NGUYỄN VĂN TRÀO
PHẠM NGUYỄN THU TRANG

BÀI TẬP HÀM BIẾN PHỨC

SP
NHÀ XUẤT BẢN
ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

NGUYỄN VĂN TRÀO – PHẠM NGUYỄN THU TRANG

BÀI TẬP

HÀM BIẾN PHỨC

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

Mã số: 01.01.12/181 - ĐH 2009

Mục lục

Lời nói đầu

Môn học "Hàm biến phức" được giảng dạy ở học kỳ 2 năm thứ hai khoa Toán - Tin, trường Đại học Sư phạm Hà Nội. Trong chương trình đào tạo theo tín chỉ, thời lượng học của môn học này hiện nay là 2 tín chỉ, với số giờ bài tập chỉ còn lại 1 tiết (50 phút) cho một tuần. Mặt khác, vì đây là một môn học tương đối khó đối với sinh viên, nên để cho sinh viên nắm bắt được các nội dung chủ yếu của môn học thì việc cấu trúc lại phần bài tập và hướng dẫn sinh viên làm bài tập là rất cần thiết. Do vậy, chúng tôi biên soạn cuốn "Bài tập hàm biến phức" với mục đích giúp cho sinh viên dễ dàng hơn trong việc tiếp thu môn học này.

Nội dung của cuốn sách gồm ba chương :

Chương 1: Mở đầu về hàm biến phức.

Chương 2: Hàm chỉnh hình và lí thuyết Cauchy.

Chương 3: Chuỗi Laurent, lí thuyết thặng dư và áp dụng.

Nội dung các chương tương ứng với giáo trình lí thuyết "Hàm biến phức" do hai tác giả Nguyễn Văn Khuê, Lê Mậu Hải biên soạn và xuất bản tại Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà Nội năm 2006.

Trong phần đầu mỗi chương của cuốn sách, chúng tôi đưa ra một số bài tập mẫu với lời giải chi tiết giúp cho sinh viên làm quen với việc giải các bài toán thuộc phần đó. Phần cuối mỗi chương là một số bài tập tự giải (với gợi ý hoặc đáp số ở cuối sách) nhằm phát huy năng lực tự học và khả năng tư duy độc lập của sinh viên.

Chúng tôi không đưa vào cuốn sách này một số lượng quá lớn bài tập mà chú ý nhiều hơn đến tính chuẩn mực và sự đa dạng của các bài tập. Bên cạnh cuốn "Bài tập hàm biến phức" này bạn đọc có thể tham khảo bài tập ở các sách đã được xuất bản trước đó như cuốn "Bài tập hàm biến phức" của các tác giả Lê Mậu Hải, Bùi Dắc Tắc; cuốn "Introduction to complex analysis" của tác giả J. Noguchi ...

Chúng tôi xin chân thành cảm ơn GS. TSKH. Nguyễn Văn Khuê; GS. TSKH. Lê Mậu Hải; GS. TSKH. Đỗ Đức Thái đã dành nhiều công sức để đọc kĩ bản thảo và đưa ra nhiều ý kiến quý báu.

Cuốn sách này lần đầu tiên được xuất bản nên không tránh khỏi những thiếu sót. Chúng tôi mong nhận được sự góp ý của bạn đọc.

Các tác giả

Chương 1

Mở đầu về hàm biến phức

Bài 1.1. *Viết các số phức sau dưới dạng lượng giác, dạng mũ:*

a) $-1-i$; *b)* $1+i\sqrt{3}$; *c)* $\dfrac{(1+i\sqrt{3})^3}{-1-i}$; *d)* $(\sqrt{3}+i)^4(1-i)$.

Lời giải.

a) Ta có $|-1-i| = \sqrt{2}$, $\arg(-1-i) = -\dfrac{3\pi}{4}$. Do đó

$$-1-i = \sqrt{2}\Big(\cos(-\frac{3\pi}{4}) + i\sin(-\frac{3\pi}{4})\Big) = \sqrt{2}.e^{-i\frac{3\pi}{4}}.$$

b) Ta có $|1+i\sqrt{3}| = 2$, $\arg(1+i\sqrt{3}) = \dfrac{\pi}{3}$. Do đó

$$1+i\sqrt{3} = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}) = 2.e^{i\frac{\pi}{3}}.$$

c) Ta có $\left|\dfrac{(1+i\sqrt{3})^3}{-1-i}\right| = \dfrac{|1+i\sqrt{3}|^3}{|-1-i|} = \dfrac{8}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$ và

$$\arg\frac{(1+i\sqrt{3})^3}{-1-i} = 3\arg(1+i\sqrt{3}) - \arg(-1-i) = 3\frac{\pi}{3} + \frac{3\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}.$$

Do đó

$$\frac{(1+i\sqrt{3})^3}{-1-i} = 4\sqrt{2}(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}) = 4\sqrt{2}.e^{i\frac{7\pi}{4}}.$$

d) Ta có $|(\sqrt{3}+i)^4(1-i)| = 2^4\sqrt{2} = 16\sqrt{2}$ và
$\arg\left((\sqrt{3}+i)^4(1-i)\right) = 4\arg(\sqrt{3}+i)+\arg(1-i) = 4\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{12}$.

Vậy $(\sqrt{3}+i)^4(1-i) = 16\sqrt{2}.(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}) = 16\sqrt{2}.e^{i\frac{5\pi}{12}}$.

□

Bài 1.2. *Rút gọn: a)* $z = \frac{1-i}{1+i}$; *b)* $z = (1+i\sqrt{3})^3$.

Lời giải. a) $z = \frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)^2}{2} = \frac{-2i}{2} = -i$.

b) Ta có $1 + 1\sqrt{3} = 2(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3})$

$\Rightarrow z = (1+i\sqrt{3})^3 = 8(\cos\pi + i\sin\pi) = -8.$ □

Bài 1.3. *Chứng minh rằng:*

$$|z_1+z_2| \geq \frac{1}{2}(|z_1|+|z_2|)\left|\frac{z_1}{|z_1|}+\frac{z_2}{|z_2|}\right|, \forall z_1, z_2 \neq 0.$$

Lời giải. Ta chứng minh bất đẳng thức tương đương

$$\left|\frac{z_1}{|z_1|}+\frac{z_2}{|z_2|}\right|(|z_1|+|z_2|) \leq 2(|z_1+z_2|) \quad (*)$$

Xét

$$\begin{aligned}
A &= \left(\left|\frac{z_1}{|z_1|}+\frac{z_2}{|z_2|}\right|(|z_1|+|z_2|)\right)^2 \\
&= \left(\frac{z_1}{|z_1|}+\frac{z_2}{|z_2|}\right)\left(\frac{\overline{z}_1}{|z_1|}+\frac{\overline{z}_2}{|z_2|}\right)(|z_1|+|z_2|)^2 \\
&= \left(1+1+\frac{z_1\overline{z}_2}{|z_1||z_2|}+\frac{z_2\overline{z}_1}{|z_2||z_1|}\right)(|z_1|+|z_2|)^2 \\
&= (2+2\mathrm{Re}\frac{z_1\overline{z}_2}{|z_2||z_1|})(|z_1|^2+|z_2|^2+2|z_1||z_2|) \\
&= 2(1+\mathrm{Re}\frac{z_1\overline{z}_2}{|z_2||z_1|})(|z_1|^2+|z_2|^2+2|z_1||z_2|) \\
&= 2(|z_1|^2+|z_2|^2+2|z_1||z_2|+\mathrm{Re}\left(\frac{z_1\overline{z}_2}{|z_2|}|z_1|\right)+ \\
&\qquad \mathrm{Re}\left(\frac{z_1\overline{z}_2}{|z_1|}|z_2|\right)+2\mathrm{Re}(z_1\overline{z}_2)).
\end{aligned}$$

$$B = (2|z_1+z_2|)^2 = 4(z_1+z_2)(\overline{z}_1+\overline{z}_2) = 4(|z_1|^2+|z_2|^2+2\mathrm{Re}(z_1\overline{z}_2)).$$

Ta sẽ chứng minh $A \leq B$. Thật vậy:

$$A \leq B \Leftrightarrow 2|z_1||z_2| + \mathrm{Re}\left(\frac{z_1\overline{z}_2}{|z_2|}|z_1|\right) + \mathrm{Re}\left(\frac{z_1\overline{z}_2}{|z_1|}|z_2|\right) \leq |z_1|^2+|z_2|^2+2\mathrm{Re}(z_1\overline{z}_2). \ (1)$$

Vì $\mathrm{Re}(z_1\overline{z}_2) \leq |z_1\overline{z}_2| = |z_1||z_2|$ nên $\mathrm{Re}(z_1\overline{z}_2) \leq |z_1||z_2|$. Do đó

$$(|z_1|-|z_2|)^2\mathrm{Re}(z_1\overline{z}_2) \leq (|z_1|-|z_2|)^2|z_1||z_2|.$$

Suy ra

$$\left(\frac{|z_1|^2+|z_2|^2}{|z_1|.|z_2|}-2\right)\mathrm{Re}(z_1\overline{z}_2) \leq (|z_1|-|z_2|)^2.$$

Tức là

$$2|z_1||z_2| + \left(\frac{|z_1|}{|z_2|} + \frac{|z_2|}{|z_1|}\right)\mathrm{Re}(z_1\overline{z}_2) \le |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\mathrm{Re}z_1\overline{z}_2$$

hay (1) được chứng minh.

Vậy $A \le B$ hay (*) được chứng minh. Do đó

$$|z_1 + z_2| \ge \frac{1}{2}(|z_1| + |z_2|)\left|\frac{z_1}{|z_1|} + \frac{z_2}{|z_2|}\right|. \qquad \square$$

Bài 1.4. *Chứng minh*

$$|1 - \overline{z_1}.z_2|^2 - |z_1 - z_2|^2 = (1 - |z_1|^2)(1 - |z_2|^2)$$

Lời giải. Ta có

$|1 - \overline{z_1}.z_2|^2 - |z_1 - z_2|^2$

$$\begin{aligned}
&= (1 - \overline{z}_1.z_2)(\overline{1 - \overline{z}_1.z_2}) - (z_1 - z_2)(\overline{z_1 - z_2})\\
&= (1 - \overline{z}_1.z_2)(1 - z_1.\overline{z}_2) - (z_1 - z_2)(\overline{z}_1 - \overline{z}_2)\\
&= 1 - z_1\overline{z}_2 - \overline{z}_1 z_2 + z_1\overline{z}_1 z_2\overline{z}_2 - z_1\overline{z}_1 + z_1\overline{z}_2 + z_2\overline{z}_1 - z_2\overline{z}_2\\
&= 1 + |z_1|^2|z_2|^2 - |z_1|^2 - |z_2|^2\\
&= (1 - |z_1|^2)(1 - |z_2|^2).
\end{aligned}$$

$\square$

Bài 1.5. *Chứng minh*

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2).$$

Lời giải. Ta có $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 =$

$$\begin{aligned}
&= (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) + (z_1 - z_2)(\overline{z_1 - z_2})\\
&= (z_1 + z_2)(\overline{z}_1 + \overline{z}_2) + (z_1 - z_2)(\overline{z}_1 - \overline{z}_2)\\
&= z_1\overline{z}_1 + z_1\overline{z}_2 + z_2\overline{z}_1 + z_2\overline{z}_2 + z_1\overline{z}_1 - z_1\overline{z}_2 - z_2\overline{z}_1 + z_2\overline{z}_2\\
&= 2(|z_1|^2 + |z_2|^2).
\end{aligned}$$

$\square$

Bài 1.6. *Tìm căn các số phức sau:*

a) $\sqrt[3]{1}$; *b)* $\sqrt[4]{1}$; *c)* $\sqrt[3]{-2+2i}$.

Lời giải.

a) $1 = 1.e^{0i}$ nên $\sqrt[3]{1} = e^{\frac{2k\pi i}{3}}$ $(k = 0, 1, 2)$ hay

$$\sqrt[3]{1} = \left\{1; \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{-1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}.$$

b) $\sqrt[4]{-1} = e^{\frac{\pi + 2k\pi}{4}}$ $(k = 0, 1, 2, 3)$ hay

$$\sqrt[4]{-1} = \left\{\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{-\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{-\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}.$$

c) $-2 + 2i = \sqrt{8}e^{i\frac{3\pi}{4}}$. Do đó

$$\sqrt[3]{-2+2i} = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi + 8k\pi}{12}} \quad (k = 0, 1, 2)$$

hay

$$\sqrt[3]{-2+2i} = \left\{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}; \sqrt{2}e^{i\frac{11\pi}{12}}; \sqrt{2}e^{i\frac{19\pi}{12}}\right\}. \qquad \square$$

Bài 1.7. *Chứng minh* $\left|\frac{z}{|z|} - 1\right| \le |\arg z|, \forall z \ne 0$ *và giải thích ý nghĩa hình học.*

Lời giải. Viết $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, ở đó $r = |z|$ và $\varphi = \arg z$. Khi đó

$$\begin{aligned}\left|\frac{z}{|z|} - 1\right| &= |\cos\varphi - 1 + i\sin\varphi| = \sqrt{(\cos\varphi - 1)^2 + \sin^2\varphi}\\ &= \sqrt{2(1-\cos\varphi)} = \sqrt{4\sin^2\varphi/2} = 2|\sin\varphi/2|\\ &\le 2|\varphi/2| = |\varphi| = |\arg z|.\end{aligned}$$

Ý nghĩa hình học: Nếu vẽ đường tròn đơn vị và gọi A là điểm biểu diễn cho số 1 và B là điểm biểu diễn cho số $\frac{z}{|z|}$ thì $\left|\frac{z}{|z|} - 1\right|$ là độ dài của dây AB. Còn $|\arg z|$ là độ dài của cung AB. Hệ thức vừa chứng minh nói lên độ dài của dây AB phải nhỏ hơn hay bằng độ dài cung AB. □

Bài 1.8. *Chứng minh rằng nếu $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ và $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ thì những điểm z_1, z_2, z_3 là ba đỉnh của một tam giác đều nội tiếp trong hình tròn đơn vị.*

Lời giải. Vì $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ nên z_1, z_2, z_3 thuộc đường tròn đơn vị. Ta chỉ cần chứng minh $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| = |z_3 - z_1|$. Xét hiệu:

$$\begin{aligned}|z_1 - z_2|^2 - |z_2 - z_3|^2 &= \overline{z_2}z_3 + z_2\overline{z_3} - z_2\overline{z_1} - z_1\overline{z_2};\\ |z_1 - z_3|^2 - |z_2 - z_3|^2 &= \overline{z_2}z_3 + z_2\overline{z_3} - \overline{z_1}z_3 - z_1\overline{z_3}.\end{aligned}$$

Ta chứng minh vế phải của hai đẳng thức trên bằng nhau. Thật

vậy

$$\begin{aligned}&\overline{z_2}z_3 + z_2\overline{z_3} - z_2\overline{z_1} - z_1\overline{z_2} = \overline{z_2}z_3 + z_2\overline{z_3} - \overline{z_1}z_3 - z_1\overline{z_3}\\ \Leftrightarrow\ & -z_2\overline{z_1} - z_1\overline{z_2} - \overline{z_2}z_3 - z_2\overline{z_3} = -\overline{z_1}z_3 - z_1\overline{z_3} - \overline{z_2}z_3 - z_2\overline{z_3}\\ \Leftrightarrow\ & z_2(-\overline{z_1} - \overline{z_3}) + \overline{z_2}(-z_1 - z_3) = z_3(-\overline{z_1} - \overline{z_2}) + \overline{z_3}(-z_1 - z_2)\\ \Leftrightarrow\ & z_2\overline{z_2} + \overline{z_2}z_2 = z_3\overline{z_3} + \overline{z_3}z_3 (\text{do } z_1 + z_2 + z_3 = 0)\\ \Leftrightarrow\ & |z_2|^2 = |z_3|^2 (\text{đúng do } |z_1| = |z_2| = |z_3| = 1).\end{aligned}$$

Vậy $|z_1 - z_2|^2 - |z_2 - z_3|^2 = |z_1 - z_3|^2 - |z_2 - z_3|^2$. Suy ra $|z_1 - z_2| = |z_1 - z_3|$. Tương tự ta có $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3|$. Do đó tam giác $z_1z_2z_3$ là tam giác đều và nội tiếp trong hình tròn đơn vị. □

Bài 1.9. *Tìm điều kiện cần và đủ để ba điểm z_1, z_2, z_3 từng đôi một khác nhau cùng nằm trên một đường thẳng.*

Lời giải. *Điều kiện cần:* Do z_1, z_2, z_3 cùng nằm trên một đường thẳng nên $z_1 - z_3 = k(z_1 - z_2)$ với k là một số thực. Vậy $\frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_2} = k$. Do đó $\mathrm{Im}\frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_2} = 0$. Vậy điều kiện cần để ba điểm z_1, z_2, z_3 từng đôi một khác nhau và cùng nằm trên một đường thẳng là

$$\mathrm{Im}\frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_2} = 0.$$

Ta thấy rõ ràng điều kiện trên cũng là điều kiện đủ. □

Bài 1.10. *Cho biết hai đỉnh liên tiếp z_1 và z_2 của đa giác đều n cạnh. Tìm đỉnh z_3 kề với $z_2 (z_3 \neq z_1)$.*

Lời giải. Viết $z_3 = z_2 + (z_3 - z_2)$.
Vì $|z_3 - z_2| = |z_2 - z_1|$ và góc giữa $z_3 - z_2$ với $z_2 - z_1$ là $\frac{2\pi}{n}$, nên $z_3 - z_2 = (z_2 - z_1)e^{\frac{i2\pi}{n}}$. Do đó $z_3 = z_2 + (z_2 - z_1)e^{\frac{i2\pi}{n}}$. □

Bài 1.11. *Chứng minh rằng cả hai giá trị $\sqrt{z^2-1}$ nằm trên đường thẳng đi qua gốc toạ độ và song song với đường phân giác của góc trong của tam giác với đỉnh tại các điểm $-1, 1, z$ và đường phân giác này đi qua điểm z.*

Lời giải. Giả sử $z^2 - 1 = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ với $r > 0, 0 \le \varphi < 2\pi$. Khi đó tập giá trị của $\sqrt{z^2-1}$ là

$$\left\{\sqrt{r}(\cos\frac{\varphi}{2} + \sin\frac{\varphi}{2});\ \sqrt{r}(\cos(\frac{\varphi}{2}+\pi) + \sin(\frac{\varphi}{2}+\pi))\right\}.$$

Do đó, ta chỉ cần chứng minh $z_1 = \sqrt{r}(\cos\frac{\varphi}{2} + \sin\frac{\varphi}{2})$ thuộc đường thẳng đó.

Ta có $z_1^2 = (z-1)(z+1)$, nên $\arg z_1 = \frac{1}{2}\big(\arg(z-1) + \arg(z+1)\big)$.

Bằng việc vẽ hình và sử dụng lí luận trên ta suy ra z_1 nằm trên đường thẳng chứa phân giác trong tại đỉnh 0 của tam giác có ba đỉnh là $0, z-1, z+1$.

Dựa vào tính chất hình bình hành, tính chất đường thẳng song song, ta dễ thấy đường thẳng này song song với đường phân giác của góc trong tại đỉnh z của tam giác có ba đỉnh là $z, -1, 1$.

Do đó, z_1 thuộc đường thẳng đi qua gốc toạ độ thoả mãn yêu cầu bài toán. Từ đó tập giá trị $\sqrt{z^2-1}$ thoả mãn yêu cầu bài toán.
□

Bài 1.12. *Cho $n+1$ số phức $z, z_1, z_2, \cdots, z_n$. Hãy chứng minh rằng nếu $\mathrm{Im}(z.z_k) > 0, 1 \le k \le n$ thì: $\sum_{k=1}^n \frac{1}{z_k} \ne 0$.*

Lời giải. Nếu $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ thì $\frac{1}{z} = \frac{1}{|z|}(\cos\theta - i\sin\theta)$.

Như vậy, nếu $\mathrm{Im}z > 0$ thì $\mathrm{Im}\frac{1}{z} < 0$.

Do $\mathrm{Im}(z.z_k) > 0, \forall k = 1, \cdots, n$ nên $z.z_k \ne 0, \forall k = 1, \cdots, n$. Theo nhận xét trên ta có

$$\mathrm{Im}\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{z.z_k}\right) < 0.$$

Vậy $\mathrm{Im}\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{z.z_k}\right) \ne 0$. Suy ra $\mathrm{Im}\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{z_k}\right) \ne 0$, và do đó $\sum_{k=1}^n \frac{1}{z_k} \ne 0$. □

Bài 1.13. *Chứng minh rằng, nếu z_1, z_2, z_3 là nghiệm của phương trình $z^3 - 1 = 0$ thì*

$$z_1^n + z_2^n + z_3^n = z_1^n.z_2^n + z_2^n.z_3^n + z_3^n.z_1^n, \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Lời giải. Dễ thấy $z = 1$ là nghiệm của phương trình $z^3 - 1 = 0$. Như vậy ta có thể giả sử $z_1 = 1$. Khi đó đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\begin{aligned} 1 + z_2^n + z_3^n &= z_2^n + z_3^n + z_2^n.z_3^n \\ \Leftrightarrow 1 &= z_2^n.z_3^n. \end{aligned}$$

Theo định lí Viet ta có $z_1.z_2.z_3 = 1$ hay $z_2.z_3 = 1$. Do đó $z_2^n.z_3^n = 1$.
□

Bài 1.14. *Chứng minh rằng, với giá trị $k > 0$, $k \neq 1$ phương trình*

$$\left|\frac{z-a}{z-b}\right| = k$$

là phương trình đường tròn. Tìm tâm và bán kính đường tròn đó.

Lời giải. Xét phương trình

$$\left|\frac{z-a}{z-b}\right| = k. \quad (1)$$

(1) tương đương với $|z|^2 - 2\mathrm{Re}(z\overline{a}) + |a|^2 = k^2(|z|^2 - 2\mathrm{Re}(z\overline{b}) + |b|^2)$. Do đó

$$|z|^2 - 2\frac{\mathrm{Re}(\overline{a} - k^2\overline{b})z}{1-k^2} + \frac{|a|^2 - k^2|b|^2}{1-k^2} = 0$$

nên

$$\left|z - \frac{a - k^2 b}{1-k^2}\right|^2 = \frac{|a - k^2 b|^2}{(1-k^2)^2} - \frac{|a|^2 - k^2|b|^2}{1-k^2}. \quad (2)$$

Ta có $|a - k^2 b|^2 - (1-k^2)(|a|^2 - k^2|b|^2)$

$$= |a|^2 - 2\mathrm{Re}(ak^2\overline{b}) + k^4|b|^2 - |a|^2 + k^2|b|^2 + k^2|a|^2 - k^4|b|^2$$
$$= k^2|a|^2 - 2\mathrm{Re}(ak^2\overline{b}) + k^2|a|^2$$
$$= k^2|a-b|^2.$$

Do đó (2) suy ra

$$\left|z - \frac{a-k^2b}{1-k^2}\right| = \frac{k|a-b|}{|1-k^2|} \quad (3)$$

Từ (3) suy ra (1) là phương trình đường tròn ($k \neq 1$) với tâm tại $z_0 = \dfrac{a-k^2b}{1-k^2}$ và bán kính $R = \dfrac{k|a-b|}{|1-k^2|}$. □

Bài 1.15. *Chứng minh rằng nếu chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ hội tụ và*

$$|\arg c_n| \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$$

thì chuỗi hội tụ tuyệt đối.

Lời giải. Đặt $\arg c_n = \varphi_n$. Khi đó $c_n = |c_n|.e^{i\varphi_n}$.

Ta có $\mathrm{Re}\ c_n = |c_n|.\cos\varphi_n \geq |c_n|.\cos\alpha$. Suy ra

$$|c_n| \leq \frac{1}{\cos\alpha}\mathrm{Re}\ c_n. \quad (1)$$

Vì chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ hội tụ nên chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathrm{Re}\ c_n$ hội tụ, do đó chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |c_n|$ hội tụ (theo (1)).

Vậy chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ hội tụ tuyệt đối. □

Bài 1.16. *Giả sử các chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ và $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2$ hội tụ. Chứng minh rằng, nếu $\mathrm{Re}\ c_n \geq 0$ với mọi n thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2$ cũng hội tụ.*

Lời giải. Đặt $c_n = x_n + iy_n$. Do chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ hội tụ nên $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ hội tụ.

Theo giả thiết $x_n > 0$ nên với n đủ lớn thì $x_n < 1$. Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử $x_n \to 0$ và $x_n < 1$ với mọi $n \geq 1$. Do đó $0 < x_n^2 < x_n$, suy ra chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n^2$ hội tụ.

Ta có $c_n^2 = x_n^2 - y_n^2 + 2ix_ny_n$, mà $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ hội tụ nên $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_n^2 - y_n^2)$ hội tụ. Từ đó ta có

$$\sum_{n=1}^{\infty}|c_n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}(x_n^2 + y_n^2) = 2\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 - \sum_{n=1}^{\infty}(x_n^2 - y_n^2) \text{ hội tụ.}$$

Vậy $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|c_n|^2$ hội tụ. □

Bài 1.17. *Chứng minh:*

$$(n-2)\sum_{k=1}^{n}|a_k|^2 + \Big|\sum_{k=1}^{n} a_k\Big|^2 = \sum_{1\le k<s\le n}|a_k + a_s|^2.$$

Lời giải. Ta chứng minh bằng qui nạp theo n.

+) Nếu $n = 2$: Vế trái $= |a_1 + a_2|^2 =$ Vế phải.

+) Giả sử đẳng thức đúng với $n = p \ge 2$, tức là ta có:

$$(p-2)\sum_{k=1}^{p}|a_k|^2 + \Big|\sum_{k=1}^{p} a_k\Big|^2 = \sum_{1\le k<s\le p}|a_k + a_s|^2. \quad (1)$$

Ta sẽ chứng minh đẳng thức đúng với $n = p+1$:

$$(p-1)\sum_{k=1}^{p+1}|a_k|^2 + \Big|\sum_{k=1}^{p+1} a_k\Big|^2 = \sum_{1\le k<s\le p+1}|a_k + a_s|^2. \quad (1')$$

Vế trái $(1') = (p-1)\Big(\sum\limits_{k=1}^{p}|a_k|^2 + |a_{p+1}|^2\Big) + \Big|\sum\limits_{k=1}^{p} a_k + a_{p+1})\Big|^2.$

Vế phải $(1')-$Vế trái $(1) = \sum\limits_{k=1}^{p}|a_k + a_{p+1}|^2$

$$= \sum_{k=1}^{p}(a_k + a_{p+1})\overline{(a_k + a_{p+1})} = \sum_{k=1}^{p}(a_k + a_{p+1})(\overline{a}_k + \overline{a}_{p+1})$$

$$= \sum_{k=1}^{p}(|a_k|^2 + 2\mathrm{Re}\, a_k\overline{a}_{p+1}) + p|a_{p+1}|^2.$$

Xét

$$\Big|\sum_{k=1}^{p+1} a_k\Big|^2 - \Big|\sum_{k=1}^{p} a_k\Big|^2 = \Big(\sum_{k=1}^{p+1} a_k\Big).\Big(\overline{\sum_{k=1}^{p+1} a_k}\Big) - \Big(\sum_{k=1}^{p} a_k\Big).\Big(\sum_{k=1}^{p}\overline{a}_k\Big)$$

$$= \Big(\sum_{k=1}^{p} a_k + a_{p+1}\Big)\Big(\sum_{k=1}^{p}\overline{a}_k + \overline{a}_{p+1}\Big) - \Big(\sum_{k=1}^{p} a_k\Big).\Big(\sum_{k=1}^{p}\overline{a}_k\Big)$$

$$= \Big(\sum_{k=1}^{p} a_k\Big)\overline{a}_{p+1} + \Big(\sum_{k=1}^{p}\overline{a}_k\Big)a_{p+1} + |a_{p+1}|^2$$

$$= \sum_{k=1}^{p}(a_k\overline{a}_{p+1} + \overline{a}_k a_{p+1}) + |a_{p+1}|^2 = \sum_{k=1}^{p} 2\mathrm{Re}\, a_k\overline{a}_{p+1} + |a_{p+1}|^2.$$

Vế trái $(1')-$Vế phải (1)

$$= ((p-2)+1)\Big(\sum_{k=1}^{p}|a_k|^2 + |a_{p+1}|^2\Big) - (p-2)\sum_{k=1}^{p}|a_k|^2 + \Big(\Big|\sum_{k=1}^{p+1} a_k\Big|^2 - \Big|\sum_{k=1}^{p} a_k\Big|^2\Big)$$

$$= (p-1)|a_{p+1}|^2 + \sum_{k=1}^{p}|a_k|^2 + \sum_{k=1}^{p} 2\mathrm{Re}\, a_k\overline{a}_{p+1} + |a_{p+1}|^2$$

$$= \sum_{k=1}^{p}(|a_k|^2 + 2\mathrm{Re}\, a_k\overline{a}_{p+1}) + p|a_{p+1}|^2$$

$=$ Vế phải $(1')-$ Vế phải (1).

Do đó $(1')$ được chứng minh. □

Bài 1.18. *Cho ánh xạ $w = z^2$. Hãy tìm:*

a) Ảnh của các đường $x = C$, $x = y$, $|z| = R$;

b) Tạo ảnh của đường $u = C$.

Lời giải. a) Ta có $w = z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$ nên $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$. Thay $x = C$ ta được

$$\begin{cases} u = C^2 - y^2 \\ v = 2Cy. \end{cases}$$

Nếu $C \neq 0$ ta có $y = \dfrac{v}{2C}$ và $u = C^2 - \dfrac{v^2}{4C^2}$ hay $v^2 = 4C^2(C^2 - u)$. Đây là phương trình parabol có trục Ou.

Nếu $C = 0$ thì

$$\begin{cases} u = -y^2 \\ v = 0. \end{cases}$$

Đây là nửa bên trái trục Ou (tức là $(-\infty; 0] \subset \mathbb{R}$).

Ảnh của đường $x = y$ là đường

$$\begin{cases} u = 0 \\ v = 2x^2. \end{cases}$$

Đó là nửa trên của trục Ov.

Ảnh của đường $|z| = R$ là đường $|w| = R^2$. Đây là phương trình của đường tròn $u^2 + v^2 = R^4$.

b) Tìm tạo ảnh của đường $u = C$: Thay $u = C$ vào phương trình $u = x^2 - y^2$ ta được $C = x^2 - y^2$.

Nếu $C = 0$ thì $x^2 - y^2 = 0$ là phương trình của hai đường thẳng $y = \pm x$.

Nếu $C > 0$ ta có $\dfrac{x^2}{(\sqrt{C})^2} - \dfrac{y^2}{(\sqrt{C})^2} = 1$. Đó là đường hyperbol vuông có trục là Ox.

Nếu $C < 0$ ta có $\dfrac{y^2}{(\sqrt{C})^2} - \dfrac{x^2}{(\sqrt{C})^2} = 1$. Đó là hyperbol vuông có trục Oy. □

Bài 1.19. *Cho ánh xạ $w = \dfrac{1}{z}$, $z \neq 0$. Hãy tìm:*

a) Ảnh của đường $x = C$; $|z - 1| = 1$;

b) Tạo ảnh của đường $u = C$.

Lời giải. a) Ta có $w = \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{x + iy} = \dfrac{x - iy}{x^2 + y^2}$. Vậy

$$u = \frac{x}{x^2 + y^2};\ v = -\frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Để tìm ảnh của đường $x = C$ ta xét hai trường hợp:

+) Nếu $C = 0$: Ta có $u = 0$ và $v = -\dfrac{1}{y}$. Do $-\infty < y < +\infty$, $y \neq 0$ nên $-\infty < v < +\infty, v \neq 0$. Vậy ảnh là trục $Ov \setminus \{0\}$.

+) Nếu $C \neq 0$: Ta có $u^2 + v^2 = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$. Nhưng: $\dfrac{1}{x^2 + y^2} = \dfrac{u}{C}$ nên $u^2 + v^2 = \dfrac{u}{C}$. Từ đó ta suy ra $(u - \dfrac{1}{2C})^2 + v^2 = \dfrac{1}{(2C)^2}$. Vậy ảnh là đường tròn tâm $A = (\dfrac{1}{2C}; 0)$; bán kính $R = \dfrac{1}{2|C|}$.

Ta tìm ảnh của $|z - 1| = 1$ như sau: Từ $|z - 1| = 1$ suy ra $(x - 1)^2 + y^2 = 1$, hay $x^2 + y^2 = 2x$. Thay vào biểu thức của u ta có $u = \dfrac{1}{2}$. Vậy ảnh là đường thẳng $\text{Re}\, w = \dfrac{1}{2}$.

b) Tìm tạo ảnh của đường $u = C$. Thay $u = C$ vào biểu thức của u ta được

$$\frac{x}{x^2+y^2} = C.$$

Nếu $C = 0$ thì $x = 0, y \neq 0$. Tạo ảnh của đường là trục ảo $x = 0$ trừ đi gốc tọa độ.

Nếu $C \neq 0$ thì $x^2 + y^2 = \frac{x}{C}$. Tức là ta có $(x - \frac{1}{2C})^2 + y^2 = \frac{1}{(2C)^2}$. Do đó tạo ảnh của đường $u = C$ là đường tròn tâm $\left(\frac{1}{2C};0\right)$, bán kính $\frac{1}{2|C|}$. □

Bài 1.20. *Có thể gán giá trị tại $z = 0$ để các hàm sau trở thành hàm liên tục tại điểm 0 được không?*

a) $f(z) = \frac{\operatorname{Re} z}{z}$; *b)* $f(z) = \frac{z\operatorname{Re} z}{|z|}$, $z \neq 0$.

Lời giải. Ta có thể gán được nếu tồn tại $\lim\limits_{z\to 0} f(z) = A$.

a) Ta có $z_n = \frac{1}{n} \to 0$ khi $n \to \infty$ nên $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\operatorname{Re} z_n}{z_n} = 1$;

$z_n = \frac{i}{n} \to 0$ khi $n \to \infty$ nên $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\operatorname{Re} z_n}{z_n} = 0$.

Từ đó ta suy ra không tồn tại $\lim\limits_{z\to 0} \frac{\operatorname{Re} z}{z}$.

b) Ta có $0 \leq |\frac{z\operatorname{Re} z}{|z|}| = |\operatorname{Re} z| \leq |z|$. Vậy khi $z \to 0$ thì $\frac{z\operatorname{Re} z}{|z|} \to 0$. Do đó đặt $f(0) = 0$, ta được một hàm liên tục tại 0. □

Bài 1.21. *Khảo sát tính liên tục của $w = \frac{1}{1-z}$ trong $|z| < 1$. Hàm này có liên tục đều trong $|z| < 1$ không?*

Lời giải. Rõ ràng $w = \frac{1}{1-z}$ liên tục trong $|z| < 1$ vì nó là thương của hai hàm liên tục và $1 - z$ khác 0 khi $|z| < 1$.

Tuy nhiên hàm này không liên tục đều vì nếu nó liên tục đều thì với $\varepsilon > 0$, tồn tại $\delta(\varepsilon) > 0$, thỏa mãn với mọi z', z'' mà $|z'| < 1$; $|z''| < 1$ và $|z' - z''| < \delta$, ta có $|\frac{1}{1-z'} - \frac{1}{1-z''}| < \varepsilon$.

Chọn n đủ lớn và đặt $z' = 1 - \frac{1}{n}$; $z'' = 1 - \frac{1}{n+1}$ thì $|z' - z''| = |\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}| = \frac{1}{n(n+1)} < \delta$.

Nhưng: $\left|\frac{1}{1-(1-\frac{1}{n})} - \frac{1}{1-(1-\frac{1}{n+1})}\right| = 1 > \varepsilon$. □

Bài 1.22. *Chứng minh rằng với $a \neq 0, |a| \neq 1$ thì phương trình hàm $f(z) = f(az)$ không có nghiệm là hàm khác hằng và liên tục tại $z = 0$.*

Lời giải. Giả sử $f(z)$ liên tục tại $z = 0$ và $f(z) = f(az)$. Vì $a \neq 0$, $|a| \neq 1$ nên $0 < |a| < 1$ hoặc $|a| > 1$.

+) Nếu $0 < |a| < 1$ thì với mọi z ta có

$$f(z) = f(az) = f(aaz) = \cdots = f(a^n z).$$

Do $\lim\limits_{n\to\infty} a^n z = 0$ nên $f(z) = \lim\limits_{n\to\infty} f(a^n z) = f(0)$.

Vậy $f \equiv const$.

+) Nếu $|a| > 1$ thì trong lân cận của 0, ta có

$$f(z) = f\left(a.\frac{z}{a}\right) = f\left(\frac{z}{a}\right) = f\left(a.\frac{z}{a^2}\right) = f\left(\frac{z}{a^2}\right) = \cdots = f\left(\frac{z}{a^n}\right).$$

Do $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{z}{a^n} = 0$ nên $f(z) = \lim\limits_{n\to\infty} f\left(\frac{z}{a^n}\right) = f(0)$.

Vậy $f \equiv const$. □

Bài 1.23. *Tìm phần thực và phần ảo của các hàm sau:*

a) $f(z) = i\overline{z} + 2z^2$; *b)* $\dfrac{z^2+z+1}{iz+\overline{z}}$.

Lời giải. a) Ta có

$$\begin{aligned} f(z) &= i(x-iy) + 2(x+iy)^2 \\ &= ix + y + 2(x^2-y^2) + i4xy \\ &= 2(x^2-y^2) + y + ix(1+4y) \end{aligned}$$

Vậy $\operatorname{Re} f(z) = 2(x^2-y^2) + y$; $\operatorname{Im} f(z) = x(1+4y)$.

b) Giải tương tự ta có

$$\operatorname{Re} f(z) = \frac{1}{2(x-y)}(2xy + y + x^2 - y^2 + x + 1)$$

$$\operatorname{Im} f(z) = \frac{1}{2(x-y)}(2xy + y - x^2 + y^2 - x - 1).$$ □

Bài 1.24. *Tìm* $f(z), z = x + iy$ *biết phần thực và phần ảo của nó là:*

a) $u(x,y) = x + y$; $v(x,y) = x - y$.

b) $u(x,y) = x^2 - y^2 - 2y - 1$; $v(x,y) = 2xy + 2x$.

Lời giải. a) Ta có $z = x + iy$; $\overline{z} = x - iy$ nên $x = \frac{1}{2}(z+\overline{z})$; $y = -\frac{i}{2}(z - \overline{z})$. Từ đó

$$u(x,y) = \frac{1-i}{2}z + \frac{1+i}{2}\overline{z};$$

$$v(x,y) = \frac{1+i}{2}z + \frac{1-i}{2}\overline{z}.$$

Vậy $f(z) = u(x,y) + iv(x,y) = (1+i)\overline{z}$.

b) Tương tự ta có $f(z) = z^2 + 2iz - 1$. □

Bài 1.25. *Tìm bán kính hội tụ và miền hội tụ của các chuỗi lũy thừa sau:*

a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1-i}{2^n} z^n$; *b)* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-1-i}{2i-1}\right)^n$.

Lời giải. a) Ta có $\sqrt[n]{\left|\frac{1-i}{2^n}\right|} = \frac{2^{\frac{1}{2n}}}{2} \longrightarrow \frac{1}{2}$ khi $n \to \infty$ nên bán kính hội tụ là $r = 1 : \frac{1}{2} = 2$. Miền hội tụ của chuỗi là hình tròn $|z| < 2$.

b) Đặt $w = \dfrac{z-1-i}{2i-1}$. Chuỗi trở thành $\sum\limits_{n=0}^{\infty} w^n$. Chuỗi này có bán kính hội tụ $r = 1$. Miền hội tụ của chuỗi là $\left|\frac{z-1-i}{2i-1}\right| < 1$ hay $|z - i - 1| < |2i - 1| = \sqrt{5}$, là hình tròn mở tâm $i + 1$ bán kính $\sqrt{5}$. □

Bài 1.26. *Tìm các tổng:*

a) $1 + \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx$;

b) $\sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx$.

Lời giải. Ta có $e^{ix} = \cos x + i\sin x, \forall x \in \mathbb{R}$. Do đó

$$e^{i0x} + e^{i1x} + e^{i2x} + \cdots + e^{inx} = (1 + \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx) + i(\sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx).$$

Vế trái của đẳng thức trên là tổng của $n+1$ số hạng của một cấp số nhân có công bội e^{ix} và số hạng đầu tiên là 1. Nên

$$e^{i0x} + e^{i1x} + e^{i2x} + \cdots + e^{inx} = \frac{1 - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}} (x \neq 0)$$

$$= \frac{(1 - \cos(n+1)x) + i\sin(n+1)x}{(1-\cos x) + i\sin x}$$

$$= \frac{[(1 - \cos(n+1)x) + i\sin(n+1)x][(1-\cos x) - i\sin x]}{(1-\cos x)^2 + \sin^2 x}$$

$$= \frac{1 - \cos x + \cos nx - \cos(n+1)x}{2 - 2\cos x} + i\frac{\sin(n+1)x - \sin x - \sin nx}{2 - 2\cos x}$$

$$= \frac{2\sin^2\frac{x}{2} + 2\sin\frac{(2n+1)x}{2}\sin\frac{x}{2}}{4\sin^2\frac{x}{2}} + i\frac{\sin(n+1)x - \sin x - \sin nx}{2 - 2\cos x}.$$

Vậy

a) $1 + \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx = \dfrac{2\sin^2\frac{x}{2} + 2\sin\frac{(2n+1)x}{2}\sin\frac{x}{2}}{4\sin^2\frac{x}{2}}$;

b) $\sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx = \dfrac{\sin(n+1)x - \sin x - \sin nx}{2 - 2\cos x}$. □

Bài 1.27. *Tìm trong mặt phẳng phức tập nghiệm của phương trình*

a) $|e^{z^2}| = 1$; *b)* $\mathrm{Re}\,\dfrac{1}{z} = a,\ a \in \mathbb{R}$.

Lời giải. a) Ta có từ giả thiết $|e^{z^2}| = 1$ suy ra $|e^{x^2-y^2}(\cos 2xy + i\sin 2xy)| = 1$ hay $x^2 - y^2 = 0$. Tức là ta có $y = x$ hoặc $y = -x$.

Vậy tập nghiệm là hai đường phân giác của mặt phẳng phức.

b) Ta có $\mathrm{Re}\,\dfrac{1}{z} = \dfrac{x}{x^2+y^2} = a$ nên:

Nếu $a = 0$ ta có $x = 0, y \neq 0$: Tập nghiệm là trục ảo trừ đi gốc tọa độ.

Nếu $a \neq 0$ ta có $(x - \dfrac{1}{2a})^2 + y^2 = \dfrac{1}{(2a)^2}$: Tập nghiệm là đường tròn tâm $\left(\dfrac{1}{2a}; 0\right)$; bán kính $\dfrac{1}{2|a|}$. □

Bài 1.28. *Tìm phần thực và phần ảo của:*

a) $\cos(1-2i)$; *b)* $\sin i$.

Lời giải. a) Với $z = x + iy$ ta có

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \frac{e^{-y+ix} + e^{y-ix}}{2}$$

$$= \frac{e^{-y}(\cos x + i\sin x) + e^{y}(\cos x - i\sin x)}{2}$$

$$= \cos x\frac{e^y + e^{-y}}{2} - i\sin x\frac{e^y - e^{-y}}{2}$$

$$= \cos x\ \mathrm{ch}y - i\sin x\ \mathrm{sh}y.$$

Do đó $\cos(1-2i) = \cos 1\ \mathrm{ch}(-2) + i\sin 1\ \mathrm{sh}(-2)$.

b) Tương tự ta có

$\sin z = \sin x\ \mathrm{ch}y + i\cos x\ \mathrm{sh}y$ nên $\sin i = i\ \mathrm{sh}1$. □

Bài 1.29. *Chứng minh rằng* $\sin z$ *và* $\cos z$ *không phải là những hàm bị chặn trên* $\mathbb{C}$.

Lời giải. Theo bài 1.28 ta có

$$|\sin z| = \sqrt{\sin^2 x\,\mathrm{ch}^2 y + \cos^2 x\,\mathrm{sh}^2 y} = \sqrt{\sin^2 x + \mathrm{sh}^2 y} \geq |\mathrm{sh} y|$$

và

$$|\cos z| = \sqrt{\cos^2 x + \mathrm{sh}^2 y} \geq |\mathrm{sh} y|.$$

Do đó khi z rời xa trục thực, cùng với y tăng, modun của $\sin z$ và của $\cos z$ đều tăng vô hạn. □

Bài 1.30. *Giải phương trình:*

a) $\cos z = 2$; *b)* $\cos 2z = \sin(z + i)$.

Lời giải. a) Từ giả thiết ta có $\dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 2$ hay $(e^{iz})^2 - 4e^{iz} + 1 = 0$. Từ đó $e^{iz} = 2 + \sqrt{3}$ hoặc $e^{iz} = 2 - \sqrt{3}$. Do đó $iz = Ln(2 + \sqrt{3}) = \ln(2 + \sqrt{3}) + ik2\pi$ hoặc $iz = Ln(2 - \sqrt{3}) = \ln(2 - \sqrt{3}) + ik2\pi$.

Vậy $z = -i\ln(2 + \sqrt{3}) + k2\pi$ hoặc $z = -i\ln(2 - \sqrt{3}) + k2\pi$, với $k \in \mathbb{Z}$.

b) Ta có: Từ giả thiết suy ra $\cos 2z = \cos(\frac{\pi}{2} - z - i)$. Tức là $2z = \dfrac{\pi}{2} - z - i + k2\pi$ hoặc $2z = -\dfrac{\pi}{2} + z + i + k2\pi$, hay $z = \dfrac{\pi}{6} - \dfrac{i}{3} + \dfrac{k2\pi}{3}$ hoặc $z = -\dfrac{\pi}{2} + i + k2\pi$ (với $k \in \mathbb{Z}$). □

Bài 1.31. *Tìm ánh xạ phân tuyến tính biến hình tròn* $|z| < 1$ *thành chính nó sao cho điểm* $z = \alpha$ *biến thành tâm hình tròn.*

Lời giải. Ta tìm ánh xạ phân tuyến tính dưới dạng:

$$w = \lambda\frac{z - z_0}{z - z_1}.$$

Do $\alpha \mapsto 0$ nên $z_0 = \alpha$. Qua đường tròn đơn vị, điểm đối xứng với α là $\dfrac{1}{\overline{\alpha}}$, điểm đối xứng với $w = 0$ là điểm $w = \infty$ nên $z_1 = \dfrac{1}{\overline{\alpha}}$.

Do đó

$$w = \lambda\frac{z - \alpha}{z - \frac{1}{\overline{\alpha}}} = \lambda\overline{\alpha}\frac{z - \alpha}{\overline{\alpha}z - 1}.$$

Nếu $z = e^{i\varphi}$ ta có

$$1 = |\lambda\overline{\alpha}|.\left|\frac{e^{i\varphi} - \alpha}{e^{i\varphi}\overline{\alpha} - 1}\right|.$$

Do

$$\left|\frac{e^{i\varphi} - \alpha}{e^{i\varphi}\overline{\alpha} - 1}\right|^2 = \frac{(e^{i\varphi} - \alpha)(e^{-i\varphi} - \overline{\alpha})}{(e^{i\varphi}\overline{\alpha} - 1)(e^{-i\varphi}\alpha - 1)} = \frac{1 + |\alpha|^2 - e^{i\varphi}\overline{\alpha} - e^{-i\varphi}\alpha}{|\alpha|^2 + 1 - e^{i\varphi}\overline{\alpha} - e^{-i\varphi}\alpha} = 1$$

nên $|\lambda\overline{\alpha}| = 1$, tức là $\lambda\overline{\alpha} = e^{i\theta}$.

Vậy ánh xạ phải tìm có dạng:

$$w = e^{i\theta}\frac{z - \alpha}{\overline{\alpha}z - 1}.$$ □

Bài 1.32. *Tìm ánh xạ phân tuyến tính biến nửa mặt phẳng trên* $\mathrm{Im} z > 0$ *thành hình tròn đơn vị* $|w| < 1$ *và điểm* α *biến thành tâm* $w = 0$ *của hình tròn.*

Lời giải. Ta tìm ánh xạ phân tuyến tính dưới dạng:

$$w = \lambda\frac{z - z_0}{z - z_1}.$$

Do $\alpha \mapsto 0$ nên $z_0 = \alpha$.

Mặt khác, vì α và $\overline{\alpha}$ đối xứng qua trục thực nên $w(\alpha) = 0$ và $w(\overline{\alpha})$ đối xứng qua đường tròn $|w| = 1$, nghĩa là $w(\overline{\alpha}) = \infty$. Do đó $z_1 = \overline{\alpha}$.

Vậy

$$w = \lambda \frac{z - \alpha}{z - \overline{\alpha}}.$$

Do các điểm trên trục thực biến vào đường tròn đơn vị $|w| = 1$ nên

$$1 = |\lambda|.\left|\frac{x - \alpha}{x - \overline{\alpha}}\right|, \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}.$$

Mặt khác

$$\left|\frac{x - \alpha}{x - \overline{\alpha}}\right|^2 = \frac{(x - \alpha)(x - \overline{\alpha})}{(x - \overline{\alpha})(x - \alpha)} = 1, \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}.$$

Do đó $|\lambda| = 1$ hay $\lambda = e^{i\theta}$.

Vậy ta có $w = e^{i\theta}\dfrac{z - \alpha}{z - \overline{\alpha}}$ là ánh xạ cần tìm. □

Bài 1.33. *Tìm phép biến đổi phân tuyến tính biến nửa mặt phẳng trên* $\text{Im} z > 0$ *thành hình tròn đơn vị* $|w| < 1$ *sao cho*

$$w(i) = 0; \ \arg w'(i) = -\frac{\pi}{2}.$$

Lời giải. Ánh xạ biến nửa mặt phẳng trên thành phần trong hình tròn đơn vị, được xác định theo công thức:

$$w = e^{i\theta}\frac{z - \alpha}{z - \overline{\alpha}},$$

trong đó θ là số thực và $\text{Im}\,\alpha > 0$.

Ta có:
$$w = e^{i\theta}\frac{z - i}{z + i};$$
$$w' = e^{i\theta}\frac{(z + i) - (z - i)}{(z + i)^2}$$
$$= e^{i\theta}\frac{2i}{(z + i)^2}.$$

Suy ra

$$w'(i) = e^{i\theta}\frac{1}{2i};$$

$$\arg w'(i) = \theta - \arg 2i = -\frac{\pi}{2}.$$

Do đó $\theta - \dfrac{\pi}{2} = -\dfrac{\pi}{2}$. Từ đó ta có $\theta = 0$.

Vậy ánh xạ phải tìm là $w = \dfrac{z - i}{z + i}$. □

Bài 1.34. *Tìm phép biến đổi phân tuyến tính biến hình tròn* $|z| < 1$ *thành hình tròn đơn vị* $|w| < 1$ *sao cho* $w(\frac{1}{2}) = 0$; $\arg w'(\frac{1}{2}) = 0$.

Lời giải. Ánh xạ phải tìm có dạng:

$$w = e^{i\theta}\frac{z - \alpha}{1 - \overline{\alpha}z}.$$

Vì $w\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow \alpha = \dfrac{1}{2}$. Do đó

$$w = e^{i\theta}\frac{z - \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}z} = e^{i\theta}\frac{2z - 1}{2 - z}.$$

Ta có $w'(z) = e^{i\theta}\dfrac{2(2-z)+2z-1}{(2-z)^2} = e^{i\theta}\dfrac{3}{(2-z)^2}$. Do đó $w'(\frac{1}{2}) = e^{i\theta}\frac{4}{3}$. Suy ra $\arg w'(\frac{1}{2}) = \theta = 0$.

Vậy ánh xạ cần tìm là $w = \dfrac{2z-1}{2-z}$. □

Bài 1.35. *Tìm hàm f ánh xạ hình tròn $|z-4i| < 2$ lên nửa mặt phẳng $v > u$ sao cho $f(4i) = -4$ và $f(2i) = 0$.*

Lời giải. Ta thấy ánh xạ $z_1 = \dfrac{z-4i}{2}$ biến hình tròn $|z-4i| < 2$ lên hình tròn đơn vị $|z_1| < 1$ và ánh xạ $w_1 = e^{-i\frac{\pi}{4}}w$ biến nửa mặt phẳng $v > u$ thành nửa mặt phẳng trên.

Ta có $z_1(2i) = -i$; $z_1(4i) = 0$ và $w_1(-4) = -4e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

Ta cần tìm ánh xạ g biến nửa mặt phẳng trên lên hình tròn đơn vị với $g(-4e^{-i\frac{\pi}{4}}) = 0$; $g(0) = -i$.

Do đó ánh xạ cần tìm có dạng:

$$z_1 = g(w_1) = e^{i\theta}\frac{w_1 + 4e^{-i\frac{\pi}{4}}}{w_1 + 4e^{i\frac{\pi}{4}}}.$$

Vì

$$-i = g(0) = e^{i\theta}\frac{4e^{-i\frac{\pi}{4}}}{4e^{i\frac{\pi}{4}}} = e^{i\theta}e^{-i\frac{\pi}{2}} = e^{i\theta}.(-i)$$

nên $e^{i\theta} = 1$, suy ra $\theta = 0$.

Suy ra

$$z_1 = g(w_1) = \frac{w_1 + 4e^{-i\frac{\pi}{4}}}{w_1 + 4e^{i\frac{\pi}{4}}}.$$

Cho nên

$$\frac{z-4i}{2} = \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}w + 4e^{-i\frac{\pi}{4}}}{e^{-i\frac{\pi}{4}}w + 4e^{i\frac{\pi}{4}}},$$

hay

$$\frac{z-4i}{2} = \frac{w+4}{w+4i}.$$

Do đó

$$(z-4i)(w+4i) = 2(w+4)$$
$$\Leftrightarrow zw + 4zi - 4iw + 16 = 2w + 8$$
$$\Leftrightarrow w(z - 4i - 2) = -8 - 4zi.$$

Vậy $w = \dfrac{8+4zi}{2+4i-z}$ là ánh xạ cần tìm. □

Bài 1.36. *Tìm dạng tổng quát của hàm tuyến tính nguyên, biến $D = \{0 < x < 1\}$ lên chính nó.*

Lời giải. Giả sử ánh xạ cần tìm có dạng $w = az + b$.

Ánh xạ đó là hợp của phép quay vectơ một góc bằng $\arg a$, phép biến đổi đồng dạng hệ số $k = |a|$ và phép tịnh tiến theo vectơ b.

Do ánh xạ biến D lên chính nó nên $\arg a = 0$ hoặc $\arg a = \pi$. Do đó $w = kz + b$ hoặc $w = -kz + b$.

Trong cả hai trường hợp ta đều có $k = 1$ vì nếu $k \neq 1$ thì dải đã cho có ảnh là dải có độ rộng khác với độ rộng dải đã cho. Do đó hoặc $w = z + b$ hoặc $w = -z + b$.

Nếu $w = z + b$ thì $b = ih, h \in \mathbb{R}$.

Nếu $w = -z + b$ thì $b = 1 + ih, h \in \mathbb{R}$.

Vậy $w = z + ih$ hoặc $w = -z + 1 + ih$, $h \in \mathbb{R}$. □

Bài 1.37. *a) Tìm ảnh của* $\{0 < \operatorname{Re} z < 1; \operatorname{Im} z > 0\}$ *qua ánh xạ* $w = \frac{1}{z}$.

b) Chứng minh ánh xạ Jukovski đơn trị 1-1 trong nửa mặt phẳng trên.

Lời giải. a) Do $w = \frac{1}{z}$ nên

$$\operatorname{Re} z = \frac{z + \overline{z}}{2} = \frac{\frac{1}{w} + \frac{1}{\overline{w}}}{2} = \frac{\frac{\overline{w}+w}{2}}{w\overline{w}} = \frac{\operatorname{Re} w}{|w|^2}.$$

Tương tự $\operatorname{Im} z = \frac{-\operatorname{Im} w}{|w|^2}$. Do đó, tập $\{0 < \operatorname{Re} z < 1; \operatorname{Im} z > 0\}$ qua ánh xạ $w = \frac{1}{z}$ biến thành

$$\left\{0 < \frac{\operatorname{Re} w}{|w|^2} < 1; \frac{-\operatorname{Im} w}{|w|^2} > 0\right\}$$

hay

$$\{\operatorname{Re} w > 0; |w|^2 > \operatorname{Re} w; \operatorname{Im} w < 0\}. \ (1)$$

Viết $w = x + iy$ thì (1) trở thành

$$\{x > 0; x^2 + y^2 > x; y < 0\}$$

hay

$$\{x > 0; (x - \frac{1}{2})^2 + y^2 > \frac{1}{4}; y < 0\}.$$

Vậy ảnh là góc phần tư thứ tư cắt bởi nửa hình tròn $|w - \frac{1}{2}| \leq \frac{1}{2}$.

b) Ta có ánh xạ Jukovski $w = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$. Nếu $\frac{1}{2}(z_1 + \frac{1}{z_1}) = \frac{1}{2}(z_2 + \frac{1}{z_2})$ thì $(z_1 - z_2)(1 - \frac{1}{z_1 z_2}) = 0$.

Vậy ánh xạ này đơn trị 1-1 trong miền D nào đó khi và chỉ khi D không chứa z_1, z_2 mà $z_1 z_2 = 1$.

Rõ ràng z_1 và $\frac{1}{z_1}$ được sắp xếp như sau: Nếu một điểm thuộc nửa mặt phẳng trên thì điểm kia thuộc nửa mặt phẳng dưới.

Vậy ánh xạ này đơn trị 1-1 trong nửa mặt phẳng trên. □

Bài 1.38. *Tìm ảnh của các miền:*

a) Hình tròn $|z| < R < 1$;

b) $|z| < 1$;

c) $|z| > 1$

qua ánh xạ Jukovski.

Lời giải. Xét $w = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$. Đặt $z = re^{i\varphi}$, ta có

$$w = u + iv = \frac{1}{2}(re^{i\varphi} + \frac{1}{re^{i\varphi}}) = \frac{1}{2}\Big(r(\cos\varphi + i\sin\varphi) + \frac{1}{r}(\cos\varphi - i\sin\varphi)\Big)$$

$$= \frac{1}{2}(r + \frac{1}{r})\cos\varphi + i\frac{1}{2}(r - \frac{1}{r})\sin\varphi.$$

Do đó

$$u = \frac{1}{2}(r + \frac{1}{r})\cos\varphi$$

và
$$v = \frac{1}{2}(r - \frac{1}{r})\sin\varphi.$$

Vậy
$$\frac{u^2}{(\frac{1}{2}(r+\frac{1}{r}))^2} + \frac{v^2}{(\frac{1}{2}(r-\frac{1}{r}))^2} = 1.$$

a) Hình $|z| < R < 1$ biến thành miền ngoài ellip có các bán trục $a = \frac{1}{2}(R + \frac{1}{R}); b = \frac{1}{2}(R - \frac{1}{R})$.

b) Hình $|z| < 1$ biến thành mặt phẳng $\mathbb{C}$ bỏ đi đoạn $[-1; 1]$.

c) Hình $|z| > 1$ biến thành $\mathbb{C} \setminus [-1; 1]$. □

BÀI TẬP TỰ GIẢI

Bài 1.39. Viết các số phức sau dưới dạng đại số:

a) $\sqrt{i}$; b) $\sqrt{1+i}$; c) $\sqrt{1-\sqrt{3}i}$.

Bài 1.40. Tìm phần thực và phần ảo của số phức $\sqrt{x+iy}$ (theo hai biến x, y).

Bài 1.41. Cho n điểm $P_j = \cos\frac{2\pi j}{n} + i\sin\frac{2\pi j}{n}, n \in \mathbb{N}, 0 \le j \le n-1$ trên hình tròn đơn vị. Chứng minh rằng $\prod_{j=1}^{n-1} \overline{P_0P_j} = n$, ở đó $\overline{P_0P_j}$ là khoảng cách giữa P_0 và P_j.

Bài 1.42. Cho $0 < r < 1$ và $\theta_n \in \mathbb{R}, n = 0, 1, 2, \ldots$. Chứng minh chuỗi
$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n(\cos\theta_n + i\sin\theta_n)$$
hội tụ.

Bài 1.43. Cho dãy $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$ bởi $z_{n+1} - z_n = a(z_n - z_{n-1})$, ở đó $0 < |a| < 1$. Tìm giới hạn $\lim z_n$ qua z_0 và z_1.

Bài 1.44. Giả sử $z_n \to z \neq \infty$ và $\zeta_n \to \zeta$. Chứng minh rằng:
$$\frac{z_1.\zeta_n + z_2.\zeta_{n-1} + \cdots + z_n.\zeta_1}{n} \to z.\zeta.$$

Bài 1.45. Cho $E_\alpha \subset \mathbb{C}, \alpha \in \Gamma$ là những tập compact thỏa mãn $E_{\alpha_1} \cap \cdots \cap E_{\alpha_k} \neq \varnothing$ với mọi hệ hữu hạn $E_{\alpha_1}, \cdots, E_{\alpha_k}$. Chứng minh $\cap_{\alpha\in\Gamma} E_\alpha \neq \varnothing$.

Bài 1.46. Cho $B \subset A$ là tập rời rạc trong A. Chứng minh rằng với mọi tập compact $K \subset A$ ta có $K \cap B$ là tập hữu hạn.

Bài 1.47. Hãy chứng minh vành khăn $K(r_1, r_2) = \{z \in \mathbb{C}; r_1 < |z| < r_2\}(0 \leq r_1 < r_2)$ là một miền.

Bài 1.48. Cho E là tập rời rạc trong miền D. Chứng minh rằng $D \setminus E$ cũng là một miền.

Bài 1.49. Tính các giới hạn sau:

$$\lim_{z \to 0} \frac{\sin z}{z}; \quad \lim_{z \to 0} \frac{e^z - 1}{z}; \lim_{z \to 0} \frac{\log(1+z)}{z}.$$

Bài 1.50. Cho $f(z) = \dfrac{z^n - 1}{z - 1}$. Tìm supremum và infimum của $|f(z)|$ trên $\Delta(1)$.

Bài 1.51. Cho $f_n(x) = \sin nx$, $n = 1, 2, \ldots$, là dãy các hàm biến thực $x \in [0; 2\pi]$. Khi đó $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ là bị chặn đều. Chứng minh rằng bất kỳ dãy con nào của $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ đều không hội tụ trên $[0;\ 2\pi]$.

Bài 1.52. Tìm bán kính hội tụ của các chuỗi lũy thừa sau:

a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n^p z^n \quad (p > 0)$; b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^{n^2} z^n \quad (|q| < 1)$;

c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (n!)^{1/n} z^n$; d) $1 + \sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n \prod\limits_{\nu=0}^{n-1} \dfrac{(\alpha+\nu)(\beta+\nu)}{1+\nu)(\gamma+\nu)}$.

Bài 1.53. (Miền Stolz và định lí về tính liên tục Abel). Cho $\zeta \in \mathbb{C}(0; 1)$. Kí hiệu $G(\zeta; r) \subset \Delta(1)$ là miền nằm giữa hai đường thẳng đi qua ζ tạo góc $0 < r < \dfrac{\pi}{2}$ với đường thẳng đi qua 0 và ζ. Ta gọi $G(\zeta; r)$ là miền (góc) Stolz với đỉnh ζ.

a) Chứng minh rằng: $G(\zeta; r) \cap \Delta(\zeta; \cos r) \subset \left\{z \in \Delta(1); \dfrac{|z - \zeta|}{1 - |z|} < \dfrac{2}{\cos r}\right\} \cap \Delta(\zeta; \cos r)$.

Mặt khác, với $K > 1; r = \cos^{-1} \dfrac{1}{2K} \in (0; \pi/2)$. Hãy chứng minh $\left\{z \in \Delta(1); \dfrac{|z - \zeta|}{1 - |z|} < K\right\} \cap \Delta(\zeta; 2\cos r) \subset G(\zeta; r) \cap \Delta(\zeta; 2\cos r)$.

b) Cho $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ là chuỗi lũy thừa hội tụ trên $\Delta(1)$. Chứng minh rằng nếu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \zeta^n$ hội tụ thì

$$\lim_{z \to \zeta; z \in G(\zeta; r)} f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \zeta^n.$$

Bài 1.54. Chứng minh rằng $Aut(\Delta(1))$ là một họ những hàm đồng liên tục trên các tập con compact của $\Delta(1)$.

Bài 1.55. Chứng minh rằng $\tan z = \dfrac{\sin z}{\cos z}$ là một hàm trên $\mathbb{C} \setminus \left\{\dfrac{2n + \pi}{2};\ n \in \mathbb{Z}\right\}$ với chu kỳ π.

Bài 1.56. Chứng minh rằng, nếu $\alpha > 1$ thì $\prod\limits_{n=1}^{\infty} (1 - \dfrac{z}{n^\alpha})$ hội tụ đều trên các tập con compact của $\mathbb{C}$.

Bài 1.57. Chứng minh rằng $\prod\limits_{n=1}^{\infty} (1 - z^n)$ hội tụ tuyệt đối và đều trên các tập con compact của $\Delta(1)$.

Bài 1.58. Chứng minh rằng $\prod\limits_{n=0}^{\infty} (1 + z^{2n}) = \dfrac{1}{1 - z}$.

Bài 1.59. Tỉ số cross của bốn điểm $z_1, \ldots, z_4$ của $\bar{\mathbb{C}}$ được xác định bởi

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_1 - z_4)(z_2 - z_3)}.$$

Ở đây, nếu z_j nào đó bằng ∞, thì vế phải hiểu theo nghĩa là giới hạn khi $z_j \to \infty$. Cho $f \in Aut(\hat{\mathbb{C}})$ là phép biến đổi tuyến tính và $z_1, z_2, z_3 \in \hat{\mathbb{C}}$ sao cho $f(z_2) = 1$; $f(z_3) = 0$ và $f(z_4) = \infty$. Chứng minh rằng $f(z) = (z, z_2, z_3, z_4)$.

Bài 1.60. Chứng minh rằng với bất kỳ phép biến đổi tuyến tính f và bốn điểm $z_1, ..., z_4$ của $\hat{\mathbb{C}}$ thì

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = (f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z_4)).$$

(Tính bất biến của tỉ số cross)

Bài 1.61. Cho $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ không đồng nhất với z, $ad - bc = 1$, là một phép biến đổi tuyến tính. Chứng minh rằng, nếu $a + d = 2$ hoặc -2 thì f có một điểm cố định z (điểm thỏa mãn $f(z) = z$); còn các trường hợp khác thì f có hai điểm cố định.

Bài 1.62. Giả sử α và β là những điểm cố định nói trong bài 1.61 của f. Chứng minh rằng, nếu $\alpha \neq \beta$ thì $w = f(z)$ được cho bởi

$$\frac{w-\alpha}{w-\beta} = Ke^{i\theta}\frac{z-\alpha}{z-\beta}, \quad K > 0,\ \theta \in \mathbb{R}.$$

Phép biến đổi tuyến tính f được gọi là hyperbolic nếu $e^{i\theta} = 1$, elliptic nếu $K = 1$, và loxodromic trong những trường hợp khác.

Bài 1.63. Giả sử α và β như ở trên. Chứng minh rằng, nếu $\alpha = \beta w = f(z)$ được cho bởi

$$\frac{1}{w-\alpha} = \frac{1}{z-\alpha} + \gamma \quad (\alpha = \beta \neq \infty),$$

$$w = z + \gamma \quad (\alpha = \beta = \infty).$$

Trong trường hợp này, f được gọi là parabolic.

Bài 1.64. Giả sử $f(z)$ được cho như trong bài 1.61. Chứng minh rằng, nếu $a+d$ là số thực thì f là hyperbolic, elliptic hay parabolic tùy theo $|a+d| > 2, < 2$, hay $= 2$ tương ứng. Chứng minh rằng nếu $a + d$ không là số thực thì f là loxodromic.

Bài 1.65. Tìm dạng tổng quát của phép biến đổi phân tuyến tính bảo tồn $\Delta(R)$, $0 < R < \infty$.

Bài 1.66. a) Tìm phép biến đổi phân tuyến tính biến $0, 1, \infty$ thành $i, 1+i, 2+i$ tương ứng.

b) Tìm phép biến đổi phân tuyến tính biến $-1, i, 1$ thành $-2, i, 2$ tương ứng.

HƯỚNG DẪN GIẢI VÀ ĐÁP SỐ

Chương 1

1.39. Viết, chẳng hạn, $\sqrt{i} = x + iy$. Khi đó $x^2 - y^2 = 0$ và $2xy = 1$. Từ đẳng thức thứ nhất suy ra $x = \pm y$, từ đẳng thức thứ hai suy ra $x = y$. Vậy $x = y = \pm 1/\sqrt{2}$.

1.40. $u = \pm\dfrac{\sqrt{\sqrt{x^2+y^2}+x}}{\sqrt{2}}$; $\quad v = \pm\dfrac{\sqrt{2}y}{\sqrt{\sqrt{x^2+y^2}+x}}$.

1.41. Sử dụng đồng nhất thức

$$(z-1)\prod_{j=1}^{n-p}(z-P-j) = z^n - 1 = (z-1)(z^{n-1} + \cdots + 1).$$

1.42. Sử dụng tính hội tụ tuyệt đối.

1.43. $\lim z_n = \dfrac{z_1 - az_0}{1-a}$.

1.44. Hãy đánh giá hiệu

$$\frac{z_1 + z_2 + \cdots + z_n}{n}\zeta - \frac{z_1\zeta_n + z_2\zeta_{n-1} + \cdots + z_n\zeta_1}{n}.$$

1.45. Lấy tùy ý $\alpha_0 \in \Gamma$. Nếu $\bigcap_{\alpha\in\Gamma} E_\alpha = \varnothing$, $\underset{\alpha_0}{E} \subset \bigcup_{\alpha\in\Gamma}(\mathbb{C} \setminus E_\alpha)$ thì tồn tại hữu hạn $\underset{\alpha_i}{E}$, $1 \le i \le l$, sao cho $\underset{\alpha_0}{E} \subset \cup_{i=1}^{l}(\mathbb{C} \setminus E_{\alpha_i})$. Do đó $\cap_{i=0}^{l} E_{\alpha_i} = \varnothing$.

1.49. Sử dụng khai triển Taylor tại $z = 0$.

1.50. $\sup|f| = n$, và $\inf|f| = 0$.

1.51. Giả sử tồn tại dãy con $\{f_{n_\nu}\}_{\nu=1}^{\infty}$ hội tụ tại mọi điểm thuộc $[0; 2\pi]$. Đặt $f(z) = \lim f_{n_\nu}(x)$. Theo định lí Lebesgue về hội tụ bị chặn ta suy ra $\int\limits_0^x f(t)dt = \lim \int\limits_0^x f_{n_\nu}(t)dt$. Ta có $\int\limits_0^x f_{n_\nu}(t)dt \to 0$.

Do đó ta có $\int\limits_0^x f(t)dt \neq 0$. Suy ra $f(x) = 0$ hầu khắp nơi và vì vậy $\int\limits_0^{2\pi} |f(t)|dt = 0$.

Lại theo định lí Lebesgue về hội tụ bị chặn ta có $\lim \int\limits_0^{2\pi} |f_{n_\nu}(t)|dt = \int\limits_0^{2\pi} |f(t)|dt = 0$.

Mặt khác $\int\limits_0^{2\pi} |\sin nt|dt = \frac{1}{n}\int\limits_0^{2n\pi} |\sin t|dt = \int\limits_0^{2\pi} |\sin t|dt = 2\int\limits_0^{\pi} \sin t dt = 4$.

Mâu thuẫn xảy ra.

1.52. a) $\frac{n^p}{(n+1)^p} \to 1$.

b) $\frac{1}{\sqrt[n]{|q|^{n^2}}} = \frac{1}{|q|^n} \to 0$.

c) $\log(n!)^{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^2}\sum\limits_{j=1}^{n} \log j < \frac{1}{n^2}\int\limits_1^{n+1} \log x dx$

$= \frac{1}{n^2}(n+1)(\log(n+1) - 1) \to 0$. Bán kính hội tụ là 1.

d) $\frac{\gamma}{\alpha\beta}$.

1.53. Do phép đổi biến $z \to \zeta z$, ta có thể giả sử $\zeta = 1$. Đặt $s_n = \sum\limits_{\nu=0}^{n} a_\nu$ và $s = \lim\limits_{n\to\infty} s_n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$. Với $z \in \Delta(1)$, ta có $\frac{f(z)}{1-z} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n \sum\limits_{n=0}^{\infty} s_n z^n$, và khi đó $f(z) - s = (1-z)\sum\limits_{n=0}^{\infty}(s_n - s)z^n$.

Với $z \in D(1; \cos r)$, tồn tại hằng số dương K $(= \frac{2}{\cos r})$ sao cho $|1-z| < K(1-|z|)$. Với $\varepsilon > 0$ tùy ý, tồn tại n_0 là số tự nhiên sao cho $|s_n - s| < \varepsilon$, $n \ge n_0$. Khi đó $|f(z) - s| \le |1-z|(\sum\limits_{n=0}^{n_0} |s_n - s|.|z|^n + \sum\limits_{n=n_0+1}^{\infty} \varepsilon|z|^n) < |1-z|\,(\sum\limits_{n=0}^{n_0} |s_n - s| + \sum\limits_{n=0}^{\infty} |z|^n) = |1-z|\sum\limits_{n=0}^{n_0} |s_n - s| + \varepsilon\frac{|1-z|}{1-|z|} < |1-z|\sum\limits_{n=0}^{n_0} |s_n - s| + \varepsilon K$.

Lấy z sao cho $|1-z|\sum\limits_{n=0}^{n_0} |s_n - s| < \varepsilon$, ta có $|f(z) - s| < (K+1)\varepsilon$.

1.54. Đặt $f(z) = e^{i\theta}\frac{z-a}{-\overline{z}+1}$, $|a| < 1$, $|z| \le r < 1$, và $|z'| \le r$. $|f(z) - f(z')| \le (1-|a|^2)\frac{|z-z'|}{|1-r|^2} \le \frac{|z-z'|}{|1-r|^2}$.

1.55. Do $\sin(z+\pi) = -\sin z$ và $\cos(z+\pi) = -\cos z$ nên $\tan(z+\pi) = \tan z$. Giả sử tồn tại $0 < \pi' < \pi$ sao cho $\tan(z = \pi') = \tan z$. Khi đó ta có $\sin \pi' = 0$. Từ đó ta suy ra $\sin(z+2\pi') = \sin z$. Mâu thuẫn xảy ra vì $\sin z$ tuần hoàn chu kỳ 2π.

1.58. Bằng quy nạp, ta có $\prod_{\nu=0}^{n}(1+z^{2\nu}) = \sum_{\nu=0}^{2^{n+1}-1} z^{\nu}$. Cho $n \to \infty$.

1.59. Đặt $f(z) = \dfrac{(z-z_3)(z_2-z_4)}{(z-z_4)(z_2-z_3)}$. Đây là một phép biến đổi tuyến tính và $f(z_2) = 1$; $f(z_3) = 0$; $f(z_4) = \infty$.

Áp dụng định lí sau: "Cho bộ ba điểm (z_1, z_2, z_3) và (w_1, w_2, w_3) là hai bộ ba điểm phân biệt trong $\hat{\mathbb{C}}$. Khi đó tồn tại duy nhất phép biến đổi tuyến tính f sao cho $f(z_i) = w_i$, $i = 1, 2, 3$.", ta có f ở đây là duy nhất và do đó $f(z) = (z, z_2, z_3, z_4)$.

1.60. Đặt $g(z) = (f(z), f(z_2), f(z_3), f(z_4))$. Khi đó $g(z)$ là phép biến đổi tuyến tính và $g(z_2) = 1$; $g(z_3) = 0$; $g(z_4) = \infty$. Từ đó ta có $g(z_1) = (z_1, z_2, z_3, z_4)$.

1.65. Đặt $g(z) = R^2 e^{i\theta} \dfrac{z-a}{-\bar{a}z + R^2}$, $a \in \Delta(R)$, $\theta \in \mathbb{R}$.

1.66. a) $f(z) = \dfrac{(2+i)z+i}{z+1}$.

b) $f(z) = \dfrac{6iz+2}{z+3i}$.