{+\infty} e^{-pt}f(t)dt=F(p)$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-pt}g(t)dt=G(p)$$

Thay vào trên ta có:

$$L\{Af(t)+Bg(t)\}=AF(p)+BG(p)$$

Ví dụ 1:Tìm ảnh của f(t) = sinat và cosat

Theo công thức Euler ta có:

$$\sin at=\frac{e^{jat}-e^{-jat}}{2j}=\frac{1}{2j}e^{jat}-\frac{1}{2j}e^{-jat}$$

Nhưng theo (9):

$$e^{jat} \doteqdot \frac{1}{p-ja} \;;\; e^{-jat} \leftrightarrow \frac{1}{p+ja}$$

Sử dụng tính chất tuyến tính ta được:

$$\sin at \leftrightarrow \frac{1}{2j}\left[\frac{1}{p-ja}-\frac{1}{p+ja}\right]=\frac{a}{p^2+a^2} \qquad (11)$$

$$L\{\sin at\}=\frac{1}{2j}\left[\frac{1}{p-ja}-\frac{1}{p+ja}\right]=\frac{a}{p^2+a^2}$$

Tương tự $\cos at=\frac{e^{jat}+e^{-jat}}{2}=\frac{1}{2}e^{jat}+\frac{1}{2}e^{-jat}$

$$\cos at \leftrightarrow \frac{1}{2}\left[\frac{1}{p-ja}+\frac{1}{p+ja}\right]=\frac{p}{p^2+a^2} \qquad (12)$$

Ví dụ 2: Tìm ảnh của ch(at) và sh(at)

$$\mathrm{chat}=\frac{e^{at}+e^{-at}}{2}=\frac{1}{2}e^{at}+\frac{1}{2}e^{-at}$$

$$\mathrm{shat}=\frac{e^{at}e^{-at}}{2}=\frac{1}{2}e^{at}-\frac{1}{2}e^{-at}$$

$$\mathrm{chat} \leftrightarrow \frac{1}{2}\left[\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p+a}\right]=\frac{p}{p^2-a^2} \qquad (13)$$

$$\mathrm{shat} \leftrightarrow \frac{1}{2}\left[\frac{1}{p-a}-\frac{1}{p+a}\right]=\frac{a}{p^2-a^2} \qquad (14)$$

Ví dụ 3: Tìm ảnh của $\sin(\omega t+\varphi)$ và $\cos(\omega t+\varphi)$

Ta có $\sin(\omega t+\varphi) = \sin\omega t\cos\varphi + \sin\varphi\cos\omega t$. Do tính chất tuyến tính:

$$\sin(\omega t+\varphi) \leftrightarrow \sin\varphi\frac{p}{p^2+\omega^2}+\cos\varphi\frac{\omega}{p^2+\omega^2}=\frac{p\sin\varphi+\omega\cos\varphi}{p^2+\omega^2}$$

Tương tự: $\cos(\omega t+\varphi) \leftrightarrow s=\frac{p\cos\varphi-\omega\sin\varphi}{p^2+\omega^2}$

Ví dụ 4: Tìm ảnh của $\sin^3 t$

Ta có: $\sin^3 t=\frac{1}{4}(3\sin t-\sin 3t)$

Vậy: $\sin^3 t \leftrightarrow \frac{1}{4}\left(\frac{3}{p^2+1}-\frac{3}{p^2+9}\right)=\frac{3}{4}\left(\frac{1}{p^2+1}-\frac{1}{p^2+9}\right)$

2. Tính chất đẳng cấp: Nếu L{ f(t) } = F(p) thì L{ af(t) } = aF(p)

3. Tính chất đồng dạng: Giả sử λ là một hằng số dương bất kì. Nếu $f(t) \leftrightarrow F(p)$ thì

$$f(\lambda t) \leftrightarrow \frac{1}{\lambda}F\left(\frac{p}{\lambda}\right) \qquad (15)$$

Chứng minh: Theo định nghĩa ta có:

$$f(\lambda t) \leftrightarrow \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(\lambda t)dt$$

Trong tích phân vế phải, đổi biến $\lambda t = t_1$, $dt = \frac{1}{\lambda}dt_1$ ta được:

$$\int_0^{+\infty} e^{-pt} f(\lambda t)dt = \frac{1}{\lambda}\int_0^{+\infty} e^{-p\frac{t_1}{\lambda}} f(t_1)dt_1 = \frac{1}{\lambda}F(p)$$

4. Tính chất chuyển dịch ảnh: Cho a là một số phức bất kì. Nếu L{ f(t) } = F(p) thì

$$e^{at}f(t) \leftrightarrow F(p - a) \qquad (16)$$

Chứng minh: Theo định nghĩa ta có:

$$e^{at}f(t) \leftrightarrow \int_0^{+\infty} e^{at}e^{-pt} f(t)dt = \int_0^{+\infty} e^{-(p-a)t} f(t)dt = F(p-a)$$

Ví dụ 1: Tìm ảnh của $e^{at}\sin\omega t$ và $e^{at}\cos\omega t$

Ta có $\sin\omega t \leftrightarrow \frac{\omega}{p^2+\omega^2}$ và $\cos\omega t \leftrightarrow \frac{p}{p^2+\omega^2}$

Nên: $e^{at}\sin\omega t \leftrightarrow \frac{\omega}{(p-a)^2+\omega^2}$

$$e^{at}\cos\omega t \leftrightarrow \frac{p-a}{(p-a)^2+\omega^2}$$

Ví dụ 2: Giả sử $f(t) \leftrightarrow F(p)$. Tìm ảnh của $f(t)\sin\omega t$

Ta có: $f(t)\sin\omega t = f(t)\frac{e^{j\omega t} - e^{j\omega t}}{2j}$

Do công thức dịch chuyển ảnh:

$$f(t)e^{j\omega t} \leftrightarrow F(p - j\omega)$$

$$f(t)e^{-j\omega t} \leftrightarrow F(p + j\omega)$$

Theo tính chất tuyến tính ta có:

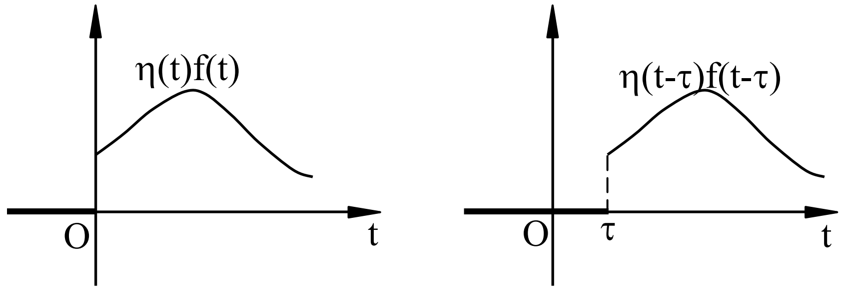
$$f(t)\sin\omega t \leftrightarrow \frac{1}{2j}\,[\, F(p - j\omega) + F(p + j\omega)\,]$$

5. Tính chất trễ:

a. Trường hợp τ là một hằng số dương: Nếu $f(t) \leftrightarrow F(p)$ thì:

$$\eta(t - \tau)f(t - \tau) \leftrightarrow e^{-p\tau}F(p) \qquad (17)$$

Trước hết ta thấy rằng nếu $\eta(t)f(t)$ có đồ thị là đường cong C thì đồ thị của $\eta(t-\tau)f(t-\tau)$ có được bằng cách dịch chuyển đường cong C sang một đoạn τ theo trục hoành. Nếu t và τ là các đại lượng chỉ thời gian thì quá trình biểu diễn bởi hàm $\eta(t-\tau)f(t - \tau)$ xảy ra giống quá trình biểu diễn bởi hàm $\eta(t)f(t)$ nhưng chậm hơn một khoảng thời gian τ



Chứng minh: Theo định nghĩa ta có:

$$\eta(t-\tau)f(t-\tau) \leftrightarrow \int_0^{+\infty} e^{-pt}\eta(t-\tau)f(t-\tau)dt$$

Vì : $\eta(t-\tau) = \begin{cases} 0 & \text{khi } t < \tau \\ 1 & \text{khi } t > \tau \end{cases}$

nên: $\eta(t-\tau)f(t-\tau) \leftrightarrow \int_0^{+\infty} e^{-pt}f(t-\tau)dt$

Trong tích phân bên vế phải, đổi biến $t_1 = t - \tau$ ta được:

$$\int_0^{+\infty} e^{-pt}f(t-\tau)dt = \int_0^{+\infty} e^{-p(t_1+\tau)}f(t_1)dt_1 = e^{-p\tau}\int_0^{+\infty} e^{-pt_1}f(t_1)dt_1 = e^{-p\tau}F(p)$$

Ví dụ: ta biết hàm $f(t) = e^{2t}$ có ảnh là $F(p) = \frac{1}{p-2}$. Tìm ảnh của hàm $f(t - 1) = e^{2(t - 1)}$

Theo (17) ta có:

$$f(t-1) = e^{2(t-1)} \leftrightarrow \frac{e^{-p}}{p-2}$$

b. Biểu diễn một hàm xung qua hàm η(t):Ta gọi một hàm xung là hàm có dạng:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{khi } t < a \\ \varphi(t) & \text{khi } a < t < b \\ 0 & \text{khi } t > b \end{cases}$$

Ta có thể viết:

$$f(t) = \eta(t - a)\varphi(t) - \eta(t - b)\varphi(t) \qquad (18)$$

Ví dụ 1: Tìm ảnh của hàm $\eta(t -\tau)$

Vì $\eta(t) \leftrightarrow \frac{1}{p}$ nên theo tính chất trễ thì:

$$\eta(t-\tau) \leftrightarrow e^{-p\tau}\frac{1}{p} \qquad (19)$$

Ví dụ 2: Tìm ảnh của hàm xung đơn vị

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{khi } t < a \\ 1 & \text{khi } a < t < b \\ 0 & \text{khi } t > b \end{cases}$$

Theo (18) thì: $f(t) = \eta(t - a) - \eta(t - b)$

Theo (19) thì:

$$f(t) \leftrightarrow e^{-pa}\frac{1}{p} - e^{-pb}\frac{1}{p} = \frac{1}{p}\left(e^{-pa} - e^{-pb}\right) \tag{20}$$

Ví dụ 3: Tìm ảnh của hàm:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{khi } t < 0 \\ \sin t & \text{khi } 0 < t < \pi \\ 0 & \text{khi } t > \pi \end{cases}$$

Theo (18) ta có thể viết:

$$f(t) = \eta(t)\sin t - \eta(t - \pi)\sin t$$

Vì $\sin t = \sin(\pi - t) = -\sin(t - \pi)$ nên:

$$f(t) = \eta(t)\sin t + \eta(t - \pi)\sin(\pi - t)$$

Theo tính chất trễ ta có:

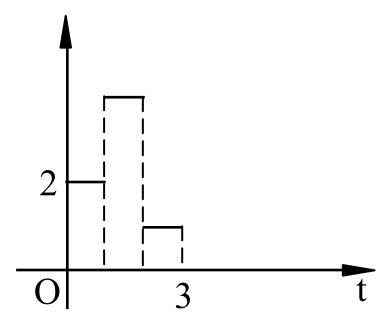
$$\eta(t-\pi)\sin(t-\pi) \leftrightarrow e^{-p\pi}\frac{1}{p^2+1}$$

Kết quả

$$f(t) \leftrightarrow \frac{1}{p^2+1} + e^{-p\pi}\frac{1}{p^2+1} = \frac{1}{p^2+1}\left(1 + e^{-p\pi}\right)$$

Ví dụ 4: Tìm ảnh của hàm bậc thang sau:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{khi } t < 0 \\ 2 & \text{khi } 0 < t < 1 \\ 4 & \text{khi } 1 < t < 2 \\ 1 & \text{khi } 2 < t < 3 \\ 0 & \text{khi } t > 3 \end{cases}$$



Đặt:

$$h_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{khi } t < 0 \\ 1 & \text{khi } 0 < t < 1 \\ 0 & \text{khi } t > 1 \end{cases}$$

$$h_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{khi } t < 1 \\ 1 & \text{khi } 1 < t < 2 \\ 0 & \text{khi } t > 2 \end{cases}$$

$$h_3(t) = \begin{cases} 0 & \text{khi } t < 2 \\ 1 & \text{khi } 2 < t < 3 \\ 0 & \text{khi } t > 3 \end{cases}$$

Như vậy:

$$f(t) = 2h_1(t) + 4h_2(t) + h_3(t)$$

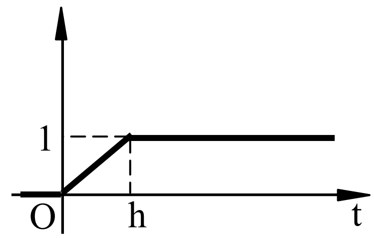
Vì theo (20):

$$h_1(t) \leftrightarrow \frac{1}{p}\left(1 - e^{-p}\right);\ h_2(t) \leftrightarrow \frac{1}{p}\left(e^{-p} - e^{-2p}\right);\ h_3(t) \leftrightarrow \frac{1}{p}\left(e^{-2p} - e^{-3p}\right)$$

nên: $f(t) \leftrightarrow \frac{1}{p}\left(2 - 2e^{-p} + 4e^{-p} - 4e^{-2p} + e^{-2p} - e^{-3p}\right) = \frac{1}{p}\left(2 + 2e^{-p} - 3e^{-2p} - e^{-3p}\right)$

Ví dụ 5: Tìm ảnh của hàm f(t) như hình vẽ

Hàm f(t) được coi là tổng của hai hàm xung $h_1(t)$ và $h_2(t)$:



$$h_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{khi } t < 0 \\ \dfrac{t}{h} & \text{khi } 0 < t < h \\ 0 & \text{khi } t > h \end{cases}$$

$$h_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{khi } t < h \\ 1 & \text{khi } t > h \end{cases}$$

Theo (18) ta có:

$$h_1(t) = \eta(t)\frac{t}{h} - \eta(t-h)\frac{t}{h}$$
$$h_2(t) = \eta(t-h)$$

Vậy:
$$f(t) = \eta(t).\frac{t}{h} - \eta(t-h).\frac{t}{h} + \eta(t-h) = \eta(t)\frac{t}{h} - \eta(t-h).\left(\frac{t-h}{h}\right)$$
$$= \frac{1}{h}\left[\eta(t).t - \eta(t-h).(t-h)\right]$$

Theo tính chất trễ ta có:

$$f(t) = \frac{1}{h}\left[\frac{1}{p^2} - e^{-hp}\frac{1}{p^2}\right] = \frac{1}{hp^2}\left(1 - e^{-hp}\right)$$

§6. ẢNH CỦA MỘT HÀM TUẦN HOÀN

Nếu f(t) là một hàm gốc, tuần hoàn với chu kì T, nghĩa là f(t) = f(t + T) ∀t > 0 thì ảnh của nó được tính theo công thức:

$$F(p) = \frac{\Phi(p)}{1 - e^{-pT}} \tag{21}$$

Trong đó: $\Phi(p) = \int_0^T e^{-pt} f(t)dt$ là ảnh của hàm:

$$\varphi(t) = \begin{cases} 0 & \text{khi } t < 2 \\ f(t) & \text{khi } 0 < t < T \\ 0 & \text{khi } t > T \end{cases}$$

Chứng minh: Theo định nghĩa ta có:

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)dt = \int_0^T e^{-pt} f(t)dt + \int_T^{+\infty} e^{-pt} f(t)dt$$

Trong tích phân thứ ở vế phải, đổi biến t = u + T ta có:

$$\int_T^{+\infty} e^{-pt} f(t)dt = \int_0^{+\infty} e^{-p(u+T)} f(u+T)du = e^{-pT}\int_0^{+\infty} e^{-pu} f(u+T)du$$

Do tính chất tuần hoàn f(u + T) = f(u), nên:

$$\int_T^{+\infty} e^{-pt} f(t)dt = e^{-pT}\int_0^{+\infty} e^{-pu} f(u)du = e^{-pT}.F(p)$$

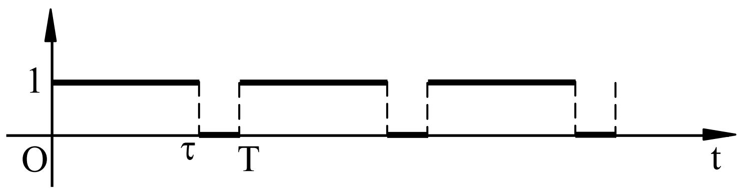
Thay vào trên ta được:

$$F(p) = \Phi(p) + e^{-pT}F(p)$$

Từ đó rút ra:

$$F(p) = \frac{\Phi(p)}{1 - e^{-pT}}$$

Ví dụ 1: Có một hệ thống xung như hình vẽ. Tìm ảnh của hàm đó:

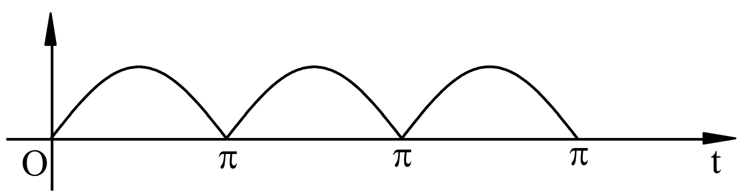


Ta có:

$$\Phi(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)dt = \int_0^{\tau} e^{-pt}dt = \left.\frac{e^{-pt}}{-p}\right|_0^{\tau} = \frac{1}{p}\left(1 - e^{-p\tau}\right)$$

Vậy: $F(p) = \dfrac{1}{p}\dfrac{1 - e^{-pt}}{1 - e^{-pT}}$

Ví dụ 2: Cho một hệ thống các xung hình sin như hình vẽ. Tìm ảnh



Ta thấy rằng hàm f(t) = | sint | tuần hoàn với chu kì T = π. Trong ví dụ 3 ở §5 ta đã biết:

$$\Phi(p) = \frac{1}{p^2 + 1}\left(1 - e^{-p\pi}\right)$$

Vậy: $F(p) = \dfrac{1}{p^2 + 1}\left(\dfrac{1 + e^{-p\pi}}{1 - e^{-p\pi}}\right) = \dfrac{1}{p^2 + 1}\coth\dfrac{p\pi}{2}$

§7. ĐẠO HÀM GỐC

1. Đạo hàm cấp 1: Giả sử f(t) là hàm gốc, có đạo hàm f'(t) cũng là hàm gốc. Nếu f(t)↔F(p) thì:

$$f'(t) \leftrightarrow pF(p) - f(0) \qquad (22)$$

Chứng minh: Theo định nghĩa:

$$f'(t) \leftrightarrow \int_0^{+\infty} e^{-pt} f'(t)dt$$

Trong tích phân bên vế phải, dùng phương pháp tích phân từng phần, đặt u = e^{-pt} ta có du = -p.e^{-pt}, dv = f'(t)dt nên v= f(t). Thay vào ta có:

$$\int_0^{+\infty} e^{-pt} f'(t)dt = f(t)e^{-pt}\Big|_o^{+\infty} + p\int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)dt = f(t)e^{-pt}\Big|_o^{+\infty} + pF(p)$$

Do $| f(t) | \le M e^{s_o t}$ nên nếu Rep = s > s_o thì $| f(t)e^{-pt} | \le M e^{(s_o - s)t} \to 0$ khi $t\to +\infty$.Vậy:

$$f(t)e^{-pt}\Big|_o^{+\infty} = -f(0)$$

Thay vào trên ta có:

$$\int_0^{+\infty} e^{-pt} f'(t)dt = pF(p) - f(0)$$

2. Đạo hàm cấp cao: Nếu f(t) có đạo hàm tới cấp n và các đạo hàm này đều là hàm gốc thì bằng cách áp dụng liên tiếp (22) ta có:

$$f^{(n)}(t) = p^nF(p) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0) \qquad (23)$$

3. Hệ quả: Nếu f(t) là hàm gốc và pF(p) giải tích tại ∞ thì:

$$\lim_{p\to\infty} pF(p) = f(0) \qquad (24)$$

§8. TÍCH PHÂN GỐC

Nếu $f(t) \leftrightarrow F(p)$ thì $\int_0^t f(t)dt$ là một hàm gốc và

$$\int_0^t f(t)dt \leftrightarrow \frac{F(p)}{p} \qquad (25)$$

Chứng minh: đặt $\varphi(t) = \int_0^t f(t)dt$. Rõ ràng φ(0) = 0.. Hàm φ(t) có đạo hàm là hàm f(t) liên tục từng khúc. Bởi vì:

$$|\varphi(t)| \le \int_0^t |f(t)|dt \le \int_0^t Me^{s_o t}dt = \frac{M}{s_o}e^{s_o t}\Big|_0^t \le M_1 e^{s_o t}$$

nên φ(t) là một hàm gốc cùng chỉ số tăng với f(t). Gọi Φ(p) là ảnh của nó. Ta phải tìm Φ(p). Vì φ'(t) = f(t) nên theo công thức đạo hàm gốc ta có:

$f(t) \leftrightarrow p\Phi(p) - \varphi(0)$

Vậy $F(p) = p\Phi(p)$ hay

$$\Phi(p) = \frac{F(p)}{p}$$

§9. ĐẠO HÀM ẢNH

Nếu $f(t) \leftrightarrow F(p)$ thì:

$F'(p) \leftrightarrow -tf(t)$ (26)

Chứng minh: Theo (6) ta có:

$$F'(p) = \int_0^{+\infty} - tf(t)e^{-pt}dt$$

Mặt khác, theo định nghĩa thì:

$$-tf(t) \leftrightarrow \int_0^{+\infty} - tf(t)e^{-pt}dt$$

Vậy: $F'(p) \leftrightarrow -tf(t)$

Sử dụng công thức này liên tiếp ta có:

$t^n f(t) \leftrightarrow (-1)^n F^{(n)}(p)$ (27)

Một cách tổng quát ta có:

$$t^n \leftrightarrow \frac{n!}{p^{n+1}} \qquad (28)$$

§10. TÍCH PHÂN ẢNH

Nếu tích phân $\int_p^{\infty} F(p)dp$ hội tụ thì nó là ảnh của hàm $\frac{f(t)}{t}$, nghĩa là:

$$\frac{f(t)}{t} \leftrightarrow \int_p^{\infty} F(p)dp \qquad (29)$$

Chứng minh: Ta có:

$$\int_p^{\infty} F(p)dp = \int_p^{\infty} dp \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt}dt \qquad (30)$$

Lấy s_1 là một số lớn hơn s_o. Giả sử đường lấy tích phân (p, ∞) nằm hoàn toàn trong nửa mặt phẳng $\mathrm{Re}p \geq 0$. Khi đó ta có:

$$\left| \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt}dt \right| \leq M \int_0^{\infty} e^{-(s_1 - s_o)t}dt$$

Dễ dàng thấy răng tích phân vế phải hội tụ nên tích phân $\int_0^{\infty} f(t)e^{-pt}dt$ hội tụ đều đối với p. Vậy trong (3) ta có thể đổi thứ tự lấy tích phân:

$$\int_p^{\infty} F(p)dp = \int_0^{\infty} f(t)dt \int_p^{\infty} e^{-pt}dp = \int_0^{\infty} \frac{f(t)}{t} e^{-pt}dt$$

Hay: $\frac{f(t)}{t} \leftrightarrow \int_p^{\infty} F(p)dp$

Ví dụ 1: Tìm ảnh của hàm $\frac{e^{bt} - e^{at}}{t}$

Vì $e^{bt} - e^{at} \leftrightarrow \frac{1}{p-b} - \frac{1}{p-a}$ nên theo (29) ta có:

$$\frac{e^{bt}-e^{at}}{t} \leftrightarrow \int_p^{+\infty}\left(\frac{1}{p-b}-\frac{1}{p-a}\right)dp = \ln\frac{p-a}{p-b}$$

Ví dụ 2: Tìm ảnh của hàm $\int_0^t \frac{\sin t}{t}$

Ta đã biết $\sin t \leftrightarrow \frac{1}{p^2+1}$ nên theo (29) ta có:

$$\frac{\sin t}{t} \leftrightarrow \int_p^{\infty}\frac{dp}{p^2+1} = \frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}p = \mathrm{arcotg}p$$

Dùng công thức tích phân gốc ta có:

$$\int_0^t \frac{\sin t}{t} \leftrightarrow \frac{1}{p}\mathrm{arcotg}p$$

§11. ẢNH CỦA TÍCH CHẬP

1. Định nghĩa tích chập của hai hàm số: Cho hai hàm số f(t) và g(t). Tích phân $\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$ là một hàm số của t và được gọi là tích chập của hai hàm số f(t) và g(t). Nó được kí hiệu là $f * g$

$$f * g = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau \tag{31}$$

2. Tính chất:

a. Tính chất 1: Tích chập có tính chất giao hoán f * g = g * f

Thật vậy dùng phép đổi biến $\tau_1 = t - \tau$, $d\tau_1 = -d\tau$, ta có:

$$f * g = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau = -\int_t^0 f(t-\tau_1)g(t)d\tau_1 = \int_0^t g(\tau_1)f(t-\tau_1)d\tau_1 = g * f$$

b. Tính chất 2: Nếu f(t) và g(t) là những hàm gốc thì f * g cũng là hàm gốc

Ví dụ 1: Tính tích chập $e^t * t = \int_0^t e^{\tau}(t-\tau)d\tau$

Tính tích phân bên vế phải bằng phương pháp tích phân từng phân ta có:

$$e^t * t = \int_0^t e^{\tau}(t-\tau)d\tau = t(e^t-1) - (te^t - e^t + 1) = e^t - t - 1$$

$$t * e^{at} = \int_0^t \tau e^{a(t-\tau)}d\tau = e^{at}\int_0^t \tau e^{-a\tau}d\tau = -\frac{t}{a} + \frac{e^{at}}{a^2} - \frac{1}{a^2}$$

Ví dụ 2:

$$\sin t * t = \int_0^t (t-\tau)\sin\tau d\tau = -\sin t + t$$

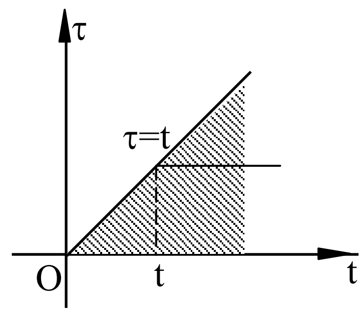
$$\cos t * t = \int_0^t (t-\tau)\cos\tau d\tau = -\cos t + 1$$

3. Ảnh của tích chập: Nếu $f(t) \leftrightarrow F(p)$ và $g(t) \leftrightarrow G(p)$ thì ảnh của tích chập bằng tích các ảnh:

$$f * g \leftrightarrow F(p).G(p) \qquad (32)$$

Chứng minh: Theo định nghĩa thì:

$$f * g = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau \leftrightarrow \int_0^{+\infty} e^{-pt}dt\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$



Xét tích phân bên vế phải. Vì ứng với t cố định thì tích phân theo τ lấy từ 0 đến t, sau đó cho t biến thiên từ 0 đến $+\infty$ nên vế phải tích phân lặp lấy trong miền quạt G: $0 < \arg(t + j\tau) < \frac{\pi}{4}$. Vì khi Rep > s + 1 thì do tính chất của tích chập, tích phân lặp này hội tụ tuyệt đối nên ta có thể đổi thứ tự tích phân:

$$\int_0^{+\infty} e^{-pt}dt\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau = \int_0^{+\infty} f(\tau)d\tau\int_t^{\infty} e^{-pt}g(t-\tau)d\tau$$

Đổi biến $t_1 = t - \tau$ thì:

$$\int_\tau^{\infty} e^{-pt}g(t-\tau)d\tau = e^{-p\tau}\int_0^{\infty} e^{-pt_1}g(t_1)dt_1$$

Vậy: $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-pt}dt\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau = \int_0^{+\infty} e^{-p\tau}f(\tau)d\tau\int_0^{\infty} e^{-pt_1}g(t_1)dt_1 = F(p).G(p)$

nghĩa là: $\quad f * g = F(p).G(p)$

Ví dụ: $t*\sin t = t - \sin t \leftrightarrow \dfrac{1}{p^2}.\dfrac{1}{p^2+1}$

4. Cặp công thức Duhamel: Nếu $f(t) \leftrightarrow F(p)$ và $g(t) \leftrightarrow G(p)$ thì:

$$p.F(p).G(p) \leftrightarrow f(0).g(t) + f' * g \qquad (33)$$

$$p.F(p).G(p) \leftrightarrow g(0).f(t) + f * g' \qquad (34)$$

Chứng minh: Ta chỉ cần chứng minh công thức (33) và do tính chất đối xứng ta suy ra công thức (34). Ta có:

$$pF(p).G(p) = f(0).G(p) + [\,pF(p) - f(0)\,].G(p)$$

Theo công thức đạo hàm gốc:

$$pF(p) - f(0) \leftrightarrow f'(t)$$

Theo công thức nhân ảnh:

$$[\,pF(p) - f(0)\,].G(p) \leftrightarrow f'(t)$$

Vậy: $\quad p.F(p).G(p) \leftrightarrow f(0).g(t) + f' * g$

§12. ẢNH CỦA TÍCH HAI GỐC

Giả sử f(t) và g(t) là hai hàm gốc có chỉ số tăng s_1 và s_2. Khi đó tích f(t).g(t) cũng là một hàm gốc tính theo công thức:

$$f(t).g(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi j}\int_{a-j\infty}^{a+j\infty} F(\zeta).G(p-\zeta)d\zeta \qquad (35)$$

§13. QUAN HỆ GIỮA GỐC VÀ ẢNH

Định lý:Nếu f(t) là một hàm gốc với chỉ số tăng s_o và F(p) là ảnh của nó thì tại mọi điểm liên tục của hàm f(t) ta có:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{a-j\infty}^{a+j\infty} e^{pt}F(p)dp \qquad (36)$$

trong đó a là một số thực bất kì lớn hơn s_o. Tích phân bên vế phải được hiểu theo nghĩa giá trị chính.

Công thức (36) được gọi là công thức ngược của Mellin. Ta thừa nhận mà không chứng minh định lí này.

§14. ĐIỀU KIỆN ĐỦ ĐỂ F(p) LÀ MỘT HÀM ẢNH

Định lí: Giả sử F(p) là một hàm biến phức thoả mãn các điều kiện sau:

- F(p) giải tích trong nửa mặt phẳng Rep > s_o
- F(p) → 0 khi | p | → +∞ trong nửa mặt phẳng Rep > a > s_o đều đối với argp
- tích phân $\int_{a-j\infty}^{a+j\infty} e^{pt}F(p)dp$ hội tụ tuyệt đối

Khi đó F(p) là ảnh của hàm gốc cho bởi công thức:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{a-j\infty}^{a+j\infty} e^{pt}F(p)dp \qquad a > s_o \;\; t > 0 \qquad (37)$$

§15. TÌM HÀM GỐC CỦA MỘT PHÂN THỨC THỰC SỰ

Một phân thức hữu tỉ được gọi là thực sự nếu bậc của mẫu số lớn hơn bậc của tử số của nó.

Cho một phân thức thực sự $F(p) = \dfrac{A(p)}{B(p)}$, trong đó tử số và mẫu số là các đa thức không có nghiệm chung. Nếu gọi a_k (k = 1, 2,.., n) là các điểm cực của F(p) thì F(p) là ảnh của hàm η(t).f(t) trong đó:

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}\left[F(p)e^{pt}, a_k\right] \qquad (40)$$

☛ Nếu a_k là cực điểm cấp m_k thì theo công thức tính thặng dư:

$$\text{Res}[\,F(p)e^{pt},\,a_k\,] = \frac{1}{(m_k-1)!}\lim_{p\to a_k}\left[(p-a_k)^{m_k}F(p)e^{pt}\right]^{(m_k-1)}$$

nên công thức (40) trở thành:

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(m_k-1)!}\lim_{p\to a_k}\left[(p-a_k)^{m_k}F(p)e^{pt}\right]^{(m_k-1)} \qquad (42)$$

☛ Đặc biệt, nếu các cực điểm đều đơn, tức $m_k = 1$, thì cách tính thặng dư đơn giản hơn:

$$\text{Res}[\,F(p)e^{pt},\,a_k\,] = \frac{A(a_k)}{B'(a_k)}e^{a_k t}$$

và ta có:

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n}\frac{A(a_k)}{B'(a_k)}e^{a_k t} \qquad (43)$$

☛ Đặc biệt hơn nữa, nếu số 0 cũng là một cực điểm đơn thì khi đó mẫu số B(p) có thừa số chung là p: $B(p) = p.B_1(p)$ với $B_1(0) \neq 0$, $B_1(a_k) = 0$ khi k = 2, 3,..,n. Trong công thức (43) chọn $a_1 = 0$ ta được:

$$f(t) = \frac{A(0)}{B'(0)} + \sum_{k=2}^{n}\frac{A(a_k)}{B'(a_k)}e^{a_k t}$$

Vì $B'(p) = B_1(p) + pB_1'(p)$ nên $B'(0) = B_1(0)$, $B'(a_k) = a_kB_1'(a_k)$ nên:

$$f(t) = \frac{A(0)}{B'(0)} + \sum_{k=2}^{n}\frac{A(a_k)}{B'(a_k)}e^{a_k t} \leftrightarrow \frac{A(p)}{pB_1(p)} \qquad (44)$$

☛ Nếu A(p) và B(p) là các đa thức có các hệ số đều là số thực và nếu các cực điểm đều đơn gồm:

* những số thực $b_1, b_2,..., b_r$
* những số phức liên hợp $a_1, a_2, ..., a_s, \bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_s$

khi đó r + 2s = n là số cực điểm; $a_k = \alpha_k + j\beta_k$, $\bar{a}_k = \alpha_k - j\beta_k$ và đặt $\frac{A(a_k)}{B'(a_k)} = M_k + jN_k$ thì (43) còn có thể viết dưới dạng sau:

$$f(t) = \sum_{k=1}^{r}\frac{A(b_k)}{B'(b_k)}e^{b_k t} + \sum_{k=1}^{s}2e^{\alpha_k t}\left[M_k\cos\beta_k t - N_k\sin\beta_k t\right] \qquad (46)$$

Ví dụ 1: Tìm gốc của hàm $F(p) = \frac{1}{p(p+a)(p+b)}$

Trong ví dụ này A(p) = 1; $B(p) = p.B_1$; $B_1 = (p + a)(p + b)$. Các cực điểm của F(p) là:

$a_1 = 0$; $a_2 = -a$; $a_3 = -b$

Áp dụng công thức (44) ta được:

$$f(t) = \frac{1}{ab} + \frac{e^{-at}}{a(a-b)} + \frac{e^{-bt}}{b(b-a)}$$

Ví dụ 2: Tìm gốc của hàm: $F(p) = \frac{3p^2+3p+2}{(p-2)(p^2+4p+8)}$

Trong ví dụ này $A(p) = 3p^2 + 3p + 2$, $B(p) = (p - 2)(p^2 + 4p + 8)$, $B'(p) = 3p^2 + 4p$.
Các cực điểm của F(p) là:

$b_1 = 2$, $a_1 = -2 + 2j$ $\bar{a}_1 = -2 - 2j$ nên $\alpha_1 = -2$, $\beta_1 = 2$

Theo (46) ta được:

$$f(t) = \frac{A(b_1)}{B'(b_1)}e^{b_1 t} + 2e^{\alpha_1 t}\left[\operatorname{Re}\frac{A(a_1)}{B'(a_1)}\cos\beta_1 t - \operatorname{Im}\frac{A(a_1)}{B'(a_1)}\sin\beta_1 t\right]$$

Nhưng:

$$\frac{A(2)}{B'(2)} = \frac{20}{20} = 1$$

$$\frac{A(-2+2j)}{B'(-2+2j)} = \frac{-18j-4}{-2(4+8j)} = 1 + \frac{j}{4}$$

Vậy:

$$f(t) = e^{2t} + 2e^{-2t}\left(\cos 2t - \frac{1}{4}\sin 2t\right)$$

Ví dụ 3: Tìm gốc của hàm $F(p) = \dfrac{p+2}{(p-1)^2 p^3}$

Ta có $A(p) = p + 2$, $B(p) = p^3(p - 1)^2$. Vậy F(p) có hai cực điểm là:

$a_1 = 1$ (cấp 2) và $a_2 = 0$ (cấp 3)

Để tính f(t) ta dùng công thức (42):

$$\frac{1}{2}\lim_{p\to 0}\left[p^3\frac{p+2}{p^3(p-1)^2}e^{pt}\right]'' = \frac{1}{2}\lim_{p\to 0}\left[\frac{p+2}{(p-1)^2}e^{pt}\right]'' = \frac{1}{2}\lim_{p\to 0}\left[\frac{-p-5}{(p-1)^3}e^{pt} + \frac{p+2}{(p-1)^3}te^{pt}\right]' =$$

$$\frac{1}{2}\lim_{p\to 0}\left[\frac{2p+16}{(p-1)^4}e^{pt} + \frac{-p-5}{(p-1)^3}te^{pt} + \frac{p+2}{(p-1)^2}t^2e^{pt} + \frac{-p-5}{(p-1)^3}te^{pt}\right] =$$

$$\frac{1}{2}\left(16 + 5t + 2t^2 + 5t\right) = t^2 + 5t + 8$$

và:

$$\lim_{p\to 1}\left[(p-1)^2\frac{p+2}{(p-1)^2p^3}e^{pt}\right] = \lim_{p\to 1}\left(\frac{p+2}{p^3}e^{pt}\right) = \lim_{p\to 1}\left(\frac{-2p-6}{p^4}e^{pt} + te^{pt}\frac{p+2}{p^3}\right) = 3te^t - 8e^t$$

Thay vào (42) ta được:

$$f(t) = \frac{1}{2}\lim_{p\to 0}\left[\frac{p+2}{(p-1)^2}e^{pt}\right]'' + \lim_{p\to 1}\left[\frac{p+2}{p^3}e^{pt}\right] = t^2 + 5t + 8 + (3t-8)e^t$$

Ví dụ 4: Tìm gốc của hàm $F(p) = \dfrac{e^{-p}}{(p^3+1)p}$

Trước hết ta tìm gốc g(t) của hàm $G(p) = \dfrac{1}{(p^3+1)p}$. Đối với hàm này $A(p) = 1$, $B(p) = p(p^3 + 1)$. Vậy G(p) có các cực điểm thực là:

$b_1 = 0, b_2 = -1$

và cặp cực điểm phức liên hợp:

$$a_1 = \frac{1+j\sqrt{3}}{2} \text{ và } \overline{a}_1 = \frac{1-j\sqrt{3}}{2}.$$

Ta có: $B'(p) = 4p^3 + 1$

nên: $B'(0) = 1$

$B'(-1) = -3$

$$B'\left(\frac{1+j\sqrt{3}}{2}\right) = 4\left(\frac{1+j\sqrt{3}}{2}\right)^3 + 1 = 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)^3 + 1 = 4(\cos 3\pi + j\sin 3\pi) + 1 = -3$$

$$M_1 = \mathrm{Re}\frac{1}{B'(a_1)} = -\frac{1}{3}$$

$$N_1 = \mathrm{Im}\frac{1}{B'(a_1)} = 0$$

Thay vào (46) ta được:

$$g(t) = \frac{1}{B'(0)}e^{ot} + \frac{1}{B'(-1)}e^{-t} + 2e^{\frac{t}{2}}\left[M_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t - N_1\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right]$$

$$= 1 - \frac{1}{3}e^{-t} - \frac{2}{3}e^{\frac{t}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t$$

Để tính f(t) ta dùng tính chất trễ theo (17):

$$\eta(t-1)g(t-1) \leftrightarrow e^{-p}G(p) = F(p)$$

tức là:

$$f(t) = \eta(t-1)g(t-1) = \eta(t-1)\left\{1 - \frac{1}{3}e^{-t+1} - \frac{2}{3}e^{\frac{t-1}{2}}\cos\left[\frac{\sqrt{3}}{2}(t-1)\right]\right\}$$

Ví dụ 5: Tìm gốc của hàm $F(p) = \dfrac{p+1}{p^2+2p}$

Phương trình $p^2 + 2p$ có hai nghiệm đơn là $a_1 = 0$ và $a_2 = -2$. Áp dụng công thức thặng dư tại cực điểm đơn ta có:

$$\mathrm{Res}[(p)e^{pt}, 0] = \lim_{p\to 0}\frac{p+1}{2p+2}e^{pt} = \frac{1}{2}$$

$$\mathrm{Res}[(p)e^{pt}, -2] = \lim_{p\to -2}\frac{p+1}{2p+2}e^{pt} = \frac{1}{2}e^{-pt}$$

Vậy $F(p) \leftrightarrow \dfrac{1}{2}\left(1 + e^{pt}\right)$

§16. TÌM HÀM GỐC CỦA MỘT PHÂN THỨC HỮU TỈ

Trong thực tế, để tìm gốc của một phân thức hữu tỉ ta phân tích chúng thành các phân thức tối giản loại 1:

$\frac{1}{p-a}$ hay $\frac{1}{(p-a)^n}$ với a thực, n nguyên dương

và các phân thức tối giản loại 2:

$\frac{Mp+N}{p^2+2bp+c}$ hay $\frac{Mp+W}{(p^2+2bp+c)^n}$ với M, N, b, c thực; b^2 - c < 0; n nguyên dương.

Đối với phân thức tối giản loại 1 ta chú ý rằng:

$$\frac{1}{p} \leftrightarrow 1; \frac{1}{p^n} \leftrightarrow \frac{t^{n-1}}{n!}$$

Do đó dùng công thức dịch chuyển ảnh ta có:

$$\frac{1}{p-a} \leftrightarrow e^{at}; \frac{1}{(p-a)^n} \leftrightarrow e^{at}\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$$

Đối với phân thức tối giản loại 2 ta làm như sau:

- Ta đưa tam thức ở mẫu số về dạng chính tắc:

$$\frac{Mp+N}{p^2+2bp+c} = \frac{M(p+b)+N-Mb}{\left[(p+b)^2+(c-b^2)\right]^n} = \frac{M(p+b)+N-Mb}{\left[(p+b)^2+\alpha^2\right]^n}$$

với $\alpha^2 = c - b^2$

- Tìm gốc của $\frac{Mp}{\left(p^2+\alpha^2\right)^n}$ và của $\frac{N-Mb}{\left(p^2+\alpha^2\right)^n}$ rồi dùng công thức chuyển dịch ảnh. Khi tìm gốc của $\frac{p}{\left(p^2+\alpha^2\right)^n}$ hay của $\frac{1}{\left(p^2+\alpha^2\right)^n}$ ta thường tới công thức đạo hàm ảnh.

Ví dụ 1:Tìm gốc của hàm $F(p) = \frac{p+1}{p^2+p+1}$

Đưa mẫu số về dạng chính tắc ta có:

$$p^2+p+1 = \left(p+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$$

Vậy: $$F(p) = \frac{p+1}{p^2+p+1} = \frac{p+1}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = \frac{p+\frac{1}{2}}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} + \frac{\frac{1}{2}}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

Ta có: $$\frac{p}{p^2+\frac{3}{4}} \leftrightarrow \cos\frac{\sqrt{3}}{2}t$$

$$\frac{1}{p^2+\frac{3}{4}} \leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t$$

Áp dụng công thức dịch chuyển ảnh ta có:

$$\frac{p}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} \leftrightarrow e^{-\frac{t}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t$$

$$\frac{1}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} \leftrightarrow e^{-\frac{t}{2}}\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t$$

Vây: $f(t) \leftrightarrow e^{-\frac{t}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + e^{-\frac{t}{2}}\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t$

Ví dụ 2: Tìm gốc của hàm $F(p)=\dfrac{3p-4}{(p^2-2p+2)^2}$

Đưa mẫu số về dạng chính tắc ta có:

$$F(p)=\frac{3p-4}{(p^2-2p+2)^2}=\frac{3(p-1)-1}{\left[(p-1)^2+1\right]^2}=\frac{3(p-1)}{\left[(p-1)^2+1\right]^2}-\frac{1}{\left[(p-1)^2+1\right]^2}$$

Đặt $G(p)=\dfrac{3p}{(p^2+1)^2}-\dfrac{1}{(p^2+1)^2}$ thì G(p - 1) = F(p). Vậy nếu tìm được gốc của G(p) ta sẽ dùng công thức dịch chuyển ảnh để tìm gốc của F(p).

Vì: $\dfrac{1}{(p^2+1)^2}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{p}{p^2+1}\right)'+\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{p^2+1}$

$$\frac{p}{(p^2+1)^2}=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p^2+1}\right)'$$

nên: $$G(p)=-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{p^2+1}\right)'-\frac{1}{2}\left(\frac{p}{p^2+1}\right)'-\frac{1}{2}\frac{1}{p^2+1} \qquad (47)$$

Vì: $\dfrac{1}{p^2+1}\leftrightarrow \sin t;\ \dfrac{p}{p^2+1}\leftrightarrow \cos t$

nên áp dụng tính chất đạo hàm ảnh ta có:

$$\left(\frac{1}{p^2+1}\right)'\leftrightarrow -t\sin t;\ \left(\frac{p}{p^2+1}\right)'\leftrightarrow -t\cos t$$

Từ (47) ta suy ra:

$$g(t)=\frac{3}{2}t\sin t+\frac{3}{2}t\cos t-\frac{1}{2}\sin t$$

$$f(t)=e^t g(t)=e^t\left(\frac{3}{2}t\sin t+\frac{3}{2}t\cos t-\frac{1}{2}\sin t\right)$$

Ví dụ 3: Tìm gốc của hàm $F(p)=\dfrac{3p^2+2p+2}{(p-2)(p^2+4p+8)}$

Phân tích F(p) thành phân thức tối giản ta được:

$$F(p)=\frac{3p^2+2p+2}{(p-2)(p^2+4p+8)}=\frac{1}{p-2}+\frac{2p+3}{p^2+4p+8}=\frac{1}{p-2}+\frac{2(p+2)-1}{(p+2)^2+4}$$

$$=\frac{1}{p-2}+2\frac{p+2}{(p+2)^2+4}-\frac{1}{(p+2)^2+4}$$

Vì $\frac{1}{p-2}\leftrightarrow e^{2t}$

$$\frac{2p}{p^2+4}\leftrightarrow 2\cos 2t$$

$$\frac{1}{p^2+4}\leftrightarrow \frac{1}{2}\sin t$$

Nên chuyển dịch ảnh ta được:

$$2\frac{p+2}{(p+2)^2+4}\leftrightarrow 2e^{-2t}\cos 2t;\quad \frac{1}{(p+2)^2+4}\leftrightarrow e^{-2t}\frac{\sin 2t}{2}$$

Cuối cùng:

$$f(t)=e^{2t}+2e^{-2t}\cos 2t-e^{-2t}\frac{\sin 2t}{2}$$

§17. TÌM HÀM GỐC DƯỚI DẠNG CHUỖI

Định lí: Nếu hàm F(p) giải tích tại p = ∞, nghĩa là tại lân cận p = ∞, khai triển Laurent của nó có dạng:

$$F(p)=\frac{C_1}{p}+\frac{C_2}{p^2}+\frac{C_3}{p^3}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_n}{p^n}\qquad(48)$$

thì F(p) là ảnh của hàm η(t)f(t) trong đó:

$$f(t)=C_1+\frac{C_2}{1!}t+\frac{C_2}{2!}t^2+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\qquad(49)$$

Ví dụ 1: Tìm gốc của hàm $F(p)=\frac{1}{p^{n+1}}e^{-\frac{1}{p}}$

Khai triển

$$e^{-\frac{1}{p}}=1-\frac{1}{p}+\frac{1}{2!p^2}-\frac{1}{3!p^3}+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\frac{1}{p^k}$$

Vậy: $F(p)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\frac{1}{p^{n+k+1}}$

Vì: $\frac{1}{p^{n+k+1}}\leftrightarrow\frac{t^{n+k}}{(n+k)!}$

nên: $f(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\frac{t^{n+k}}{(n+k)!}$

Ví dụ 2: Tìm gốc của hàm $F(p)=\dfrac{p^9}{p^{10}-1}$

Khai triển F(p) tại lân cận p = ∞ ta được:

$$F(p)=\frac{p^9}{p^{10}-1}=\frac{p^9}{p^{10}\left(1-\frac{1}{p^{10}}\right)}=\frac{1}{p\left(1-\frac{1}{p^{10}}\right)}=\frac{1}{p}+\frac{1}{p^{11}}+\frac{1}{p^{21}}+\cdots+\frac{1}{p^{10n+1}}+\cdots$$

Theo định lí trên ta có:

$$f(t)=1+\frac{t^{10}}{10!}+\frac{t^{20}}{20!}+\cdots+\frac{t^{10n}}{(10n)!}+\cdots$$

Ví dụ 3: Tìm gốc của hàm $F(p)=\dfrac{1}{\sqrt{p^2+1}}$

Áp dụng khai triển nhị thức ta có:

$$F(p)=\frac{1}{\sqrt{p^2+1}}=\frac{1}{p}\left[1-\frac{1}{2}.\frac{1}{p^2}+\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\frac{1}{2!}\frac{1}{p^4}+\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\frac{1}{3!}\frac{1}{p^6}+\cdots\right]$$

$$=\frac{1}{p}-\frac{1}{2p^3}+\frac{1.3}{2^2.2!p^5}-\frac{1.3.5}{2^3.3!p^7}+\cdots$$

Do $\dfrac{1}{p^{n+1}}\leftrightarrow\dfrac{t^n}{n!}$

Nên ta có:

$$f(t)=1-\frac{t^2}{2^2(1!)^2}+\frac{t^4}{2^4(2!)^2}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}$$

§18. DÙNG CÔNG THỨC NHÂN ẢNH VÀ CÔNG THỨC DUHAMEL

Ta nhắc lại công thức nhân ảnh:

$F(p).G(p) = f*g$

$pF(p)G(p) = f'*g + f(0)g(t)$

Ví dụ: Tìm gốc của hàm $F(p)=\dfrac{2p}{(p^2+1)(p^2+4)}$

Ta có thể viết:

$$F(p)=\frac{2p}{(p^2+1)(p^2+4)}=\frac{2}{p^2+1}.\frac{p}{p^2+4}$$

Vì $\dfrac{2}{p^2+1}\leftrightarrow 2\sin t$; $\dfrac{p}{p^2+4}\leftrightarrow 2\cos 2t$

nên theo công thức nhân ảnh ta có:

$$f(t)=2\sin t*\cos 2t=\int_0^t 2\sin(t-\tau)\cos 2\tau d\tau$$

Nhưng $2\sin(t-\tau).\cos2\tau = \sin(t+\tau)\sin(t-3\tau)$ nên:

$$f(t) = \int_0^t 2\sin(t+\tau)d\tau + \int_0^t \sin(t-3\tau)d\tau$$

$$= -\cos(t+\tau)\Big|_0^t + \frac{\cos(t-3\tau)}{3}\Bigg|_0^t = \cos t - \cos 2t + \frac{1}{3}\cos 2t - \frac{1}{3}\cos t$$

$$= \frac{2}{3}\cos t - \frac{2}{3}\cos 2t$$

§19. ỨNG DỤNG CỦA PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE ĐỂ GIẢI PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN TUYẾN TÍNH HỆ SỐ HẰNG

1. Phương pháp chung: Giả sử ta cần tìm nghiệm của phương trình vi phân tuyến tính hệ số hằng:

$$a_o\frac{d^n x}{dt^n} + a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_n x = f(t) \qquad (1)$$

thoả mãn các điều kiện ban đầu:

$$x(0) = x_o,\ x'(0) = x_1,\ ..,\ x^{(n-1)}(0) = x_{n-1} \qquad (2)$$

với giả thiết $a_o \neq 0$, hàm f(t), nghiệm x(t) cùng các đạo hàm tới cấp n của nó đều là các hàm gốc.

Để tìm nghiệm của bài toán trên ta làm như sau:

- Trước hết ta lập phương trình ảnh của (1) bằng cách gọi X(p) là ảnh của x(t), F(p) là ảnh của f(t). Theo công thức đạo hàm gốc ta có:

$x'(t) = pX(p) - x_o$

$x''(t) = p^2X(p) - px_o - x_1$

…

$x^{(n)}(t) = p^nX(p) - p^{n-1}x_o - \cdots - x_{n-1}$

Lấy ảnh hai vế của (1) ta có phương trình đối với ảnh X(p):

$$(a_op^n + a_1p^{n-1} + \cdots + a_n)X(p) = F(p) + x_o(a_op^{n-1} + a_1p^{n-2} + \cdots + a_{n-1})$$
$$+ x_1(a_op^{n-1} + a_1p^{n-2} + \cdots + a_{n-1}) + \cdots + x_{n-1}a_o$$

hay:

$$A(p).X(p) = F(p) + B(p) \qquad (3)$$

Trong đó A(p) và B(p) là các đa thức đã biết. Giải (3) ta có:

$$X(p) = \frac{F(p)+B(p)}{A(p)} \qquad (4)$$

- Sau đó tìm gốc của X(p) ta được nghiệm của phương trình

Ví dụ 1: Tìm nghiệm của phương trình $x'' - 2x' + 2x = 2e^t\cos t$

thoả mãn điều kiện đầu $x(0) = x'(0) = 0$

Đặt $x(t) \leftrightarrow X(p)$ thì $x'(t) \leftrightarrow pX(p)$ và $x''(t) \leftrightarrow p^2X(p)$.

Mặt khác $2e^t\cos t \leftrightarrow \dfrac{2(p-1)}{(p-1)^2+1} = \dfrac{2(p-1)}{p^2-2p+2}$. Thay vào phương trình ta có:

$$p^2X - 2pX + 2X = \frac{2(p-1)}{p^2 - 2p + 2}$$

hay

$$(p^2 - 2p + 2)X = \frac{2(p-1)}{p^2 - 2p + 2}$$

Giải ra ta được:

$$X = \frac{2(p-1)}{(p^2 - 2p + 2)^2}$$

Dùng phép biến đổi ngược ta có:

$x(t) = te^t\sin t$

Ví dụ 2: Tìm nghiệm của phương trình x" - x = 4sint + 5cos3t thoả mãn các điều kiện ban đầu x(0) = -1, x'(0) = -2

Đặt $x(t) \leftrightarrow X(p)$ thì $x''(t) \leftrightarrow p^2X + p + 2$. Mặt khác $5\cos 2t \leftrightarrow \dfrac{5p}{p^2+4}$ và $4\sin t \leftrightarrow \dfrac{4}{p^2+1}$. Thay vào phương trình trên ta được:

$$p^2X + p + 2 - X = \frac{4}{p^2+1} + \frac{5p}{p^2+4}$$

nên:

$$X = \frac{4}{(p^2+1)(p^2-1)} + \frac{5p}{(p^2+4)(p^2-1)} - \frac{p+2}{p^2-1}$$

$$= \frac{2}{p^2-1} - \frac{2}{p^2+1} + \frac{p}{p^2-1} - \frac{p}{p^2+4} - \frac{p+2}{p^2-1}$$

$$= -\frac{2}{p^2+1} - \frac{p}{p^2+4}$$

Dùng phép biến đổi ngược ta được:

$x(t) = -2\sin t - \cos 2t$

Ví dụ 3: Tìm nghiệm của phương trình $x'' + 4x' + 4x = t^3e^{-2t}$ thoả mãn các điều kiện ban đầu x(0) = 1, x'(0) = 2.

Đặt $x(t) \leftrightarrow X(p)$ thì $x'(t) \leftrightarrow pX - 1$, $x''(t) \leftrightarrow p^2X - p - 2$. Mặt khác $t^3e^{-2t} \leftrightarrow \dfrac{3!}{(p+2)^4} = \dfrac{6}{(p+2)^4}$. Thay vào phương trình trên ta được:

$$p^2X - p - 2 + 4pX - 4 + 4X = \frac{6}{(p+2)^4}$$

Như vậy:

$$X = \frac{6}{(p+2)^6} + \frac{p+6}{(p+2)^2} = \frac{6}{(p+2)^6} + \frac{4}{(p+2)^2} + \frac{1}{p+2}$$

Vậy $x(t) = x(t) = e^{-2t} + 4te^{-2t} + \frac{1}{20}t^5e^{-2t} = e^{-2t}\left(1 + 4t + \frac{t^5}{20}\right)$

Ví dụ 4: Tìm nghiệm của phương trình $x^{(4)} + 2x'' + x = \sin t$ thoả mãn các điều kiện ban đầu $x(0) = x'(0) = x''(0) = x^{(3)}(0) = 0$.

Đặt $x(t) \leftrightarrow X(p)$ thì: $x''(t) \leftrightarrow p^2X$, $x^{(4)}(t) \leftrightarrow p^4X$. Mặt khác $\sin t \leftrightarrow \frac{1}{p^2+1}$.

Thay vào phương trình trên ta được:

$$(p^4 + 2p^2 + 1)X = \frac{1}{p^2+1}$$

$$X = \frac{1}{(p^2+1)(p^4+2p^2+1)} = \frac{1}{(p^2+1)^3} = \frac{1}{(p-j)^3(p+j)^3}$$

Hàm $X(p)e^{pt}$ có hai điểm cực cấp 3 là j và -j. Ta tính thặng dư tại các cực điểm đó:

$$\text{Res}[X(p)e^{pt}, j] = \frac{1}{2}\lim_{p\to j}\left[\frac{e^{pt}}{(p+j)^3}\right]'' = \frac{1}{2}\lim_{p\to j}\left[\frac{12e^{pt}}{(p+j)^5} - \frac{6te^{pt}}{(p+j)^4} + \frac{t^2e^{pt}}{(p+j)^3}\right]$$

$$= \frac{e^{jt}}{16}\left[-3t + j(t^2-3)\right]$$

$$\text{Res}[X(p)e^{pt}, -j] = \frac{1}{2}\lim_{p\to -j}\left[\frac{e^{pt}}{(p-j)^3}\right]'' = \frac{1}{2}\lim_{p\to -j}\left[\frac{12e^{pt}}{(p-j)^5} - \frac{6te^{pt}}{(p-j)^4} + \frac{t^2e^{pt}}{(p-j)^3}\right]$$

$$= \frac{e^{-jt}}{16}\left[-3t - j(t^2-3)\right]$$

Theo công thức tìm gốc của phân thức hữu tỉ ta có:

$$x(t) = \text{Res}[X(p)e^{pt}, j] + \text{Res}[X(p)e^{pt}, -j]$$

$$= \frac{e^{jt}}{16}\left[-3t + j(t^2-3)\right] + \frac{e^{-jt}}{16}\left[-3t - j(t^2-3)\right]$$

$$= \frac{e^{jt}}{16}\left[-3t + j(t^2-3)\right] + \overline{\frac{e^{jt}}{16}\left[-3t + j(t^2-3)\right]}$$

$$= 2\,\text{Re}\left\{\frac{e^{jt}}{16}\left[-3t + j(t^2-3)\right]\right\} = -\frac{3}{8}t\cos t + \frac{3-t^2}{8}\sin t$$

Ví dụ 5: Tìm nghiệm của phương trình $x'' + x = e^t$ thoả mãn các điều kiện ban đầu $x(1) = x'(1) = 1$.

Các điều kiện ban đầu ở đây không phải cho tại t = 0 mà tại t = 1. Vì vậy ta phải biến đổi để quy về trường hợp trên. Ta đặt $t = \tau + 1$, $x(t) = x(\tau + 1) = y(\tau)$, Vậy $x'(t) = y'(\tau)$, $x''(t) = y''(\tau)$. Bài toán được đưa về tìm nghiệm của phương trình:

$$y''(\tau) + y(\tau) = e^{\tau+1}$$

thoả mãn $y(0) = 1$ và $y'(0) = 0$

Gọi Y(p) là ảnh của y(τ). Vậy y''(τ) ↔ p^2Y(p) - p. Mặt khác $e^{\tau+1} = e.e^{\tau} \leftrightarrow \frac{e}{p-1}$

Vậy phương trình ảnh là:

$$p^2Y - p + Y = \frac{e}{p-1}$$

Giải phương trình này ta được:

$$Y = \frac{e}{(p-1)(p^2+1)} + \frac{p}{p^2+1} = \frac{e}{2(p-1)} - \frac{e(p+1)}{2(p^2+1)} + \frac{p}{p^2+1}$$

$$= \frac{e}{2(p-1)} + \left(1-\frac{e}{2}\right)\frac{p}{p^2+1} - \frac{e}{2(p^2+1)}$$

Từ đó ta được:

$$y(\tau) = \frac{e}{2}e^{\tau} + \left(1-\frac{e}{2}\right)\cos\tau - \frac{e}{2}\sin\tau$$

Trở về biến t ta có:

$$x(y) = \frac{e^t}{2} + \left(1-\frac{e}{2}\right)\cos(t-1) - \frac{e}{2}\sin(t-1)$$

Ví dụ 6: Tìm nghiệm của phương trình:

$$x' + x = \begin{cases} 1 & 0 < t < 2 \\ 0 & t > 2 \end{cases}$$

thoả mãn điều kiện ban đầu x(0) = 0.

Đặt x(t) ↔ X(p) nên x'(t) ↔ pX(p). Vế phải của phương trình có thể viết được là f(t) = η(t) - η(t - 2). Vậy:

$$f(t) \leftrightarrow \frac{1}{p}\left(1-e^{-2p}\right)$$

và phương trình ảnh có dạng:

$$pX + X = \frac{1}{p}\left(1-e^{-2p}\right)$$

Giải ra ta được:

$$X = \frac{1-e^{-2p}}{p(p+1)} = \frac{1}{p(p+1)} - \frac{e^{-2p}}{p(p+1)}$$

Do $\frac{1}{p(p+1)} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} \leftrightarrow 1 - e^{-t}$

nên theo tính chất trễ ta có:

$$e^{-2p}\frac{1}{p(p+1)} \leftrightarrow \eta(t-2)\left[1-e^{-(t-2)}\right]$$

Vậy: $x(t) = 1 - e^{-t} - \eta(t-2)\left[1-e^{-(t-2)}\right] = \begin{cases} 1-e^{-t} & 0 < t < 2 \\ e^{-t}\left(e^2-1\right) & t > 2 \end{cases}$

Ví dụ 7: Tìm nghiệm của phương trình:

$$x'' + \omega^2 x = \begin{cases} \sin t & 0 < t < \pi \\ 0 & t > \pi \end{cases}$$

thoả mãn các điều kiện ban đầu x(0) = x'(0) = 0.

Đặt $x(t) \leftrightarrow X(p)$, nên $x''(t) \leftrightarrow p^2X(p)$

Trước đây ta đã tìm được ảnh của hàm trong vế phải là:

$$\frac{1}{p^2+1}\left(1+e^{-p\pi}\right)$$

Vậy phương trình ảnh tương ứng là:

$$p^2X + \omega^2X = \frac{1}{p^2+1}\left(1+e^{-p\pi}\right)$$

hay: $$X = \frac{1+e^{-p\pi}}{(p^2+1)(p^2+\omega^2)}$$

Ta xét hai trường hợp:

* nếu $\omega^2 \neq 1$ thì:

$$\frac{1}{(p^2+1)(p^2+\omega^2)} \leftrightarrow \frac{\sin\omega t - \omega\sin t}{\omega(1-\omega^2)}$$

Theo tính chất trễ

$$\frac{e^{-p\pi}}{(p^2+1)(p^2+\omega^2)} \leftrightarrow \eta(t-\pi)\frac{\sin\omega(t-\pi) - \omega\sin(t-\pi)}{\omega(1-\omega^2)}$$

Vây:

$$x(t) = \frac{\sin\omega t - \omega\sin t}{\omega(1-\omega^2)} + \eta(t-\pi)\frac{\sin\omega(t-\pi) - \omega\sin(t-\pi)}{\omega(1-\omega^2)}$$

hay:

$$x(t) = \begin{cases} \dfrac{\sin\omega t - \omega\sin t}{\omega(1-\omega^2)} & 0 < t < \pi \\[2ex] \dfrac{\sin\omega(t-\pi) - \omega\sin(t-\pi)}{\omega(1-\omega^2)} = \dfrac{2\cos\dfrac{\omega\pi}{2}\sin\omega\left(t-\dfrac{\pi}{2}\right)}{\omega(1-\omega^2)} & t > \pi \end{cases}$$

* nếu $\omega^2 = 1$ thì:

$$X = \frac{1+e^{-p\pi}}{(p^2+1)^2}$$

Ta đã biết $\dfrac{1}{(p^2+1)^2} \leftrightarrow \sin t - \dfrac{t\cos t}{2}$

Theo tính chất trễ ta có:

$$\frac{e^{-p\pi}}{(p^2+1)^2} \leftrightarrow \frac{\eta(t-\pi)}{2}\left[\sin(t-\pi) - (t-\pi)\cos(t-\pi)\right]$$

hay: $\dfrac{e^{-p\pi}}{(p^2+1)^2} \leftrightarrow \dfrac{\eta(t-\pi)}{2}\left[(t-\pi)\cos t - \sin t\right]$

Vậy:

$$x(t) = \frac{1}{2}(\sin t - t\cos t) + \frac{1}{2}\eta(t-\pi)\left[(t-\pi)\cos t - \sin t\right]$$

hay:

$$x(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}(\sin t - t\cos t) & 0 < t < \pi \\ -\dfrac{\pi\cos t}{2} & t > \pi \end{cases}$$

Ví dụ 8: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x' + x - y = e^t \\ y' + 3x - y = 3e^t \end{cases}$$

thoả mãn điều kiện đầu x(0) = 1, y(0) = 1

Đặt $x(t) \leftrightarrow X(p)$, $y(t) \leftrightarrow Y(p)$ nên x'(t) = pX - 1, y'(t) = pY - 1. Thay vào ta có hệ phương trình ảnh:

$$\begin{cases} pX - 1 + X - Y = \dfrac{1}{p-1} \\ pY - 1 + 3X - 2Y = \dfrac{2}{p-1} \end{cases}$$

hay:

$$\begin{cases} (p+1)X - Y = \dfrac{1}{p-1} + 1 \\ 3X + (p-2)Y = \dfrac{2}{p-1} + 1 \end{cases}$$

Giải hệ này ta được:

$$X = \frac{1}{p-1}; \quad Y = \frac{1}{p-1}$$

Vậy: $x(t) = e^t$ và $y(t) = e^t$

Ví dụ 9: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x'' - x + y + z = 0 \\ x + y'' - y + z = 0 \\ x + y + z'' - z = 0 \end{cases}$$

Thoả mãn các điều kiện đầu x(0) = 1, y(0) = z(0) = x'(0) = y'(0) = z'(0) = 0.

Đặt $x(t) \leftrightarrow X(p) \Rightarrow x'' \leftrightarrow p^2X - p$

$y(t) \leftrightarrow Y(p) \Rightarrow y'' \leftrightarrow p^2Y$

$z(t) \leftrightarrow Z(p) \Rightarrow z'' \leftrightarrow p^2Z$

Do đó hệ phương trình đối với các ảnh là:

$$\begin{cases}(p^2-1)X+Y+Z=p\\ X+(p^2-1)Y+Z=0\\ X+Y+(p^2-1)Z=0\end{cases}$$

Giải hệ này ta có:

$$X=\frac{p^3}{(p^2+1)(p^2-2)}$$

$$Y=Z=-\frac{p}{(p^2+1)(p^2-2)}$$

Như vậy:

$$x(t)=\frac{2}{3}\mathrm{ch}\left(\sqrt{2}t\right)+\frac{1}{3}\cos t$$

$$y(t)=z(t)=-\frac{1}{3}\mathrm{ch}\left(\sqrt{2}t\right)+\frac{1}{3}\cos t$$

2. Dùng công thức Duhamel: Nếu biết nghiệm $x_1(t)$ của phương trình:

$$a_o x_1''+a_1x_1'+a_2x_1=1 \qquad (5)$$

thoả mãn các điều kiện ban đầu thuần nhất x(0) = x'(0) = 0 thì công thức mà ta thiết lập dưới đây dựa vào công thức Duhamel sẽ cho ta nghiệm x(t) của phương trình:

$$a_o x'' + a_1 x' + a_2 x = f(t) \qquad (6)$$

thoả mãn các điều kiện ban đầu thuần nhất x(0) = x'(0) = 0.

Ta có công thức:

$$x(t)=x_1'*f=\int_0^\tau f(\tau)x_1'(t-\tau)d\tau=\int_0^\tau f(t-\tau)x_1'(\tau)d\tau$$

Chứng minh: Đặt $x_1(t) \leftrightarrow X_1(p)$, $x(t) \leftrightarrow X(p)$, $f(t) \leftrightarrow F(p)$. Hàm $X_1(p)$ thoả mãn phương trình ảnh của (5) là:

$$(a_op^2+a_1p+a_2)X_1(p)=\frac{1}{p} \qquad (7)$$

Hàm X(p) thoả mãn phương trình ảnh của (6) là:

$$(a_op^2+a_1p+a_2)X(p)=F(p) \qquad (8)$$

Từ (7) và (8) suy ra:

$$pX_1(p)=\frac{X(p)}{F(p)} \text{ hay } X(p)=pX_1(p).F(p)$$

Theo công thức tích phân Duhamel ta có:

$$X(p) \leftrightarrow x_1(t).f(0) + x_1'*f$$

Vì $x_1(0) = 0$ nên $X(p) \leftrightarrow x_1'*f$

nghĩa là:

$$x(t) = x_1' * f = \int_0^\tau f(\tau)x_1'(t-\tau)d\tau = \int_0^t f(t-\tau)x_1'(\tau)d\tau \qquad (9)$$

Ta cũng có thể dùng công thức Duhamel thứ 2:

$$x(t) = x_1(t)f(0) = \int_0^\tau x_1(\tau)f(t-\tau)d\tau \qquad (10)$$

Ví dụ 1: Tìm nghiệm của phương trình:

x" + x' = e^{-t^2}

thoả mãn điều kiện đầu x(0) = x'(0) = 0.

Ta thấy nghiệm của phương trình x" + x' = 1 với điều kiện đầu x(0) = x'(0) = 0 là $x_1(t)$ = 1 - cost. Vậy theo (9) thì nghiệm của phương trình ban đầu là:

$$x(t) = \int_0^t e^{-(t-\tau)^2} \sin\tau d\tau$$

Ví dụ 2: Tìm nghiệm của phương trình x" + x = $5t^2$ với điều kiện đầu là x(0) = x'(0) = 0

Trong ví dụ trên ta có $x_1(t)$ = 1 - cost. Vậy:

$$x(t) = \int_0^t 5t^2 \sin(t-\tau)d\tau = 5(t^2 - 2 + 2\cos t)$$

§20. BẢNG ĐỐI CHIẾU ẢNH - GỐC

Tt	f(t)	F(p)	Tt	f(t)	F(p)
1	1	$\frac{1}{p}$	21	$te^{at}\cos mt$	$\frac{(p-a)^2 - m^2}{[(p-a)^2 + m^2]^2}$
2	t	$\frac{1}{p^2}$	22	$te^{at}\text{sh}mt$	$\frac{2m(p-a)}{[(p-a)^2 - m^2]^2}$
3	t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	23	$te^{at}\text{ch}mt$	$\frac{(p-a)^2 + m^2}{[(p-a)^2 - m^2]^2}$
4	e^{at}	$\frac{1}{p-a}$	24	1-cosmt	$\frac{m^2}{p(p^2 + m^2)}$
5	e^{at} - 1	$\frac{a}{p(p-a)}$	25	f(t)sinmt	$\frac{1}{2}[F(p-jm) - F(p+jm)]$
6	te^{at}	$\frac{1}{(p-a)^2}$	26	f(t)cosmt	$\frac{1}{2}[F(p-jm) + F(p+jm)]$
7	$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(p-a)^{n+1}}$	27	f(t)shmt	$\frac{1}{2}[F(p-m) - F(p+m)]$
8	sinmt	$\frac{m}{p^2 + m^2}$	28	f(t)chmt	$\frac{1}{2}[F(p-m) + F(p+m)]$

9	cosmt	$\frac{p}{p^2+m^2}$	29	$\frac{e^{at}-e^{bt}}{a-b}$	$\frac{1}{(p-a)(p-b)}$
10	shmt	$\frac{m}{p^2-m^2}$	30	$\frac{e^{-\frac{t}{a}}-e^{-\frac{t}{b}}}{a-b}$	$\frac{1}{(ap+1)(bp+1)}$
11	chmt	$\frac{p}{p^2-m^2}$	31	$(1+at)e^{at}$	$\frac{p}{(p-a)^2}$
12	e^{at}sinmt	$\frac{m}{(p-a)^2+m^2}$	32	$\frac{e^{a}-at-1}{a^2}$	$\frac{1}{(p-a)p^2}$
13	e^{at}cosmt	$\frac{p-a}{(p-a)^2+m^2}$	33	$\cos^2 mt$	$\frac{p^2+2m^2}{p(p^2+4m^2)}$
14	e^{at}shmt	$\frac{m}{(p-a)^2-m^2}$	34	$\sin^2 mt$	$\frac{2m^2}{p(p^2+4m^2)}$
15	e^{at}chmt	$\frac{p-a}{(p-a)^2-m^2}$	35	$ch^2 mt$	$\frac{p^2-2m^2}{p(p^2-4m^2)}$
16	tsinmt	$\frac{2pm}{(p^2+m^2)^2}$	36	$sh^2 t$	$\frac{2m^2}{p(p^2-4m^2)}$
17	tcosmt	$\frac{p^2-m^2}{(p^2+m^2)^2}$	37	$\frac{e^{at}-e^{bt}}{t}$	$\ln\frac{p-b}{p-a}$
18	tshmt	$\frac{2pm}{(p^2-m^2)^2}$	38	$\frac{e^{-at}}{\sqrt{\pi t}}$	$\frac{1}{\sqrt{p+a}}$
19	tchmt	$\frac{p^2+m^2}{(p^2-m^2)^2}$	20	te^{at}sinmt	$\frac{2m(p-a)}{[(p-a)^2+m^2]^2}$

CHƯƠNG 7: PHƯƠNG TRÌNH VẬT LÝ - TOÁN

§1. PHÂN LOẠI CÁC PHƯƠNG TRÌNH ĐẠO HÀM RIÊNG TUYẾN TÍNH CẤP 2 VỚI CÁC BIẾN ĐỘC LẬP

1. Phân loại các phương trình: Khi khảo sát các bài toán vật lí, ta nhận được phương trình đạo hàm riêng cấp 2 dạng:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial y_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u = d(x) \qquad (1)$$

Trong đó $a_{ij}(x)$, $b_i(x)$, $c(x)$ và $d(x)$ là các hàm nhiều biến đã cho của $x = (x_1, x_2,...x_n)$ còn $u(x)$ là các hàm cần xác định.

Trong thực tế ta thường gặp các phương trình đạo hàm riêng tuyến tính cấp 2 với hai biến độc lập dạng:

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d\frac{\partial u}{\partial x} + e\frac{\partial u}{\partial y} + gu = h \qquad (2)$$

Trong đó a, b, c, d, g, h là các hàm hai biến của x và y.
Trong giáo trình này ta chỉ xét các phương trình dạng (2). Để đơn giản ta viết lại (2):

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \Phi\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0 \qquad (3)$$

Các phương trình này có thể phân thành các loại sau:
Phương trình hyperbolic:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \Phi_1\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

Phương trình eliptic:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \Phi_2\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

Phương trình parabolic:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \Phi_3\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

2. Các bài toán cơ bản của phương trình vật lí - toán:

a. Bài toán Cauchy và bài toán hỗn hợp của phương trình truyền sóng: Một phương trình truyền sóng là một phương trình dạng hyperbolic. Phương trình truyền sóng dạng chính tắc là:

$$\frac{\partial^2 u(x,y,z,t)}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + f_1(x,y,z,t)$$

Giả sử ta cần xác định hàm u(x, y, z, t) trong miền V và $t \geq 0$. V được giới hạn bằng mặt biên kín và trơn S với các điều kiện đầu:

$$u(x,y,z,t)\Big|_{t=0} = u_o(x,y,z)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = u_o^*(x,y,z)$$

và điều kiện biên:

$$u(x,y,z,t)\Big|_{(x,y,z)\in S} = u_1(x,y,z)$$

Bài toán giải phương trình trên với các điều kiện đầu và điều kiện biên được gọi là bài toán hỗn hợp của phương trình truyền sóng. Nếu ta xét bài toán trong miền cách xa các biên mà ở đó điều kiện biên không có tác dụng thì ta gặp bài toán Cauchy với điều kiện đầu và xét trong toàn bộ không gian.

b. Bài toán Cauchy và bài toán hỗn hợp của phương trình truyền nhiệt: Cho phương trình truyền nhiệt dưới dạng chính tắc:

$$\frac{\partial u(x,y,z,t)}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + f_1(x,y,z,t)$$

Khi đó bài toán hỗn hợp của phương trình truyền nhiệt là bài toán tìm nghiệm của phương trình với điều kiện đầu và điều kiện biên:

$$u(x,y,z,t)\Big|_{t=0} = u_o(x,y,z)$$

$$u(x,y,z,t)\Big|_{(x,y,z)\in S} = u_1(x,y,z)$$

Bài toán Cauchy của phương trình truyền nhiệt là bài toán tìm nghiệm của phương trình truyền nhiệt trong toàn bộ không gian.

§2. PHƯƠNG TRÌNH LOẠI HYPERBOLIC PHƯƠNG TRÌNH TRUYỀN NHIỆT

1. Bài toán Cauchy - Phương trình sóng của dây vô hạn và nửa vô hạn: Bài toán Cauchy của phương trình hyperbolic trong trường hợp một biến được xác định như sau:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad -\infty \le x \le \infty,\ t \ge 0 \tag{1}$$

với các điều kiện

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = u_o(x)\ ;\ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = u_1(x) \tag{2}$$

Đây là bài toán dao động tự do của dây dài vô hạn.

Để giải phương trình (1) ta biến đổi nó bằng cách dùng các biến:

$$\begin{aligned}\xi &= x + at\\ \eta &= x - at\end{aligned} \tag{3}$$

nghĩa là:

$$x = \frac{\xi+\eta}{2} \qquad t = \frac{\xi-\eta}{2a}$$

Ta có:

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} = a\left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} - \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta}\right)$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi\partial \eta} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \eta^2}$$

$$\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\xi^2}-2\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\eta^2}\right)$$

Thay vào (2.1) ta có:

$$\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\xi\partial\eta}=0 \text{ hay } \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\xi}\right)=0$$

Suy ra: $\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\xi}=\varphi_1(\xi)$ với $\varphi_1(\xi)$ là hàm tuỳ ý

Như vậy:

$$\tilde{u}(\xi,\eta)=\int\varphi_1(\xi)d\xi+\psi(\eta)$$

với $\psi(\eta)$ là hàm tuỳ ý.

Từ đó ta có:

$$\tilde{u}(\xi,\eta) = \varphi(\xi) + \psi(\eta)$$

hay: $u(x, t) = \varphi(x + at) + \psi(x - at)$ (3)

Trong đó φ và ψ là các hàm tuỳ ý, liên tục và khả vi 2 lần. Nghiệm của (3) được gọi là nghiệm tổng của (1). Từ (3) nếu tính đến điều kiện (2) ta sẽ có:

$\varphi(x) + \psi(x) = u_o(x)$ (4)

$a\varphi(x) - a\psi(x) = u_1(x)$ (5)

Lấy tích phân hai vế của (5) ta có:

$$a[\varphi(x)-\varphi(0)]-a[\psi(x)-\psi(0)]=\int_0^x u_1(\theta)d\theta$$

Vậy nên:

$$\varphi(x)-\psi(x)=\frac{1}{a}\int_0^x u_1(\theta)d\theta+C \qquad (6)$$

với $C = \varphi(0) - \psi(0)$

Từ (4) và (6) rút ra:

$$\begin{cases}\varphi(x)=\frac{1}{2}u_o(x)+\frac{1}{2a}\int_0^x u_1(\theta)d\theta+\frac{C}{2}\\ \psi(x)=\frac{1}{2}u_o(x)-\frac{1}{2a}\int_0^x u_1(\theta)d\theta-\frac{C}{2}\end{cases}$$

Đặt các hệ thức trên vào (3) ta được nghiệm:

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[u_o(x+at)+u_o(x-at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}u_1(\theta)d\theta$$

Đây là công thức D'Alembert.

Ví dụ 1: Giải phương trình:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad -\infty < x < \infty,\ t \geq 0$$

với các điều kiện:

$$u(x,t)\big|_{t=0}=\frac{x}{1+x^2}=u_o(x)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \sin x = u_1(x)$$

Áp dụng công thức D'Alembert ta có:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[\frac{x+at}{1+(x+at)^2} + \frac{x+at}{1+(x-at)^2}\right] + \frac{1}{a}\text{sinatsinx}$$

Ví dụ 2: Giải phương trình:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad -\infty < x < \infty,\ t \geq 0$$

với các điều kiện:

$$u(x,t)\big|_{t=0} = \frac{\sin x}{x} = u_o(x)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \frac{1}{1+x^2} = u_1(x)$$

Áp dụng công thức D'Alembert ta có:

$$u(x,t) = \frac{\text{xsinxcosat} - \text{atcosxsinat}}{x^2 - (at)^2} + \frac{1}{2a}\text{arctg}\left[\frac{2at}{1+x^2-(at)^2}\right]$$

vì nếu đặt arctg(x + at) - arctg(x - at) = α ta có:

$$\text{tg}\alpha = \frac{\text{tg}[\text{arctg}(x+at)] - \text{tg}[\text{arctg}(x-at)]}{1+\text{tg}[\text{arctg}(x+at)]\times\text{tg}[\text{arctg}(x-at)]} = \frac{(x+at)-(x-at)}{1+(x+at)(x-at)}$$

$$= \frac{2at}{1+x^2-(at)^2}$$

Ví dụ 3: Giải phương trình:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad -\infty < x < \infty,\ t \geq 0$$

với các điều kiện:

$$u(x,t)\big|_{t=0} = x^2 = u_o(x)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \sin^2 x = u_1(x)$$

$$u(x,t)\big|_{x=0} = 0$$

Trước hết để tìm nghiệm của bài toán ta kéo dài lẻ hàm $u_o(x) = x^2$ và $u_1(x) = \sin^2 x$ sẽ được các hàm:

$$u_o^* = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases}$$

$$u_1^* = \begin{cases} \sin^2 x & x \geq 0 \\ -\sin^2 x & x < 0 \end{cases}$$

Áp dụng công thức D'Alembert cho các hàm này ta có:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[u_o^*(x+at) + u_o^*(x-at)\right] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} u_1^*(\theta)d\theta$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2}\left[(x+at)^2 + (x-at)^2\right] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \sin^2(\theta)d\theta & t \le \frac{x}{a} \\ \frac{1}{2}\left[(x+at)^2 - (x-at)^2\right] + \frac{1}{2a}\left[\int_{0}^{x+at} \sin^2(\theta)d\theta - \int_{x-at}^{0} \sin^2(\theta)d\theta\right] & t > \frac{x}{a} > 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x^2 + a^2t^2 + \frac{t}{2} - \frac{1}{4a}\cos 2x \sin 2at & t \le \frac{x}{a} \\ 2axt + \frac{1}{4a}\left[2x - \sin 2x \cos 2at\right] \end{cases}$$

Ví dụ 4: Giải phương trình điện báo:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{RC+LG}{LC}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{RG}{LC}u - \frac{1}{LC}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} + \frac{RC+LG}{LC}\frac{\partial i}{\partial t} + \frac{RG}{LC}i - \frac{1}{LC}\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = 0$$

Trong các trường hợp:

- Dây không tổn hao R = G = 0
- Dây không méo RC = LG

☞ Trường hợp dây không tổn hao: Khi đó các phương trình trên có dạng:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 i}{\partial x^2}$$

Trong đó $a = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

Giả sử các điều kiện ban đầu đã biết là:

$$\begin{cases} u(x,t)\big|_{t=0} = u_o(x) \\ i(x,t)\big|_{t=0} = i_o(x) \end{cases} \qquad -\infty < x < \infty,\ y > 0$$

Với R = G = 0 ta có điều kiện đối với phương trình điện báo:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = -\frac{1}{C}i_o(x)$$

$$\left.\frac{\partial i}{\partial t}\right|_{t=0} = -\frac{1}{C}u_o(x)$$

Từ đó áp dụng các công thức D'Alembert ta được:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[u_o(x+at) + u_o(x-at)\right] - \frac{1}{2aC}\int_{x-at}^{x+at} i_o(\theta)d\theta$$

$$i(x,t)=\frac{1}{2}\left[i_o(x+at)+i_o(x-at)\right]-\frac{1}{2aC}\int_{x-at}^{x+at}u_o(\theta)d\theta$$

Nếu tính đến $a=\frac{1}{\sqrt{LC}}$ ta suy ra nghiệm:

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left[u_o(x+at)+u_o(x-at)\right]+\sqrt{\frac{L}{C}}\left[\frac{i_o(x-at)-i_o(x+at)}{2}\right]$$

$$i(x,t)=\frac{1}{2}\left[i_o(x+at)+i_o(x-at)\right]+\sqrt{\frac{L}{C}}\left[\frac{u_o(x-at)-u_o(x+at)}{2}\right]$$

☞ Trường hợp dây không méo: khi đó RC = LC và ta tìm nghiệm dưới dạng:

$$\begin{cases}u(x,t)=e^{-\frac{R}{L}t\tilde{u}(x,t)}\\ i(x,t)=e^{-\frac{R}{L}t\tilde{i}(x,t)}\end{cases}$$

Lấy đạo hàm hệ thức trên hai lần theo x và theo t rồi thay vào phương trình ta có:

$$\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\xi^2}=a^2\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial x^2};\qquad \frac{\partial^2\tilde{i}}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2\tilde{i}}{\partial x^2}$$

Các điều kiện đầu:

$$\begin{cases}u(x,t)\big|_{t=0}=\tilde{u}(x,t)\big|_{t=0}=u_o(x)\\ i(x,t)\big|_{t=0}=\tilde{i}(x,t)\big|_{t=0}=i_o(x)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\left.\frac{\partial\tilde{u}}{\partial t}\right|_{t=0}=-\frac{1}{C}i_o(x)\\ \left.\frac{\partial\tilde{i}}{\partial t}\right|_{t=0}=-\frac{1}{L}u_o(x)\end{cases}$$

Từ đó, theo công thức D'Alembert ta có nghiệm:

$$\begin{cases}u(x,t)=e^{-\frac{R}{L}t}\left[\frac{u_o(x+at)+u_o(x-at)}{2}+\sqrt{\frac{L}{C}}\frac{i_o(x-at)-i_o(x+at)}{2}\right]\\ i(x,t)=e^{-\frac{R}{L}t}\left[\frac{i_o(x+at)+i_o(x-at)}{2}+\sqrt{\frac{L}{C}}\frac{u_o(x-at)-u_o(x+at)}{2}\right]\end{cases}$$

2. Bài toán hỗn hợp - Phương trình sóng của dây hữu hạn:

a. Khái niệm chung: Bài toán hỗn hợp của phương trình loại hyperbolic trong trường hợp một chiều là bài toán giải phương trình:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t)\qquad\qquad 0\le x\le l,\ 0\le t\le T$$

với các điều kiện : $u(x,t)\big|_{t=0}=u_o(x);\ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=u_1(x)$

$$u(x,t)\big|_{x=0} = \phi_1(t); \qquad u(x,t)\big|_{x=l} = \phi_2(t)$$

Ta phân bài toán hỗn hợp này thành các bài toán nhỏ sau:

b. Bài toán 1: Giải phương trình:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad\qquad 0 \le x \le l,\ 0 \le t \le T$$

với các điều kiện:

$$u(x,t)\big|_{t=0} = u_o(x); \ \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = u_1(x)$$

$$u(x,t)\big|_{x=0} = 0; \qquad u(x,t)\big|_{x=l} = 0$$

Bài toán này mô tả quá trình truyền sóng của dây hữu hạn với hai đầu dây cố định. Biết dạng ban đầu của dây là $u_o(x)$ và vận tốc ban đầu của các thành phần dây là $u_1(x)$. Ta giải bài toán này bằng phương pháp tách biến, nghĩa là tìm nghiệm của phương trình dưới dạng tích hai hàm số, một hàm chỉ phụ thuộc vào toạ độ x và hàm kia chỉ phụ thuộc t. Như vậy nghiệm u(x,t) có dạng:

$$u(x,t) = X(x).T(t)$$

Sau khi lấy đạo hàm và thay vào phương trình ta có:

$$\frac{1}{a^2}\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}$$

Do vế phải chỉ phụ thuộc t và vế trái chỉ phụ thuộc x nên chúng phải cùng bằng một hằng số mà ta kí hiệu là $-\lambda$. Khi đó ta nhận được hệ phương trình:

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ T''(t) + a^2\lambda T(t) = 0 \end{cases}$$

Nghiệm của bài toán phải thoả mãn điều kiện đã cho nên:

$$X(0) = 0; \qquad X(l) = 0$$

Khi giải phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 hệ số hằng ta có nhận xét về giá trị của λ như sau:

* Nếu $\lambda = 0$ thì nghiệm tổng quát của phương trình có dạng:

$$X(x) = C_1(x) + C_2$$

Với điều kiện đầu ta suy ra $C_1 = 0$ và $C_2 = 0$. Khi này $X(x) \equiv 0$ không được coi là nghiệm của bài toán.

* Nếu $\lambda < 0$ thì nghiệm tổng quát có dạng:

$$X(x) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$$

và với các điều biên ta có:

$$\begin{cases} X(0) = C_1 + C_2 = 0 \\ X(l) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}l} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}l} = 0 \end{cases}$$

Từ hệ trên ta suy ra $C_1 = 0$ và $C_2 = 0$. Khi này $X(x) \equiv 0$ không được coi là nghiệm của bài toán.

Nếu $\lambda > 0$ thì nghiệm tổng quát có dạng:

$$X(x) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}x$$

và với các điều biên ta có:

$$\begin{cases} X(0) = C_1 = 0 \\ X(l) = C_2 \sin\lambda l = 0 \end{cases}$$

Để nghiệm không tầm thường thì từ phương trình trên ta thấy $C_2 \neq 0$, suy ra $\sin\sqrt{\lambda}l = 0$. Như vậy:

$$\sqrt{\lambda}l = \frac{\pi}{2} \text{ hay } \lambda = \frac{k^2\pi^2}{l^2} \ \forall k \in Z$$

nên:

$$X(x) = C_2 \sin\frac{k\pi}{l}x$$

Với giá trị λ vừa tìm được giải phương trình ta có:

$$T_k = A_k \cos\frac{k\pi}{l}at + B_k \sin\frac{k\pi}{l}at$$

Do đó:

$$u_k(x,t) = \left(a_k \cos\frac{k\pi}{l}at + b_k \sin\frac{k\pi}{l}at\right)\sin\frac{k\pi}{l}x$$

Nghiệm tổng quát có dạng:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos\frac{k\pi}{l}at + b_k \sin\frac{k\pi}{l}at\right)\sin\frac{k\pi}{l}x$$

Vấn đề còn lại là xác định các hệ số a_k và b_k để thoả mãn các điều kiện đầu và điều kiện biên, nghĩa là phải có:

$$u(x,t)\big|_{t=0} = u_o(x); \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = u_1(x)$$

Ta giả sử các hàm $u_o(x)$ và $u_1(x)$ là các hàm có thể khai triển thành chuỗi Fourier theo $\sin\frac{k\pi}{l}x$ trên đoạn [0, l]. Khi đó ta có:

$$u(x,t)\big|_{t=0} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin\frac{k\pi}{l}x = u_o(x)$$

Do đó:

$$a_k = \frac{2}{l}\int_0^l u_o(x)\sin\frac{k\pi}{l}x dx$$

và: $$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\pi a}{l} b_k \sin\frac{k\pi}{l}x = u_1(x)$$

nên: $$b_k = \frac{2}{k\pi a}\int_0^l u_1(x)\sin\frac{k\pi}{l}x dx$$

Ví dụ : Tìm dao động gắn chặt tại hai mút x = 0 và x = l nếu vị trí ban đầu của dây trùng với trục Ox và vận tốc ban đầu của các thành phần dây được cho bởi hàm số:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \begin{cases} v_o \text{ khi } \left|x - \frac{1}{3}\right| \le \frac{2\pi}{h} \\ 0 \text{ khi } \left|x - \frac{1}{3}\right| > \frac{\pi}{2h} \end{cases}$$

$(0 \le x < l,\ t > 0)$, h là hằng số sao cho x thoả mãn $\left|x - \frac{l}{3}\right| \le \frac{\pi}{2h}$ chứa trong khoảng $(0, l)$.

Như vậy ta cần giải phương trình:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

với điều kiện đầu đã cho và điều kiện biên:

$$u(x,t)\big|_{t=0} \equiv 0;\ u(x,t)\big|_{x=l} = u(x,t)\big|_{x=l} = 0$$

Như vậy, vì $u_o(x) \equiv 0$ nên:

$$a_k \equiv 0$$

$$b_k = \frac{2}{k\pi a}\int_0^l u_1(x)\sin\frac{k\pi}{l}x\,dx = \frac{2}{k\pi a}\int_0^l v_o \sin\frac{k\pi}{l}x\,dx = \frac{4v_o l}{k^2\pi^2 a}\sin\frac{k\pi^2 h}{2}$$

và: $$u(x,t) = \frac{4v_o l}{\pi^2 a}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{k\pi}{3}\sin\frac{k\pi^2 h}{2}}{k^2}\sin\frac{k\pi a t}{l}\sin\frac{k\pi x}{l}$$

c. Bài toán 2: Giải phương trình

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t) \qquad 0 \le x \le l,\ 0 \le t \le T$$

với các điều kiện:

$$u(x,t)\big|_{t=0} = u_o(x);\ \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = u_1(x)$$

$$u(x,t)\big|_{x=0} = 0; \qquad u(x,t)\big|_{x=l} = 0$$

Bài toán này mô tả quá tình truyền sóng của dây hữu hạn có tác động của lực cưỡng bức bên ngoài với hai đầu dây cố định. Dạng ban đầu của dây là $u_o(x)$ và vận tốc ban đầu của dây cho bởi $u_1(x)$. Ta cũng giải bài toán bằng phương pháp phân ly biến số Fourier. Ta tìm nghiệm dưới dạng:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t)\sin\frac{k\pi x}{l} \tag{1}$$

Ta giả sử các hàm $u_o(x)$ và $u_1(x)$ khai triển được dưới dạng chuỗi Fourier theo sin trong khoảng $[0, l]$, khi đó ta có:

$$u_o(x) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(0)\sin\frac{k\pi x}{l}$$

hay: $$T_k(0) = \frac{2}{l}\int_0^l u_o(x)\sin\frac{k\pi}{l}x\,dx$$

$$u_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} T'_k(0)\sin\frac{k\pi x}{l}$$

hay: $$T'_k(0) = \frac{2}{l}\int_0^l u_o(x)\sin\frac{k\pi}{l}x\,dx$$

Mặt khác lấy đạo hàm hai lần u(x, t) trong (1) theo x và t ta có:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} T''_k(t)\sin\dfrac{k\pi x}{l} \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\sum\limits_{k=1}^{\infty} T_k(t)\left(\dfrac{k\pi}{l}\right)^2 \sin\dfrac{k\pi x}{l} \end{cases}$$

Khai triển hàm f(x, t) theo sin:

$$f(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin\frac{k\pi x}{l}$$

Trong đó:

$$C_k = \frac{2}{l}\int_0^l f(x,t)\sin\frac{k\pi}{l}xdx$$

Đặt các điều kiện trên vào phương trình của u(x, t) ta có:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[T''_k(t) + \left(\frac{ak\pi}{l}\right)^2 T_k(t) - C_k(t)\right]\sin\frac{k\pi x}{l} = 0$$

Từ đó suy ra $T_k(t)$ trong (1) là nghiệm của phương trình tuyến tính cấp 2 hệ số hằng:

$$T''_k(t) + \left(\frac{ak\pi}{l}\right)^2 T_k(t) = C_k(t)$$

thoả mãn các điều kiện đầu và điều kiện biên

Ví dụ 1: Giải phương trình

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 1 \qquad 0 \le x \le 1,\ 0 \le t$$

với các điều kiện:

$$u(x,t)\big|_{t=0} = 0;\ \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = 1$$

$$u(x,t)\big|_{x=0} = u(x,t)\big|_{x=1} = 0$$

Ta tìm nghiệm dưới dạng (1). Trong ví dụ này f(x, t) ≡ 1. Như vậy:

$$C_k = \frac{2}{l}\int_0^l f(x,t)\sin\frac{k\pi}{l}xdx = 2\int_0^1 \sin k\pi x dx = \frac{2}{k\pi}(1-\cos k\pi)$$

hay: $$C_k = \begin{cases} \dfrac{4}{k\pi} & \text{khi } k = 2n-1 \\ 0 & \text{khi } k = 2n \end{cases}$$

Mặt khác $u_1(x) \equiv 1$, $u_o(x) \equiv 0$ nên ta suy ra:

$$T_k = 2\int_0^1 u_1(x)\sin k\pi x dx = 2\int_0^1 \sin k\pi x dx = \begin{cases} \dfrac{4}{k\pi} & \text{khi } k = 2n-1 \\ 0 & \text{khi } k = 2n \end{cases}$$

Vậy với k chẵn ta phải giải phương trình vi phân thường:

$$T''_{2n}(t) + (2n\pi)^2 T_{2n}(t) = 0$$

với điều kiện: $T_{2n}(0) = 0$; $T'_{2n}(0) = 0$

Như vậy $T_{2n}(t) \equiv 0$

Với k lẻ ta phải giải phương trình vi phân tương ứng là:

$$T''_{2n-1}(t)+\left[(2n-1)\pi\right]^2 T_{2n-1}(t)=\frac{4}{(2n-1)\pi}$$

với điều kiện: $T_{2n-1}(0) = 0$; $T'_{2n-1}(0)=\dfrac{4}{(2n-1)\pi}$

Nghiệm tổng quát của phương trình này là:

$$T_{2n-1}(t)=C_1\cos(2n-1)\pi t+C_2\sin(2n-1)\pi t+\frac{4}{(2n-1)^3\pi^3}$$

Khi t = 0 ta có:

$$C_1=-\frac{4}{(2n-1)^3\pi^3}$$

Mặt khác ta có:

$$T'_{2n-1}(t)=-C_1(2n-1)\pi\sin(2n-1)\pi t+C_2(2n-1)\pi\cos(2n-1)\pi t$$

Theo điều kiện đầu:

$$T'_{2n-1}(t)=-C_1(2n-1)\pi\sin(2n-1)\pi t+C_2(2n-1)\pi\cos(2n-1)\pi t=\frac{4}{(2n-1)^3\pi^3}$$

nên: $C_2=\dfrac{4}{(2n-1)^2\pi^2}$

Thay C_1 và C_2 vào biểu thức của $T_{2n-1}(t)$ ta có:

$$T_{2n-1}(t)=\frac{4}{(2n-1)^3\pi^3}\left[(2n-1)\pi\sin(2n-1)\pi t-\cos(2n-1)\pi t+1\right]$$

và:

$$u(x,t)=\frac{4}{(2n-1)^3\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\left[(2n-1)\pi\sin(2n-1)\pi t-\cos(2n-1)\pi t+1\right]\sin\frac{(2n-1)\pi x}{1}$$

Ví dụ 2: Giải phương trình

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+x(x-1)\qquad\qquad 0\le x\le 1,\ 0\le t$$

với các điều kiện:

$$u(x,t)\big|_{t=0}=\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0$$

$$u(x,t)\big|_{x=0}=u(x,t)\big|_{x=1}=0$$

Trong ví dụ này ta có f(x, t) = x(x - 1). Vậy:

$$C_k=\frac{2}{1}\int_0^1 f(x,t)\sin\frac{k\pi}{1}xdx=2\int_0^1 x(x-1)\sin k\pi xdx$$

$$=2\left[\left.(x^2-x)\left(-\frac{\cos k\pi x}{k\pi}\right)\right]\right|_{x=0}^{x=1}+\frac{1}{k\pi}\int_0^1(2x-1)\cos k\pi xdx$$

nên: $C_k = \frac{4}{k\pi^2}\left[(-1)^k - 1\right] = \begin{cases} \frac{8}{(2n-1)^3\pi^3} & \text{khi } k = 2n-1 \\ 0 & \text{khi } k = 2n \end{cases}$

Ta tìm nghiệm của bài toán dưới dạng (1) nên bây giờ phải tìm $T_k(t)$

Với k = 2n (chẵn), ta tìm $T_{2n}(t)$ từ phương trình :

$T''_{2n}(t) + (2n\pi)^2 T_{2n}(t) = 0$

với điều kiện: $T_{2n}(0) = 0$; $T'_{2n}(0) = 0$

Như vậy $T_{2n}(t) \equiv 0$

Với k = 2n -1 (lẻ) ta phải giải phương trình vi phân tương ứng là:

$$T''_{2n-1}(t) + \left[(2n-1)\pi\right]^2 T_{2n-1}(t) + \frac{8}{(2n-1)^3\pi^3} = 0$$

với điều kiện: $T_{2n-1}(0) = 0$; $T'_{2n-1}(0) = 0$

Nghiệm tổng quát của phương trình này là:

$$T_{2n-1}(t) = C_1\cos(2n-1)\pi t + C_2\sin(2n-1)\pi t - \frac{8}{(2n-1)^5\pi^5}$$

Khi t = 0 thì từ các điều kiện đầu ta rút ra:

$$C_1 = \frac{8}{(2n-1)^5\pi^5} \qquad C_2 = 0$$

$$T_{2n-1}(t) = \frac{8}{(2n-1)^5\pi^5}\left[\cos(2n-1)\pi t - 1\right]$$

$$u(x,t) = \frac{8}{(2n-1)^5\pi^5}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\cos(2n-1)\pi t - 1\right]\sin(2n-1)\pi x$$

d. Bài toán hỗn hợp: Sau khi đã giải 2 bài toán trên ta trở về giải phương trình:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t) \qquad 0 \le x \le l,\ 0 \le t \le T \qquad (1)$$

với các điều kiện :

$$u(x,t)\big|_{t=0} = u_o(x); \ \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = u_1(x)$$

$$u(x,t)\big|_{x=0} = \varphi_1(t); \qquad u(x,t)\big|_{x=l} = \varphi_2(t)$$

Ta giải bài toán bằng cách đưa vào hàm phụ:

$$\rho(x,t) = \varphi_1(t) + \frac{x}{l}\left[\varphi_2(t) - \varphi_1(t)\right]$$

Khi đó ta tìm nghiệm của bài toán hỗn hợp dưới dạng:

$$u(x,t) = \tilde{u}(x,t) + \rho(x,t) \qquad (2)$$

Trong đó hàm $\tilde{u}(x,t)$ ta phải xác định. Trước hết ta có nhận xét:

$$\rho(x,t)\big|_{x=0} = \varphi_1(t) \qquad \rho(x,t)\big|_{x=l} = \varphi_2(t)$$

Vậy kết hợp với điều kiện đã cho ta có:

$$\tilde{u}(x,t)\big|_{x=0} = \tilde{u}(x,t)\big|_{x=l} = 0 \qquad (3)$$

Khi t = 0 ta sẽ có:

$$\begin{cases} \tilde{u}(x,t)\big|_{t=0} = \left[u(x,t)-\rho(x,t)\right]\big|_{t=0} = u_o(x) - \varphi_1(0) - \dfrac{x}{l}\left[\varphi_2(0)-\varphi_1(0)\right] = \tilde{u}_o(x) \\ \left.\dfrac{\partial \tilde{u}}{\partial t}\right|_{t=0} = \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} - \left.\dfrac{\partial \rho}{\partial t}\right|_{t=0} = u_1(x) - \varphi_1'(0) - \dfrac{x}{l}\left[\varphi_2'(0)-\varphi_1'(0)\right] = \tilde{u}_o'(x) \end{cases} \quad (4)$$

Đạo hàm 2 lần (2) theo x và t rồi thay vào (1) và rút gọn ta có:

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} + f_1(x,t) \quad (5)$$

Trong đó:

$$f_1(x,t) = f(x,t) - \varphi_1''(t) - \frac{x}{l}\left[\varphi_2''(t) - \varphi_1''(t)\right]$$

Tóm lại, để tìm u(x, t) ta phải giải (5) với các điều kiện (3) và (4). Đó chính là dạng bài toán 2 mà ta đã biết cách giải. Sau đó kết hợp $\tilde{u}(x,t)$ và ρ(x, t) ta tìm được nghiệm.

§3. BÀI TOÁN CAUCHY CỦA PHƯƠNG TRÌNH TRUYỀN SÓNG TRONG KHÔNG GIAN

Bài toán Cauchy của phương trình truyền sóng trong không gian là bài toán giải phương trình:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \quad (1)$$

với các điều kiện:

$$\begin{cases} u(x,y,z,t)\big|_{t=0} = u_o(x,y,z) \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = u_1(x,y,z) \end{cases} \quad -\infty < x < \infty,\ -\infty < y < \infty,\ -\infty < z < \infty,\ t > 0 \quad (2)$$

Người ta đã chứng minh được rằng nghiệm của phương trình có dạng:

$$u(x,y,z,t) = \frac{1}{4\pi a^2 t}\iint_S u_1(\xi,\eta,\zeta)ds + \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{4\pi a^2 t}\iint_S u_o(\xi,\eta,\zeta)ds\right]$$

Trong đó S là mặt cầu tâm M(x,y,z) và bán kính at. Công thức này gọi là công thức Kirhoff.

Trong trường hợp mặt phẳng, công thức Kirhoff trở thành công thức Poisson:

$$u(x,y,t) = \frac{1}{2\pi a}\iint_D \frac{u_1(\xi,\eta)d\xi d\eta}{\sqrt{(at)^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}} + \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2\pi a}\iint_D \frac{u_o(\xi,\eta)d\xi d\eta}{\sqrt{(at)^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}}\right]$$

§4. BÀI TOÁN DAO ĐỘNG CƯỠNG BỨC

1. Nguyên lí Duhamel: Để giải các bài toán có tác động của ngoại lực người ta thường dùng nguyên lý Duhamel được phát biểu như sau:

Nếu H(α, x, t) với mọi giá trị của tham biến α là nghiệm của phương trình:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = a^2 \Delta il$$

với các điều kiện:

$$\begin{cases} H(\alpha, x, t)\big|_{t=0} = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial t} H(\alpha, x, t)\Big|_{t=0} = h(x, \sigma) \end{cases}$$

Khi đó hàm:

$$u(x, t) = \int_0^1 H(\alpha, x, t-\alpha)d\alpha$$

sẽ là nghiệm của phương trình:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\Delta u + h(x, t)$$

với các điều kiện:

$$\begin{cases} u(x, t)\big|_{t=0} = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

Để hiểu rõ hơn về nguyên lý Duhamel ta sẽ dùng nó để giải các bài toán về dao động cưỡng bức sau:

2. Bài toán 1: Giải phương trình:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + f(x, y, z, t) \qquad (1)$$

với các điều kiện:

$$\begin{cases} u(x, y, z, t)\big|_{t=0} = u_o(x, y, z) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = u_1(x, y, z) \end{cases} \quad -\infty < x < \infty,\ -\infty < y < \infty,\ -\infty < z < \infty,\ t > 0 \qquad (2)$$

Ta dùng phương pháp chồng nghiệm, nghĩa là tìm nghiệm của phương trình (1) dưới dạng:

$$u(x, y, z, t) = \overline{u}(x, y, z, t) + \overline{\overline{u}}(x, y, z, t)$$

Trong đó $\overline{u}(x, y, z, t)$ là nghiệm của bài toán:

$$\frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial t^2} = a^2\Delta\overline{u}$$

với: $\quad \overline{u}\big|_{t=0} = u_o;\ \dfrac{\partial\overline{u}}{\partial t}\Big|_{t=0} = u_1$

Còn $\overline{\overline{u}}(x, y, z, t)$ là nghiệm của bài toán:

$$\frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial t^2} = a^2\Delta\overline{u} + f$$

với: $\quad \overline{\overline{u}}\big|_{t=0} = 0;\ \dfrac{\partial\overline{\overline{u}}}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0$

Theo công thức Kirhoff ta có:

$$\bar{u}(x,y,z,t)=\frac{1}{4\pi a^2 t}\iint_S u_1(\xi,\eta,\zeta)ds+\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{4\pi a^2 t}\iint_S u_o(\xi,\eta,\zeta)ds\right]$$

Mặt khác theo nguyên lí Duhamel ta có:

$$H(\alpha,x,y,z,t)=\frac{1}{4\pi a^2}\iint_S \frac{f(\xi,\eta,\zeta,\alpha)}{t}ds$$

Từ đó suy ra:

$$\bar{\bar{u}}(x,y,z,t)=\frac{1}{4\pi a^2}\int_0^1\left[\iint_{S(t-\alpha)}\frac{f(\xi,\eta,\zeta,\alpha)}{t-\alpha}ds\right]d\alpha$$

Để rút gọn công thức nghiệm trong tích phân trên ta đổi biến r = a(t - α). Do đó ta có:

$$\bar{\bar{u}}(x,y,z,t)=\frac{1}{4\pi a^2}\int_0^1\left[\iint_{S(r)}\frac{f\left(\xi,\eta,\zeta,t-\frac{r}{a}\right)}{r}ds\right]dr=\frac{1}{4\pi a^2}\iiint_{Vat}\frac{f\left(\xi,\eta,\zeta,t-\frac{r}{a}\right)}{r}dV$$

Trong đó V_{at} là hình cầu bao bởi mặt S và:

$$r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}$$

Vậy nghiệm của bài toán 1 là:

$$u(x,y,z,t)=\frac{1}{4\pi a^2}\iint_S\frac{u_1(\xi,\eta,\zeta)}{t}ds+\frac{\partial}{\partial t}\left[\iint_S\frac{u_o(\xi,\eta,\zeta)}{t}ds\right]+\iiint_{Vat}\frac{f\left(\xi,\eta,\zeta,t-\frac{r}{a}\right)}{r}dV$$

Công thức này được gọi là công thức Kirhoff tổng quát.

3. Bài toán 2: Giải phương trình:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+f(x,y,t) \qquad (1)$$

với các điều kiện:

$$\begin{cases} u(x,y,t)\big|_{t=0}=u_o(x,y) \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=u_1(x,y)\end{cases} \quad -\infty < x < \infty,\ -\infty < y < \infty,\ t > 0 \qquad (2)$$

Nghiệm của bài toán rút ra nhờ cách giải tương tự như bài toán trước bằng cách dùng nguyên lý Duhamel:

$$u(x,y,t)=\frac{1}{4\pi a^2}\iint_S\frac{u_1(\xi,\eta)}{\sqrt{a^2t^2-(x-\xi)^2-(y-\eta)^2}}d\xi d\eta$$

$$+\frac{\partial}{\partial t}\left[\iint_{D_a}\frac{u_o(\xi,\eta)}{\sqrt{a^2t^2-(x-\xi)^2-(y-\eta)^2}}d\xi d\eta\right]+\int_0^1\left[\iint_{D_{a(t-\alpha)}}\frac{f(\xi,\eta,\alpha)d\xi d\eta}{\sqrt{a^2(t-\alpha)^2-(x-\xi)^2-(y-\eta)^2}}\right]d\alpha$$

Trong đó D_{at} và $D_{a(t-\alpha)}$ là miền tròn có cùng tâm (x, y) và bán kính là at và a(t-α) . Công thức này được gọi là công thức Poisson tổng quát.

4. Bài toán 3: Giải phương trình:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t) \tag{1}$$

với các điều kiện:

$$\begin{cases} u(x,t)\big|_{t=0} = u_o(x) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = u_1(x) \end{cases} \quad -\infty < x < \infty,\ t > 0 \tag{2}$$

Dựa trên nguyên lý Duhamel và công thức D'Alembert ta đưa đến nghiệm bài toán:

$$u(x,t) = \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{at} u_1(\xi)d\xi + \frac{1}{2}\left[u_o(x+at) + u_o(x-at)\right] + \frac{1}{2a}\int_0^1\left[\int_{x-a(t-\alpha)}^{x+a(t-\alpha)} f(\xi,\alpha)d\xi\right]d\alpha$$

đây là công thức D'Alembert tổng quát.

§5. BÀI TOÁN HỖN HỢP CỦA PHƯƠNG TRÌNH LOẠI HYPERBOLIC

Cho D là một miền phẳng với biên là đường cong trơn. Ta cần tìm nghiệm của phương trình:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \tag{1}$$

với các điều kiện đầu :

$$\begin{cases} u(x,y,t)\big|_{t=0} = u_o(x,y) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = u_1(x,y) \end{cases} \quad -\infty < x < \infty,\ -\infty < y < \infty,\ t > 0 \tag{2}$$

và điều kiện biên:

$$u(x,y,t)\big|_{(x,y)\in\gamma} = 0 \tag{3}$$

Bài toán này ta giải bằng phương pháp phân ly biến số và sẽ tìm nghiệm của nó dưới dạng:

$$u(x, y, t) = u^*(x, y).T(t) \tag{4}$$

Đạo hàm 2 vế của (4) theo x, y và t hai lần rồi thay vào (10) ta nhận được phương trình:

$$\frac{1}{u^*}\left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2}\right) = \frac{1}{a^2}\frac{T''}{T}$$

Từ đó suy ra:

$$\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} + \lambda u^* = 0 \tag{5}$$

$$T''(t) + a^2\lambda T(t) = 0 \tag{6}$$

Trong đó λ là một hằng số.

Để tìm nghiệm của bài toán (1) với các điều kiện (2), (3) ta thấy rằng $T(t) \neq 0$ và đối với các điểm trên biên ta phải có:

$$u(x,y)\big|_{(x,y)\in\gamma} = 0 \tag{7}$$

Những giá trị λ để tồn tại nghiệm $u^*(x, y) \neq 0$ được gọi là các giá trị riêng và các nghiệm $u^*(x, y)$ tương ứng được gọi là các hàm riêng của bài toán. Tính chất của giá trị riêng và hàm riêng là:

* Mọi giá trị riêng đều dương
* Tập các giá trị riêng là một tập vô hạn đếm được
* Nếu $\lambda_i \neq \lambda_j$ thì các hàm riêng tương ứng với chúng thoả mãn hệ thức:

$$\iint_D u_i(x,y)u_j(x,y)dxdy = 0$$

nghĩa là các hàm riêng trực giao với nhau

* Một giá trị riêng có thể ứng với nhiều hàm riêng độc lập tuyến tính khác nhau. Giá trị riêng như vậy được gọi là giá trị riêng bội
* Đối với các hàm riêng nếu chưa là hệ trực chuẩn thì bằng phương pháp trực giao hoá Schmidt có thể xây dựng hệ hàm riêng trực giao chuẩn, nghĩa là đối với hệ đó ta có:

$$\iint_D u_i(x,y)u_j(x,y)dxdy = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

* Mọi hàm $\beta(x, y)$ khả vi, liên tục 2 lần và thoả mãn điều kiện biên:

$$\beta(x,y)\big|_{(x,y)\in\gamma} = 0$$

đều có thể khai triển theo hệ thống các hàm trực giao chuẩn thành chuỗi hội tụ tuyệt đối và đều trên miền D, nghĩa là nó có thể biểu diễn dưới dạng:

$$\beta(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k u_k(x,y)$$

trong đó a_k được tính theo công thức:

$$a_k = \iint_D \beta(x,y)u_k(x,y)dxdy$$

Từ những tính chất đã nêu của hàm riêng và giá trị riêng ta thấy bài toán (5) & (6) có các giá trị riêng dương nên (6) có nghiệm tổng quát là:

$$T_k(t) = b_k\cos\sqrt{\lambda_k}at + c_k\sin\sqrt{\lambda_k}at$$

Từ đó suy ra:

$$u(x,y,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x,y)T_k(t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x,y)\left[b_k\cos\sqrt{\lambda_k}at + c_k\sin\sqrt{\lambda_k}at\right]$$

Nếu xét đến các điều kiện ban đầu ta có:

$$b_k = \iint_D u_o(x,y)\tilde{u}_k(x,y)dxdy$$

$$c_k = \frac{1}{a\lambda_k}\iint_D u_1(x,y)u_k(x,y)dxdy$$

Ví dụ 1: Giải phương trình:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

trên miền $D = \begin{cases} 0 \leq x \leq l \\ 0 \leq y \leq m \end{cases}$ $\qquad t \geq 0$

với các điều kiện đầu:

$$\begin{cases} u(x,y,t)\big|_{t=0} = xy(l-x)(m-y) = u_o(x,y) \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0 = u_1(x,y) \end{cases}$$

và các điều kiện biên:

$$u(x,y,t)\big|_{(x,y)\in\gamma} = 0$$

trong đó γ là biên của miền D.

Ta tìm nghiệm của bài toán dưới dạng (4):

$u(x, y, t) = u^*(x, y).T(t)$

trong đó $u^*(x, y)$ lại được tìm dưới dạng $u^*(x, y) = X(x).Y(y)$ bằng phương pháp phân li biến số.

Khi đó phương trình (5) được viết thành:

$$\frac{Y''(y)}{Y(y)} + \lambda = -\frac{X''(x)}{X(x)}$$

Từ đó ta suy ra:

$$\begin{cases} X''(x) + \alpha X(x) = 0 \\ Y''(y) + \beta Y(y) = 0 \end{cases} \tag{8}$$

Từ điều kiện biên của bài toán ta rút ra:

$$\begin{cases} X(0) = X(l) = 0 \\ Y(0) + Y(l) = 0 \end{cases} \tag{9}$$

Khi giải phương trình (8) với điều kiện (9) để có nghiệm không tầm thường ta cần có:

$$\alpha_k = \frac{k^2\pi^2}{l^2};\ \beta_n = \frac{\pi^2 n^2}{m^2}$$

Từ đó ta có:

$$\lambda_{kn} = \pi^2\left(\frac{k^2}{l^2} + \frac{n^2}{m^2}\right)$$

Nghiệm riêng ứng với các giá trị riêng đó là hệ hàm trực chuẩn:

$$u_{kn} = \frac{2}{\sqrt{lm}}\sin\frac{k\pi x}{l}\sin\frac{n\pi y}{m}$$

Khi đó nghiệm của phương trình (6) có dạng:

$$T_k(t) = b_{kn}\cos\left(\pi at\sqrt{\frac{k^2}{l^2} + \frac{n^2}{m^2}}\right) + c_{kn}\sin\left(\pi at\sqrt{\frac{k^2}{l^2} + \frac{n^2}{m^2}}\right)$$

Tóm lại nghiệm của bài toán sẽ là:

$$u(x,y,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left[b_{kn}\cos\left(\pi at\sqrt{\frac{k^2}{l^2} + \frac{n^2}{m^2}}\right) + c_{kn}\sin\left(\pi at\sqrt{\frac{k^2}{l^2} + \frac{n^2}{m^2}}\right)\right]\sin\frac{k\pi x}{l}\sin\frac{n\pi y}{m}$$

Trong đó b_{kn} và c_{kn} được tính như sau:

$c_{kn} = 0\ \forall k, n$ vì $u_1 \equiv 0$

$$b_{kn} = \frac{4}{lm}\int_0^l\int_0^m xy(l-x)(m-y)\sin\frac{k\pi x}{l}\sin\frac{n\pi y}{m}dxdy$$

$$= \frac{4}{lm}\int_0^l x(l-x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx\int_0^m y(m-y)\sin\frac{n\pi y}{m}dy$$

$$= \begin{cases} \dfrac{64m^2l^2}{\pi^6(2k'+1)^3(2n'+1)^3} & k = 2k'+1,\ n = 2n'+1 \\ 0 & k = 2k_1 \end{cases}$$

Như vậy:

$$u(x,y,t) = \frac{64m^2l^2}{\pi^6}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\cos\pi at\theta_{kn}}{(2k'+1)^3(2n'+1)^3}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{l}\right]\sin\frac{(2n+1)\pi y}{m}$$

Ví dụ 2:Giải phương trình:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

trên miền $D = \begin{cases} 0 \le x \le l \\ 0 \le y \le m \end{cases} \qquad t \ge 0$

với các điều kiện đầu:

$$\begin{cases} u(x,y,t)\big|_{t=0} = u_o(x,y) = \sin\dfrac{\pi x}{l}\sin\dfrac{\pi y}{l} \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = u_1(x,y) = \dfrac{a}{l} \end{cases}$$

và các điều kiện biên:

$$u(x,y,t)\big|_{(x,y)\in\gamma} = 0$$

trong đó γ là biên của miền D.

Tương tự như ví dụ 1, sau khi dùng phương pháp phân li biến số ta tìm được giá trị riêng là:

$$\lambda_{kn} = \pi^2\left(\frac{k^2}{l^2} + \frac{n^2}{l^2}\right)$$

hệ hàm trực chuẩn tương ứng là $\dfrac{2}{l}\sin\dfrac{k\pi x}{l}\sin\dfrac{n\pi y}{l}$ và các hệ số trong nghiệm tổng quát được tính như sau:

$$b_{kn} = \frac{4}{l^2}\int_0^l\int_0^l \sin\frac{\pi x}{l}\sin\frac{\pi y}{l}\sin\frac{k\pi x}{l}\sin\frac{n\pi y}{m}dxdy = \begin{cases} 0 & k,n \ne 1 \\ 1 & k = n = 1 \end{cases}$$

$$\frac{\pi a}{l}\sqrt{k^2+n^2}c_{kn} = \frac{4}{l^2}\int_0^l\int_0^l \sin\frac{\pi x}{l}\sin\frac{\pi y}{l}\sin\frac{n\pi y}{m}dxdy$$

$$= \frac{4a}{l^3}\int_0^l \sin\frac{\pi x}{l}dx\int_0^l \sin\frac{\pi y}{l}\sin\frac{n\pi y}{m}dy = \begin{cases} 0 & k,n \ \text{chan} \\ \dfrac{16a}{l\pi^2(2k'+1)(2n'+1)} & k,n \ \text{le} \end{cases}$$

Nghiệm của bài toán là:

$$u(x,y,t) = \left(\cos\frac{at\pi\sqrt{2}}{l} + \frac{16}{\pi^3\sqrt{2}}\sin\frac{at\pi\sqrt{2}}{l}\right)\sin\frac{\pi x}{l}\sin\frac{\pi y}{l}$$

$$+\frac{16}{\pi^3}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left[\dfrac{at\pi\sqrt{(2k+1)^2+(2n+1)^2}}{l}\right]}{(2k+1)(2n+1)\sqrt{(2k+1)^2+(2n+1)^2}}\sin\left(\frac{2k+1}{l}\pi x\right)\sin\left(\frac{2n+1}{l}\pi y\right)$$

§6. BÀI TOÁN CAUCHY- PHƯƠNG TRÌNH TRUYỀN NHIỆT TRONG THANH VÔ HẠN VÀ NỬA VÔ HẠN

1. Bài toán ban đầu: Bài toán Cauchy của phương trình truyền nhiệt - phương trình loại parabolic là bài toán giải phương trình:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (1)$$

với các điều kiện đầu :

$$u(x,t)\big|_{t=0} = u_o(x) \quad -\infty < x < \infty,\ -\infty < y < \infty,\ t \ge 0 \qquad (2)$$

Dùng phương pháp phân li biến số ta tìm nghiệm dưới dạng:

$u(x, t) = X(x).T(t)$

Lấy đạo hàm theo x và t rồi đưa vào phương trình (1) ta có:

$$T'(t) + a^2\lambda T(t) = 0 \qquad (3)$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0 \qquad (4)$$

với λ là hằmg số.

Phương trình (3) cho nghiệm là:

$$T(t) = Ce^{-\lambda a^2 t}$$

với C là một hằng số

Mặt khác nhiệt độ của thanh không thể đạt đến ∞ khi t tiến đến ∞. Do vậy λ phải là số dương. Kết hợp với nghiệm của phương trình (4) ta có:

$$u_h(x,t) = e^{-h^2a^2t}\left[C_1(h)\cosh x + C_2(h)\sinh x\right]$$

u(x,t) là nghiệm riêng của (1) với C_1 và C_2 là các hệ số có thể phụ thuộc h. Họ các nghiệm ở đây là một tập hợp vô hạn không đếm được. Do đó ta sẽ tìm nghiệm của bài toán dưới dạng tích phân theo tham biến h.

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty}u_h(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty}e^{-h^2a^2t}\left[C_1(h)\cosh x + C_2(h)\sinh x\right]dh$$

Khi t = 0 ta có:

$$u(x,t)\big|_{t=0} = u_o(x) = \int_{-\infty}^{\infty}\left[C_1(h)\cosh x + C_2(h)\sinh x\right]dh$$

Giả sử hàm $u_o(x)$ khai triển được dưới dạng tích phân Fourier ta sẽ có:

$$C_1(h) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} u_o(\xi)\cosh\xi d\xi$$

$$C_2(h) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} u_o(\xi)\sinh\xi d\xi$$

Từ đó ta có:

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} u_o(\xi)e^{-h^2a^2t}\cosh(\xi - x)d\xi\right]dh$$

$$u(x,t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{0}^{\infty} e^{-h^2a^2t}\cosh(\xi - x)dh\right]u_o(\xi)d\xi \tag{5}$$

ta tính tích phân đơn bên trong bằng phương pháp đổi biến: $\tau = ha\sqrt{t};\ \theta = \dfrac{\xi - x}{a\sqrt{t}}$

$$\int_0^{\infty} e^{-h^2a^2t}\cosh(\xi - x)dh = \frac{1}{a\sqrt{t}}\int_0^{\infty} e^{-\tau^2}\cos\theta\tau d\tau = \frac{1}{a\sqrt{t}}I(\theta)$$

Trong đó

$$I(\theta) = \int_0^{\infty} e^{-\tau^2}\cos\theta\tau d\tau \tag{6}$$

Sau khi lấy đạo hàm của (6) theo θ rồi tích phân từng phần ta có:

$$I'(\theta) = \frac{\theta}{2}I(\theta) \Rightarrow \frac{I'(\theta)}{I(\theta)} = \frac{\theta}{2} \Rightarrow I(\theta) = Ce^{-\frac{\theta^2}{4}}$$

Khi θ = 0 ta có:

$$C = I(0) = \int_0^{\infty} e^{-\tau^2}d\tau = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

nên: $I(\theta) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\frac{\theta^2}{4}}$

$$\int_0^{\infty} e^{-h^2a^2t}\cosh(\xi - x)dh = \frac{\sqrt{\pi}}{a\sqrt{t}}\exp\left[-\frac{(\xi - x)^2}{4a^2t}\right]$$

Thay vào ta có:

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} u_o(\xi)\exp\left[-\frac{(\xi - x)^2}{4a^2t}\right]d\xi \tag{7}$$

Công thức (7) được gọi là công thức Poisson của bài toán Cauchy.

Đối với bài toán Cauchy trong không gian n chiều của quá trình truyền nhiệt:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_{21}^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}\right)$$

với các điều kiện đầu :

$$u(x_1, x_2, ..., x_n, t)\big|_{t=0} = u_o(x_1, x_2, ..., x_n)$$

Người ta chứng minh được nghiệm của phương trình là:

$$u(x_1, x_2, ..., x_n, t) = \frac{1}{\left(2a\sqrt{\pi t}\right)^n} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} u_0(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n) \exp\left\{-\frac{1}{4a^2 t}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i - x_i)^2\right\} d\xi_1 ... d\xi_{n1}$$

Đối với bài toán truyền nhiệt trong thanh nửa vô hạn ta xét các bài toán nhỏ ứng với từng trường hợp riêng rồi mới xét đến bài toán tổng quát.

2. Bài toán 1: Truyền nhiệt trong thanh nửa vô hạn, cách nhiệt đầu mút thanh biết nhiệt độ ban đầu của thanh bằng không:

Khi này ta phải giải phương trình:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad 0 \le x \le \infty, t \ge 0 \tag{8}$$

với các điều kiện :

$$u(x,t)\big|_{t=0} = u_o(x) \tag{9}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0 \tag{10}$$

Để giải bài toán ta kéo dài chẵn hàm $u_o(x)$ sang phần âm của trục x và áp dụng công thức (7). Khi đó nó sẽ thoả mãn (8). Mặt khác theo (7) ta cũng sẽ có:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\left\{-\frac{1}{4a^3 t\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} u_o(\xi)(\xi - x)\exp\left[-\frac{(\xi - x)^2}{4a^2 t}\right]d\xi\right\}\right|_{x=0}$$

Từ đó suy ra:

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{0} u_o(\xi)\exp\left[-\frac{(\xi - x)^2}{4a^2 t}\right]d\xi + \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{0}^{\infty} u_o(\xi)\exp\left[-\frac{(\xi - x)^2}{4a^2 t}\right]d\xi$$

Trong tích phân đầu ta đổi biến ξ = -ξ’ và do tính chất chẵn của u(ξ) ta sẽ có:

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{0} u_o(\xi')\exp\left[-\frac{(\xi' - x)^2}{4a^2 t}\right]d\xi' + \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{0}^{\infty} u_o(\xi)\exp\left[-\frac{(\xi - x)^2}{4a^2 t}\right]d\xi$$

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{0}^{\infty} u_o(\xi)\left\{\exp\left[-\frac{(\xi + x)^2}{4a^2 t}\right] + \exp\left[-\frac{(\xi - x)^2}{4a^2 t}\right]\right\}d\xi$$

3. Bài toán 2: Truyền nhiệt trong thanh nửa vô hạn biết nhiệt độ ban đầu của thanh một đầu mút luôn luôn giữ 0 độ.

Khi này ta phải giải phương trình:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad 0 \le x \le \infty, t \ge 0$$

với các điều kiện :

$$u(x,0)\big|_{t=0} = u_o(x)$$

$$u(x,l)\big|_{t=0} = 0$$

Để giải bài toán này ta kéo dài lẻ hàm $u_o(x)$ sang phần âm của trục x và áp dụng công thức (7) ta sẽ có:

$$u(x,t)\big|_{x=0} = \frac{1}{2at\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} u_o(\xi)\exp\left[-\frac{\xi^2}{4a^2 t}\right]d\xi = 0$$

Tích phân này bằng 0 vì $u_o(\xi)$ là hàm lẻ.

Từ đó suy ra:

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{0}u_o(\xi)\exp\left[-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}\right]d\xi+\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{0}^{\infty}u_o(\xi)\exp\left[-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}\right]d\xi$$

Trong tích phân đầu ta đổi biến ξ = -ξ' và do tính chất lẻ của u(ξ) ta sẽ có:

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{0}^{\infty}u_o(\xi)\left\{\exp\left[-\frac{(\xi+x)^2}{4a^2t}\right]-\exp\left[-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}\right]\right\}d\xi$$

4. Bài toán 3: Truyền nhiệt trong thanh nửa vô hạn biết nhiệt độ đầu mút của thanh và nhiệt độ ban đầu của thanh bằng 0.

Khi này ta phải giải phương trình:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\qquad 0\le x\le\infty,\ t\ge 0$$

với các điều kiện :

$$u(x,t)\big|_{x=0}=q(t)$$

$$u(x,t)\big|_{t=0}=0$$

Ta giải bài toán này bằng phương pháp biến đổi Laplace của hàm phức. Giả sử u(x, t) và q(t) là các hàm gốc trong phép biến đổi Laplace. Áp dụng phép biến đổi Laplace cho u(x, t) và các đạo hàm của nó ta có:

$$u(x,t)\leftrightarrow U(x,p);\ \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\leftrightarrow pU(x,p);\ \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}\leftrightarrow p^2U(x,p)$$

Coi p là thông số và đặt các biểu thức trên vào phương trình truyền nhiệt ta có:

$$pU(x,p)=a^2\frac{\partial^2 U(x,p)}{\partial x^2}\tag{10}$$

Vậy ta phải giải phương trình (10) với điều kiện:

$$U(x,p)\big|_{x=0}=Q(p)\leftrightarrow q(t)\tag{11}$$

Nghiệm tổng quát của (10) có dạng:

$$U(x,p)=C_1\exp\left(\frac{\sqrt{p}}{a}x\right)+C_2\exp\left(-\frac{\sqrt{p}}{a}x\right)$$

Hàm U(x, p) là hàm bị chặn khi x $\to\infty$ nên C_1 = 0. Từ điều kiện (11) ta suy ra:

C_2 = U(0, p) = Q(p)

Vậy nghiệm của phương trình (10) thoả mãn (11) sẽ là:

$$U(x,p)=Q(p)\exp\left(-\frac{\sqrt{p}}{a}x\right)$$

Ta viết lại nó dưới dạng:

$$U(x,p)=pQ(p)\frac{1}{p}\exp\left(-\frac{\sqrt{p}}{a}x\right)$$

Áp dụng công thức Duhamel:

$pF(p)G(p)\leftrightarrow g(0)f(t)+f*g'$

và tính chất:

$$\frac{1}{p}\exp\left(-\frac{\sqrt{p}}{a}x\right)\leftrightarrow 1-\mathrm{erf}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)=\mathrm{Erf}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)$$

Trong đó:

$$\mathrm{erf}(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x\exp\left(-\tau^2\right)d\tau$$

Ta sẽ rút ra:

$$u(x,t)=q(t)\mathrm{Erf}(\infty)+\int_0^t\left[\mathrm{Erf}\left(\frac{x}{2a\sqrt{\Lambda}}\right)\right]q(t-\tau)d\tau$$

Mặt khác ta biết rằng:

$$\mathrm{Erf}(\infty)=1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty\exp\left(-\tau^2\right)d\tau=0$$

$$\mathrm{Erf}\left(\frac{x}{2a\sqrt{\tau}}\right)\Bigg|_{\tau=0}=1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{x}{2a\sqrt{\tau}}}\exp\left(-\theta^2\right)d\theta\Bigg|_{\tau=0}=\frac{x}{2a\sqrt{\pi}\tau^{\frac{3}{2}}}\exp\left(-\frac{x^2}{4a^2\tau}\right)$$

Từ đó suy ra:

$$u(x,t)=\frac{x}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{q(t-\tau)}{\tau^{\frac{3}{2}}}\exp\left(-\frac{x^2}{4a^2\tau}\right)d\tau$$

5. Bài toán 4: Truyền nhiệt trong thanh nửa vô hạn, biết nhiệt độ ban đầu của thanh và biết nhiệt độ tại đầu mút.

Khi này ta phải giải phương trình:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\qquad 0\le x\le\infty,\ t\ge 0$$

với các điều kiện :

$$u(x,t)\big|_{x=0}=u_1(t)$$

$$u(x,t)\big|_{t=0}=u_o(x)$$

Để giải bài toán này ta dùng kết quả của bài toán 2 và bài toán 3 và nguyên lý chồng nghiệm. Cụ thể ta tìm nghiệm u(x, t) dưới dạng:

$$u(x,t)=\tilde{u}(x,t)+\hat{u}(x,t)$$

Trong đó $\tilde{u}(x,t)$ là nghiệm của bài toán:

$$\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial x^2}$$

với các điều kiện:

$$\tilde{u}(x,t)\big|_{t=0}=u_o(x);\ \tilde{u}(x,t)\big|_{x=0}=0$$

còn $\hat{u}(x,t)$ là nghiệm của bài toán:

$$\frac{\partial^2\hat{u}}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2\hat{u}}{\partial x^2}$$

với các điều kiện:

$$\hat{u}(x,t)\Big|_{t=0} = 0\,; \qquad \hat{u}(x,t)\Big|_{x=0} = u_1(t)$$

Theo kết quả bài toán 2 và bài toán 3 ta suy ra:

$$\tilde{u}(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_0^{\infty} u_o(\xi)\left\{\exp\left[-\frac{(\xi+x)^2}{4a^2t}\right] - \exp\left[-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}\right]\right\}d\xi$$

$$\hat{u}(x,t) = \frac{x}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^{t}\frac{u_1(t-\tau)}{\tau^{\frac{3}{2}}}\exp\left(-\frac{x^2}{4a^2\tau}\right)d\tau$$

Ví dụ: Giả sử trong một ống nửa vô hạn tại một đầu ống x = 0 bị chặn bởi một tấm không thẩm thấu và tại x = l cũng có một tấm như vây. Trong đoạn [0, l] có một môi trường với hệ số khuyếch tán $D_1 = a^{-2}$ có chứa đầy một loại chất với hệ số đậm đặc u_o. Trong phân còn lại của ống [l, ∞] có một môi trường với hệ số khuyếch tán $D_2 = b^{-2}$ và trong đó không chứa chất trong đoạn [0, l].

Tại thời điểm t = 0 ta bỏ tấm chắn tại x = l và khi đó bắt đầu quá trình khuyếch tán. Gọi nồng độ chất khuyếch tán tại x ở thời điểm t là u(x, t). Trước hết ta thiết lập phương trình khuyếch tán trong ống. Gọi $u_1(x, t)$ là nồng độ của chất lỏng trong khoảng $0 \le x \le l$. Khi đó ta có:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \qquad 0 \le x \le l \tag{13}$$

với điều kiện:

$$u_1(x,t)\Big|_{t=0} = u_o\,; \quad \frac{\partial u_1}{\partial x}\bigg|_{x=0} = 0$$

Gọi $u_2(x, t)$ là hàm nồng độ chất khuyếch tán trong đoạn [l, ∞] ta có:

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = \frac{1}{b^2}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \qquad l \le x \le \infty \tag{14}$$

với điều kiện:

$$u_2(x,t)\Big|_{t=0} = 0;\ \ u_2(x,t)\Big|_{x=\infty} = 0$$

Mặt khác tại điểm x = l thì $u_1(x, t)$ và $u_2(x, t)$ phải thoả mãn điều kiện liên tục ("kết dính"), nghĩa là:

$$u_1(x,t)\Big|_{x=l} = u_2(x,t)\Big|_{x=l}$$

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u_1(l,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{b^2}\frac{\partial^2 u_2(l,t)}{\partial x^2}$$

Giả sử $u_1(x, t)$ và $u_2(x, t)$ và đạo hàm của chúng là các hàm gốc trong biến đổi Laplace, ta sẽ có các hàm ảnh là:

$$u_1(x,t) \leftrightarrow U_1(x,p) \qquad\qquad u_2(x,t) \leftrightarrow U_2(x,p)$$

$$\frac{\partial u_1(x,t)}{\partial t} \leftrightarrow pU_1(x,p) - u_o \qquad\qquad \frac{\partial u_2(x,t)}{\partial t} \leftrightarrow pU_2(x,p)$$

$$\frac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial x^2} \leftrightarrow \frac{\partial^2 U_1(x,t)}{\partial x^2} \qquad\qquad \frac{\partial^2 u_2(x,t)}{\partial x^2} \leftrightarrow \frac{\partial^2 U_2(x,t)}{\partial x^2}$$

Từ các phương trình (13) và (14) và các hệ thức trên ta suy ra:

$$pU_1(x,p) = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 U_1(x,t)}{\partial x^2} + u_o$$

$$pU_2(x,p) = \frac{1}{b^2}\frac{\partial^2 U_2(x,t)}{\partial x^2}$$

Nghiệm tổng quát tương ứng sẽ là:

$$U_1(x,p) = C_1 \mathrm{cha}x\sqrt{p} + C_2 \mathrm{sha}x\sqrt{p} + \frac{u_o}{p} \qquad (15)$$

$$U_2(x,p) = C_3 \exp\left[b\sqrt{p}(x-l)\right] + C_4 \exp\left[-b\sqrt{p}(x-l)\right] \qquad (16)$$

Mặt khác từ điều kiện $\left.\frac{\partial u_1}{\partial x}\right|_{x=0} = 0$ ta suy ra $\left.\frac{dU_1(x,p)}{dx}\right|_{x=0} = 0$. Từ đó ta có:

$$\left. C_1 a\sqrt{p}\mathrm{sha}x\sqrt{p} + C_2 a\sqrt{p}\mathrm{cha}x\sqrt{p}\right|_{x=0} = C_2 a\sqrt{p} = 0$$

Vậy $C_2 = 0$

Mặt khác $\left. u_2(x,t)\right|_{x=\infty} = 0$ nên ảnh của $u_2(x, t)$ là một hàm bị chặn khi $x \to \infty$ và do đó $C_3 = 0$. Khi đó (15) và (16) trở thành:

$$U_1(x,p) = C_1 \mathrm{cha}x\sqrt{p} + \frac{u_o}{p}$$

$$U_2(x,p) = C_4 \exp\left[-b\sqrt{p}(x-l)\right]$$

Xét đến điều kiện "kết dính" ta có:

$$U_1(l,p) = U_2(l,p)$$

$$\left.\frac{1}{a^2}\frac{dU_1(x,p)}{dx}\right|_{x=l} = \left.\frac{1}{b^2}\frac{dU_2(x,p)}{dx}\right|_{x=l}$$

Từ đó ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} C_1 \mathrm{chal}\sqrt{p} + \dfrac{u_o}{p} = C_4 \\ \dfrac{1}{a^2} C_1 a\sqrt{p}\mathrm{shal}\sqrt{p} = -\dfrac{1}{b^2} C_4 b\sqrt{p} \end{cases}$$

Giải hệ phương trình trên ta có:

$$\begin{cases} C_1 = -\dfrac{u_o a}{p\left(a\mathrm{chal}\sqrt{p} + b\mathrm{shal}\sqrt{p}\right)} \\ C_4 = \dfrac{u_o b\mathrm{shal}\sqrt{p}}{p\left(a\mathrm{chal}\sqrt{p} + b\mathrm{shal}\sqrt{p}\right)} \end{cases}$$

Vậy:

$$U_1(x,p) = \frac{u_o}{p} - \frac{u_o a\mathrm{cha}x\sqrt{p}}{p\left(a\mathrm{chal}\sqrt{p} + b\mathrm{shal}\sqrt{p}\right)}$$

$$U_2(x,p) = \frac{u_o b\mathrm{shal}\sqrt{p}}{p\left(a\mathrm{chal}\sqrt{p} + b\mathrm{shal}\sqrt{p}\right)}\exp\left[-b\sqrt{p}(x-l)\right]$$

Sau khi dùng biến đổi Laplace ngược ta có các hàm $u_1(x, t)$ và $u_2(x, t)$.

§7. BÀI TOÁN TRUYỀN NHIỆT TRONG THANH VÔ HẠN VÀ NỬA VÔ HẠN CÓ NGUỒN NHIỆT

1. Nguyên lý Duhamel: Trước hết ta xét nguyên lý Duhamel của phương trình truyền nhiệt không thuần nhất trong không gian n chiều R^n. Nếu $H(\alpha, x, t)$ với mọi giá trị của tham biến α là nghiệm của phương trình:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = a^2 \Delta H \qquad (1)$$

với điều kiện:

$$H(\alpha, x, t)\big|_{t=0} = h(x, \alpha) \qquad (2)$$

khi đó hàm:

$$u(x, t) = \int_0^t H(\alpha, x, t-\alpha)\, d\alpha \qquad (3)$$

là nghiệm của phương trình:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + h(x, \alpha) \qquad (4)$$

và thoả mãn điều kiện:

$$u(x, t)\big|_{t=0} = 0$$

Ta áp dụng vào các bài toán sau đây

2. Bài toán 1: Truyền nhiệt trong thanh vô hạn có nguồn nhiệt với nhiệt độ ban đầu bằng 0.

Khi này ta giải phương trình:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t) \qquad -\infty < x < \infty;\ t \geq 0$$

với điều kiện ban đầu:

$$u(x, t)\big|_{t=0} = 0$$

Sử dụng nguyên lý Duhamel và kết quả cho bởi công thức Poisson của bài toán Cauchy ta có nghiệm là:

$$u(x, t) = \int_0^t \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\xi, \alpha)}{2a\sqrt{\pi}(t-\alpha)} \exp\left[-\frac{(\xi - x)^2}{4a^2(t-\alpha)} \right] d\xi \right) d\alpha$$

Ở đây hàm $H(\alpha, x, t)$ là tích phân:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi, \alpha) \exp\left[-\frac{(\xi - x)^2}{4a^2 t} \right] d\xi$$

3. Bài toán 2: Truyền nhiệt trong thanh vô hạn có nguồn nhiệt với nhiệt độ ban đầu bằng $u_o(x)$.

Khi này ta giải phương trình:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t) \qquad -\infty < x < \infty;\ t \geq 0$$

với điều kiện ban đầu:

$$u(x, t)\big|_{t=0} = u_o(x)$$

Dùng phương pháp xếp chồng nghiệm và kết quả của bài toán 1 ta có nghiệm:

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}u_o(\xi)\exp\left[-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}\right]d\xi+\int_0^t\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\xi,\tau)}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}\exp\left[-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2(t-\tau)}\right]d\xi\right)d\tau$$

4. Bài toán 3: Gải bài toán truyền nhiệt:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t)\qquad -\infty< x<\infty;\ t\ge 0$$

với điều kiện ban đầu:

$$u(x,t)\big|_{t=0}=u_o(x)$$

$$u(x,t)\big|_{x=0}=u_1(t)$$

Dùng phương pháp xếp chồng nghiệm và kết quả của các bài toán trên ta có nghiệm:

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_0^{\infty}u_o(\xi)\left\{\exp\left[-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}\right]-\exp\left[-\frac{(\xi+x)^2}{4a^2t}\right]\right\}d\xi$$

$$+\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{u_1(t-\tau)}{\tau^{3/2}}\exp\left[-\frac{x^2}{4a^2\tau}\right]d\tau$$

$$+\frac{x}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t\left\{\int_0^{\infty}\frac{f(\xi,\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\left\{\exp\left[-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2(t-\tau)}\right]-\exp\left[-\frac{(\xi+x)^2}{4a^2(t-\tau)}\right]\right\}d\xi\right\}d\tau$$

§8. BÀI TOÁN HỖN HỢP CỦA PHƯƠNG TRÌNH LOẠI HYPERBOLIC TRUYỀN NHIỆT TRONG THANH HỮU HẠN VÀ MIỀN HỮU HẠN

1. Đặt bài toán: Ta xét bài toán truyền nhiệt trong khối lập phương đồng chất, không có nguồn nhiệt với điều kiện biết nhiệt độ ban đầu của khối đó và nhiệt độ trên biên luôn luôn bằng không. Bài toán này đưa đến phương trình:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=a^2\Delta u \qquad (1)$$

Trong miền $T\ge t\ge 0$ và $0<x<l_1;\ 0<y<l_2;\ 0<z<l_3$

với điều kiện :

$$u(x,y,z,t)\big|_{t=0}=u_o(x,y,z) \qquad (2)$$

$$u\big|_{x=0}=u\big|_{x=l_1}=u\big|_{y=0}=u\big|_{y=l_2}=u\big|_{z=0}=u\big|_{z=l_3}=0 \qquad (3)$$

Dùng phương pháp tách biến ta tìm nghiệm dưới dạng:

$$u(x, y, z, t) = u^*(x, y, z).T(t)$$

và ta có:

$$T'(t)+a^2\lambda T(t)=0 \qquad (4)$$

$$\Delta u^*(x,y,z)+\lambda u^*(x,y,z)=0 \qquad (5)$$

Từ (4) để có nghiệm riêng không suy biến và kèm điều kiện bị chặn của u khi $t\to\infty$ ta suy ra nghiệm của nó có dạng:

$$T_\lambda(t) = C\exp(-a^2\lambda t)$$

Mặt khác ta lại dùng phương pháp tách biến để tìm $u^*(x, y, z)$, nghĩa là:

$u^*(x, y, z) = X(x).Y(y).Z(z)$

Sau khi đạo hàm và thay vào phương trình ta có:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} + \frac{Z''(z)}{Z(z)} + \lambda = 0$$

Từ đó ta rút ra hệ phương trình vi phân tương ứng là:

$$X''(x) + \alpha X(x) = 0$$
$$Y''(y) + \beta Y(y) = 0 \qquad \alpha + \beta + \gamma = 0$$
$$Z''(z) + \gamma Z(z) = 0$$

Đối với hàm X(x), Y(y), Z(z) ta thấy do điều kiện biên (3) chúng phải thoả mãn các điều kiện sau:

$$X(0) = X(l_1) = 0;\ Y(0) = Y(l_2) = 0;\ Z(0) = Z(l_3) = 0$$

Giải hệ phương trình vi phân trên với các điều kiện đã biết ta suy ra các giá trị riêng ($-\lambda$):

$$\alpha_k = \frac{k^2\pi^2}{l_1^2};\ \beta_k = \frac{m^2\pi^2}{l_2^2};\ \gamma_k = \frac{n^2\pi^2}{l_3^2}$$

$$\lambda_{k,m,n}(l_1, l_2, l_3) = \pi^2\left(\frac{k^2}{l_1^2} + \frac{m^2}{l_2^2} + \frac{n^2}{l_3^2}\right)$$

Các hàm riêng tương ứng khi đó sẽ là:

$$u_{k,m,n}(x, y, z) = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{l_1 l_2 l_3}} \sin\frac{k\pi}{l_1}x \sin\frac{m\pi}{l_2}y \sin\frac{n\pi}{l_3}z$$

Vậy nghiệm tổng quát của bài toán đó là:

$$u(x, y, z, t) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} C_{k,m,n} \exp\left[-a^2\pi^2\left(\frac{k^2}{l_1^2} + \frac{m^2}{l_2^2} + \frac{n^2}{l_3^2}\right)t\right] \sin\frac{k\pi}{l_1}x \sin\frac{m\pi}{l_2}y \sin\frac{n\pi}{l_3}z$$

Trong đó $C_{k,m,n}$ được suy ra từ điều kiện:

$$C_{k,m,n} = \frac{8}{l_1 l_2 l_3}\int_0^{l_1}\int_0^{l_2}\int_0^{l_3} u_o(\xi, \eta, \zeta) \sin\frac{k\pi}{l_1}\xi \sin\frac{m\pi}{l_2}\eta \sin\frac{n\pi}{l_3}\zeta\, d\xi\, d\eta\, d\zeta$$

2. Bài toán 1: Giải phương trình truyền nhiệt:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Trong miền $T \ge t \ge 0$ và $0 < x < l$

với điều kiện :

$$u(x, t)\big|_{t=0} = u_o(x)$$

$$u\big|_{x=0} = u\big|_{x=l} = 0$$

Nghiệm là:

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \exp\left(-a^2\pi^2\frac{k^2}{l^2}t\right)\sin\frac{k\pi}{l}x$$

Trong đó:

$$C_k = \frac{2}{l}\int_0^l u_o(\xi)\sin\frac{k\pi}{l}d\xi$$

3. Bài toán 2: Giải phương trình truyền nhiệt:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t) \qquad (6)$$

Trong miền $T \geq t \geq 0$ và $0 < x < l$

với điều kiện :

$$u(x,t)\big|_{t=0} = u_o(x)$$

$$u(x,t)\big|_{x=0} = u(x,t)\big|_{x=l} = 0$$

Ta tìm nghiệm dưới dạng:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \sin\frac{k\pi}{l}x \qquad (7)$$

Giả sử $u_o(x)$ có các đạo hàm liên tục trong khoảng (0, l) và $u_o(0) = u_o(l) = 0$ còn hàm f(x, t) có các đạo hàm riêng cấp 1 theo x liên tục trong khoảng (0, l) và:

$f(0, t) = f(l, t) = 0$

Khi đó ta có thể thu được các khai triển Fourier của chúng là:

$$f(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \sin\frac{k\pi}{l}x \qquad (8)$$

$$u_o(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \sin\frac{k\pi}{l}x \qquad (9)$$

với:

$$f_k(t) = \frac{2}{l}\int_0^l f(x,t) \sin\frac{k\pi}{l}x dx$$

$$\alpha_k = \frac{2}{l}\int_0^l u_o(x) \sin\frac{k\pi}{l}x dx$$

Sau khi lấy đạo hàm hai vế của (7) và chú ý đến (8) và (9) ta có:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[T_k(t) + \left(\frac{k\pi}{l}a\right)^2 T_k(t) - f_k(t)\right]\sin\frac{k\pi}{l}x = 0$$

Nên:

$$T_k(t) + \left(\frac{k\pi}{l}a\right)^2 T_k(t) = f_k(t) \qquad (10)$$

Khi t = 0 ta có:

$$u\big|_{t=0} = u_o(x) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(0) \sin\frac{k\pi}{l}x = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \sin\frac{k\pi}{l}x$$

nên:

$$T_k(0) = \alpha_k \qquad (11)$$

Sau khi giải (10) với điều kiện (11) ta có $T_k(t)$, nghĩa là có nghiệm của bài toán.

4. Bài toán 3: Giải phương trình truyền nhiệt:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t) \qquad (12)$$

Trong miền $T \geq t \geq 0$ và $0 < x < l$

với điều kiện :

$$u(x,t)\big|_{t=0} = u_o(x)$$

$$u(x,t)\big|_{x=0} = \varphi_1(x);\ u(x,t)\big|_{x=l} = \varphi_2(x)$$

Ta giải bài toán này bằng phương pháp chồng nghiệm, nghĩa là tìm nghiệm dưới dạng:

$$u(x,t) = \overline{u}(x,t) + \widetilde{u}(x,t) + \varphi_1(t) + \frac{x}{l}\left[\varphi_2(t) - \varphi_1(t)\right]$$

Trong đó $\overline{u}(x,t)$ là nghiệm của phương trình:

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial x^2} + f(x,t)$$

với các điều kiện:

$$\overline{u}(x,t)\big|_{t=0} = u_o(x)$$

$$\overline{u}(x,t)\big|_{x=0} = \overline{u}(x,t)\big|_{x=l} = 0$$

Còn $\widetilde{u}(x,t)$ là nghiệm của phương trình:

$$\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial x^2} + f(x,t)$$

với các điều kiện:

$$\widetilde{u}(x,t)\big|_{t=0} = 0$$

$$\widetilde{u}(x,t)\big|_{x=0} = \widetilde{u}(x,t)\big|_{x=l} = 0$$

Rõ ràng $\overline{u}(x,t)$ đượcc rút ra từ bài toán 1 và $\widetilde{u}(x,t)$ được rút ra từ bài toán 2.