Trường ĐH Sư phạm Kỹ thuật Tp.HCM
KHOA KHOA HỌC CƠ BẢN
BỘ MÔN TOÁN

ĐỀ THI CUỐI KỲ *HỌC KỲ II NĂM HỌC 2015-2016*
MÔN: ***HÀM BIẾN PHỨC VÀ PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE***
Mã môn học: **MATH 121201** *Thời gian* : 90 phút (7/6/2016)
Đề thi gồm 3 trang Được phép sử dụng tài liệu
Mã đề: 0001-0111-0101-2016-0705-1657 (**Nộp lại đề này**)

PHẦN TRẮC NGHIỆM LỰA CHỌN (5,0 điểm)

(Chọn 1 trong các câu A, B, C, D rồi điền vào *BÀI LÀM PHẦN TRẮC NGHIỆM* ở trang 6)

Câu 1 Khẳng định nào sau đây sai?

A) $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^{-2n} = \cos n2\varphi - i\sin n2\varphi, \forall n\in Z$.
B) Phương trình $e^{-iz} = -2016$ vô nghiệm.
C) $(\cos\varphi \pm i\sin\varphi)^{n} = \cos n\varphi \pm i\sin n\varphi, \forall n\in Z$.
D) Cho hai số phức khác 0 là $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$. Khi đó : $z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} r_1 = r_2 \\ \varphi_2 = \varphi_1 \mp 2k\pi \end{cases}, k\in Z$

Câu 2 Khẳng định nào sau đây **sai?**

A) Nếu hàm u(x,y) và v(x,y) điều hòa và thỏa điều kiện (C-R) trên hình tròn mở $D = \{z : |z-2i| < 9\}$ thì hàm $f(z)$ = u(x,y) + iv(x,y) giải tích trên D.
B) Hàm phức $f(z)$ = u(x,y) + iv(x,y) liên tục trên miền D khi và chỉ khi các hàm u(x,y), v(x,y) liên tục trên miền D.
C) Nếu hàm u(x,y) không điều hòa trên miền D thì f(z) = u(x,y)+iv(x,y) không giải tích trên D.
D) Nếu hàm phức $f(z)$ = u(x,y) + iv(x,y) không khả vi trên miền D thì các hàm u(x,y) và v(x,y) không thỏa điều kiện Cauchy – Reimann trên miền D

Câu 3 Cho số phức $z = \frac{5}{2-i} + i^7 + e^{-6i}$. Khi đó:

A) Rez = 2 + cos6, Imz = -sin6
B) Rez = 10 + cos6, Imz = sin6
C) Rez = 2 + cos6, Imz = sin6
D) Rez = 2+ cos6, Imz = -2 - sin6

Câu 4 Trong mặt phẳng phức cho các tập hợp điểm $E = \{z : |z+1-i| = |z-6i|\}$, $F = \{z : |z+2-3i| \le 8\}$.
Khẳng định nào sau đây sai?

A) Tập E không bị chặn.
B) Tập F là là tập compact.
C) Tập F là hình tròn mở tâm -2+3i bán kính bằng 8.
D) Tập E là đường trung trực của đoạn thẳng nối -1+i với 6i.

Câu 5 Hàm phức $f(z) = \frac{4}{z} + \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ = u + iv có phần thực và phần ảo là:

A) $u = \frac{5x}{x^2+y^2}$, $v = \frac{5y}{x^2+y^2}$
B) $u = \frac{5x}{x^2+y^2}$, $v = \frac{-5y}{x^2+y^2}$
C) $u = \frac{3x}{x^2+y^2}$, $v = \frac{-3y}{x^2+y^2}$
D) một kết quả khác

Câu 6 Khẳng định nào sau đây sai?

A) Nếu a là điểm bất thường cô lập của hàm f(z) và $\lim_{z\to a} f(z) = \infty$, $\lim_{z\to a}(z-a)^m f(z) = A$ (với $0 \ne A \ne \infty$) thì a là cực điểm cấp m của hàm f(z).
B) $z = 3$ là cực điểm cấp 2 của hàm $f(z) = \frac{e^z + 8z}{(z-3)^2}$
C) $\oint_{|z-4i|=3} \frac{e^z+8z}{(z-3)^2}dz = 2\pi i \operatorname{Res}\left[\frac{e^z+8z}{(z-3)^2}, 3\right]$
D) $\oint_{|z-4|=3} \frac{e^z+8z}{(z-3)^2}dz = 2\pi i(e^3+8)$

Câu 7 Để giải hệ phương trình vi phân: $\begin{cases} x'+3y=0 \\ x+y'+2y=1 \end{cases}$, với điều kiện x(0)= y(0)= 0 ta làm như sau:

- Đặt $X=\mathscr{L}[x], Y=\mathscr{L}[y]$ và biến đổi Laplace hai vế ta được: $\begin{cases} XP+3Y=0 \\ X+(P+2)Y=\dfrac{1}{p} \end{cases}$
- Giải hệ phương trình với X, Y là ẩn ta được $\begin{cases} X=\dfrac{-3}{p(p-1)(p+3)} \\ Y=\dfrac{1}{(p-1)(p+3)} \end{cases}$
- Phân tích thành các phân thức đơn giản ta được $\begin{cases} X=\dfrac{A}{p}+\dfrac{B}{P-1}+\dfrac{C}{P+3} \\ Y=\dfrac{D}{P-1}+\dfrac{E}{P+3} \end{cases}$ với A, B, C, D, E là các hằng số mà ở đây ta không tìm.
- Biến đổi Laplace ngược hai vế ta được nghiệm $\begin{cases} x=A+Be^{t}+Ce^{-3t} \\ y=De^{t}+Ee^{-3t} \end{cases}$

Khẳng định nào sau đây đúng?

A) Cách làm đúng, tính toán đúng, kết quả đúng.
B) Cách làm đúng, tính toán sai, kết quả đúng.
C) Cách làm sai, tính toán sai, kết quả sai.
D) Cách làm đúng, tính toán sai, kết quả sai.

Câu 8 Giả sử $\mathscr{L}$[f(t)] = F(p). Khẳng định nào sau đây **sai?**

A)Nếu f(t) là hàm gốc tuần hoàn với chu kỳ **T** thì $\mathscr{L}[f(t)]=\dfrac{1}{1-e^{-Tp}}\int_0^T e^{-pt}f(t)dt$

B)Nếu $f(t)=\begin{cases} \sin 5t & khi \quad 0<t<\pi \\ 0 & khi \quad \pi<t<2\pi \end{cases}$ và f(t+2π) = f(t) thì $\mathscr{L}[f(t)]=\dfrac{1}{1-e^{-2\pi p}}\int_0^{\pi} e^{-pt}\sin 5t dt$

C) $\mathscr{L}\left[\int_0^t f(u)du\right]=\dfrac{F(p)}{p}$

D) $\mathscr{L}\left[\int_0^t e^{3u}sh2udu\right]=\dfrac{1}{p((p-3)^2-4)}$

Câu 9 Trong mặt phẳng phức, cho các hàm số $u(x,y)=4x^2-4y^2+3y+6$, $v=8xy-3x+6$. Khẳng định nào sau đây **đúng?**

A) u điều hòa, v không điều hòa.
B) u, v là các hàm điều hòa liên hợp.
C) u, v điều hòa nhưng không là các hàm điều hòa liên hợp.
D) v điều hòa, u không điều hòa

Câu 10 Cho phương trình vi phân: $y'-5y = u(t-2\pi)e^{3(t-2\pi)}$ (1) với điều kiện ban đầu y(0) = 7.
Để giải phương trình vi phân này ta làm như sau: Đặt Y = Y(p)= $\mathscr{L}$[y(t)]

- Biến đổi Laplace hai vế phương trình (1) ta được: $pY-5Y = \dfrac{e^{-2\pi p}}{p-3}+7$ (2)
- Giải phương trình (2) với Y là ẩn ta được : Y= $\dfrac{e^{-2\pi p}}{(p-3)(p-5)}+\dfrac{7}{p-5}$ (3)
- Phân tích vế phải của (3) thành phân thức đơn giản ta được: Y = $\dfrac{1}{2}e^{-2\pi p}\left(\dfrac{1}{p-5}-\dfrac{1}{p-3}\right)+\dfrac{7}{p-5}$
- Biến đổi Laplace ngược hai vế ta được nghiệm: y = $\dfrac{1}{2}\left(e^{3(t-2\pi)}-e^{5(t-2\pi)}\right)u(t-2\pi)+7e^{5t}$

A)Cách làm đúng, tính toán đúng, kết quả đúng.
B)Cách làm sai, tính toán đúng, kết quả sai.
C)Cách làm sai, tính toán sai, kết quả sai.
D)Cách làm đúng, tính toán sai, kết quả sai.

PHẦN TỰ LUẬN (5,0 điểm)

Câu 11 (1 *điểm*) Khai triển Laurent hàm $f(z)=(z-i)^3e^{\frac{1}{z-i}}$ quanh điểm bất thường cô lập $z=i$. Phân loại điểm bất thường cô lập $z=i$. Tính tích phân $I=\oint\limits_{|z+2i|=6}(z-i)^3e^{\frac{1}{z-i}}dz$.

Câu 12 (2 *điểm*) Áp dụng phép biến đổi Laplace giải phương trình tích phân

$$\text{y(t)}= 7+e^{-2t}-10\int_0^t y(u)\cos 3(t-u)du$$

Tính $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t)$ rồi dựa vào kết quả đó xác định giá trị (gần đúng) của $y(t)$ sau khoảng thời gian t đủ lớn.

Câu 13 (2 *điểm*)

a) Áp dụng phép biến đổi Laplace giải phương trình vi phân

$$y''+5y'+4y=1+\sin 2t \quad \text{với điều kiện } y(0)=0 \text{ và } y'(0)=1$$

b) Chứng tỏ rằng sau khoảng thời gian t đủ lớn nghiệm của phương trình vi phân, $y(t)$, biểu diễn xấp xỉ một dao động điều hòa theo thời gian t. Xác định biên độ dao động này.

✱ **Ghi chú :** *Cán bộ coi thi không được giải thích đề thi.*

CHUẨN ĐẦU RA

Nội dung kiểm tra	**Chuẩn đầu ra của học phần (về kiến thức)**
Từ câu 1 đến câu 10	G1: 1.1, 1.2 G2: 2.1.1, 2.1.2, 2.1.3, 2.1.4 , 2.4.3
Câu 11: Khai triển được chuỗi Laurent, tính được thặng dư và áp dụng tính tích phân. Câu 12, Câu 13: Áp dụng phép biến đổi Laplace giải phương trình vi phân rồi ứng dụng vào đời sống.	G1: 1.1, 1.2 G2: 2.1.3, 2.1.3, 2.1.4 , 2.4.3

Ngày 3 tháng 6 năm 2016
Thông qua Bộ môn Toán

<table>
<tr><td colspan="2">TRƯỜNG ĐH SƯ PHẠM KỸ THUẬT TP.HCM
BỘ MÔN TOÁN
ĐỀ THI CUỐI KỲ HỌC KỲ II NĂM HỌC 2015-2016
MÔN: HÀM BIẾN PHỨC VÀ PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE
Mã đề: 0001-0111-0101-2016-0705-1657</td><td rowspan="3">Họ, tên sinh viên: ....
Mã số sinh viên:...............................
Số báo danh (STT):........ Phòng thi: ....
Thời gian : 90 phút (7/6/2016)
Lưu ý: Sinh viên làm bài thi lần lượt trên trang 6, 5, 4,3. Đối với các hệ phương trình đại số tuyến tính thì chỉ cần ghi kết quả vào bài làm mà không cần trình bày cách giải.
Sinh viên nộp lại đề thi cùng với bài làm.</td></tr>
<tr><td>Giám thị 1</td><td>Giám thị 2</td></tr>
<tr><td>Giáo viên chấm thi 1&2</td><td>ĐIỂM</td></tr>
</table>

BÀI LÀM PHẦN TRẮC NGHIỆM

Câu hỏi	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Trả lời										

BÀI LÀM PHẦN TỰ LUẬN

Trường ĐH Sư phạm Kỹ thuật Tp.HCM
KHOA KHOA HỌC CƠ BẢN
BỘ MÔN TOÁN

ĐỀ THI CUỐI KỲ *HỌC KỲ II NĂM HỌC 2015-2016*
MÔN: ***HÀM BIẾN PHỨC VÀ PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE***
Mã môn học: **MATH 121201** *Thời gian* : 90 phút (7/6/2016)
Đề thi gồm 3 trang Được phép sử dụng tài liệu
Mã đề: 0010-0111-0101-2016-0705-1657 (**Nộp lại đề này**)

PHẦN TRẮC NGHIỆM LỰA CHỌN (5,0 điểm)

(Chọn 1 trong các câu A, B, C, D rồi điền vào *BÀI LÀM PHẦN TRẮC NGHIỆM* ở trang 6)

<u>**Câu 1**</u> Trong mặt phẳng phức, cho các hàm số $u(x,y)=4x^2-4y^2+3y+6$, $v=8xy-3x+6$. Khẳng định nào sau đây **đúng?**

A) u điều hòa, v không điều hòa.
B) u, v là các hàm điều hòa liên hợp.
C) v điều hòa, u không điều hòa.
D) u, v điều hòa nhưng không là các hàm điều hòa liên hợp.

<u>Câu 2</u> Để giải hệ phương trình vi phân: $\begin{cases} x'+3y=0 \\ x+y'+2y=1 \end{cases}$, với điều kiện x(0)= y(0)= 0 ta làm như sau:

- Đặt $X=\mathscr{L}[x], Y=\mathscr{L}[y]$ và biến đổi Laplace hai vế ta được: $\begin{cases} XP+3Y=0 \\ X+(P+2)Y=\dfrac{1}{p} \end{cases}$
- Giải hệ phương trình với X, Y là ẩn ta được $\begin{cases} X=\dfrac{-3}{p(p-1)(p+3)} \\ Y=\dfrac{1}{(p-1)(p+3)} \end{cases}$
- Phân tích thành các phân thức đơn giản ta được $\begin{cases} X=\dfrac{A}{p}+\dfrac{B}{P-1}+\dfrac{C}{P+3} \\ Y=\dfrac{D}{P-1}+\dfrac{E}{P+3} \end{cases}$ với A, B, C, D, E là các hằng số mà ở đây ta không tìm.
- Biến đổi Laplace ngược hai vế ta được nghiệm $\begin{cases} x=A+Be^t+Ce^{-3t} \\ y=De^t+Ee^{-3t} \end{cases}$

Khẳng định nào sau đây đúng?

A) Cách làm đúng, tính toán đúng, kết quả đúng.
B) Cách làm đúng, tính toán sai, kết quả đúng.
C) Cách làm sai, tính toán sai, kết quả sai.
D) Cách làm đúng, tính toán sai, kết quả sai.

<u>**Câu 3**</u> Giả sử $\mathscr{L}$[f(t)] = F(p). Khẳng định nào sau đây **sai?**

A)Nếu f(t) là hàm gốc tuần hoàn với chu kỳ **T** thì $\mathscr{L}[f(t)] = \dfrac{1}{1-e^{-Tp}}\int_0^T e^{-pt}f(t)dt$

B)Nếu $f(t)=\begin{cases} \sin 5t & khi\quad 0<t<\pi \\ 0 & khi\quad \pi<t<2\pi \end{cases}$ và f(t+2π) = f(t) thì $\mathscr{L}[f(t)] = \dfrac{1}{1-e^{-2\pi p}}\int_0^{\pi} e^{-pt}\sin 5t dt$

C) $\mathscr{L}\left[\int_0^t f(u)du\right]=\dfrac{F(p)}{p}$

D) $\mathscr{L}\left[\int_0^t e^{3u}sh2udu\right]=\dfrac{1}{p((p-3)^2-4)}$

<u>Câu 4</u> Cho phương trình vi phân: $y'-5y=u(t-2\pi)e^{3(t-2\pi)}$ (1) với điều kiện ban đầu y(0) = 7.
Để giải phương trình vi phân này ta làm như sau: Đặt Y = Y(p)= $\mathscr{L}$[y(t)]

- Biến đổi Laplace hai vế phương trình (1) ta được: $pY-5Y=\dfrac{e^{-2\pi p}}{p-3}+7$ (2)

- Giải phương trình (2) với Y là ẩn ta được : Y= $\dfrac{e^{-2\pi p}}{(p-3)(p-5)} + \dfrac{7}{p-5}$ (3)
- Phân tích vế phải của (3) thành phân thức đơn giản ta được: Y = $\dfrac{1}{2}e^{-2\pi p}\left(\dfrac{1}{p-5}-\dfrac{1}{p-3}\right)+\dfrac{7}{p-5}$
- Biến đổi Laplace ngược hai vế ta được nghiệm: y = $\dfrac{1}{2}\left(e^{3(t-2\pi)}-e^{5(t-2\pi)}\right)u(t-2\pi)+7\,e^{5t}$

A)Cách làm đúng, tính toán đúng, kết quả đúng.
B)Cách làm sai, tính toán đúng, kết quả sai.
C)Cách làm sai, tính toán sai, kết quả sai.
D)Cách làm đúng, tính toán sai, kết quả sai.

Câu 5 Khẳng định nào sau đây sai?

A) $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^{-2n} = \cos 2\varphi - i\sin n2\varphi, \forall n\in Z$.
B) Phương trình $e^{-iz} = -2016$ vô nghiệm.
C) $(\cos\varphi \pm i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi \pm i\sin n\varphi, \forall n\in Z$.
D) Cho hai số phức khác 0 là $z_1 = r_1\, e^{i\varphi_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$. Khi đó : $z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} r_1 = r_2 \\ \varphi_2 = \varphi_1 \mp 2k\pi \end{cases}$,k∈Z

Câu 6 Khẳng định nào sau đây **sai?**

A) Nếu hàm u(x,y) và v(x,y) điều hòa và thỏa điều kiện (C-R) trên hình tròn mở $D = \{z : |z-2i| < 9\}$ thì hàm $f(z)$ = u(x,y) + iv(x,y) giải tích trên D.
B) Hàm phức $f(z)$ = u(x,y) + iv(x,y) liên tục trên miền D khi và chỉ khi các hàm u(x,y), v(x,y) liên tục trên miền D.
C) Nếu hàm u(x,y) không điều hòa trên miền D thì f(z) = u(x,y)+iv(x,y) không giải tích trên D.
D) Nếu hàm phức $f(z)$ = u(x,y) + iv(x,y) không khả vi trên miền D thì các hàm u(x,y) và v(x,y) không thỏa điều kiện Cauchy – Reimann trên miền D

Câu 7 Cho số phức z = $\dfrac{5}{2-i} + i^7 + e^{-6i}$. Khi đó:

A) Rez = 2 + cos6, Imz = -sin6
B) Rez = 10 + cos6, Imz = sin6
C) Rez = 2 + cos6, Imz = sin6
D) Rez = 2+ cos6, Imz = -2 - sin6

Câu 8 Trong mặt phẳng phức cho các tập hợp điểm $E = \{z : |z+1-i| = |z-6i|\}$, $F = \{z : |z+2-3i| \le 8\}$.
Khẳng định nào sau đây sai?

A) Tập E không bị chặn.
B) Tập F là là tập compact.
C) Tập F là hình tròn mở tâm -2+3i bán kính bằng 8.
D) Tập E là đường trung trực của đoạn thẳng nối -1+i với 6i.

Câu 9 Hàm phức f(z) = $\dfrac{4}{z}+\dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$ = u + iv có phần thực và phần ảo là:

A) u = $\dfrac{5x}{x^2+y^2}$, v = $\dfrac{5y}{x^2+y^2}$
B) u = $\dfrac{5x}{x^2+y^2}$, v = $\dfrac{-5y}{x^2+y^2}$
C) u = $\dfrac{3x}{x^2+y^2}$, v = $\dfrac{-3y}{x^2+y^2}$
D) một kết quả khác

Câu 10 Khẳng định nào sau đây sai?

A) Nếu a là điểm bất thường cô lập của hàm f(z) và $\lim\limits_{z\to a} f(z) = \infty$, $\lim\limits_{z\to a}(z-a)^m f(z) = A$ (với $0 \ne A \ne \infty$) thì a là cực điểm cấp m của hàm f(z).

B) $z = 3$ là cực điểm cấp 2 của hàm $f(z) = \dfrac{e^z + 8z}{(z-3)^2}$

C) $\displaystyle\oint_{|z-4i|=3} \frac{e^z+8z}{(z-3)^2}dz = 2\pi i\,\mathrm{Res}\left[\frac{e^z+8z}{(z-3)^2}, 3\right]$
D) $\displaystyle\oint_{|z-4|=3} \frac{e^z+8z}{(z-3)^2}dz = 2\pi i(e^3+8)$

PHẦN TỰ LUẬN (5,0 điểm)

Câu 11 (*1 điểm*) Khai triển Laurent hàm $f(z) = (z-i)^3 e^{\frac{1}{z-i}}$ quanh điểm bất thường cô lập $z = i$. Phân loại điểm bất thường cô lập $z = i$. Tính tích phân $I = \oint\limits_{|z+2i|=6} (z-i)^3 e^{\frac{1}{z-i}} dz$.

Câu 12 (*2 điểm*) Áp dụng phép biến đổi Laplace giải phương trình tích phân

$$y(t) = 7 + e^{-2t} - 10\int_0^t y(u)\cos 3(t-u)du$$

Tính $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t)$ rồi dựa vào kết quả đó xác định giá trị (gần đúng) của $y(t)$ sau khoảng thời gian t đủ lớn.

Câu 13 (*2 điểm*)

a) Áp dụng phép biến đổi Laplace giải phương trình vi phân

$$y'' + 5y' + 4y = 1 + \sin 2t \text{ với điều kiện } y(0) = 0 \text{ và } y'(0) = 1$$

b) Chứng tỏ rằng sau khoảng thời gian t đủ lớn nghiệm của phương trình vi phân, $y(t)$, biểu diễn xấp xỉ một dao động điều hòa theo thời gian t. Xác định biên độ dao động này.

✱ Ghi chú : *Cán bộ coi thi không được giải thích đề thi.*

CHUẨN ĐẦU RA

Nội dung kiểm tra	**Chuẩn đầu ra của học phần (về kiến thức)**
Từ câu 1 đến câu 10	G1: 1.1, 1.2 G2: 2.1.1, 2.1.2, 2.1.3, 2.1.4 , 2.4.3
Câu 11: Khai triển được chuỗi Laurent, tính được thặng dư và áp dụng tính tích phân. Câu 12, Câu 13: Áp dụng phép biến đổi Laplace giải phương trình vi phân rồi ứng dụng vào đời sống.	G1: 1.1, 1.2 G2: 2.1.3, 2.1.3, 2.1.4 , 2.4.3

Ngày 3 tháng 6 năm 2016
Thông qua Bộ môn Toán

TRƯỜNG ĐH SƯ PHẠM KỸ THUẬT TP.HCM BỘ MÔN TOÁN **ĐỀ THI CUỐI KỲ *HỌC KỲ II NĂM HỌC 2015-2016*** **MÔN**: **HÀM BIẾN PHỨC VÀ PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE** Mã đề: 0010-0111-0101-2016-0705-1657		Họ, tên sinh viên: .... Mã số sinh viên:............................... Số báo danh (***STT***):........ Phòng thi: .... *Thời gian* : 90 phút (7/6/2016) **Lưu ý**: Sinh viên làm bài thi lần lượt trên trang 6, 5, 4,3. Đối với các hệ phương trình đại số tuyến tính thì chỉ cần ghi kết quả vào bài làm mà không cần trình bày cách giải. ***Sinh viên nộp lại đề thi cùng với bài làm.***
Giám thị 1	***Giám thị 2***	
Giáo viên chấm thi 1&2	**ĐIỂM**	

BÀI LÀM PHẦN TRẮC NGHIỆM

Câu hỏi	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Trả lời										

BÀI LÀM PHẦN TỰ LUẬN

Trường ĐH Sư phạm Kỹ thuật Tp.HCM
KHOA KHOA HỌC CƠ BẢN
BỘ MÔN TOÁN

ĐỀ THI CUỐI KỲ *HỌC KỲ II NĂM HỌC 2015-2016*
MÔN: *HÀM BIẾN PHỨC VÀ PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE*
Mã môn học: **MATH 121201** *Thời gian* : 90 phút (7/6/2016)
Đề thi gồm 3 trang Được phép sử dụng tài liệu
Mã đề: 0011-0111-0101-2016-0705-1657 (**Nộp lại đề này**)

PHẦN TRẮC NGHIỆM LỰA CHỌN (5,0 điểm)

(Chọn 1 trong các câu A, B, C, D rồi điền vào *BÀI LÀM PHẦN TRẮC NGHIỆM* ở trang 6)

Câu 1 Hàm phức $f(z) = \dfrac{4}{z} + \dfrac{\bar{z}}{|z|^2} = u + iv$ có phần thực và phần ảo là:

A) $u = \dfrac{5x}{x^2+y^2}$, $v = \dfrac{5y}{x^2+y^2}$

B) $u = \dfrac{3x}{x^2+y^2}$, $v = \dfrac{-3y}{x^2+y^2}$

C) $u = \dfrac{5x}{x^2+y^2}$, $v = \dfrac{-5y}{x^2+y^2}$

D) một kết quả khác

Câu 2 Khẳng định nào sau đây sai?

A) Nếu a là điểm bất thường cô lập của hàm f(z) và $\lim\limits_{z\to a} f(z) = \infty$, $\lim\limits_{z\to a}(z-a)^m f(z) = A$ (với $0 \neq A \neq \infty$) thì a là cực điểm cấp m của hàm f(z).

B) $z = 3$ là cực điểm cấp 2 của hàm $f(z) = \dfrac{e^z + 8z}{(z-3)^2}$

C) $\oint\limits_{|z-4i|=3} \dfrac{e^z+8z}{(z-3)^2}dz = 2\pi i \operatorname{Res}\left[\dfrac{e^z+8z}{(z-3)^2}, 3\right]$

D) $\oint\limits_{|z-4|=3} \dfrac{e^z+8z}{(z-3)^2}dz = 2\pi i(e^3+8)$

Câu 3 Khẳng định nào sau đây sai?

A) $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^{-2n} = \cos n2\varphi - i\sin n2\varphi$, $\forall n \in Z$.

B) Phương trình $e^{-iz} = -2016$ vô nghiệm.

C) $(\cos\varphi \pm i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi \pm i \sin n\varphi$, $\forall n \in Z$.

D) Cho hai số phức khác 0 là $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$. Khi đó : $z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} r_1 = r_2 \\ \varphi_2 = \varphi_1 \mp 2k\pi \end{cases}$, $k \in Z$

Câu 4 Khẳng định nào sau đây **sai?**

A) Hàm phức $f(z)$ = u(x,y) + iv(x,y) liên tục trên miền D khi và chỉ khi các hàm u(x,y), v(x,y) liên tục trên miền D.

B) Nếu hàm u(x,y) không điều hòa trên miền D thì f(z) = u(x,y)+iv(x,y) không giải tích trên D.

C) Nếu hàm u(x,y) và v(x,y) điều hòa và thỏa điều kiện (C-R) trên hình tròn mở $D = \{z : |z-2i| < 9\}$ thì hàm $f(z)$ = u(x,y) + iv(x,y) giải tích trên D.

D) Nếu hàm phức $f(z)$ = u(x,y) + iv(x,y) không khả vi trên miền D thì các hàm u(x,y) và v(x,y) không thỏa điều kiện Cauchy – Reimann trên miền D

Câu 5 Cho số phức $z = \dfrac{5}{2-i} + i^7 + e^{-6i}$. Khi đó:

A) Rez = 2 + cos6, Imz = -sin6

B) Rez = 10 + cos6, Imz = sin6

C) Rez = 2 + cos6, Imz = 2-sin6

D) Rez = 2+ cos6, Imz = -2 - sin6

Câu 6 Trong mặt phẳng phức cho các tập hợp điểm $E = \{z : |z+1-i| = |z-6i|\}$, $F = \{z : |z+2-3i| \le 8\}$.

Khẳng định nào sau đây sai?

A) Tập F là là tập compact.

B) Tập E không bị chặn.

C)Tập F là hình tròn mở tâm -2+3i bán kính bằng 8.

D) Tập E là đường trung trực của đoạn thẳng nối -1+i với 6i.

Câu 7 Trong mặt phẳng phức, cho các hàm số $u(x,y)=4x^2-4y^2+3y+6$, $v=8xy-3x+6$. Khẳng định nào sau đây **đúng?**

A) u điều hòa, v không điều hòa.

B) u, v là các hàm điều hòa liên hợp.

C) u, v điều hòa nhưng không là các hàm điều hòa liên hợp.

D) v điều hòa, u không điều hòa.

Câu 8 Cho phương trình vi phân: $y'-5y = u(t-2\pi)e^{3(t-2\pi)}$ (1) với điều kiện ban đầu y(0) = 7.

Để giải phương trình vi phân này ta làm như sau: Đặt Y = Y(p)= $\mathscr{L}$[y(t)]

- Biến đổi Laplace hai vế phương trình (1) ta được: $pY-5Y = \dfrac{e^{-2\pi p}}{p-3}+7$ (2)
- Giải phương trình (2) với Y là ẩn ta được : Y= $\dfrac{e^{-2\pi p}}{(p-3)(p-5)}+\dfrac{7}{p-5}$ (3)
- Phân tích vế phải của (3) thành phân thức đơn giản ta được: Y = $\dfrac{1}{2}e^{-2\pi p}\left(\dfrac{1}{p-5}-\dfrac{1}{p-3}\right)+\dfrac{7}{p-5}$
- Biến đổi Laplace ngược hai vế ta được nghiệm: y = $\dfrac{1}{2}\left(e^{3(t-2\pi)}-e^{5(t-2\pi)}\right)u(t-2\pi)+7e^{5t}$

A)Cách làm đúng, tính toán đúng, kết quả đúng.

B)Cách làm sai, tính toán đúng, kết quả sai.

C)Cách làm sai, tính toán sai, kết quả sai.

D)Cách làm đúng, tính toán sai, kết quả sai.

Câu 9 Để giải hệ phương trình vi phân: $\begin{cases} x'+3y=0 \\ x+y'+2y=1 \end{cases}$, với điều kiện x(0)= y(0)= 0 ta làm như sau:

- Đặt $X=\mathscr{L}[x], Y=\mathscr{L}[y]$ và biến đổi Laplace hai vế ta được: $\begin{cases} XP+3Y=0 \\ X+(P+2)Y=\dfrac{1}{p} \end{cases}$
- Giải hệ phương trình với X, Y là ẩn ta được $\begin{cases} X=\dfrac{-3}{p(p-1)(p+3)} \\ Y=\dfrac{1}{(p-1)(p+3)} \end{cases}$
- Phân tích thành các phân thức đơn giản ta được $\begin{cases} X=\dfrac{A}{p}+\dfrac{B}{P-1}+\dfrac{C}{P+3} \\ Y=\dfrac{D}{P-1}+\dfrac{E}{P+3} \end{cases}$ với A, B, C, D, E là các hằng số mà ở đây ta không tìm.
- Biến đổi Laplace ngược hai vế ta được nghiệm $\begin{cases} x=A+Be^{t}+Ce^{-3t} \\ y=De^{t}+Ee^{-3t} \end{cases}$

Khẳng định nào sau đây đúng?

A) Cách làm đúng, tính toán đúng, kết quả đúng.

B) Cách làm đúng, tính toán sai, kết quả đúng.

C) Cách làm sai, tính toán sai, kết quả sai.

D) Cách làm đúng, tính toán sai, kết quả sai.

Câu 10 Giả sử $\mathscr{L}$[f(t)] = F(p). Khẳng định nào sau đây **sai?**

A)Nếu f(t) là hàm gốc tuần hoàn với chu kỳ **T** thì $\mathscr{L}$[f(t)] = $\dfrac{1}{1-e^{-Tp}}\displaystyle\int_0^T e^{-pt}f(t)dt$

B)Nếu $f(t)=\begin{cases} \sin 5t & khi \quad 0<t<\pi \\ 0 & khi \quad \pi<t<2\pi \end{cases}$ và f(t+2π) = f(t) thì $\mathscr{L}$[f(t)] = $\dfrac{1}{1-e^{-2\pi p}}\displaystyle\int_0^{\pi} e^{-pt}\sin 5t dt$

C) $\mathscr{L}\left[\displaystyle\int_0^t f(u)du\right]=\dfrac{F(p)}{p}$

D) $\mathscr{L}\left[\displaystyle\int_0^t e^{3u}sh2udu\right]=\dfrac{1}{p((p-3)^2-4)}$

PHẦN TỰ LUẬN (5,0 điểm)

<u>Câu 11</u> (*1 điểm*) Khai triển Laurent hàm $f(z)=(z-i)^3 e^{\frac{1}{z-i}}$ quanh điểm bất thường cô lập $z=i$.

Phân loại điểm bất thường cô lập $z=i$. Tính tích phân $I = \oint\limits_{|z+2i|=6} (z-i)^3 e^{\frac{1}{z-i}} dz$.

<u>Câu 12</u> (*2 điểm*) Áp dụng phép biến đổi Laplace giải phương trình tích phân

$$y(t) = 7 + e^{-2t} - 10\int_0^t y(u)\cos 3(t-u)\,du$$

Tính $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t)$ rồi dựa vào kết quả đó xác định giá trị (gần đúng) của $y(t)$ sau khoảng thời gian t đủ lớn.

<u>Câu 13</u> (*2 điểm*)

a) Áp dụng phép biến đổi Laplace giải phương trình vi phân

$$y''+5y'+4y = 1+\sin 2t \quad \text{với điều kiện } y(0)=0 \text{ và } y'(0)=1$$

b) Chứng tỏ rằng sau khoảng thời gian t đủ lớn nghiệm của phương trình vi phân, $y(t)$, biểu diễn xấp xỉ một dao động điều hòa theo thời gian t. Xác định biên độ dao động này.

✻ Ghi chú : *Cán bộ coi thi không được giải thích đề thi.*

CHUẨN ĐẦU RA

Nội dung kiểm tra	Chuẩn đầu ra của học phần (về kiến thức)
Từ câu 1 đến câu 10	G1: 1.1, 1.2 G2: 2.1.1, 2.1.2, 2.1.3, 2.1.4 , 2.4.3
Câu 11: Khai triển được chuỗi Laurent, tính được thặng dư và áp dụng tính tích phân. Câu 12, Câu 13: Áp dụng phép biến đổi Laplace giải phương trình vi phân rồi ứng dụng vào đời sống.	G1: 1.1, 1.2 G2: 2.1.3, 2.1.3, 2.1.4 , 2.4.3

Ngày 3 tháng 6 năm 2016
Thông qua Bộ môn Toán

<table>
<tr><td colspan="2">TRƯỜNG ĐH SƯ PHẠM KỸ THUẬT TP.HCM
BỘ MÔN TOÁN
ĐỀ THI CUỐI KỲ HỌC KỲ II NĂM HỌC 2015-2016
MÔN: HÀM BIẾN PHỨC VÀ PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE
Mã đề: 0011-0111-0101-2016-0705-1657</td><td rowspan="3">Họ, tên sinh viên: ....
Mã số sinh viên:...............................
Số báo danh (STT):........ Phòng thi: ....
Thời gian : 90 phút (7/6/2016)
Lưu ý: Sinh viên làm bài thi lần lượt trên trang 6, 5, 4,3. Đối với các hệ phương trình đại số tuyến tính thì chỉ cần ghi kết quả vào bài làm mà không cần trình bày cách giải.
Sinh viên nộp lại đề thi cùng với bài làm.</td></tr>
<tr><td>Giám thị 1</td><td>Giám thị 2</td></tr>
<tr><td>Giáo viên chấm thi 1&2</td><td>ĐIỂM</td></tr>
</table>

BÀI LÀM PHẦN TRẮC NGHIỆM

Câu hỏi	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Trả lời										

BÀI LÀM PHẦN TỰ LUẬN

Trường ĐH Sư phạm Kỹ thuật Tp.HCM
KHOA KHOA HỌC CƠ BẢN
BỘ MÔN TOÁN

ĐỀ THI CUỐI KỲ *HỌC KỲ II NĂM HỌC 2015-2016*
MÔN: ***HÀM BIẾN PHỨC VÀ PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE***
Mã môn học: **MATH 121201** *Thời gian* : 90 phút (7/6/2016)
Đề thi gồm 3 trang Được phép sử dụng tài liệu
Mã đề: 0100-0111-0101-2016-0705-1657 (**Nộp lại đề này**)

PHẦN TRẮC NGHIỆM LỰA CHỌN (5,0 điểm)

(Chọn 1 trong các câu A, B, C, D rồi điền vào *BÀI LÀM PHẦN TRẮC NGHIỆM* ở trang 6)

Câu 1 Giả sử $\mathscr{L}[f(t)] = F(p)$. Khẳng định nào sau đây **sai?**

A)Nếu f(t) là hàm gốc tuần hoàn với chu kỳ **T** thì $\mathscr{L}[f(t)] = \dfrac{1}{1-e^{-Tp}}\int_0^T e^{-pt} f(t)dt$

B)Nếu $f(t)=\begin{cases}\sin 5t & khi \quad 0<t<\pi \\ 0 & khi \quad \pi<t<2\pi\end{cases}$ và $f(t+2\pi) = f(t)$ thì $\mathscr{L}[f(t)] = \dfrac{1}{1-e^{-2\pi p}}\int_0^{\pi} e^{-pt}\sin 5t dt$

C) $\mathscr{L}\left[\int_0^t f(u)du\right] = \dfrac{F(p)}{p}$ D) $\mathscr{L}\left[\int_0^t e^{3u} sh2u du\right] = \dfrac{1}{p((p-3)^2-4)}$

Câu 2 Trong mặt phẳng phức, cho các hàm số $u(x,y)=4x^2-4y^2+3y+6$, $v=8xy-3x+6$. Khẳng định nào sau đây **đúng?**

A) u điều hòa, v không điều hòa.
B) u, v là các hàm điều hòa liên hợp.
C) v điều hòa, u không điều hòa.
D) u, v điều hòa nhưng không là các hàm điều hòa liên hợp.

Câu 3 Để giải hệ phương trình vi phân: $\begin{cases}x'+3y=0\\ x+y'+2y=1\end{cases}$, với điều kiện x(0)= y(0)= 0 ta làm như sau:

- Đặt $X=\mathscr{L}[x], Y=\mathscr{L}[y]$ và biến đổi Laplace hai vế ta được: $\begin{cases}XP+3Y=0\\ X+(P+2)Y=\dfrac{1}{p}\end{cases}$
- Giải hệ phương trình với X, Y là ẩn ta được $\begin{cases}X=\dfrac{-3}{p(p-1)(p+3)}\\ Y=\dfrac{1}{(p-1)(p+3)}\end{cases}$
- Phân tích thành các phân thức đơn giản ta được $\begin{cases}X=\dfrac{A}{p}+\dfrac{B}{P-1}+\dfrac{C}{P+3}\\ Y=\dfrac{D}{P-1}+\dfrac{E}{P+3}\end{cases}$ với A, B, C, D, E là các hằng số mà ở đây ta không tìm.
- Biến đổi Laplace ngược hai vế ta được nghiệm $\begin{cases}x=A+Be^t+Ce^{-3t}\\ y=De^t+Ee^{-3t}\end{cases}$

Khẳng định nào sau đây đúng?

A) Cách làm đúng, tính toán đúng, kết quả đúng.
B) Cách làm đúng, tính toán sai, kết quả đúng.
C) Cách làm sai, tính toán sai, kết quả sai.
D) Cách làm đúng, tính toán sai, kết quả sai.

Câu 4 Cho phương trình vi phân: $y'-5y = u(t-2\pi)e^{3(t-2\pi)}$ (1) với điều kiện ban đầu y(0) = 7.
Để giải phương trình vi phân này ta làm như sau: Đặt $Y = Y(p)= \mathscr{L}[y(t)]$

- Biến đổi Laplace hai vế phương trình (1) ta được: $pY-5Y = \dfrac{e^{-2\pi p}}{p-3}+7$ (2)

♦ Giải phương trình (2) với Y là ẩn ta được : Y= $\dfrac{e^{-2\pi p}}{(p-3)(p-5)} + \dfrac{7}{p-5}$ (3)

♦ Phân tích vế phải của (3) thành phân thức đơn giản ta được: Y = $\dfrac{1}{2}e^{-2\pi p}\left(\dfrac{1}{p-5}-\dfrac{1}{p-3}\right)+\dfrac{7}{p-5}$

♦ Biến đổi Laplace ngược hai vế ta được nghiệm: y = $\dfrac{1}{2}\left(e^{3(t-2\pi)}-e^{5(t-2\pi}\right)u(t-2\pi)+7\,e^{5t}$

A)Cách làm đúng, tính toán đúng, kết quả đúng.
B)Cách làm sai, tính toán đúng, kết quả sai.
C)Cách làm sai, tính toán sai, kết quả sai.
D)Cách làm đúng, tính toán sai, kết quả sai.

Câu 5 Trong mặt phẳng phức cho các tập hợp điểm $E=\{z:|z+1-i|=|z-6i|\}$, $F=\{z:|z+2-3i|\le 8\}$.
Khẳng định nào sau đây sai?

A) Tập E không bị chặn.
B) Tập F là là tập compact.
C) Tập F là hình tròn mở tâm -2+3i bán kính bằng 8.
D) Tập E là đường trung trực của đoạn thẳng nối -1+i với 6i.

Câu 6 Hàm phức f(z) = $\dfrac{4}{z}+\dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$ = u + iv có phần thực và phần ảo là:

A) u = $\dfrac{5x}{x^2+y^2}$, v = $\dfrac{5y}{x^2+y^2}$
B) u = $\dfrac{5x}{x^2+y^2}$, v = $\dfrac{-5y}{x^2+y^2}$
C) u = $\dfrac{3x}{x^2+y^2}$, v = $\dfrac{-3y}{x^2+y^2}$
D) một kết quả khác

Câu 7 Khẳng định nào sau đây sai?

A) Nếu a là điểm bất thường cô lập của hàm f(z) và $\lim\limits_{z\to a} f(z)=\infty$, $\lim\limits_{z\to a}(z-a)^m f(z)=A$ (với $0\ne A\ne\infty$) thì a là cực điểm cấp m của hàm f(z).

B) $z=3$ là cực điểm cấp 2 của hàm $f(z)=\dfrac{e^z+8z}{(z-3)^2}$

C) $\oint\limits_{|z-4i|=3}\dfrac{e^z+8z}{(z-3)^2}dz = 2\pi i\ \mathrm{Res}\left[\dfrac{e^z+8z}{(z-3)^2},3\right]$

D) $\oint\limits_{|z-4|=3}\dfrac{e^z+8z}{(z-3)^2}dz = 2\pi i(e^3+8)$

Câu 8 Khẳng định nào sau đây sai?

A) $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^{-2n} = \cos n2\varphi - i\sin n2\varphi$, $\forall n\in Z$.
B) Phương trình $e^{-iz}=-2016$ vô nghiệm.
C) $(\cos\varphi \pm i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi \pm i\sin n\varphi$, $\forall n\in Z$.
D) Cho hai số phức khác 0 là $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$. Khi đó : $z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} r_1 = r_2 \\ \varphi_2 = \varphi_1 \mp 2k\pi \end{cases}$, $k\in Z$

Câu 9 Khẳng định nào sau đây **sai?**

A) Nếu hàm u(x,y) và v(x,y) điều hòa và thỏa điều kiện (C-R) trên hình tròn mở $D=\{z:|z-2i|<9\}$ thì hàm $f(z)$ = u(x,y) + iv(x,y) giải tích trên D.

B) Hàm phức $f(z)$ = u(x,y) + iv(x,y) liên tục trên miền D khi và chỉ khi các hàm u(x,y), v(x,y) liên tục trên miền D.

C) Nếu hàm u(x,y) không điều hòa trên miền D thì f(z) = u(x,y)+iv(x,y) không giải tích trên D.

D) Nếu hàm phức $f(z)$ = u(x,y) + iv(x,y) không khả vi trên miền D thì các hàm u(x,y) và v(x,y) không thỏa điều kiện Cauchy – Reimann trên miền D

Câu 10 Cho số phức z = $\dfrac{5}{2-i}+i^7$ + e^{-6i}. Khi đó:

A) Rez = 2 + cos6, Imz = -sin6
B) Rez = 10 + cos6, Imz = sin6
C) Rez = 2 + cos6, Imz = sin6
D) Rez = 2+ cos6, Imz = -2 - sin6

PHẦN TỰ LUẬN (5,0 điểm)

Câu 11 (*1 điểm*) Khai triển Laurent hàm $f(z)=(z-i)^3 e^{\frac{1}{z-i}}$ quanh điểm bất thường cô lập $z=i$.
Phân loại điểm bất thường cô lập $z=i$. Tính tích phân $I=\oint\limits_{|z+2i|=6}(z-i)^3 e^{\frac{1}{z-i}}dz$.

Câu 12 (*2 điểm*) Áp dụng phép biến đổi Laplace giải phương trình tích phân

$$\text{y(t)}=\ 7+e^{-2t}-10\int_0^t y(u)\cos 3(t-u)du$$

Tính $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t)$ rồi dựa vào kết quả đó xác định giá trị (gần đúng) của $y(t)$ sau khoảng thời gian t đủ lớn.

Câu 13 (*2 điểm*)

a) Áp dụng phép biến đổi Laplace giải phương trình vi phân

$$y''+5y'+4y=1+\sin 2t \ \text{ với điều kiện } \ y(0)=0 \ \text{ và } \ y'(0)=1$$

b) Chứng tỏ rằng sau khoảng thời gian t đủ lớn nghiệm của phương trình vi phân, $y(t)$, biểu diễn xấp xỉ một dao động điều hòa theo thời gian t. Xác định biên độ dao động này.

✻ Ghi chú : *Cán bộ coi thi không được giải thích đề thi.*

CHUẨN ĐẦU RA

Nội dung kiểm tra	**Chuẩn đầu ra của học phần (về kiến thức)**
Từ câu 1 đến câu 10	G1: 1.1, 1.2 G2: 2.1.1, 2.1.2, 2.1.3, 2.1.4 , 2.4.3
Câu 11: Khai triển được chuỗi Laurent, tính được thặng dư và áp dụng tính tích phân. Câu 12, Câu 13: Áp dụng phép biến đổi Laplace giải phương trình vi phân rồi ứng dụng vào đời sống.	G1: 1.1, 1.2 G2: 2.1.3, 2.1.3, 2.1.4 , 2.4.3

Ngày 3 tháng 6 năm 2016
Thông qua Bộ môn Toán

<table>
<tr><td colspan="2">TRƯỜNG ĐH SƯ PHẠM KỸ THUẬT TP.HCM
BỘ MÔN TOÁN
ĐỀ THI CUỐI KỲ HỌC KỲ II NĂM HỌC 2015-2016
MÔN: HÀM BIẾN PHỨC VÀ PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE
Mã đề: 0100-0111-0101-2016-0705-1657</td><td rowspan="3">Họ, tên sinh viên: ....
Mã số sinh viên:................................
Số báo danh (STT):........ Phòng thi: ....
Thời gian : 90 phút (7/6/2016)
Lưu ý: Sinh viên làm bài thi lần lượt trên trang 6, 5, 4,3. Đối với các hệ phương trình đại số tuyến tính thì chỉ cần ghi kết quả vào bài làm mà không cần trình bày cách giải.
Sinh viên nộp lại đề thi cùng với bài làm.</td></tr>
<tr><td>Giám thị 1</td><td>Giám thị 2</td></tr>
<tr><td>Giáo viên chấm thi 1&2</td><td>ĐIỂM</td></tr>
</table>

BÀI LÀM PHẦN TRẮC NGHIỆM

Câu hỏi	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Trả lời										

BÀI LÀM PHẦN TỰ LUẬN