PGS. TSKH. LÊ MẬU HẢI – TS. BÙI ĐẮC TẮC

BÀI TẬP
HÀM BIẾN PHỨC

LỜI MỞ ĐẦU

Nhằm đáp ứng nhu cầu học tập môn "Hàm biến phức" của sinh viên khoa Toán các trường Đại học sư phạm, bộ môn Lý thuyết hàm khoa Toán – Tin Trường Đại học sư phạm Hà Nội đã biên soạn cuốn sách "Bài tập hàm biến phức". Các bài tập trong sách được chia thành 5 chương tương ứng với nội dung 5 chương lý thuyết thuộc phần I của giáo trình "Hàm biến phức" do hai tác giả Nguyễn Văn Khuê và Lê Mậu Hải biên soạn và Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà Nội đã xuất bản năm 1997 và hiện đang được tái bản.

Phần đầu mỗi chương của cuốn sách bài tập này dành cho việc tóm tắt những kết quả chính về lý thuyết của chương đó, làm cơ sở cho lập luận và cách giải các bài tập của chương. Các bài tập được sắp xếp liền ngay sau đó. Ý tưởng của các tác giả biên soạn sách bài tập này là để người đọc tự giải bài tập, nhằm phát huy tối đa năng lực tự học và nâng cao dần khả năng tư duy sáng tạo độc lập. Bởi vậy, bên cạnh những bài tập rèn luyện kỹ năng tính toán là hàng loạt bài tập có tính lý thuyết và những bài tập khó thường được sắp xếp ở phía cuối chương và có đánh dấu *. Chúng tôi có gợi ý cách giải ở phần lớn các bài tập kèm theo các đáp số cần thiết. Các bài tập trong cuốn sách này được lựa chọn từ các bài tập ở những giáo trình "Hàm biến phức" trước đây như cuốn: "Tuyển tập các bài toán về lý thuyết hàm biến phức" của các tác giả L.I.Volkovưski – G.L.Luns và I.G.Aramanovitr và các bài tập ở cuối mỗi chương trong hai cuốn sách chuyên khảo về hàm biến phức của I.I.Privalov và B.V.Sabat. Tuy nhiên khá nhiều bài tập được chúng tôi tuyển lựa từ các sách bài tập hàm biến phức của các tác giả khác như:" Các bài toán trong lý thuyết hàm biến phức" của Jan G.Krzyz (American Elsevier – 1971) và đặc biệt là trong cuốn chuyên khảo về hàm một biến phức" Complex Variables – An Introduction" của tác giả Carlos A.Berenstein và Roger Gay xuất bản vào năm 1991.

Chúng tôi nghĩ rằng với sự lựa chọn như vậy, nhiều bài tập ở đây mang tính cập nhật cho môn học này trong giai đoạn hiện nay.

Nhân đây, tập thể biên soạn cuốn "Bài tập hàm biến phức" xin bày tỏ sự cám ơn tới GS.TSKH Nguyễn Văn Khuê, PGS.TS Nguyễn Đình Sang và PGS.TSKH Đỗ Đức Thái đã đọc kỹ bản thảo và cho những ý kiến có giá trị, bổ sung những chỗ còn khiếm khuyết để cuốn "Bài tập hàm biến phức" được hoàn chỉnh thêm.

Vì đây là lần xuất bản đầu tiên cuốn bài tập mới cho môn "Hàm biến phức" nên những thiếu sót trong quá trình biên tập là khó tránh khỏi. Chúng tôi xin tiếp nhận mọi đóng góp của các bạn đồng nghiệp để lần tái bản sách "Bài tập hàm biến phức" được hoàn thiện hơn.

Hà Nội, hè 2001

Các tác giả

CHƯƠNG I

SỐ PHỨC, DÃY SỐ PHỨC VÀ CHUỖI SỐ PHỨC

Giả sử

$$\mathbb{C} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$$

với hai phép toán cho bởi:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

$$(a, b).(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

$\mathbb{C}$ lập thành một trường và gọi là trường số phức. Mỗi $z = (a, b) \in \mathbb{C}$ gọi là một số phức. Ký hiệu a = Rez và gọi là phần thực của z, b = Imz và gọi là phần ảo của z.

Mỗi số phức $z = (a, 0)$ được đồng nhất với số thực $a \in \mathbb{R}$. Phần tử đơn vị của $\mathbb{C}$ đối với phép nhân là (1, 0) = 1. Phần tử $i = (0, 1)$ có tính chất $i^2 = (-1, 0) = -1$ gọi là đơn vị ảo.

Biểu diễn đại số của số phức. Giả sử $z = (a, b) \in \mathbb{C}$. Khi đó $z = a + bi$ gọi là biểu diễn đại số của z. Số phức $\overline{z} = a - bi$ gọi là liên hợp của z. Có thể thấy:

- $z.\overline{z} = a^2 + b^2 \geq 0$
- $\overline{z_1 + z_2 + \ldots + z_n} = \overline{z_1} + \overline{z_2} + \ldots + \overline{z_n}$
- $\overline{z_1.z_2\ldots z_n} = \overline{z_1}.\overline{z_2}\ldots\overline{z_n}$
- $z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}\,z$
- $z - \overline{z} = 2i\,\mathrm{Im}\,z$

- $\overline{\overline{z}} = z$
- $z = \overline{z}$ khi và chỉ khi $z \in \mathbb{R}$

Mỗi số phức $z = a + bi$ tương ứng với số thực:

$$|z| = \sqrt{z.\overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2} \geq 0$$

gọi là môđun của z. Khi đó:

- $|z| \geq 0$, $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
- $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
- $|z_1.z_2....z_n| = |z_1|.|z_2|....|z_n|$
- $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|$
- $|\text{Re}\, z| \leq |z|$, $|\text{Im}\, z| \leq |z|$

Mỗi số phức $z = a + bi$ được biểu diễn bởi một và chỉ một điểm M(a,b) trên mặt phẳng tọa độ xOy.

Giả sử $z = a + bi \neq 0$. Góc φ tạo bởi vectơ $\overrightarrow{Oz}$ với chiều dương của trục thực (trục Ox) gọi là argument của z. Giá trị chính của argument của z được viết là argz, là giá trị của argument của z thuộc $[-\pi, \pi)$. Nếu viết Argz thì đó là tập hợp tất cả các argument của z. Như vậy,

$$\text{Arg}z = \{\arg z + 2k\pi : k = 0, \pm 1, \pm 2, ...\}$$

Với mỗi $z \neq 0$, đặt $r = |z|$, $\varphi = \arg z$ thì:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \quad (1)$$

Dạng (1) gọi là dạng lượng giác của z. Khi đó:

$$z^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Trong trường hợp $\rho = 1$, xảy ra đẳng thức:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi \quad (2)$$

đúng với mọi $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ (2) gọi là công thức Moivre.

Ngoài hai dạng đại số và lượng giác, bằng cách đặt:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi \text{ với mọi } \varphi \in \mathbb{R}$$

còn có thể viết $z \in \mathbb{C}$ dưới dạng

$$z = \rho e^{i\varphi}, \rho = |z|, \varphi = \arg z \tag{3}$$

và gọi (3) là dạng mũ của số phức z. Khi đó nếu

$$z_1 = \rho_1 e^{i\varphi_1}, z_2 = \rho_2 e^{i\varphi_2}$$

thì có các đẳng thức:

$$z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}, \ (z_2 \neq 0)$$

và $z^n = \rho^n e^{in\varphi}$ với mọi $n \in \mathbb{Z}$

và

$$\left.\begin{aligned} \cos\varphi &= \frac{1}{2}\left(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}\right) \\ \sin\varphi &= \frac{1}{2}\left(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}\right) \end{aligned}\right\} \tag{E}$$

và (E) gọi là công thức Euler.

Với $n \geq 1$ và $z \in \mathbb{C}$. Căn bậc n của z là số phức $w \in \mathbb{C}$ với $w^n = z$. Khi đó viết $\sqrt[n]{z}$ để chỉ tập các giá trị của căn bậc n của z. Khi $z = 0$ thì $\sqrt[n]{0} = 0$. Nếu $z \neq 0$ thì $\sqrt[n]{z}$ có n giá trị và được cho bởi:

$$\sqrt[n]{z} = \left\{\sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)\right\}$$

$k = 0, 1, 2, \ldots, n-1, \rho = |z|, \varphi = \arg z$

Trong $\mathbb{R}^3$ xét mặt cầu

$$S = \{(\xi, \eta, \zeta) \in \mathbb{R}^3 : \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - \zeta = 0\}$$

và điểm $\qquad P = (0,0,1) \in S$.

Khi đó tồn tại một đồng phôi $\Pi : S \setminus P \to \mathbb{C}$. Bổ sung vào $\mathbb{C}$ điểm ∞ và đặt tương ứng với P ta nhận được tập số phức mở rộng $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ và là phép đồng phôi $\Pi : S \to \overline{C}$. Điểm $\Pi^{-1}(z) \in S \setminus P, z \in \mathbb{C}$ gọi là biểu diễn Riemann của số phức z, còn S gọi là mặt cầu Riemann biểu diễn $\overline{\mathbb{C}}$.

Mỗi ánh xạ $f : N^* = \{1,2,...\} \to \mathbb{C}$ gọi là một dãy số phức. Viết $z_n = f(n)$ và ký hiệu dãy số phức là $\{z_n\}$. Dãy $\{z_n\}$ gọi là hội tụ tới $z \in \mathbb{C}$ và viết $\lim\limits_{n \to \infty} z_n = z$ nếu

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0(\varepsilon) > 0, \forall n \geq n_0(\varepsilon) : |z_n - z| < \varepsilon.$$

Nếu $z_n = x_n + iy_n$, $z = x + iy$ thì $\lim\limits_{n \to \infty} z_n = z$ nếu và chỉ nếu $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$ và $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = y$.

Dãy $\{z_n\}$ gọi là tiến ra ∞ và viết $\lim\limits_{n \to \infty} z_n = \infty$ nếu $\forall M > 0, \exists n_0, \forall n \geq n_0 : |z_n| > M$.

Có thể thấy các tính chất sau:

Nếu $\lim\limits_{n \to \infty} z_n = z$, $z_n, z \in \mathbb{C}$ và $\lim\limits_{n \to \infty} w_n = w$, w_n, $w \in \mathbb{C}$.

thì
$$\lim_{n \to \infty} |z_n| = |z|$$

$$\lim_{n \to \infty} (z_n \pm w_n) = \lim_{n \to \infty} z_n \pm \lim_{n \to \infty} w_n = z \pm w$$

$$\lim_{n \to \infty} (z_n . w_n) = \lim_{n \to \infty} z_n . \lim_{n \to \infty} w_n = zw.$$

Nếu $\lim w_n \neq 0$ thì

$$\lim_{n\to\infty}\frac{z_n}{w_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty} z_n}{\lim\limits_{n\to\infty} w_n}$$

Dãy $\{z_n\}$ hội tụ trong $\mathbb{C}$ khi và chỉ khi nó là dãy Cauchy, nghĩa là

$$\forall\varepsilon>0, \exists n_0(\varepsilon)>0, \forall n, m\ge n_0 : |z_n - z_m|<\varepsilon .$$

Cho dãy số phức $\{u_n\}\subset\mathbb{C}$. Biểu thức"hình thức":

$$u_1+u_2+....+u_n+.....=\sum_{n=1}^{\infty}u_n \qquad (4)$$

gọi là một chuỗi số phức. Số hạng u_n gọi là số hạng thứ n của chuỗi (4).

Với n = 1, 2, 3,.. đặt

$$S_n=u_1+u_2+....+u_n .$$

thì S_n gọi là tổng riêng thứ n của chuỗi (4).

Dãy $\{S_n\}_{n\ge 1}$ gọi là dãy tổng riêng của (4). Nếu tồn tại $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S \ne \infty$ thì (4) gọi là hội tụ và S gọi là tổng của (4). Khi đó viết $S=\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$. Chuỗi không hội tụ gọi là phân kỳ.

Tiêu chuẩn sau đây gọi là tiêu chuẩn Cauchy dành cho sự hội tụ của (4). Đó là: (4) hội tụ nếu và chỉ nếu

$$\forall\varepsilon>0, \exists n_0(\varepsilon)>0, \forall n\ge n_0, \forall p\ge 1 : |z_{n-1}+z_{n+2}+....+z_{n+p}|<\varepsilon .$$

Với mỗi $a\in\mathbb{C}, r>0$, ký hiệu:

$$\Delta(a,r)=\{z\in C : |z-a|<r\}$$

gọi là r – lân cận của a.

Tập $U\subset\mathbb{C}$ gọi là lân cận của $a\in\mathbb{C}$ nếu có $r>0$ sao cho $\Delta(a,r) \subset U$.

Tập $G \subset \mathbb{C}$ gọi là mở nếu G là lân cận của mọi $a \in G$. Tập $F \subset \mathbb{C}$ gọi là đóng nếu $G = \mathbb{C} \setminus F$ là mở.

Giả sử $X \subset \mathbb{C}$. Điểm $a \in X$ gọi là điểm trong của X nếu X là lân cận của a. Tập các điểm trong của X gọi là phần trong của X và ký hiệu IntX.

IntX là tập mở lớn nhất chứa trong X.

Điểm $a \in \mathbb{C}$ gọi là điểm tụ của X nếu với mọi lân cận U_a của a, $U_a \cap X \setminus \{a\} \neq \varnothing$. Tập các điểm tụ của X được ký hiệu là X' và gọi là tập dẫn xuất thứ nhất của X. Điểm $a \in X$ gọi là điểm cô lập của X nếu có lân cận U_a của a sao cho $U_a \cap X = \{a\}$.

Tập các điểm tụ của X cùng với các điểm cô lập của X gọi là bao đóng của X và ký hiệu $\overline{X}$. Mỗi điểm $a \in \overline{X}$ gọi là điểm dính của X.

Tập $X \subset \mathbb{C}$ là đóng nếu và chỉ nếu $X = \overline{X}$.

Có thể thấy X là tập đóng nếu mọi dãy trong X hội tụ thì giới hạn phải thuộc X.

Điểm $a \in \mathbb{C}$ gọi là điểm biên của X nếu với mọi lân cận U_a của a thì $U_a \cap X \neq \varnothing$ và $U_a \cap (\mathbb{C} \setminus X) \neq \varnothing$. Tập các điểm biên của X được ký hiệu là ∂X và:

$$\overline{X} = \mathrm{Int}X \cup \partial X$$

Tập $X \subset \mathbb{C}$ gọi là tập compact (hay là compact) nếu mọi dãy trong X có chứa một dãy con hội tụ tới một điểm thuộc X.

Một kết quả quan trọng liên quan tới tính compact của $X \subset \mathbb{C}$ là định lý Heine – Borel. Giả sử $X \subset \mathbb{C}$. Khi đó 3 điều sau là tương đương:

1) X là compact.

2) Mọi phủ mở của X chứa một phủ con hữu hạn, nghĩa là với mọi hệ các tập mở $\{G_\alpha\}_{\alpha\in I}$ sao cho $X \subset \bigcup_{\alpha\in I} G_\alpha$ thì có $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ sao cho $X \subset \bigcup_{i=1}^{p} G_{\alpha_i}$

3) X là tập đóng và bị chặn.

Giả sử $\varphi(t)$ và $\psi(t)$ là hai hàm thực liên tục trên [a, b]. Khi đó đẳng thức:

$$z = z(t) = \varphi(t) + i\psi(t)\,,\ a \le t \le b$$

cho biểu diễn tham số của đường cong liên tục L = z([a, b]) trong $\mathbb{C}$.

Trong trường hợp $\varphi(t)$ và $\psi(t)$ có đạo hàm $\varphi'(t)$ và $\psi'(t)$ liên tục và $\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) \neq 0$ khi $t \in (a,b)$ thì L gọi là đường cong trơn.

Đường cong liên tục được tạo nên từ một số hữu hạn đường cong trơn gọi là đường cong trơn từng khúc.

Các điểm A = z(a) và B = z(b) gọi là các điểm đầu và điểm cuối của đường L.

Đường cong L gọi là kín nếu A = B và gọi là Jordan nếu với $a < t_1 < t_2 < b$ thì $z(t_1) \neq z(t_2)$.

Mọi đường cong Jordan kín gọi là chu tuyến.

Cho $D \subset \mathbb{C}$. D gọi là một miền nếu nó thỏa mãn 2 điều kiện:

a) D mở.

b) D liên thông nghĩa là với a, b $\in$ D là hai điểm bất kỳ thì có đường cong $L \subset D$ nối a và b.

Nếu γ là một chu tuyến trong $\mathbb{C}$ thì γ chia $\mathbb{C}$ thành hai miền có biên chung là γ. Miền bị chặn (không chứa điểm ∞) kí hiệu D_γ^+ (hay D_γ), phần còn lại ký hiệu D_γ^- và gọi là miền ngoài giới hạn bởi γ.Khi đó chiều dương đi trên γ là chiều mà người quan sát nhìn thấy D_γ^+ ở bên trái.

Miền D gọi là đơn liên nếu với mọi chu tuyến $\gamma \subset D$ thì $D_\gamma^+ \subset D$ (hay $D_\gamma \subset D$).

Trường hợp miền D giới hạn phía ngoài bởi chu tuyến γ và bên trong bởi n chu tuyến $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ sao cho $\gamma_i \cap \gamma_j = \phi$ khi $i \neq j$, $1 \le i, j \le n$ và các $\gamma_i (1 \le i \le n)$ đều thuộc miền giới hạn bởi γ gọi là miền đa liên (còn gọi là (n + 1) _liên).

BÀI TẬP CHƯƠNG I

1.1. SỐ PHỨC, MÔĐUN VÀ ARGUMENT CỦA SỐ PHỨC. CĂN VÀ LŨY THỪA CỦA SỐ PHỨC

1. Thực hiện các phép tính:

a) $\dfrac{2+3i}{1+i}$

b) $\dfrac{1}{1+2i}$

c) $(2+i)^4$

2. Tìm môđun và giá trị chính của argument của các số phức:

a) $1+i$

b) $2+3i$

c) $2-3i$

d) $-2-3i$

e) $bi \quad (b \neq 0)$

f) $a+bi \ (a \neq 0)$

3. Tìm:

a) $\sqrt[3]{-1}$

b) $\sqrt{1+i}$

c) $\sqrt{6+8i}$

d) $\sqrt[3]{-2+2i}$

4. Chứng minh rằng tập giá trị $\sqrt{z^2-1}$ nằm trên một đường thẳng đi qua gốc tọa độ và song song với đường phân giác của góc trong của tam giác với đỉnh tại các điểm −1, 1 và z kẻ từ đỉnh z.

5. Chứng minh:

$$|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|.$$

$$|z_1 - z_2| \ge \big||z_1| - |z_2|\big|.$$

Giải thích xem khi nào có dấu đẳng thức xảy ra ?

6. Chứng minh:

$$\left|\frac{z}{|z|} - 1\right| \le |\arg z|$$

$$|z-1| \le \big||z|-1\big| + |z||\arg z|$$

Giải thích xem khi nào có dấu đẳng thức xảy ra ?

7. Chứng minh:

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$$

Giải thích ý nghĩa hình học của đẳng thức trên.

8. Chứng minh:

$$|1 - \overline{z_1}z_2|^2 - |z_1 - z_2|^2 = (1 - |z_1|^2)(1 - |z_2|^2)$$

9. Chứng minh bất đẳng thức:

$$|z_1 + z_2| \geq \frac{1}{2}(|z_1| + |z_2|)\left|\frac{z_1}{|z_1|} + \frac{z_2}{|z_2|}\right|.$$

10. Sử dụng công thức Moivre, hãy tính:

a) $(1+i\sqrt{3})^3$.

b) $(1+i)^{100}$.

c) $(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i)^{1001}$.

11. Hãy tìm tất cả các số phức z thỏa mãn:

$$|z| - z = \frac{1}{2} + i$$

12. Tìm các tổng:

a) $1 + \cos x + \cos 2x + ... + \cos nx$

b) $\sin x + \sin 2x + ... + \sin nx$

c) $\cos x + \cos 3x + ... + \cos(2n-1)x$

d) $\sin x + \sin 3x + ... + \sin(2n-1)x$

***13.** Giả sử $z_1, z_2, ..., z_n$ là n số phức khác 0. Hãy chứng minh rằng các tính chất sau là tương đương:

(i) $|z_1 + z_2 + ... + z_n| = |z_1| + |z_2| + ... + |z_n|$

(ii) $\arg z_1 = \arg z_2 = ... = \arg z_n$

(iii) $\frac{z_1}{|z_1|} = \frac{z_2}{|z_2|} = ... = \frac{z_n}{|z_n|}$

14. Hãy chứng minh rằng nếu $|a| < 1, |b| < 1$ thì:

$$\left|\frac{|a|-|b|}{1-|a|.|b|}\right| \leq \left|\frac{a-b}{1-a.b}\right| \leq \frac{|a|+|b|}{1+|a|.|b|}.$$

15. Chứng minh rằng với mọi số phức a, b ta có:

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leq \frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|} \leq \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}$$

***16.** (Bất đẳng thức Abel). Cho $z_1, z_2, \ldots, z_n$ là một hệ hữu hạn n số phức và:

$$\lambda = \max\{|z_1|, |z_1 + z_2|, \ldots, |z_1 + z_2 + \ldots + z_n|\}$$

Hãy chứng minh rằng với mọi hệ hữu hạn n số thực

$$a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n \geq 0$$

đều xảy ra bất đẳng thức:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k z_k\right| \leq \lambda.a_1.$$

***17.** Cho n+1 số phức $z, z_1, z_2, \ldots, z_n$. Hãy chứng minh rằng nếu $\mathrm{Im}(zz_k) > 0$, $1 \leq k \leq n$ thì: $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{z_k} \neq 0$.

***18.** Hãy chứng minh rằng nếu z_1, z_2, z_3 là nghiệm của phương trình $z^3 - 1 = 0$ thì

$$z_1^n + z_2^n + z_3^n = z_1^n.z_2^n + z_1^n z_3^n + z_2^n z_3^n$$

$(\forall n \in \mathbb{Z})$.

***19.** Cho n số phức $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Hãy chứng minh rằng nếu số phức z thỏa mãn

$$\frac{1}{z-z_1}+\frac{1}{z-z_2}+....+\frac{1}{z-z_n}=0$$

thì tồn tại n số không âm $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,....,\lambda_n$ sao cho

$$\lambda_1+\lambda_2+....+\lambda_n=1$$

và $$z=\lambda_1 z_1+\lambda_2 z_2+.....+\lambda_n z_n.$$

20. Chứng minh các đẳng thức:

a) $(n-2)\sum\limits_{k=1}^{n}|a_k|^2+\left|\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\right|^2=\sum\limits_{1\le k<s\le n}|a_k+a_s|^2$.

b) $n\sum\limits_{k=1}^{n}|a_k|^2-\left|\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\right|^2=\sum\limits_{1\le k<s\le n}|a_k-a_s|^2$

21. Chứng minh nếu $z_1+z_2+z_3=0$ và $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$ thì z_1,z_2,z_3 là ba đỉnh của tam giác đều nội tiếp trong đường tròn đơn vị.

22. Tìm các đỉnh của đa giác đều n – cạnh, nếu tâm của đa giác tại z = 0 và biết đỉnh z_1 của đa giác.

23. Biết z_1 và z_2 là các đỉnh kề nhau của đa giác đều n – cạnh. Tìm đỉnh z_3 kề với z_2 $(z_3\neq z_1)$.

24. Với điều kiện nào thì ba điểm z_1, z_2, z_3 khác nhau nằm trên một đường thẳng.

25. Các điểm $z_1,z_2,....,z_n$ nằm về một phía của một đường thẳng đi qua gốc tọa độ. Chứng minh các điểm

$\frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_2}, \ldots, \frac{1}{z_n}$ cũng có tính chất đó và

$$z_1 + z_2 + \ldots + z_n \neq 0$$

cũng như $$\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \ldots + \frac{1}{z_n} \neq 0$$

26. Xác định họ đường trong mặt phẳng z cho bởi các phương trình:

a) $\mathrm{Re}\frac{1}{z} = c \quad (-\infty < c < +\infty)$

b) $\mathrm{Im}\frac{1}{z} = c \quad (-\infty < c < +\infty)$

c) $\mathrm{Re}\, z^2 = c$.

d) $\mathrm{Im}\ z^2 = c$

e) $\left|\frac{z - z_1}{z - z_2}\right| = \lambda \quad (\lambda > 0)$

f) $\arg\frac{z - z_1}{z - z_2} = \alpha \quad (-\pi < \alpha \leq \pi)$

1.2. MẶT CẦU RIEMANN VÀ PHÉP CHIẾU CẦU

27. Tìm tạo ảnh của các điểm -1, 1, i trên mặt cầu Riemann S trong phép chiếu cầu $\pi : S \to \overline{\mathbb{C}}$.

28. Tìm tạo ảnh trên mặt cầu S các tập hợp sau:

a) Tia $\arg z = \alpha$

b) Đường tròn $|z| = r$

29. Tìm tạo ảnh trên S của các tập sau:

a) $\operatorname{Im} z > 0$

b) $\operatorname{Im} z < 0$

c) $\operatorname{Re} z > 0$

d) $|z| < 1$

1.3. DÃY VÀ CHUỖI SỐ PHỨC

30. Giả sử $\{u_n\}$ là dãy số phức sao cho $\{u_{n+1} - u_n\}$ tiến tới 0. Chứng minh

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{n} = 0.$$

31. Cho hai dãy số phức $\{u_n\}$ và $\{v_n\}$ hội tụ tới 0. Giả sử tồn tại $\alpha > 0$ sao cho $\forall n \in N, \sum_{p=0}^{n} |v_p| \le \alpha$. Chứng minh dãy:

$$w_n = \sum_{p=0}^{n} u_p v_{n-p} \text{ hội tụ tới } 0.$$

32. Chứng minh nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ hội tụ và $|\arg c_n| \le \alpha < \frac{\Pi}{2}$ thì chuỗi hội tụ tuyệt đối.

33. Giả sử $z_n \ne 0, \forall n \in N$ và dãy $\left\{\frac{z_n}{|z_n|}\right\}_n$ hội tụ. Hãy chứng minh rằng nếu chuỗi $\sum z_n$ hội tụ thì $\sum |z_n|$ cũng hội tụ.

*34. Giả sử dãy số phức $\{z_n\}$ thỏa mãn:

(i) $z_n \neq 0. n \in N$.

(ii) $|z_n| \leq |z_{n+1}|$

(iii) $z_n \to \infty$

Ta gọi số mũ hội tụ của dãy $\{z_n\}$ là số thực (duy nhất) λ sao cho chuỗi $\sum \frac{1}{|z_n|^\sigma}$ hội tụ với mọi $\sigma < \lambda$ và phân kỳ với $\sigma > \lambda$.

Chứng minh rằng số mũ hội tụ của dãy $\{z_n\}$ được tính theo công thức

$$\lambda = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln n}{\ln|z_n|}$$

*35. Giả sử $z_n \to z \neq \infty$ và $\zeta_n \to \zeta$. Chứng minh rằng:

$$\frac{z_1\zeta_n + z_2\zeta_{n-1} + ... + z_n\zeta_1}{n} \to z\zeta .$$

*36. Giả sử $\{z_n\}$ là dãy số phức thỏa mãn

$$|z_n| = 1 \quad \text{và} \quad z_n \neq 1,\ \forall n \in N$$

$$z_n \to z \neq 1$$

Hãy chứng minh rằng:

$$\left(\frac{1+z_n}{2}\right)^n \to 0 .$$

37. Giả sử các chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ và $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2$ hội tụ và $\mathrm{Re}\, c_n \geq 0$.

Chứng minh chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}|c_n|^2$ cũng hội tụ.

38. Chứng minh công thức:

$$\sum_{k=m}^{n} a_k b_k = \sum_{k=m}^{n-1} S_k(b_k - b_{k+1}) + S_n b_n - S_{m-1} b_m$$

ở đây $1 \le m \le n$, $S_k = a_1 + a_2 + ... + a_k$ $(k \ge 1)$, $S_0 = 0$.

39. Chứng minh chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ hội tụ nếu có các giả thiết:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \sqrt{n} = 0$

b) Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}|b_n - b_{n+1}|$ hội tụ.

c) Dãy $\left\{\dfrac{S_n}{\sqrt{n}}\right\}, S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ bị chặn.

CHƯƠNG II
HÀM SỐ BIẾN SỐ PHỨC

Giả sử $D \subset \mathbb{C}$ là một tập tùy ý.

Ánh xạ $f: D \to \mathbb{C}$ gọi là một hàm biến phức xác định trên D.

Nếu viết

$$w = f(z) = u(z) + iv(z) = u(x, y) + iv(x, y), \ z \in D$$

thì việc cho một hàm biến phức w = f(z), $z \in D$ tương đương với việc cho 2 hàm u và v của hai biến thực x và y với $(x, y) \in D$.

Hàm $f: D \to \mathbb{C}$ gọi là đơn diệp (hay 1 lá) trên D nếu f là đơn ánh trên D.

Giả sử $f: D \to \mathbb{C}$ và $z_0 \in \overline{D}$ là điểm tụ của D. Số phức $a \in \mathbb{C}$ gọi là giới hạn của f khi z thuộc D, z tiến tới z_0 và viết:

$$a = \lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in D}} f(z) \text{ nếu và chỉ nếu } \forall \varepsilon > 0$$

$\exists \delta > 0, \forall z \in D: 0 < |z - z_0| < \delta$ thì $|f(z) - a| < \varepsilon$

Trường hợp $z_0 = \infty$ thì $a = \lim\limits_{\substack{z \to \infty \\ z \in D}} f(z)$ nghĩa là

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M > 0, \forall z \in D: |z| > M$$

thì $|f(z) - a| < \varepsilon$

Khi a = ∞ thì $\lim\limits_{\substack{z \to z_0 \\ z \in D}} f(z) = \infty$ nghĩa là:

$$\forall M > 0, \exists \delta > 0, \forall z \in D : 0 < |z - z_o| < \delta$$

thì $|f(z)| > M$.

Giả sử $f : D \to \mathbb{C}$ là hàm phức xác định trên D và $z_o \in D$. Ta nói f liên tục tại z_o nếu một trong hai điều kiện sau được thỏa mãn:

a) Hoặc z_o là điểm cô lập của D.

b) Nếu z_o không là điểm cô lập của D thì:

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0).$$

Nếu viết f(z) = u(z) + iv(z) thì f liên tục tại $z_o \in D$ khi và chỉ khi u và v liên tục tại z_o.

f được gọi là liên tục trên D nếu f liên tục tại mọi $z \in D$.

f được gọi là liên tục đều trên D nếu

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall z_1, z_2 \neq \infty, z_1, z_2 \in D : |z_1 - z_2| < \delta$$

thì $$|f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon$$

Dưới đây là kết quả về hàm liên tục trên tập compact $K \subset \mathbb{C}$:

Định lý 1: Nếu f liên tục trên tập compact $K \subset \mathbb{C}$ thì f liên tục đều trên K.

Định lý 2: Nếu f liên tục trên tập compact $K \subset \mathbb{C}$ thì hàm $z \mapsto |f(z)|$ đạt được cận trên đúng và cận dưới đúng trên K.

Định lý 3: Nếu f liên tục trên tập compact $K \subset \mathbb{C}$ thì f(K) là compact.

Giả sử $D \subset \mathbb{C}$ là một tập tùy ý và $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ là dãy hàm phức xác định trên D.

"Biểu thức" hình thức:

$$f_1(z) + f_2(z) + \ldots + f_n(z) + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(z) \quad (1)$$

gọi là một chuỗi hàm trên D.

Với mỗi $n \geq 1$, đặt: $S_n(z) = \sum_{k=1}^{n} f_k(z)$ thì ta được dãy hàm $\{S_n(z)\}_{n\geq 1}$. Dãy này gọi là dãy tổng riêng của chuỗi hàm (1).

Nếu tại $z \in D$ dãy $\{S_n(z)\}$ hội tụ thì ta nói (1) là hội tụ hay khả tổng. Tập $D_1 = \{z \in D : (1) \text{ hội tụ}\}$ gọi là miền hội tụ của (1). Tập $D_2 = D \setminus D_1$ gọi là miền phân kỳ của (1).

Trên tập D_1 có thể xác định hàm $S : D_1 \to \mathbb{C}$ bởi

$$S(z) = \lim_{n\to\infty} S_n(z)$$

và S(z) được gọi là tổng của (1) trên D_1 và viết

$$S(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(z), z \in D_1 \quad (2)$$

Giả sử D_1 là miền hội tụ của (1) với S(z) là tổng của (1) trên đó.

Chuỗi hàm (1) gọi là hội tụ đều về S(z) trên D_1 nếu dãy $\{S_n(z)\}$ hội tụ đều về S(z) trên D_1, nghĩa là:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_o(\varepsilon) > 0, \ \forall n \geq n_o(\varepsilon) \forall z \in D_1 : |S_n(z) - S(z)| < \varepsilon$$

Hai kết quả sau thường được dùng khi xét sự hội tụ đều của một chuỗi hàm.

Định lý 4 (Tiêu chuẩn Cauchy): Để chuỗi (1) hội tụ đều trên $D \subset \mathbb{C}$ cần và đủ là

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_o(\varepsilon) > 0, \forall n \geq n_o(\varepsilon), \forall p \geq 1, \forall z \in D$$

xảy ra: $$\left|f_{n+1}(z) + ... + f_{n+p}(z)\right| < \varepsilon \tag{3}$$

Định lý 5 (Dấu hiệu Weierstrass): Giả sử chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ và

$$|f_n(z)| \leq a_n \quad \forall n \geq n_o \quad \forall z \in D$$

thì (1) hội tụ đều trên D.

Trường hợp chuỗi (1) hội tụ đều trên D, còn các hàm f_n liên tục trên D thì hàm tổng $S(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ cũng liên tục trên D.

Một loại chuỗi hàm quan trọng và đóng vai trò cốt yếu trong lý thuyết hàm biến phức là chuỗi lũy thừa.

Chuỗi hàm có dạng

$$\sum c_n(z - z_o)^n = c_o + c_1(z - z_o) + ... + c_n(z - z_o)^n + ... \tag{4}$$

ở đó c_n là các số phức, $z_o \in \mathbb{C}$ cố định gọi là chuỗi lũy thừa tại z_o.

Đối với chuỗi hàm (4) tồn tại $R \geq 0$ được xác định bởi:

$$R = \frac{1}{\limsup\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{|c_n|}}$$

sao cho (4) hội tụ tuyệt đối tại mọi z: $|z - z_o| < R$ và phân kỳ khi $|z - z_o| > R$.

Số R gọi là bán kính hội tụ của (4).

Người ta xác định được một số hàm sơ cấp biến số phức qua chuỗi lũy thừa như:

- $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$
- $\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$
- $\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$
- $\operatorname{sh} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$
- $\operatorname{ch} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$

Hàm số mũ $w = e^z$ có một số tính chất quen thuộc như hàm số mũ biến số thực, chẳng hạn:

- $e^{z_1}.e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$
- $\frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1-z_2}$
- $e^z \neq 0, \forall z \in \mathbb{C}$

Tuy nhiên nó có một số tính chất đặc sắc hơn như:

- $e^z = \cos z + i\sin z, z \in \mathbb{C}$
- $e^{z+i2k\pi} = e^z$ xảy ra cho mọi $k \in \mathbb{Z}$

Hơn nữa nếu $z = x + iy$ thì

- $\left|e^z\right| = e^x$
- $\operatorname{Arg} e^z = y + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Ngoài ra các hàm sinz, cosz, shz, chz có quan hệ với nhau như:

- $i\operatorname{sh} z = \sin iz$
- $\operatorname{ch} z = \cos iz$

BÀI TẬP CHƯƠNG II

40. Cho ánh xạ $w = z^2$. Tìm:

a) Ảnh của đường $x = c$, $y = c$, $x = y$, $|z| = R$, $\arg z = \alpha$

b) Tạo ảnh của đường $u = c$, $v = c$.

41. Cho ánh xạ $w = \frac{1}{z}$. Tìm:

a) Ảnh của các đường $x = c$, $y = c$, $x = y$, $|z| = R$, $|z - 1| = 1$

b) Tạo ảnh của đường $u = c$, $v = c$.

42. Tìm ảnh của đường tròn $|z| = R$ qua ánh xạ $w = z + \frac{1}{z}$ và $w = z - \frac{1}{z}$

43. Tìm ảnh của đường tròn $|z| = 1$ qua ánh xạ $w = \frac{z}{(1-z)^2}$.

44. Tìm môđun và giá trị chính của argument của các số phức e^{2+i}, e^{3+4i}, $-ae^{i\varphi}$ $(a > 0, |\varphi| \le \pi)$, $e^{-i\varphi}$ $(|\varphi| \le \pi)$.

45. Tìm phần thực, phần ảo và môđun của các số phức:

a) $\cos(2+i)$

b) $\sin 2i$

c) $\mathrm{tg}(2-i)$

46. Chứng minh các đẳng thức sau:

a) $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$

b) $\sin z = \cos(\frac{\pi}{2} - z)$

c) $\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$

d) $\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$

47. Đối với các hàm e^z, sinz, cosz, tìm tập các giá trị z sao cho ở đó chúng nhận:

a) Các giá trị thực.

b) Các giá trị ảo.

48. Người ta xác định $\mathrm{Ln}z = \ln r + i\varphi + 2\pi ik \quad (k \in \mathbb{Z})$ nếu $z = re^{i\varphi} \quad (0 \le \varphi < 2\pi)$ và $\ln z = \ln r + i\varphi$, lnz gọi là nhánh chính của Lnz. Xác định:

a) Ln4, Ln(−1), Ln(2 − 3i)

b) ln(−1), lni.

49. Cho ánh xạ $w = e^z$. Tìm:

a) Ảnh của các đường x = C, y = C.

b) Tạo ảnh của đường $\rho = \theta \quad (0 \le \theta < \infty)$

50. Xác định thêm giá trị của các hàm sau tại z = 0 để chúng liên tục tại z = 0

a) $w = \dfrac{\mathrm{Re}\, z}{z}$.

b) $w = \dfrac{\mathrm{Re}(z)^2}{|z|^2}$

c) $w = \dfrac{z \,\mathrm{Re}\, z}{|z|}$.

51. Xét tính liên tục tại $z = 0$ của các hàm phức được xác định tại $z \neq 0$ bởi các biểu thức cho dưới đây và bằng 0 tại $z = 0$:

a) $\dfrac{\mathrm{Re}\, z}{1+z}$

b) $z^{-1}\,\mathrm{Re}\, z$

c) $z^{-2}\,\mathrm{Re}\, z^2$

52. a) Chứng minh hàm $w = e^{-\frac{1}{z}}$ liên tục đều trong hình tròn $|z| \leq R$ bỏ đi $z = 0$

b) Hàm $w = e^{-\frac{1}{z^2}}$ có liên tục đều trong miền ở câu a hay không ?

53. Cho hàm $w = e^{-\frac{1}{z}}$ được xác định khi $z \neq 0$. Chứng minh:

a) Trong miền $0 < |z| \leq 1$, $|\arg z| \leq \dfrac{\pi}{2}$ hàm này bị chặn nhưng không liên tục.

b) Trong miền $0 < |z| \leq 1$, $|\arg z| \leq \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ hàm này liên tục đều.

54. Giả sử hàm $w = f(z)$ liên tục đều trong $|z| < 1$. Chứng minh đối với mỗi ξ thuộc đường tròn $|z| = 1$ và mọi dãy $\{z_n\}$, $|z_n| < 1$, $z_n \to \zeta$ tồn tại $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n)$. Chứng minh giới hạn này không phụ thuộcvào dãy $\{z_n\}$ và hàm số nhận được từ hàm $w = f(z)$ cùng với các giá trị giới hạn tại các điểm thuộc đường tròn đơn vị là hàm liên tục trên $|z| \leq 1$.

CHƯƠNG III

HÀM CHỈNH HÌNH VÀ ÁNH XẠ ĐƯỢC THỰC HIỆN BỞI HÀM CHỈNH HÌNH

Bắt đầu từ chương này, chúng ta sẽ đi sâu tìm hiểu kiến thức sâu sắc của bộ môn Lý thuyết hàm biến phức.

Cho D là tập mở trong $\mathbb{C}$ và $f : D \to \mathbb{C}$ là hàm phức xác định trên D. Giả sử z và $z + \Delta z \in D$. Nếu tồn tại:

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} \qquad (1)$$

thuộc $\mathbb{C}$ thì giới hạn (1) gọi là đạo hàm của f tại z và ký hiệu $f'(z)$ hay $\frac{df}{dz}(z)$

Hàm phức f có đạo hàm tại z gọi là khả vi phức hay $\mathbb{C}$ – khả vi tại z.

Bằng quy nạp có thể xác định được khái niệm đạo hàm cấp k của f tại z bởi:

$$f^k(z) = \left(f^{k-1}\right)'(z), \ z \in D, \ k \geq 1 \qquad (2)$$

với quy ước: $f^o = f$

Có thể thấy những quy tắc sau là đúng:

Định lý 1: Nếu f(z) và g(z) là khả vi tại z_o, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ thì

$\alpha f+\beta g$, $f.g$ và $\frac{f}{g}(g(z_o)\neq 0)$ cũng khả vi tại z_o và:

a) $(\alpha f+\beta g)'(z_o)=\alpha f'(z_o)+\beta g'(z_o)$

b) $(f.g)'(z_o)=f'(z_o).g(z_o)+f(z_o).g'(z_o)$

c) $\left(\frac{f}{g}\right)'(z_o)=\frac{f'(z_o)g(z_o)-f(z_o)g'(z_o)}{g^2(z_o)}$

d) Nếu $w=f(z)$ khả vi phức tại z_o và $g(w)$ khả vi phức tại $w_o=f(z_o)$ thì hàm $g.f$ khả vi phức tại z_o và:

$$(g.f)'(z_o)=g'(f(z_o)).f'(z_o)$$

Sau đây là một điều kiện quan trọng thường gọi là điều kiện Cauchy – Riemann để xét tính $\mathbb{C}$ – khả vi tại z_o. Tuy nhiên ta cần khái niệm sau: Giả sử

$$w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$$

là hàm phức xác định trên tập mở $D\subset\mathbb{C}$ và $z_o\in D$. Hàm f gọi là $\mathbb{R}^2$ – khả vi tại z_o nếu hai hàm thực $u(x, y)$ và $v(x, y)$ khả vi tại z_o.

Ta có:

Định lý 2: Để $f:D\subset\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ là $\mathbb{C}$ – khả vi tại $z=x+iy\in D$ điều kiện cần và đủ là f là $\mathbb{R}^2$ – khả vi tại z và thỏa mãn điều kiện Cauchy – Riemann

$$(C-R)\quad\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}(z)=\dfrac{\partial v}{\partial y}(z)\\[2mm]\dfrac{\partial u}{\partial y}(z)=-\dfrac{\partial v}{\partial x}(z)\end{cases}$$

Giả sử $D\subset\mathbb{C}$ là tập mở và $f:D\to\mathbb{C}$ là hàm phức xác định trên D.

Hàm f gọi là chỉnh hình (hay giải tích) tại $z_0 \in D$ nếu tồn tại một lân cận $U(z_0) \subset D$ của z_0 sao cho f là $\mathbb{C}$ – khả vi tại mọi $z \in U(z_0)$.

Hàm f gọi là chỉnh hình (hay giải tích) trên D nếu f chỉnh hình (tương ứng, giải tích) tại mọi $z \in D$.

Có thể thấy rằng $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ là chỉnh hình trên D nếu f là $\mathbb{R}^2$ – khả vi trên D và hệ (C – R) xảy ra tại mọi $z \in D$.

Ký hiệu H(D) là tập các hàm chỉnh hình trên D. Khi đó:

a) H(D) là một không gian vectơ trên D.

b) H(D) là một vành.

c) Nếu $f \in H(D)$ và $\forall z \in D, f(z) \neq 0$ thì $\frac{1}{f} \in H(D)$.

Định lý 3: Nếu $f : D \to D_1$ và $g : D_1 \to \mathbb{C}$ lần lượt là các hàm chỉnh hình trên D và D_1. Khi đó hàm hợp $g \circ f : D \to \mathbb{C}$ chỉnh hình trên D.

Định lý 4: Tổng của chuỗi lũy thừa

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

có bán kính hội tụ R > 0 là hàm chỉnh hình trên hình tròn $|z - z_0| < R$. Hơn nữa đạo hàm các cấp của S cũng là hàm chỉnh hình trên $|z - z_0| < R$ và chúng cho bởi:

$$S^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\ldots(n+k-1)c_n(z-z_o)^{n-k}$$

Giả sử $w = f(z)$ khả vi phức tại $z_o \in D$ và $f'(z_o) \neq 0$. Nếu l là một đường cong trơn đi qua z_o còn $L = f(l)$ là đường cong trơn đi qua $w_o = f(z_o)$.

Khi đó $\arg f'(z_o)$ là góc quay của tiếp tuyến của đường cong l tại z_o trong ánh xạ được thực hiện bởi f tới trùng với tiếp tuyến của đường cong L tại $w_o = f(z_o)$.

Hơn nữa với giả thiết $f'(z_o) \neq 0$ thì góc giữa hai đường cong trơn tùy ý qua z_o được bảo tồn (cả về hướng lẫn độ lớn) qua ánh xạ được thực hiện bởi f. Hàm có tính chất đó gọi là bảo toàn góc tại z_o.

Đồng thời $k = |f'(z_o)|$ thể hiện hệ số co dãn đều trong ánh xạ được thực hiện bởi hàm f ở lân cận tại z_o.

Hàm $f: D \to \mathbb{C}$ gọi là bảo giác tại $z_o \in D$ nếu f bảo toàn góc tại z_o và có hệ số co dãn đều tại z_o. Hàm f gọi là bảo giác trên D nếu f bảo giác tại mọi $z \in D$.

Định lý 5: Hàm f bảo giác trên D khi và chỉ khi f chỉnh hình trên D và $f'(z) \neq 0$ tại mọi $z \in D$.

Một dạng ánh xạ bảo giác thường gặp trong lý thuyết hàm phức là ánh xạ phân tuyến tính. Đó là ánh xạ cho bởi:

$$w = \frac{az+b}{cz+d}, ad - bc \neq 0$$

a, b, c, d là các hằng số phức.

Ánh xạ phân tuyến tính là một song ánh từ $\overline{\mathbb{C}}$ lên $\overline{\mathbb{C}}$ và bảo giác khắp nơi trên $\overline{\mathbb{C}}$. Nó có tính chất bảo toàn đường tròn và hình tròn, nghĩa là biến đường tròn thành đường tròn và biến hình tròn thành hình tròn. Nó bảo toàn cặp điểm đối xứng qua đường tròn và bảo toàn tỷ số kép.

Có hai dạng ánh xạ phân tuyến tính cần chú ý khi áp dụng cho bài tập. Đó là ánh xạ phân tuyến tính biến nửa mặt phẳng trên $\operatorname{Im} z > 0$ lên hình tròn đơn vị $|w| < 1$. Dạng của loại này là:

$$w = e^{i\theta}.\frac{z-a}{z-\bar{a}},\ \operatorname{Im} a > 0, \theta \in \mathbb{R}$$

Dạng thứ hai là ánh xạ phân tuyến tính biến hình tròn đơn vị $|z| < 1$ lên $|w| < 1$. Biểu thức của loại này cho bởi:

$$w = e^{i\theta}.\frac{z-a}{1-\bar{a}z},\ |a| < 1$$

Ngoài ánh xạ bảo giác được cho bởi hàm phân tuyến tính, một số ánh xạ bảo giác được cho bởi các hàm số khác mà chúng ta sẽ lần lượt nêu ra sau đây rất cần dùng trong bài tập về xây dựng các dạng ánh xạ bảo giác biến một miền này trong mặt phẳng phức lên miền khác.

Hàm Jukovski

$$w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

chỉnh hình trên $\mathbb{C} \setminus 0$. Nó bảo giác tại $z \neq 0, \pm 1$.

Nó là một lá trên phần trong hay phần ngoài của hình tròn đơn vị. Nó biến phần trong hay phần ngoài của hình tròn đơn vị thành cả mặt phẳng có khía theo $[-1, 1]$.

Hàm mũ cho bởi:

$$w = e^z = e^{x+iy}$$

Nó chỉnh hình trên mặt phẳng $\mathbb{C}$ và do $w'(z) = e^z \neq 0$ khi $z \in \mathbb{C}$ nên nó bảo giác khắp nơi trên $\mathbb{C}$.

Nó là một lá trên các dải có độ rộng 2π song song với trục thực. Nó biến các đường thẳng $x = c$ thành các đường tròn

$$|w| = e^C$$

và biến đường $y = c$ thành tia $\arg w = c + 2k\pi$.

Hàm ngược (đa trị) của hàm mũ là hàm

$$w = \mathrm{Ln}z = \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi), k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Cố định mỗi k ta được một nhánh đơn trị của hàm số đã cho và viết

$$(\mathrm{Ln}z)_k = \ln|z| + i(\arg z + 2k\Pi)$$

Mỗi nhánh đơn trị này được xác định trên $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Trường hợp k = 0, nhánh

$$(\mathrm{Ln}z)_0 = \ln z = \ln r + i \arg z$$

$$= \ln r + i\varphi, z = re^{i\varphi}, 0 \le \varphi < 2\pi$$

gọi là nhánh chính của Lnz.

BÀI TẬP CHƯƠNG III

55. Kiểm tra điều kiện Cauchy – Riemann đối với các hàm z^n, e^z, cos z, sin z và chứng minh

$$(z^n)' = nz^{n-1},\ (e^z)' = e^z,$$

$$(\cos z)' = -\sin z,\ (\sin z)' = \cos z$$

56. Tìm các hằng số b, c để hàm:

a) $f(z) = x + y + i(bx + cy)$

b) $f(z) = \cos x(\operatorname{ch} y + b\operatorname{sh} y) + i\sin x(\operatorname{ch} y + c\operatorname{sh} y)$ là $\mathbb{C}$ – khả vi tại $z \in \mathbb{C}$.

57. Cho hàm $f(z) = |x^2 - y^2| + 2i|xy|$ Tìm các miền trên $\mathbb{C}$ sao cho f là chỉnh hình tại đó.

58. Giả sử $\Omega \subset \mathbb{C}$ là một miền và $\varphi \in \mathbb{C}^1(\Omega)$,

$N = \{w \in \Omega : \varphi(w) = 0\}$ và với $w \in N$ thì grad $\varphi(w) \neq 0$.

Chứng minh nếu $f : \Omega_1 \to \Omega$, với Ω_1 là miền trong $\mathbb{C}$, là hàm chỉnh hình trên Ω_1 và $f(\Omega_1) \subset N$ thì f là hằng số.

59. Giả sử $f(z) = u + iv = \rho e^{i\varphi}$ là hàm chỉnh hình trên miền $D \subset \mathbb{C}$. Chứng minh nếu một trong các hàm u, v, ρ, θ là hằng số thì f là hằng số.

60. Giả sử $z = re^{i\varphi}$ và $f(z)=u(r,\varphi) + iv(r,\varphi)$. Viết phương trình Cauchy – Riemann trong toạ độ cực.

61. Chứng minh nếu $f(z)=u + iv$ là hàm trong C – khả vi tại z và s,n là hai vectơ trực giao, góc quay theo hướng từ s tới n ngược chiều kim đồng hồ thì:

$$\frac{\partial u}{\partial s}(z) = \frac{\partial v}{\partial n}(z),\ \frac{\partial u}{\partial n}(z) = -\frac{\partial v}{\partial s}(z)$$

ở đó $\frac{\partial}{\partial s}$ và $\frac{\partial}{\partial n}$ là các đạo hàm của hàm u và v theo hướng tương ứng.

62. Chứng minh hàm $f(z) = |z|$ không $\mathbb{C}$ – khả vi tại điểm nào của $\mathbb{C}$.

63. Chứng minh các hàm:

a) $f(z) = z.\ \mathrm{Re}z$

b) $f(z) = |z|^2$

chỉ $\mathbb{C}$ – khả vi tại $z = 0$.

64. Chứng minh hàm

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{nếu } z \neq 0 \\ 0 \ \text{ nếu } z = 0 \end{cases}$$

thỏa mãn điều kiện Cauchy – Riemann tại $z = 0$ nhưng không $\mathbb{C}$ – khả vi tại đó.

65. Chứng minh hàm:

$$f(z) = |z|^2(1+i)\mathrm{Im}\,z^2$$

thỏa mãn điều kiện Cauchy – Riemann tại $z = 0$. f có $\mathbb{C}$ – khả vi tại $z = 0$ hay không ?

66. Cho hàm số:

$$f(z) = z^2 + z.\bar{z} - \bar{z}^2 + 2z - \bar{z}.$$

Hãy tìm những điểm tại đó hàm f là $\mathbb{C}$ – khả vi và hãy tính đạo hàm phức tại những điểm này.

67. Hãy xác định các hằng số để hàm sau đây khả vi phức:

a) $f(z) = x + ay + i(bx + cy)$

b) $f(z) = x^2 + axy + by^2 + i(cx^2 + dxy + y^2)$

68. Xét tính $\mathbb{C}$ – khả vi của hàm số:

$$f(z) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{z^4}} & z \neq 0 \\ 0 & z = 0 \end{cases}$$

trên $\mathbb{C}$.

69. Cho hàm số $f : D \to \mathbb{C}$ chỉnh hình trên miền D và không đồng nhất hằng số. Chứng minh rằng không tồn tại $r \in \mathbb{R}$ để:

$$f(D) \subset \{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$$

***70.** Giả sử $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$. Chứng minh các khẳng định sau:

a) Nếu tại z tồn tại $\lim\limits_{\Delta z \to 0}\left[\operatorname{Re}\dfrac{\Delta w}{\Delta z}\right]$ thì tồn tại $\dfrac{\partial u}{\partial x}(z)$ và $\dfrac{\partial v}{\partial y}(z)$ và $\dfrac{\partial u}{\partial x}(z) = \dfrac{\partial v}{\partial y}(z)$.

b) Nếu tại z tồn tại $\lim\limits_{\Delta z \to 0}\left[\operatorname{Im}\frac{\Delta w}{\Delta z}\right]$ thì tồn tại $\frac{\partial u}{\partial y}(z)$ và $\frac{\partial v}{\partial x}(z)$, đồng thời

$$\frac{\partial u}{\partial y}(z) = -\frac{\partial v}{\partial x}(z)$$

c) Nếu giả thiết thêm các hàm u và v khả vi tại z và tồn tại một trong hai giới hạn ở a) hay b) thì giới hạn còn lại cũng tồn tại và suy ra tính $\mathbb{C}$ - khả vi tại đó.

71. Giả sử hàm $w = f(z) = u + iv$ tại điểm z thỏa mãn

a) u, v khả vi tại đó.

b) Tồn tại $\lim\limits_{\Delta z \to 0}\left|\frac{\Delta w}{\Delta z}\right|$

Chứng minh khi đó hoặc f(z) hoặc $\overline{f(z)}$ là $\mathbb{C}$ – khả vi tại đó

***72.** Giả sử u(x,y) và v(x,y) là các hàm liên tục và có các đạo hàm riêng cấp 1 liên tục tại $z_o = x_o + iy_o$

và

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y).$$

Nếu tồn tại:

$$\lim_{h \to 0}|h|^{-1}|f(z_o + h) - f(z_o)|$$

thì hoặc f, hoặc $\bar{f}$ là $\mathbb{C}$ – khả vi tại z_o.

73. Chứng minh hàm $f(z) = x(x^2 + y^2)^{-1} - iy(x^2 + y^2)^{-1}$ là chỉnh hình trên $\mathbb{C} \setminus \{0\}$

***74.** Nếu $f = u + iv$ là chỉnh hình trong miền D và $u^2 = v$ trong D thì f là hằng số trên D.

75. Giả sử $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$. Chứng minh nếu f là hàm chỉnh hình và $f \neq 0$ trên miền D thì

$$\Delta(|f(z)|) = |f(z)|^{-1} |f'(z)|^2, \; z \in D.$$

76. Chứng minh đối với hàm f chỉnh hình trên miền D:
$\Delta(|f|^2) = 4|f'|^2$

77. Tìm dạng tổng quát của ánh xạ tuyến tính biến:

a) Nửa mặt phẳng trên lên chính nó

b) Nửa mặt phẳng trên lên nửa mặt phẳng dưới.

c) Nửa mặt phẳng trên lên nửa mặt phẳng bên phải.

78. Đối với hàm $w = \frac{1}{z}$, hãy tìm ảnh của các đường

a) Họ đường tròn $x^2 + y^2 = ax$.

b) Họ đường thẳng $y = x + b$.

c) Họ đường thẳng $y = kx$.

79. Cho hàm phân tuyến tính

$$f(x) = \frac{az+b}{cz+d} \; (ad - bc \neq 0)$$

với $f(0) = -1$, $f(\infty) = 1$, $f(1) = -i$.

Hãy mô tả ảnh qua ánh xạ f của

a) Nửa mặt phẳng phức $H = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$

b) Tập các nửa đường thẳng xuất phát từ 0 và chứa trong H.

c) Tập các nửa đường tròn tâm tại O và chứa trong H.

d) Tập các nửa đường thẳng vuông góc với trục thực và chứa trong H.

80. Tìm dạng tổng quát của ánh xạ phân tuyến tính biến:

a) Nửa mặt phẳng trên lên chính nó.

b) Nửa mặt phẳng trên lên nửa mặt phẳng dưới.

81. Tìm ánh xạ phân tuyến tính biến nửa mặt phẳng trên lên hình tròn đơn vị $|w| < 1$ sao cho:

a) $w(i) = 0, \ \arg w'(i) = -\dfrac{\pi}{2}$

b) $w(2i) = 0, \ \arg w'(2i) = 0$

c) $w(a + bi) = 0, \ \arg w'(a + bi) = \theta \ \ (b > 0)$.

82. Tìm ánh xạ phân tuyến tính biến $\operatorname{Im} z > 0$ lên $|w - w_o| < R$ sao cho điểm i biến thành tâm của hình tròn và đạo hàm tại đó dương.

83. Tìm ánh xạ biến $|z| < 2$ lên nửa mặt phẳng $\operatorname{Re} w > 0$ sao cho $w(0) = 1, \ \arg w'(0) = \dfrac{\pi}{2}$.

84. Tìm ánh xạ biến $|z - 4i| < 2$ lên nửa mặt phẳng $v > u$ sao cho tâm của hình tròn biến thành điểm -4, điểm $2i$ biến thành $w = 0$.

85. Tìm ánh xạ biến $|z| < 1$ lên $|w| < 1$ sao cho:

a) $w\left(\frac{i}{2}\right) = 0$, $\arg w'\left(\frac{i}{2}\right) = 0$.

b) $w\left(-\frac{i}{2}\right) = 0$, $\arg w'\left(-\frac{i}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$

c) $w(a) = a$, $\arg w'(a) = \alpha$ $(|a| < 1)$.

86. Tìm ánh xạ biến hình tròn $|z| < R_1$ lên $|w| < R_2$ sao cho

$w(a) = b$, $\arg w'(a) = \alpha$ $(|a| < R_1, |b| < R_2)$.

87. Tìm ánh xạ biến $|z| < 1$ lên $|w - 1| < 1$ sao cho $w(0) = \frac{1}{2}$,

$w(1) = 0$.

88. Tìm ánh xạ biến $|z - 2| < 1$ lên $|w - 2i| < 2$ sao cho

$$w(2) = i, \ \arg w'(2) = 0$$

89. Từ bốn số phức z_1, z_2, z_3, z_4 có thể xác định được nhiều nhất bao nhiêu tỉ số kép phân biệt.

90. Cho hàm phân tuyến tính

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

a) Những điểm nào của $\mathbb{C} \cup \infty$ là bất biến đối với f.

b) Có thể nói gì về dãy $f^n(z)$ với z là điểm nào đó thuộc $\mathbb{C} \cup \infty$

c) Trong trường hợp f có hai điểm bất động phân biệt hãy tìm điều kiện cần và đủ để cả một đường tròn hoặc một đường thẳng là bất biến qua f.

91. Tìm hàm số ánh xạ góc $0 < \arg z < \pi\alpha$ $(0 < \alpha \leq 2)$ lên nửa mặt phẳng trên.

92. Tìm hàm số ánh xạ nửa hình tròn $|z| < 1$, Im $z > 0$ lên nửa mặt phẳng trên sao cho:

a) $w(-1) = 0,\ w(0) = 1,\ w(1) = \infty$

b) $w(\pm 1) = \mp 1,\ w(0) = \infty$

c) $w\left(\frac{i}{2}\right) = i,\ \arg w'\left(\frac{i}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}$.

93. Tìm hàm số ánh xạ các miền đã chỉ ra lên nửa mặt phẳng trên:

a) Mặt phẳng có khía theo $[-1, 1]$

b) Mặt phẳng có khía theo $[z_1, z_2]$

c) Mặt phẳng có khía nằm ở góc phần tư thứ nhất xuất phát từ điểm i và song song với đường $y = x$.

94. Đối với hàm Jukovki $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$. Hãy tìm ảnh của:

a) Hình tròn $|z| < R < 1$.

b) Miền $|z| > R > 1$.

c) Hình tròn $|z| < 1$.

d) Nửa hình tròn $|z| < 1$, Im $z > 0$.

e) Nửa mặt phẳng trên Im $z > 0$.

95. Dùng hàm Jukovki, tìm ánh xạ các miền sau lên nửa mặt phẳng trên:

a) Hình tròn $|z| < 1$ có khía theo $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

b) Hình tròn $|z| < 1$ có khía theo $[-1, 0]$ và $[a, 1]$ $(0 < a < 1)$.

96. Đối với hàm $w = e^z$. Tìm ảnh của:

a) Lưới đường thẳng $x = C$, $y = C$.

b) Dải $0 \le \alpha < y < \beta \le 2\pi$

c) Nửa dải $x < 0$, $0 < y < \beta \le 2\pi$.

97. Giả sử hàm $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ giải tích trong $|z| \le 1$ và ánh xạ một lá nó lên miền G có diện tích S. Chứng minh

$$S = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n|c_n|^2$$

***98.** Giả sử $F(t) = t + \frac{a_1}{t} + \frac{a_2}{t^2} + ... + = t + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{t^k}$ giải tích trừ $t = \infty$ và một lá trên $|t| > 1$. Chứng minh $\sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|^2 \le 1$.

***99.** Chứng minh nếu hàm $f(z) = z + c_2 z^2 + ...$ là hàm giải tích và một lá trong $|z| < 1$ thì $|c_2| \le 2$.

***100.** Giả sử $f(z) = z + c_2 z^2 + ...$ là hàm giải tích và 1 lá trong $|z| < 1$ và $c \in \mathbb{C}$ là điểm không thuộc ảnh của hàm đã cho. Chứng minh $|c| \ge \frac{1}{4}$.

Từ đó suy ra kết quả sau: Nếu hàm số trên là giải tích và một lá trong $|z|<1$ thì ảnh của $|z|<1$ qua ánh xạ

$$w = f(z) = z + c_2 z^2 + \dots.$$

phủ hình tròn $|w| < \frac{1}{4}$.

***101.** Cho hàm $w = F(t) = t + a_o + \frac{a_1}{t} + \frac{a_2}{t^2} + \dots$ là hàm giải tích và một lá trên miền $|t| > 1$ trừ $t = \infty$. Chứng minh khi đó biên của ảnh nằm trong hình tròn $|w - a_o| \le 2$.

CHƯƠNG IV
LÝ THUYẾT TÍCH PHÂN CỦA HÀM CHỈNH HÌNH

Trong chương này ta luôn coi γ là một đường cong trơn từng khúc trên $\mathbb{C}$ với điểm đầu $A = \gamma(a)$ và điểm cuối $B = \gamma(b)$. Trường hợp γ là chu tuyến thì đó là một đường cong Jordan kín, trơn từng khúc.

Giả sử γ là một đường cong trên $\mathbb{C}$ với điểm đầu $A = \gamma(a)$ và điểm cuối $B = \gamma(b)$ và $f : \gamma \to \mathbb{C}$ là hàm phức xác định trên γ.

Thực hiện phân hoạch Π chia γ thành các cung γ_k bởi các điểm chia

$$A = \eta_0, \eta_1, \eta_2, \ldots\ldots, \eta_{k-1}, \eta_k, \ldots\ldots, \eta_n = B$$

ở đó $\qquad \gamma_k = \overset{\frown}{\eta_{k-1}\eta_k}, \quad 1 \le k \le n$

Trên mỗi cung γ_k lấy mỗi điểm ξ_k, $1 \le k \le n$, tùy ý và lập tổng:

$$S(\Pi) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(\eta_k - \eta_{k-1}) \tag{1}$$

Giả sử $\qquad d(\Pi) = \max\{|\eta_k - \eta_{k-1}| : 1 \le k \le n\}$.

Nếu tồn tại giới hạn (1) khi $d(\Pi) \to 0$ không phụ thuộc vào phép phân hoạch Π và cách chọn ξ_k thì giới hạn đó gọi là tích phân của f lấy trên γ và ký hiệu

$$\int_\gamma f(z)dz = \lim_{d(\Pi)\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(\eta_k - \eta_{k-1})$$

Hàm f có tích phân trên γ còn gọi là khả tích trên γ.

Nếu viết $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ thì

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma udx - vdy + i\int_\gamma udy + vdx$$

ở đó vế phải là các tích phân đường loại II của các hàm u và v.

Tích phân phức có một số tính chất sau:

1) Nếu γ^- – là đường cong ngược hướng với γ thì

$$\int_{\gamma^-} f(z)dz = -\int_\gamma f(z)dz$$

2) Nếu f,g là các hàm khả tích trên γ, $\alpha,\beta \in \mathbb{C}$ thì $\alpha f + \beta g$ cũng khả tích trên γ và:

$$\int_\gamma (\alpha f + \beta g)dz = \alpha\int_\gamma fdz + \beta\int_\gamma gdz$$

3) Nếu γ được phân thành γ_1 và γ_2 thì

$$\int_\gamma fdz = \int_{\gamma_1} fdz + \int_{\gamma_2} fdz$$

4)
$$\left|\int_\gamma fcdz\right| \le \int_\gamma |f(z)||dz| \le \sup_{z\in\gamma}|f(z)|.l$$

ở đó l là độ dài của đường γ.

5) Nếu $z = \varphi(\eta)$ là R^2 – khả vi liên tục, ánh xạ 1 – 1 đường Γ lên γ thì:

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\Gamma f(\varphi(\eta))\varphi'(\eta)d\eta$$

Trường hợp γ là đường cong kín thì sau khi xác định hướng dương trên γ người ta lấy hai điểm A, B tùy ý khác nhau thuộc γ sao cho chiều từ A tới B là cùng chiều với định hướng dương của γ và xác định:

$$\int_{\gamma} f dz = \int_{AB} f(z)dz + \int_{BA^+} f(z)dz$$

Đối với γ là chu tuyến trên $\mathbb{C}$ thì tích phân của f lấy trên γ luôn được hiểu là lấy theo chiều ngược chiều kim đồng hồ và viết:

$$\int_{\gamma} f(z)dz$$

Dưới đây là một số kết quả quan trọng đối với tích phân của các hàm chỉnh hình.

Định lý 1(Cauchy): Nếu $w = f(z)$ chỉnh hình trên miền đơn liên D và γ là một chu tuyến thuộc D thì:

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0$$

Định lý 2: Giả sử D là miền đơn liên bị chặn với ∂D là một chu tuyến. Nếu f là hàm chỉnh hình trên D, liên tục trên $\overline{D} = D \cup \partial D$ thì

$$\int_{\partial D} f(z)dz = 0$$

Trường hợp D là miền đa liên với biên gồm các chu tuyến $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$, ở đó $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ đôi một không giao nhau và tất cả thuộc vào $D_\gamma, D = D_\gamma \setminus \bigcup_{k=1}^{n} D_{\gamma_k}$ thì định hướng của biên D được hiểu:

$$\partial D = \gamma + \gamma_1^- + \ldots + \gamma_n^-$$

Khi đó

Định lý 3: Nếu D là miền (n+1) – liên, f là hàm liên tục trên $\overline{D} = D \cup \partial D$, chỉnh hình trên D thì:

$$\int_{\partial D} f dz = 0$$

Các kết quả trên gọi là các định lý Cauchy (cho miền đơn liên và đa liên). Từ các định lý này có thể nhận được

Định lý 4 (Công thức tích phân Cauchy): Giả sử f là hàm chỉnh hình trên miền D và $z_0 \in D$. Khi đó với mọi chu tuyến $\gamma \subset D$ sao cho $z_0 \in D_\gamma \subset D$ ta có:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(t)dt}{t - z_0}$$

Giả sử Γ là một đường cong Jordan, còn f(t) là hàm liên tục trên Γ. Khi đó có thể xác định được hàm $F : \mathbb{C} \setminus \Gamma \to \mathbb{C}$ cho bởi:

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(t)dt}{t - z} \tag{2}$$

Hàm F được xác định bởi (2) gọi là tích phân loại Cauchy.

Định lý 5: Hàm $F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(t)dt}{t - z}$ là chỉnh hình trên $\mathbb{C} \setminus \Gamma$, và nó có đạo hàm mọi cấp và được cho bởi công thức:

$$F^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(t)dt}{(t - z)^{n+1}}, n = 0,1,\ldots$$

Như một hệ quả của định lý này và định lý 4 ta có

Định lý 6: Giả sử f chỉnh hình trên D. Khi đó f có đạo hàm mọi cấp trên D và các đạo hàm này cũng là các hàm chỉnh hình trên D. Các đạo hàm của f cho bởi công thức:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(t)dt}{(t-z)^{n+1}}, n = 0,1,....$$

ở đó γ là một chu tuyến tùy ý thuộc D sao cho $z \in D_{\gamma} \subset D$.

Từ những kết quả này ta nhận được định lý sau, xem như định lý đảo của định lý Cauchy.

Định lý 7 (Định lý Morera): Giả sử f là hàm liên tục trên miền đơn liên D sao cho tích phân của nó theo mọi chu tuyến trong D đều bằng 0. Khi đó f là hàm chỉnh hình trong miền D.

Dưới đây là các hệ quả rút ra từ công thức tích phân Cauchy

Định lý 8 (Bất đẳng thức Cauchy):

Giả sử f là hàm chỉnh hình trên miền D, $a \in D$ và $0 < r < d(a, \partial D)$ và

$$M(a,r) = \sup_{|z-a|=r} |f(z)|$$

Khi đó xảy ra các bất đẳng thức:

$$\left|f^{(n)}(a)\right| \le \frac{n!M(a,r)}{r^n}, n = 0,1,2,....$$

Định lý 9 (Định lý Liouville):

Nếu f là hàm chỉnh hình và bị chặn trên $\mathbb{C}$ thì f là hằng số.

Định lý 10 (Nguyên lý môđun cực đại): Giả sử f là hàm chỉnh hình trên miền bị chặn D và liên tục trên $\overline{D} = D \cup \partial D$.

Khi đó hoặc f là hằng số hoặc $|f(z)|$ chỉ đạt cực đại trên biên ∂D của D.

Định lý 11 (Bổ đề Schwartz): Giả sử f là hàm chỉnh hình trên hình tròn đơn vị $\Delta(0,1)$ và $|f(z)| \le 1$ khi $|z| < 1, f(0) = 0$. Khi đó

(i) $|f(z)| \le |z|$ với mọi $z \in \Delta(0,1)$

(ii) $|f'(0)| \le 1$

Nếu $|f(z_0)| = |z_0|$ xảy ra tại z_0 nào đó trong $\Delta(0,1)$ hoặc $|f'(0)| = 1$ thì $f(z) = e^{i\alpha}z, \alpha \in \mathbb{R}$ nào đó.

Định lý 12 (Weierstrass): Giả sử $\{f_n\} \subset H(D)$ là dãy hàm chỉnh hình trên miền D, hội tụ đều trên mọi compact $K \subset D$ tới hàm f thì $f \in H(D)$

Phần cuối nói về hàm điều hòa và quan hệ giữa hàm điều hòa và hàm chỉnh hình.

Giả sử $D \subset \mathbb{C}$ là một miền và $u : D \to \mathbb{R}$ là hàm lớp trên $\mathbb{C}^2$ trên D.

Hàm u gọi là hàm điều hòa trên D nếu u thỏa mãn

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(z) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(z) = 0$$

xảy ra tại mọi $z \in D$

Định lý 13: Giả sử f(z) = u(z) + iv(z) là hàm chỉnh hình trên miền $D \subset \mathbb{C}$. Khi đó u và v là các hàm điều hòa trên D.

Ngoài ra ta cũng có

Định lý 14: Giả sử u là hàm điều hòa trên miền đơn liên D. Khi đó u là phần thực của một hàm chỉnh hình trên D.

Người ta tìm hàm chỉnh hình này bằng cách tìm phần ảo của nó, hàm v(z) liên hợp điều hòa với hàm u(z), bởi:

$$v(z) = \int_{z_0}^{z}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy\right) + C$$

ở đó tích phân lấy từ một điểm z_0 đến z tùy ý thuộc D.

Định lý 15 (giá trị trung bình): Giả sử u là hàm điều hòa trong miền D và $z_o \in D$, $0 < r < d(z_0, \partial D)$. Khi đó

$$u(z_o) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z_o + re^{i\theta})d\theta$$

Định lý 16: Giả sử u là hàm điều hòa trong miền D và nếu u đạt cực đại trong D thì u = const trên D.

Mối liên hệ giữa hàm chỉnh hình với các hàm điều hòa qua phần thực và phần ảo của nó được biểu thị qua các công thức Poisson và Schwarz sau.

Định lý 17 (Công thức Schwarz): Giả sử f = u + iv là hàm chỉnh hình trên $\Delta(0,r)$, liên tục trên $\overline{\Delta}(0,r)$. Khi đó

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(re^{i\varphi}).\frac{re^{i\varphi}+z}{re^{i\varphi}-z}d\varphi + iv(0)$$

với $z \in \Delta(0,r)$

Định lý 18 (Công thức Poisson): Với các giả thiết như trong định lý 17 ta có

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(re^{i\varphi})\frac{r^2 - |z|^2}{|re^{i\varphi}-z|^2}d\varphi$$

hay

$$u(\rho e^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(re^{i\varphi})\frac{r^2-\rho^2}{r^2 - 2\rho r\cos(\varphi-\theta)+\rho^2}d\varphi$$

BÀI TẬP CHƯƠNG IV

102. Tính các tích phân phức $I_1 = \int\limits_\gamma x dz$ và $I_2 = \int\limits_\gamma y dz$ với γ là:

a) Bán kính vectơ của điểm $z = 2 + i$.

b) Nửa đường tròn $|z| = 1$, $0 \le \arg z \le \pi$ (điểm đầu tại z = 1).

c) Đường parabol $y = x^2$ từ A(0, 0) đến B(1, 1)

103. Tính $I = \int\limits_\gamma |z| dz$ với γ là:

a) Nửa đường tròn $|z| = 1$, $-\frac{\pi}{2} \le \arg z \le \frac{\pi}{2}$

(Điểm đầu là $z = -i$).

b) Đường tròn $|z| = R$.

104. Tính $I = \int\limits_\gamma \frac{z}{\bar{z}} dz$ với γ là biên của hình nửa vành khăn $1 < |z| < 2$, $\text{Im}\, z > 0$.

105. Tính tích phân $\int \frac{dz}{\sqrt{z}}$ theo các chu tuyến sau:

a) Theo nửa đường tròn $|z| = 1, y \ge 0, \sqrt{1} = 1$.

b) Theo nửa đường tròn $|z| = 1, y \geq 0. \sqrt{1} = -1$

c) Theo đường tròn $|z| = 1, \sqrt{1} = 1$

d) Theo đường tròn $|z| = 1, \sqrt{1} = -1$

106. Tính tích phân $\int\limits_{\gamma} \mathrm{Ln}z dz$, ở đây:

a) γ là đường tròn đơn vị và $\mathrm{Ln}1 = 0$.

b) γ là đường tròn đơn vị và $\mathrm{Ln}i = \frac{\pi i}{2}$.

c) γ là đường tròn $|z| = R$ và $\mathrm{Ln}R = \ln R + 2\pi i$.

107. Chứng minh nếu $|a| \neq R$ thì:

$$\int\limits_{|z|=R} \frac{|dz|}{|z-a||z+a|} < \frac{2\pi R}{\left|R^2 - |a|^2\right|}$$

108. Chứng minh:

a) Nếu f(z) liên tục tại z = 0 thì:

$$\lim_{r \to 0} \int\limits_0^{2\pi} f(re^{i\varphi}) d\varphi = 2\pi f(0)$$

b) Nếu f liên tục trong lân cận của điểm a thì :

$$\lim_{r \to 0} \int\limits_{|z-a|=r} \frac{f(z)dz}{z-a} = 2\pi i f(a).$$

109. Chứng minh:

a) Nếu f(z) liên tục trong nửa dải $x \geq x_0$, $0 \leq y \leq h$ và tồn tại $\lim_{x\to\infty} f(x+iy) = A$ không phụ thuộc vào y và đều theo y thì

$$\lim_{x\to\infty} \int_{\beta_x} f(z)dz = iAh$$

ở đây β_x là đoạn thẳng $0 \le y \le h$ đi từ dưới lên.

b) Nếu f(z) liên tục trong hình quạt

$$0 < |z-a| < r_o, \quad 0 \le \arg(z-a) \le \alpha \quad (0 < \alpha \le 2\pi)$$

và tồn tại $\lim_{z\to a}[(z-a).f(z)] = A$

thì $$\lim_{r\to 0} \int_{\gamma_r} f(z)dz = iA\alpha$$

ở đây γ_r là cung của đường tròn $|z-a| = r$, $r < r_o$ đi theo hướng dương.

c) Nếu f(z) liên tục trong miền $|z| \ge R_o$, $0 \le \arg z \le \alpha$ $(0 < \alpha \le 2\pi)$ và tồn tại $\lim_{z\to\infty} zf(z) = A$ thì

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_R} f(z)dz = iA\alpha$$

ở đây Γ_R là cung của đường tròn $|z| = R$, $R > R_o$ nằm trong miền đã cho đi theo hướng dương đối với gốc toạ độ.

110. Chứng minh bổ đề Jordan sau: Nếu f(z) liên tục trong miền $|z| \ge R_o$, $\operatorname{Im} z \ge a$ (a: số thực cố định) và $f(z) \to 0$ khi $z \to \infty$ trong miền này thì với mọi số $m > 0$

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_R} e^{imz} f(z)dz = 0,$$

ở đây Γ_R là cung của đường tròn $|z| = R$ nằm trong miền được xét.

***111.** Giả sử hai miền D_1 và D_2 có 1 đoạn thẳng γ là biên chung và f_1, f_2 là hai hàm chỉnh hình trong D_1 và D_2, liên tục trên $D_1 \cup \gamma$ và $D_2 \cup \gamma$ và với mọi $z \in \gamma$: $f_1(z) = f_2(z)$. Chứng minh hàm:

$$f(z) = \begin{cases} f_1(z) & \text{nếu } z \in D_1 \cup \gamma \\ f_2(z) & \text{nếu } z \in D_2 \end{cases}$$

chỉnh hình trong $D_1 \cup \gamma \cup D_2 = D$.

112. Chứng minh:

a) Nếu $f(z)$ chỉnh hình trong dải $0 \le y \le h$ và

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x \pm iy) = 0 \text{ và } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \text{ tồn tại thì } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x + ih)dx$$

cũng tồn tại và chúng bằng nhau.

b) Nếu $f(z)$ chỉnh hình trong góc $0 \le \arg z \le \alpha$ $(0 < \alpha \le 2\pi)$,

$$\lim_{z \to \infty} zf(z) = 0 \text{ và } \int_0^{\infty} f(x)dx \text{ tồn tại thì } \int_\gamma f(z)dz \text{ với } \gamma \text{ là tia}$$

$z = re^{i\alpha}, 0 \le r < \infty$, cũng tồn tại và các tích phân đó bằng nhau.

113. Chứng minh $\displaystyle\int_0^{\infty} \cos x^2 dx = \int_0^{\infty} \sin x^2 dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$.

***114.** Chứng minh định lý gía trị trung bình Weierstrass sau: Nếu f là một hàm phức liên tục trên miền D có F là một nguyên hàm trên D thì với mọi $[a,b] \subset D$ ta có $F(b) - F(a) = (b-a)\xi$, ở đó $\xi \in \operatorname{conv}\Gamma$, ở đây $\operatorname{conv}\Gamma$ là bao lồi của đường Γ với phương trình $w(t) = f(a + (b-a)t)$, $0 \le t \le 1$.

***115.** Giả sử F là hàm chỉnh hình trên miền G và $\operatorname{Re} F'(z) > 0$ $\forall z \in G$. Chứng minh F là hàm một lá trên G.

***116.** Chứng minh đa thức $P(z) = a + nz + z^n$ một lá trên hình tròn đơn vị $\Delta(0,1)$.

***117.** Chứng minh hàm $F(z) = z + e^z$ một lá trong nửa mặt phẳng bên trái.

118. Giả sử W_n là đa thức bậc n và $a \in \Delta(0,r)$. Chứng minh

$$\int_{|z|=r} \frac{W_n(z)}{z^{n+1}(z-a)} dz = 0$$

119. Nếu $|a| < r < |b|$. Chứng minh

$$\int_{|z|=r} (z-a)^{-1}(z-b)^{-1} dz = 2\pi i(a-b)^{-1}.$$

120. Giả sử $f(z) = \dfrac{z}{(1-z)^2}$ và $0 < r < 1$. Chứng minh

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})| d\theta = \frac{r}{1-r^2}.$$

121. Chứng minh nếu f, g là các hàm chỉnh hình trên hình tròn $|z| < 1$ và liên tục trên $|z| \le 1$ thì:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=1}\left(\frac{f(t)}{t-z}+\frac{zg(t)}{zt-1}\right)dt=\begin{cases} f(z) & \text{nếu } |z|<1 \\ g\left(\frac{1}{z}\right) & \text{nếu } |z|>1 \end{cases}$$

122. Tính $\quad I = \displaystyle\int_{|z-a|=a} \frac{zdz}{z^4-1}$, $a > 1$.

123. Tính $\quad I = \displaystyle\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{e^z dz}{z^2+a^2}$

ở đây γ là chu tuyến chứa hình tròn $|z| \le a$ ở bên trong.

124. Tính $\displaystyle\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{ze^z dz}{(z-a)^3}$ nếu điểm a nằm trong chu tuyến γ.

***125.** Chứng minh định lý Liouville bằng cách tính

$$\int_{|z|=R} \frac{f(z)dz}{(z-a)(z-b)} \quad (|a| < R, |b| < R)$$

và đánh giá nó khi $R \to +\infty$.

***126.** Giả sử p là số nguyên dương, còn f là hàm chỉnh hình trên $\mathbb{C}$ thỏa mãn $|f(z)| \le M(1+|z|^p)$ với mọi $z \in \mathbb{C}$, M là hằng số. Chứng minh f là đa thức có bậc không quá p.

127. Giả sử f là hàm chỉnh hình trên $\mathbb{C}$ thỏa mãn

$$|f(z)| \le Me^{|z|}, z \in \mathbb{C}.$$

Chứng minh:

$$\frac{\left|f^{(n)}(0)\right|}{n!} \le M.\left(\frac{e}{n}\right)^n.$$

128. Giả sử f là hàm chỉnh hình trên $\mathbb{C}$ thỏa mãn

$$|f(z)| \le e^{\operatorname{Re} z}, z \in \mathbb{C}.$$

Có thể cho biết f là hàm như thế nào ?

129. Chứng minh công thức tích phân Cauchy cho miền vô hạn: Giả sử γ là chu tuyến giới hạn miền hữu hạn D. Hàm f chỉnh hình ở miền ngoài đối với γ và $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = A$. Chứng minh

$$\frac{1}{2\Pi i}\int_\gamma \frac{f(t)dt}{t-z} = \begin{cases} -f(z)+A & \text{nếu } z \text{ ở phần ngoài đối với } \gamma. \\ A & \text{nếu } z \in D. \end{cases}$$

Chu tuyến γ chạy theo hướng dương đối với miền D.

130. Giả sử f và chu tuyến γ thỏa mãn giả thiết của bài toán trên. Chứng minh nếu $0 \in D$ thì:

$$\frac{1}{2\Pi i}\int_\gamma \frac{f(t)dt}{tz-t^2} = \begin{cases} 0 & \text{nếu } z \in D \\ \dfrac{f(z)}{z} & \text{nếu } z \notin D \cup \gamma \end{cases}$$

***131.** Chựng minh một hàm chỉnh hình trên $\mathbb{C}$ không nhận giá trị trên nửa mặt phẳng bên phải là hằng số.

***132.** Giả sử Ω là tập mở, liên thông của C và $f : \Omega \to \mathbb{C}$ là hàm liên tục. Giả sử $A \subset \Omega$ là tập rời rạc và f là hàm chỉnh hình trên $\Omega \setminus A$. Chứng minh f là hàm chỉnh hình trên Ω.

***133.** Giả sử f là hàm chỉnh hình trong nửa mặt phẳng trên $\operatorname{Im} z > 0$ và liên tục trên $\operatorname{Im} z \geq 0$ và f nhận giá trị thực trên trục thực, $\|f\|_\infty = \sup\{|f(z)| : \operatorname{Im} z \geq 0\} \leq 1$. Chứng minh:

$$f = c \in [-1,1].$$

***134.** Chứng minh hàm $\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$ là hàm chỉnh hình ở nửa mặt phẳng $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$. Đồng thời nó thỏa mãn

$$\Gamma(z+1) = z.\Gamma(z).$$

Từ đó chứng minh: $\Gamma(n+1) = n!$

135. Giả sử f là hàm chỉnh hình trên miền D, $|f|$ liên tục trên $\overline{D}$ và $|f| \neq \text{const}$. Chứng minh nếu $|f|$ có giá trị không đổi trên ∂D thì $f(z_0) = 0$ tại z_0 nào đó thuộc D.

136. Nếu P là đa thức bậc n thì với mỗi A cố định, tập $\{z : |P(z)| = A\}$ không thể có quá n thành phần liên thông.

***137.** Chứng minh định lý Hadamard về ba vòng tròn: Giả sử f là hàm chỉnh hình trong $B = \{z : r_1 < |z| < r_2\}$ liên tục trên $\overline{B}$ và $M_k = \sup_{|z|=r_k} |f(z)|$ k = 1, 2. Đặt $M(r) = \sup_{|z|=r} |f(z)|$ thì logM(r) là hàm lồi của logr nghĩa là

$$\log M(r) \leq \frac{\log r_2 - \log r}{\log r_2 - \log r_1} \log M_1 + \frac{\log r - \log r_1}{\log r_2 - \log r_1} \log M_2.$$

*138. Nếu P là đa thức bậc n và $|P(z)| \leq M$ trong $\Delta(0,1)$. Chứng minh

$$|P(z)| \leq M|z|^n \text{ khi } |z| > 1.$$

*139. Chứng minh nếu f là hàm chỉnh hình và $|f(z)| \leq 1$ khi $|z| < 1$, và tiến đều tới 0 trong góc $\alpha \leq \arg z \leq \beta$ khi $|z| \to 1$ thì $f = 0$.

*140. Nếu $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ là hàm giải tích trong $\Delta(0,1)$ và $|f(z)| \leq M$ trên $\Delta(0,1)$ thì

$$M|a_1| \leq M^2 - |a_o|^2.$$

*141. Nếu f chỉnh hình trên $\Delta(0.1)$, $f(0) = 0$ và $|\mathrm{Re}\, f(z)| < 1$ trên $\Delta(0,1)$ thì:

a) $|f'(0)| \leq \dfrac{4}{\pi}$

b) $|f(z)| \leq \dfrac{2}{\pi} \log \dfrac{1 + |z|}{1 - |z|}$.

142. Nếu f chỉnh hình và khác 0 trên $\Delta(0,1)$ và $|f(z)| < M$ trên $\Delta(0,1)$ thì

$$\forall z \in \Delta(0,1): |f(z)| \leq |f(0)|^{\frac{1-|z|}{1+|z|}} M^{\frac{2|z|}{1-|z|}}.$$

143. Tìm hàm giải tích $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ theo phần thực hoặc phần ảo đã cho:

1) $u(x,y)=x^2-y^2+2$.

2) $u(x,y)=e^x(x\cos y-y\sin y)-\dfrac{y}{x^2+y^2}$.

3) $v(x,y)=x+y-3$.

4) $v(x,y)=\cos x\,\mathrm{sh}y-\mathrm{sh}x\sin y$.

5) $v(x,y)=\ln(x^2+y^2)+x-2y$.

6) $v(x,y)=x^2-y^2+5x+y-\dfrac{y}{x^2+y^2}$.

144. Chứng minh các hệ thức sau đối với tích phân Poisson và Schwarz:

1) $$\frac{1}{2\Pi}\int_0^{2\Pi}\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}=1$$

2) $u(r,\varphi)-u(R,\theta_o)=$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\Pi}\left[u(R,\theta)-u(R,\theta_0)\right]\times\frac{\left(R^2-r^2\right)d\theta}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}$$

3) Nếu $\left|u(R,\theta)-u(R,\theta_o)\right|<\varepsilon$ với $\left|\theta-\theta_o\right|<\alpha$ thì
$$\frac{1}{2\pi}\int_{|\theta-\theta_o|<\alpha}\left|u(R,\theta)-u(R,\theta_o)\right|\times\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}d\theta<\varepsilon$$

4) Nếu $\left|\theta-\theta_0\right|>\alpha$ và $\left|\varphi-\theta_0\right|<\dfrac{\alpha}{2}$ thì
$$R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2>4Rr\sin^2\frac{\alpha}{4}.$$

145. Chứng minh nếu $\zeta=Re^{i\theta}$, $z=re^{i\varphi}$ thì

$$\frac{\zeta+z}{\zeta-z}=\frac{(R^2-r^2)+i2Rr\sin(\varphi-\theta)}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}$$

Dùng đẳng thức này để nhận được các khai triển sau:

$$u(z)=u(0)+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n(a_n\cos n\varphi+b_n\sin n\varphi)$$

$$v(z)=v(0)+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n(-b_n\cos n\varphi+a_n\sin n\varphi)$$

ở đó:

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\Pi}u(R,\theta)\cos n\theta d\theta$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\Pi}u(R,\theta)\sin n\theta d\theta$$

146. Chứng minh rằng có thể viết công thức Schwarz dưới dạng:

$$f(z)=\frac{1}{\pi i}\int_{|\zeta|=R}\frac{u(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}-\overline{f(0)}.$$

147. Tìm hàm f(z) giải tích trong $|z|<R$ theo hàm $u(\zeta)$ cho bởi:

1) $u(\zeta)=\mathrm{Re}[\varphi(\zeta)+\psi(\zeta)]$.

2) $u(\zeta)=\mathrm{Im}[\varphi(\zeta)+\psi(\zeta)]$.

ở đây $\varphi(z)$ là hàm giải tích trong $|z|\le R$ còn $\psi(z)$ là hàm giải tích $|z|\ge R$

148. Giả sử h, k là các hàm điều hoà, khác hằng số trên miền D. Chứng minh hk là hàm điều hòa trên D nếu và chỉ nếu h + ick là hàm chỉnh hình đối với $c \in \mathbb{R}$ là hằng số.

149. Giả sử $\Delta = \Delta(0,1) = \{z \in C : |z| < 1\}$ và $\Phi : \partial\Delta \to C$ cho bởi $\Phi(\xi) = \bar{\xi}$. Chứng minh không tồn tại hàm chỉnh hình f trên Δ với $\lim\limits_{z \to \xi} f(z) = \Phi(\xi)$ cho mọi $\xi \in \partial\Delta$.

150. Giả sử Ω là một miền trong $\mathbb{C}$ và $f : \Omega \to \mathbb{R}$ là hàm sao cho f và f^2 đều là hàm điều hoà. Chứng minh f là hằng số.

151. Giả sử $f : \Omega \to \mathbb{R}$ là hàm điều hòa sao cho fg là hàm điều hòa với mọi hàm điều hòa g. Chứng minh f là hằng số.

152. Giả sử f là hàm chỉnh hình trên Ω sao cho $g(z) = \bar{z}f(z)$ là hàm điều hòa trên Ω. Chứng minh f là hằng số.

153. Giả sử $\{f_n\}_{n \geq 1} \subset H(\Delta)$, $\Delta = \{z \in C : |z| < 1\}$, $f_n(0) = 0$ và dãy $\{\operatorname{Re} f_n\}$ hội tụ về 0 đều địa phương. Chứng minh $\{f_n\}$ hội tụ đều về 0 trên mọi tập compact của Δ.

154. Chứng minh nếu f chỉnh hình trên Δ, $f(\alpha) = 0$ $(|\alpha| < 1)$, $|f(z)| \leq 1$ khi $|z| < 1$ thì: $|f(z)| \leq \left|\dfrac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z}\right|$

***155.** Chứng minh f là hàm chỉnh hình trên Δ và $|f(z)| < 1$ khi $z \in \Delta$ thì với mọi ξ, z thuộc Δ xảy ra:

$$\left|\frac{f(\xi)-f(z)}{1-\overline{f(z)}f(\xi)}\right| \le \left|\frac{\xi - z}{1-\overline{z}\xi}\right| \quad \text{và} \quad |f'(z)| \le \frac{1-|f(z)|^2}{1-|z|^2}$$

***156.** Giả sử f là hàm chỉnh hình trong hình tròn đơn vị Δ sao cho $f(0) = 1$ và $|f(z)| < M$ trên Δ. Chứng minh trong hình tròn $\left\{|z| \le \frac{1}{M}\right\}$ có đánh giá

$$|f(z)-1| \le M|z|.$$

157. Giả sử $f_1, f_2, ..., f_n$ chỉnh hình trên D, liên tục trên $\overline{D}$. Chứng minh hàm $\varphi(z) = |f_1(z)| + ... + |f_n(z)|$ đạt cực đại trên biên ∂D của D.

158. Chứng minh nếu f chỉnh hình trên Δ, liên tục trên $\overline{\Delta}$ và $|f(z)| = 1$ khi $z \in \partial\Delta$ thì f là hàm hữu tỷ.

159. Giả sử F là hàm chỉnh hình, ánh xạ bảo giác đĩa đơn vị $\Delta(0,1)$ lên miền lồi D sao cho $F(0) = 0$, $F'(0) = 1$. Giả sử f là một hàm lẻ sao cho có hàm chỉnh hình $w : \Delta(0,1) \to \Delta(0,1)$ với $w(0) = 0$ và $f = F.w$ trên $\Delta(0,1)$. Chứng minh:

$$|f'(z)| \le \frac{1}{1-|z|^2}.$$

160. Giả sử $f(z) = a_1z + a_2z^2 + ...$ và $F(z) = A_1z + A_2z^2 + ...$ là các hàm chỉnh hình trong $\Delta(0,1)$ và có hàm chỉnh hình $w : \Delta(0,1) \to \Delta(0,1)$ với $w(0) = 0$ và $f = F.w$ trên $\Delta(0,1)$. Chứng minh:

$$|a_2| \le \max(|A_1|, |A_2|).$$