GIÁO TRÌNH GIẢI TÍCH III

Huỳnh Thế Phùng, Khoa Toán, ĐHKH Huế

Ngày 26 tháng 9 năm 2006

Mục lục

Chương 1.

PHÉP TÍNH VI PHÂN HÀM NHIỀU BIẾN

1.1. Giới hạn và Liên tục

1.1.1. Hàm nhiều biến

Cho E là một tập con khác rỗng của $\mathbb{R}^n$. Một ánh xạ f từ E vào $\mathbb{R}$ được gọi là một hàm nhiều biến (cụ thể là n biến) xác định trên E:

$$\begin{aligned} f :& E \longrightarrow \mathbb{R}; \\ x = (x_1, \cdots, x_n) \in& E \longrightarrow f(x) = f(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Khi $n = 1$, f trở thành hàm một biến thực, khi $n = 2, 3$ ta có hàm hai, ba biến mà thường được viết đơn giản là $f(x, y)$, $f(x, y, z)$ với $x, y, z \in \mathbb{R}$. Tập E được gọi là miền xác định của f. Thông thường hàm f được cho dưới dạng công thức còn miền xác định được hiểu là tập hợp các điểm x làm cho $f(x)$ có nghĩa. Chẳng hạn hàm hai biến $f(x, y) = \ln((x^2 + y^2)x)$ có miền xác định là tập $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$.

Tương tự đồ thị hàm một biến, đồ thị của hàm n biến f là tập hợp con của $\mathbb{R}^{n+1}$ mà được định nghĩa như sau:

$$Gr(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in E\}.$$

Bây giờ cho f và g là các hàm nhiều biến trên E và λ là một số thực, ta ký hiệu λf, $f \pm g$, fg, f/g, $f \vee g$, $f \wedge g$ là các hàm mới được xác định bởi, $\forall x \in E$:

$$\begin{array}{lcl} (\lambda f)(x) & := & \lambda f(x); \\ (f \pm g)(x) & := & f(x) \pm g(x); \\ (fg)(x) & := & f(x)g(x); \\ \left(\dfrac{f}{g}\right)(x) & := & \dfrac{f(x)}{g(x)}, \quad (g(x) \neq 0; \end{array}$$

$$\begin{aligned}(f \vee g)(x) &:= \max\{f(x), g(x)\};\\ (f \wedge g)(x) &:= \min\{f(x), g(x)\}.\end{aligned}$$

Ta nói $f < g$ nếu $f(x) < g(x)$ với mọi $x \in E$. Các quan hệ $f \leq g$, $f > g$ và $f \geq g$ được định nghĩa hoàn toàn tương tự.

1.1.2. Giới hạn

Cho f là hàm xác định trên E và $x^0 \in \overline{E}$. Một số thực L được gọi là giới hạn của hàm f tại x^0 nếu

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in E : 0 < d(x, x^0) < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon. \tag{1.1}$$

Ta viết

$$L = \lim_{x \to x^0} f(x) \quad \text{hay} \quad f(x) \overset{x \to x^0}{\longrightarrow} L.$$

Định lý 1.1. *Hàm f có giới hạn bằng L tại điểm $x^0 \in \overline{E}$ nếu, và chỉ nếu, với mọi dãy vectơ $(x^k) \subset E \setminus \{x^0\}$ hội tụ về x^0, dãy số $(f(x^k))$ hội tụ về L.*

Ví dụ 1.1. Tại điểm $(0, 0)$, hàm hai biến $f(x, y) = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$ có giới hạn bằng 0 trong khi hàm $g(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ không có giới hạn tại điểm đó.

Khái niệm giới hạn vô cùng của hàm nhiều biến cũng được định nghĩa tương tự hàm một biến. Cụ thể:

$$\lim_{x \to x^0} f(x) = +\infty \Longleftrightarrow \forall M \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0, \forall x \in E : 0 < d(x, x^0) < \delta \Rightarrow f(x) > M;$$

$$\lim_{x \to x^0} f(x) = -\infty \Longleftrightarrow \forall m \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0, \forall x \in E : 0 < d(x, x^0) < \delta \Rightarrow f(x) < m.$$

Ví dụ 1.2.

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{1}{x^2 + y^2} = +\infty.$$

Định lý sau đây được chứng minh tương tự đối với hàm một biến:

Định lý 1.2. *Giả sử $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L \in \overline{\mathbb{R}}$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = M \in \overline{\mathbb{R}}$ và $\lambda \in \mathbb{R}$. Lúc đó,*

a) $\lim_{x \to x_0} (f \pm g)(x) = L \pm M$;

b) $\lim_{x \to x_0} (\lambda f)(x) = \lambda L$;

c) $\lim_{x \to x_0} (fg)(x) = LM$;

d) Nếu $M \neq 0$ thì $\lim_{x \to x_0} \left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{L}{M}$;

e) Nếu $f \leq g$ thì $L \leq M$.

Các phát biểu a)-c) được hiểu là vế trái tồn tại và bằng vế phải mỗi khi vế phải có nghĩa.

1.1.3. Sự liên tục

Cho hàm f xác định trên tập $E \subset \mathbb{R}^n$ và $x^0 \in E$. Ta nói f liên tục tại x^0 nếu giới hạn của f tại x^0 tồn tại và bằng $f(x^0)$:

$$\lim_{x \to x^0} f(x) = f(x^0).$$

Nếu f liên tục tại mọi điểm $x \in E$, ta nói f liên tục trên E.

Định lý 1.3. *Hàm f liên tục tại điểm $x^0 \in E$ nếu, và chỉ nếu, với mọi dãy vectơ $(x^k) \subset E$ hội tụ về x^0, dãy số $(f(x^k))$ hội tụ về $f(x^0)$.*

Định lý 1.4. *Cho hàm n biến f liên tục tại điểm x^0 và n hàm m biến $\varphi_j(u)$ liên tục tại điểm $u^0 \in \mathbb{R}^m$. Ngoài ra, $\varphi_j(u^0) = x_j^0$ với mọi $1 \leq j \leq n$. Lúc đó hàm hợp*

$$F(u) := f(\varphi_1(u), \varphi_2(u), \cdots, \varphi_n(u))$$

là hàm m biến liên tục tại u^0.

Hệ quả 1.1. *Cho f và g là hai hàm xác định trên E, liên tục tại $x^0 \in E$ và λ là một số thực. Lúc đó, các hàm λf, $f \pm g$, fg đều liên tục tại x^0. Hơn nữa, nếu $g(x^0) \neq 0$ thì hàm $\frac{f}{g}$ cũng liên tục tại điểm đó.*

Định lý 1.5. *Cho E là tập đóng và bị chặn trong $\mathbb{R}^n$ và f là hàm liên tục trên E. Lúc đó*

a) Tồn tại hai điểm $x_*, x^* \in E$ sao cho $f(x_*) \leq f(x) \leq f(x^*)$ với mọi $x \in E$.

b) f liên tục đều trên E, tức là

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, x' \in E : d(x, x') < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \epsilon.$$

1.2. Đạo hàm và Vi phân

1.2.1. Đạo hàm riêng

Để đơn giản, trước tiên ta sẽ xét trường hợp hàm hai biến. Cho $f : E \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ và $(x_0, y_0) \in \mathrm{Int}(E)$. Lúc đó, tồn tại số dương ϵ sao cho với mọi số gia $\Delta x \in (-\epsilon, \epsilon)$ ta có $(x_0 + \Delta x, y_0) \in E$. Ta sẽ gọi biểu thức sau

$$\Delta_x f := f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$$

là số gia của hàm f tương ứng với số gia Δx. Nếu tồn tại giới hạn của $\frac{\Delta_x f}{\Delta x}$ khi $\Delta x \to 0$ thì giới hạn này được gọi là đạo hàm riêng của hàm f theo biến x tại điểm (x_0, y_0) và được ký hiệu là $f'_x(x_0, y_0)$ hay $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$. Vậy

$$f'_x(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) := \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}.$$

Tương tự, ta có định nghĩa đạo hàm riêng của f theo biến y tại (x_0, y_0):

$$f'_y(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) := \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

và ngay cả với hàm n biến $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ tại một điểm $x^0 = (x_1^0, \cdots, x_n^0)$. Chẳng hạn,

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0) := \lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{f(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0, \cdots, x_n^0) - f(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0)}{\Delta x_1}.$$

Nếu tại điểm $x^0 \in E$ đạo hàm riêng của f theo n biến đều tồn tại thì ta gọi vectơ

$$\nabla f(x^0) := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x^0), \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x^0) \right)$$

là građiên của f tại x^0. Có khi người ta cũng ký hiệu vectơ này là $\mathrm{grad} f(x^0)$.

Trong thực tế, để tính đạo hàm riêng của một hàm f theo biến x_i ta chỉ việc xem f như là hàm một biến x_i còn các biến khác là hằng số.

Ví dụ 1.3. Với $f(x, y) = \frac{y}{x}$ và $g(x, y, z) = x^2 y \sin(x + z)$ ta có

$$\nabla f(x, y) = \left(-\frac{y}{x^2}, \frac{1}{x} \right);$$
$$\nabla g(x, y, z) = \left(2xy \sin(x + z) + x^2 y \cos(x + z), x^2 \sin(x + z), x^2 y \cos(x + z) \right).$$

1.2.2. Đạo hàm theo hướng

Cho f là một hàm xác định trong một lân cận của điểm $x^0 \in \mathbb{R}^n$ và $v \in \mathbb{R}^n$ là một vectơ khác không. Lúc đó, nếu giới hạn sau tồn tại ta gọi nó là đạo hàm của hàm f tại x^0 theo hướng v:

$$f'(x^0; v) = \frac{\partial f}{\partial v}(x^0) := \lim_{t \to 0+} \frac{f(x^0 + tv) - f(x^0)}{t}.$$

Có thể kiểm chứng được rằng, nếu đạo hàm riêng theo biến x_1 của f tồn tại thì với $e_1 = (1, 0, \cdots, 0)$ ta có

$$\frac{\partial f}{\partial e_1}(x^0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0); \quad \frac{\partial f}{\partial(-e_1)}(x^0) = -\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0).$$

Ngược lại, nếu tồn tại đạo hàm của f theo các hướng $\pm e_1$ có giá trị đối nhau thì đạo hàm riêng của f theo biến x_1 cũng tồn tại. Các bạn tự phát biểu và chứng minh các khẳng định tương tự đối với $e_2, \cdots, e_n$.

Chú ý. Một hàm có các đạo hàm riêng, thậm chí có đạo hàm theo mọi hướng, tại một điểm có thể không liên tục tại điểm đó. Chẳng hạn, trong Ví dụ 1.1, nếu ta định nghĩa thêm $g(0, 0) = 0$ thì có thể kiểm chứng được hàm g xác định trên $\mathbb{R}^2$, có các đạo hàm riêng g'_x, g'_y nhưng g không liên tục tại $(0, 0)$.

1.2.3. Vi phân

Cho hàm $y = f(x)$ xác định trong một lân cận V của điểm x^0. Với các số gia Δx_i đủ bé sao cho $x^0 + \Delta x \in V$, với $\Delta x = (\Delta x_1, \cdots, \Delta x_n)$, ta có số gia của hàm số là

$$\Delta f = f(x^0 + \Delta x) - f(x^0).$$

Nếu Δf có thể biểu diễn dưới dạng

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} A_i \Delta x_i + \alpha(\Delta x)\|\Delta x\|; \quad x^0 + \Delta x \in V,$$

trong đó A_i, $1 \leq i \leq n$, là các hằng số còn α là hàm n biến sao cho

$$\lim_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0,$$

thì f được gọi là khả vi tại điểm x^0 và biểu thức

$$dy = df := \sum_{i=1}^{n} A_i \Delta x_i$$

được gọi là vi phân của hàm f tại điểm x^0 (tương ứng với vectơ gia Δx).

Mệnh đề 1.6. *Nếu f khả vi tại x^0 thì f liên tục tại điểm đó.*

Mệnh đề 1.7. *Nếu f khả vi tại x^0 thì f có các đạo hàm riêng tại điểm đó và*

$$df = \langle \nabla f(x^0), \Delta x \rangle = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0) \Delta x_i. \tag{1.2}$$

Hơn nữa, f có đạo hàm theo mọi hướng tại x^0 và

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x^0) = \langle \nabla f(x^0), v \rangle; \quad \forall v \in \mathbb{R}^n.$$

Vì một hàm có các đạo hàm riêng tại một điểm có thể không liên tục tại điểm đó nên cũng không khả vi tại điểm đó. Tuy nhiên ta có kết quả sau

Định lý 1.8. *Nếu f có các đạo hàm riêng trong một lân cận của x^0 và các đạo hàm này liên tục tại x^0, thì f khả vi tại điểm đó.*

Nếu g_i là hàm chiếu xuống tọa độ thứ i: $g_i(x_1, \cdots, x_n) = x_i$ thì ta sẽ ký hiệu $dx_i := dg_i$. Mặt khác, g_i khả vi tại mọi điểm và $dg_i = \Delta x_i$. Vậy, $dx_i = \Delta x_i$. Do đó công thức (1.2) có thể viết lại:

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i. \tag{1.3}$$

1.2.4. Đạo hàm hàm số hợp và tính bất biến của vi phân

Cho $y = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ là hàm xác định trên tập mở $G \subset \mathbb{R}^n$ và $x_i = \varphi_i(t)$, $1 \le i \le n$, là n hàm số thực xác định trên khoảng (a, b) sao cho

$$(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \cdots, \varphi_n(t)) \in G; \quad \forall t \in (a, b).$$

Lúc đó, ta có hàm hợp $t \longrightarrow y = f(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \cdots, \varphi_n(t)) =: g(t)$ từ (a, b) vào $\mathbb{R}$.

Định lý 1.9. *Nếu các hàm φ_i khả vi tại $t_0 \in (a, b)$ còn hàm f khả vi tại $x^0 = (\varphi_1(t_0), \cdots, \varphi_n(t_0))$, thì g cũng khả vi tại t_0 và*

$$g'(t_0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0)\varphi_i'(t_0).$$

Nếu các hàm φ_i khả vi trên (a, b) và f khả vi trên G, thì g cũng khả vi trên (a, b) và

$$g'(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\varphi_1(t), \cdots, \varphi_n(t))\varphi_i'(t).$$

Từ định lý trên ta thường viết

$$\frac{dy}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt},$$

hay

$$dy = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y}{\partial x_i} dx_i. \tag{1.4}$$

Bây giờ giả sử $y = f(x_1, \cdots, x_n)$ là hàm khả vi trên tập mở $G \subset \mathbb{R}^n$ và $x_i = \varphi_i(u) = \varphi_i(u_1, \cdots, u_m)$, $1 \le i \le n$, là các hàm khả vi trên một tập mở $E \subset \mathbb{R}^m$ sao cho $(\varphi_1(u), \cdots, \varphi_n(u)) \in G$ với mọi $u \in E$. Lúc đó ta có hàm hợp $g : E \to \mathbb{R}$ là một hàm m biến, xác định bởi

$$g(u) = f(\varphi_1(u), \cdots, \varphi_n(u)); \quad u \in E.$$

Bằng cách sử dụng Định lý 1.9 và xem g là hàm theo một biến u_j ta có

$$\frac{\partial g}{\partial u_j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi_i}{\partial u_j}; \quad 1 \le j \le m.$$

Từ đó, ta nhận được vi phân của hàm g:

$$dy = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial u_j} du_j = \sum_{j=1}^{m} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi_i}{\partial u_j} \right\} du_j = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \left\{ \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_j} du_j \right\}.$$

Lại sử dụng Định lý 1.9 cho các hàm $x_i = \varphi_i(u)$ ta được

$$dy = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y}{\partial x_i} dx_i. \tag{1.5}$$

Đối chiếu (1.3), (1.4) và (1.5) ta thấy dạng vi phân của y không hề thay đổi cho dù x_i là các biến độc lập, hàm của một biến $t \in \mathbb{R}$ hay là hàm của m biến $u \in \mathbb{R}^m$. Ta nói dạng vi phân bậc nhất có tính bất biến.

Vận dụng các kết quả trên một cách thích hợp ta có các công thức tính vi phân sau

Hệ quả 1.2. *Cho u và v là các hàm nhiều biến khả vi trên miền chung $E \subset \mathbb{R}^n$. Lúc đó, trên miền này ta có*

a) $d(u \pm v) = du \pm dv$;

b) $d(\lambda u) = \lambda du, \quad \lambda \in \mathbb{R}$;

c) $d(u.v) = udv + vdu$;

d) $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{vdu - udv}{v^2}, \quad v \neq 0$;

1.2.5. Đạo hàm hàm ẩn

Cho $F(x, y)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}$ là một hàm $n+1$ biến, xác định trong một tập mở $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Xét phương trình

$$F(x, y) = 0. \tag{1.6}$$

Nếu tồn tại hàm n biến $y = f(x)$; $x \in E \subset \mathbb{R}^n$ sao cho

$$F(x, f(x)) = 0; \quad \forall x \in E,$$

thì f được gọi là hàm ẩn xác định bởi phương trình (1.6).

Định lý 1.10. *Giả sử hàm hai biến F liên tục cùng với các đạo hàm F'_x, F'_y trong một lân cận của điểm $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Ngoài ra, $F(x_0, y_0) = 0$; $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$. Lúc đó*

a) Tồn tại duy nhất một hàm $y = f(x)$ thoả mãn $f(x_0) = y_0$ và $F(x, f(x)) = 0$ với mọi x thuộc vào một lân cận $\Delta = [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ của x_0,

b) f liên tục, có đạo hàm liên tục trên Δ và

$$f'(x) = -\frac{F'_x(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))}, \quad \forall x \in \Delta.$$

Định lý 1.11. *Giả sử hàm $n+1$ biến $F(x_1, \cdots, x_n, y)$ liên tục cùng với các đạo hàm riêng $F'_{x_1}, \cdots, F'_{x_n}$, F'_y trong một lân cận của điểm $(x^0, y^0) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Ngoài ra, $F(x^0, y^0) = 0$; $F'_y(x^0, y^0) \neq 0$. Lúc đó,* *a) Tồn tại duy nhất một hàm $y = f(x)$ thoả mãn $f(x^0) = y^0$ và $F(x, f(x)) = 0$ với mọi x thuộc vào một lân cận $\Delta = [x_1^0 - \delta, x_1^0 + \delta] \times \cdots \times [x_n^0 - \delta, x_n^0 + \delta]$ của x^0,*

b) f liên tục, có các đạo hàm riêng liên tục trên Δ và

$$f'_{x_i}(x) = -\frac{F'_{x_i}(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))}, \quad \forall x \in \Delta, \quad 1 \le i \le n.$$

Bây giờ cho $F_i(x, y)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$, $1 \le i \le m$, là m hàm $n + m$ biến, xác định trong một tập mở $G \subset \mathbb{R}^{n+m}$. Xét hệ phương trình

$$F_i(x, y) = 0; \quad 1 \le i \le m. \tag{1.7}$$

Nếu tồn tại m hàm n biến $y_i = f_i(x)$; $x \in E \subset \mathbb{R}^n$, $1 \le i \le m$ sao cho

$$F_i(x, f_1(x), \cdots, f_m(x)) = 0; \quad \forall x \in E, \quad 1 \le i \le m,$$

thì $\{f_i \mid 1 \le i \le m\}$ được gọi là hệ hàm ẩn xác định bởi hệ phương trình (1.7). Nếu tồn tại các đạo hàm riêng của các hàm F_i theo các biến y_j thì định thức sau được gọi là Định thức Jacobi của hệ hàm F_i đối với các biến y_j:

$$DJ_y(x, y) := \det \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(x, y) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m}(x, y) \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1}(x, y) & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial y_m}(x, y) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1}(x, y) & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m}(x, y) \end{pmatrix}.$$

Định lý 1.12. *Giả sử các hàm $F_i(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_m)$ liên tục cùng với các đạo hàm riêng $\partial F_i / \partial y_j$, $1 \le i, j \le m$, trong một lân cận của điểm $(x^0, y^0) \in \mathbb{R}^{n+m}$. Ngoài ra, $F(x^0, y^0) = 0$ và $DJ_y(x^0, y^0) \ne 0$. Lúc đó,*

a) Tồn tại duy nhất hệ hàm $y_i = f_i(x)$, $1 \le i \le m$, thoả mãn $f_i(x^0) = y_i^0$ và $F_i(x, f_1(x), \cdots, f_m(x)) = 0$ với mọi x thuộc vào một lân cận Δ của điểm x^0,

b) Các f_i liên tục, có các đạo hàm riêng liên tục trên Δ. Hơn nữa, nếu đặt $y_i = f_i(x_1, \cdots, x_n)$, thì với mọi $i \in \{1, \cdots, m\}$, $j \in \{1, \cdots, n\}$ ta có

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = -\frac{DJ_{(y_1, \cdots, y_{i-1}, x_j, y_{i+1}, \cdots, y_m)}(x, y)}{DJ_y(x, y)}.$$

Hệ quả 1.3 (Đạo hàm hàm ngược). *Giả sử $F : D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ sao cho các hàm thành phần $F_i(y)$ liên tục cùng với các đạo hàm riêng $\partial F_i / \partial y_j$, $1 \le i, j \le m$, trên tập mở $D \ni y^0$. Ngoài ra, ma trận Jacobian $JF(y^0) = (\partial F_i / \partial y_j)$ không suy biến. Lúc đó tồn tại một lân cận U của y^0 và một lân cận V của $z^0 = F(y^0)$ và một ánh xạ $F^{-1} : V \to U$, có các hàm thành phần khả vi liên tục, thoả mãn*

a) $\forall y \in U$, $\forall z \in V : z = F(y) \Leftrightarrow y = F^{-1}(z)$

b) $\forall z \in V$: $J(F^{-1})(z) = JF(y)^{-1}$, với $y = F^{-1}(z)$.

1.3. Đạo hàm cấp cao và Công thức Taylor

1.3.1. Đạo hàm cấp cao

Để đơn giản trước tiên ta xét hàm hai biến. Cho $z = f(x, y)$ là hàm xác định trên tập mở $G \subset \mathbb{R}^2$, có các đạo hàm riêng $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$ trên G. Đây cũng là các hàm hai biến. Nếu các hàm này cũng có các đạo hàm riêng thì các đạo hàm đó được gọi là đạo hàm riêng cấp 2 của f. Nói chung f có 4 đạo hàm riêng cấp 2:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) &=: \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''_{x^2} = z''_{x^2};\\
\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) &=: \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f''_{yx} = z''_{yx};\\
\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) &=: \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f''_{xy} = z''_{xy};\\
\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) &=: \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f''_{y^2} = z''_{y^2}.
\end{aligned}$$

Tương tự, ta có các khái niệm đạo hàm cấp cao hơn và của những hàm nhiều biến hơn. Chẳng hạn, với hàm $u = f(x, y, z)$ ta có đạo hàm riêng cấp 4:

$$u^{(4)}_{xyzx} = \frac{\partial^4 f}{\partial x \partial z \partial y \partial x} := \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right)\right).$$

Nói chung, $f''_{xy} \neq f''_{yx}$, $f'''_{x^2y} \neq f'''_{xyx} \neq f'''_{yx^2}$. Tuy nhiên những đạo hàm hỗn hợp này sẽ trùng nhau trong trường hợp chúng liên tục. Điều đó được thể hiện trong định lý sau

Định lý 1.13. *Giả sử $z = f(x, y)$ là hàm xác định trên tập mở G, có các đạo hàm riêng cấp hai hỗn hợp f''_{xy}, f''_{yx}. Nếu các đạo hàm này liên tục tại điểm $(x_0, y_0) \in G$, thì*

$$f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0).$$

Chứng minh. Đặt $\Delta := f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0 + k) + f(x_0, y_0)$, $g_1(t) := f(t, y_0 + k) - f(t, y_0)$, với h và k lần lượt là số gia của x và y. Sử dụng Định lý Lagrange cho g_1 rồi cho f'_x ta tìm được các số $\delta, \theta \in (0, 1)$ (phụ thuộc vào h, k) thoả mãn

$$\begin{aligned}
\Delta &= g_1(x_0 + h) - g_1(x_0) = g'_1(x_0 + \delta h)h\\
&= [f'_x(x_0 + \delta h, y_0 + k) - f'_x(x_0 + \delta h, y_0)]h\\
&= f''_{xy}(x_0 + \delta h, y_0 + \theta k)hk.
\end{aligned}$$

Tương tự, nếu đặt $g_2(s) := f(x_0+h, s) - f(x_0, s)$, và áp dụng Định lý Lagrange lần lượt cho g_2 rồi cho f'_y, ta cũng tìm được các số $\alpha, \beta \in (0,1)$ thoả mãn

$$\Delta = \ f''_{yx}(x_0+\alpha h, y_0+\beta k)hk.$$

Từ đó:

$$f''_{yx}(x_0+\alpha h, y_0+\beta k) = f''_{yx}(x_0+\alpha h, y_0+\beta k).$$

Cho $h, k \to 0$ ta nhận được điều phải chứng minh. □

Định lý này cũng được mở rộng không mấy khó khăn cho các trường hợp đạo hàm cấp cao hơn, hoặc với hàm nhiều biến hơn với điều kiện các đạo hàm hỗn hợp đó liên tục. Chẳng hạn với hàm $u = x^3\sin(y+z^2)$, các bạn có thể kiểm tra các đạo hàm $u^{(4)}_{x^2yz}$, $u^{(4)}_{xyxz}$, $u^{(4)}_{xyzx}$, $u^{(4)}_{yxzx}$, $u^{(4)}_{yzx^2}$,... đều bằng nhau và bằng $-12xz\sin(y+z^2)$.

1.3.2. Vi phân cấp cao

Để đơn giản, trước tiên ta xét hàm hai biến. Cho $z = f(x,y)$ là hàm xácđịnh và khả vi trên tập mở $G \subset \mathbb{R}^2$. Vi phân của f tại mỗi điểm $(x,y) \in G$ là

$$df(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\Delta y.$$

Như vậy, df là một hàm hai biến trên G. Nếu df cũng khả vi thì vi phân của nó sẽ được gọi là vi phân cấp hai của f. Lúc đó,

$$\frac{\partial}{\partial x}df(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\Delta y\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\Delta x + \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)\Delta y;$$

$$\frac{\partial}{\partial y}df(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\Delta y\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)\Delta x + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\Delta y.$$

Tóm lại, vi phân cấp hai của f tương ứng với cặp số gia $(\Delta x, \Delta y)$ là

$$\begin{aligned}
d^2f(x,y) &:= d(df)(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}df(x,y).\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}df(x,y).\Delta y \\
&= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\Delta x + \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)\Delta y\right)\Delta x + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)\Delta x + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\Delta y\right)\Delta y \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\Delta x^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)\Delta x\Delta y + \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)\Delta x\Delta y + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\Delta y^2.
\end{aligned}$$

Nếu các đạo hàm riêng cấp hai hỗn hợp liên tục thì theo Định lý 2.15 vi phân cấp hai của f có thể viết gọn hơn:

$$d^2f(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\Delta x^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)\Delta x\Delta y + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\Delta y^2,$$

mà, để đơn giản người ta viết lại một cách hình thức như sau

$$d^2f(x,y) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^2 f(x,y).$$

Tương tự, ta cũng có định nghĩa của các vi phân cấp cao hơn. Hơn nữa, bằng quy nạp ta có thể chứng minh được mệnh đề sau

Định lý 1.14. *Nếu hàm hai biến $f(x,y)$ có các đạo hàm riêng đến cấp m liên tục trên tập mở $G \subset \mathbb{R}^2$ thì f khả vi cấp m trên G và ta có vi phân cấp m của f tương ứng với cặp số gia $(\Delta x, \Delta y)$ là*

$$d^m f(x,y) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^m f(x,y) := \sum_{k=0}^{m} C_m^k \frac{\partial^m f}{\partial x^k \partial y^{m-k}} \Delta x^k \Delta y^{m-k}.$$

Bằng một lược đồ tương tự ta nhận được khái niệm vi phân cấp cao của hàm nhiều biến cũng như công thức tính của nó. Cụ thể ta có mệnh đề

Định lý 1.15. *Nếu hàm nhiều biến $f(x_1, \cdots, x_n)$ có các đạo hàm riêng đến cấp m liên tục trên tập mở $G \subset \mathbb{R}^n$ thì f khả vi cấp m trên G và vi phân cấp m của f tương ứng với vectơ gia $\Delta x = (\Delta x_1, \cdots, \Delta x_n)$ là*

$$d^m f(x_1, \cdots, x_n) = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\Delta x_i\right)^m f(x_1, \cdots, x_n), \quad (x_1, \cdots, x_n) \in G.$$

1.3.3. Công thức Taylor

Định lý 1.16. *Giả sử $y = f(x)$ là một hàm có các đạo hàm riêng liên tục đến cấp m trên tập mở $G \subset \mathbb{R}^n$, x^0 là một điểm trong G và Δx là vectơ sao cho đoạn thẳng $[x^0, x^0 + \Delta x]$ nằm gọn trong G. Lúc đó, tồn tại số $\theta \in (0,1)$ sao cho*

$$f(x^0 + \Delta x) = f(x^0) + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k!} d^k f(x^0) + \frac{1}{m!} d^m f(x^0 + \theta \Delta x), \tag{1.8}$$

trong đó, $d^k f(x)$ ký hiệu vi phân cấp k của f tại x tương ứng với vectơ gia Δx.

Chứng minh. Đặt F là ham một biến $F(t) = f(x^0 + t\Delta x)$. Khai triển MacLaurin hàm này đến cấp m ta có

$$F(t) = F(0) + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{F^{(k)}(0)}{k!} t^k + \frac{F^{(m)}(\theta)}{m!} t^m. \tag{1.9}$$

Chú ý rằng

$$F'(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0 + t\Delta x).\Delta x_i = df(x^0 + t\Delta x),$$
$$F''(t) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x^0 + t\Delta x).\Delta x_i \Delta x_j = d^2 f(x^0 + t\Delta x), \cdots$$

$$F^{(m)}(t) = d^m f(x^0 + t\Delta x).$$

Thay vào (1.9) với $t = 1$ ta được điều phải chứng minh. □

(1.8) được gọi là Công thức Taylor đến cấp m của hàm f tại điểm x^0, tương ứng với vectơ gia Δx.

Hệ quả 1.4 (Định lý giá trị trung bình)**.** *Giả sử f là hàm có các đạo hàm riêng liên tục trên tập mở $U \subset \mathbb{R}^n$ và $a, b \in G$ là hai điểm phân biệt sao cho $[a, b] \subset G$. Lúc đó tồn tại điểm $c \in (a, b)$ thoả mãn*

$$f(b) - f(a) = \langle \nabla f(c), b - a \rangle.$$

1.4. Cực trị

1.4.1. Điều kiện cần

Cho f là hàm nhiều biến xác định trên $G \subset \mathbb{R}^n$. Ta nói hàm f đạt cực tiểu (cực đại) địa phương tại điểm $x^0 \in G$ nếu tồn tại số dương δ sao cho

$$f(x^0) \le f(x) \quad \big(f(x^0) \ge f(x)\big); \quad \forall x \in B(x^0, \delta) \cap G.$$

Trong cả hai trường hợp ta nói f đạt cực trị địa phương tại x^0.

Định lý 1.17. *Nếu f đạt cực trị địa phương tại một điểm trong x^0 của G, tại đó tồn tại các đạo hàm riêng của f, thì các đạo hàm này phải bằng 0. Tức là*

$$\nabla f(x^0) = 0.$$

Một điểm tại đó gradiên của f bằng không được gọi là điểm dừng của f. Định lý 1.17 cho thấy mọi điểm cực trị của f đều là điểm dừng. Tuy vậy điều ngược lại nói chung không còn đúng. Chẳng hạn, hàm $f(x, y) = x^2 - y^2$ có $\nabla f(x, y) = (2x, -2y)$ với $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, vì vậy hàm này có một điểm dừng là $(0, 0)$ nhưng đó không phải là điểm cực trị. Thật vậy, trong một lân cận bé tuỳ ý của $(0, 0)$ ta luôn tìm được hai điểm tại đó hàm f có một giá trị bé hơn $f(0, 0)$ và một giá trị lớn hơn $f(0, 0)$.

1.4.2. Điều kiện đủ

Trước khi phát biểu điều kiện đủ cực trị ta nhắc lại Công thức Taylor đến cấp hai của f tại một điểm x^0:

$$f(x^0+\Delta x) = f(x^0) + df(x^0) + \frac{1}{2}d^2f(x^0+\theta\Delta x), \quad \theta \in (0,1).$$

Nếu f có các đạo hàm riêng đến cấp hai liên tục thì theo Định lý 1.15

$$\begin{aligned} f(x^0+\Delta x) &= f(x^0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0)\Delta x_i + \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\Delta x_i\right)^2 f(x^0+\theta\Delta x) \\ &= f(x^0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0)\Delta x_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x^0+\theta\Delta x)\Delta x_i \Delta x_j. \end{aligned}$$

Tóm lại,

$$f(x^0+\Delta x) = f(x^0) + \langle \nabla f(x^0), \Delta x\rangle + \frac{1}{2}\Delta x^T \nabla^2 f(x^0+\theta\Delta x)\Delta x, \tag{1.10}$$

trong đó Δx^T là vectơ chuyển vị của Δx còn $\nabla^2 f(x)$ ký hiệu ma trận Hessian của f tại một điểm x. Đó là ma trận vuông cấp $n \times n$ mà phần tử ở hàng i cột j chính là $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)$. Đây là một ma trận đối xứng khi các đạo hàm riêng cấp hai liên tục.

Nếu x^0 là điểm dừng thì $\nabla f(x^0) = 0$, nên (1.10) được viết lại như sau

$$f(x^0+\Delta x) - f(x^0) = \frac{1}{2}\Delta x^T \nabla^2 f(x^0+\theta\Delta x)\Delta x,$$

Nhắc lại rằng một ma trận A vuông cấp $n \times n$ được gọi là xác định dương (nửa xác định dương, xác định âm, nửa xác định âm) nếu

$$u^TAu > 0 \quad (u^TAu \geq 0) \quad (u^TAu < 0) \quad (u^TAu \leq 0); \quad \forall u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

A được gọi là không xác định dấu nếu tồn tại hai vectơ $u, v \in \mathbb{R}^n$ sao cho

$$u^TAu < 0 < v^TAv.$$

Định lý 1.18. *Gỉa sử f có đạo hàm đến cấp hai liên tục trên một tập mở G, nhận điểm $x^0 \in G$ làm điểm dừng. Lúc đó nếu $\nabla^2 f(x)$ nửa xác định dương (nửa xác định âm) trong một lân cận của x^0, thì x^0 là điểm cực tiểu (cực đại) địa phương.*

Bây giờ ta nhắc lại một kết quả quen biết trong đại số tuyến tính. Cho $A = (a_{ij})$ là một ma trận thực vuông đối xứng cấp n. Ta đặt

$$\Delta_k(A) := \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix}, \quad 1 \leq k \leq n.$$

Định lý 1.19. *A là ma trận xác định dương (âm) khi và chỉ khi*

$$\Delta_k(A) > 0 \quad ((-1)^k \Delta_k(A) > 0); \quad 1 \leq k \leq n.$$

Định lý 1.20. *Gỉa sử f có đạo hàm đến cấp hai liên tục trên một tập mở G, nhận điểm $x^0 \in G$ làm điểm dừng. Lúc đó*

a) Nếu $\nabla^2 f(x^0)$ xác định dương thì x^0 là điểm cực tiểu.

b) Nếu $\nabla^2 f(x^0)$ xác định âm thì x^0 là điểm cực đại.

c) Nếu $\nabla^2 f(x^0)$ không xác định dấu thì x^0 không phải là điểm cực trị.

Khi f là hàm hai biến ta có

$$\nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix}.$$

Do đó, bằng cách đặt

$$A := \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0); \quad B := \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0); \quad C := \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)$$

ta có $\Delta_1(\nabla^2 f(x_0,y_0)) = A$ và $\Delta_2(\nabla^2 f(x_0,y_0)) = AC - B^2 =: D$. Từ Định lý 1.20 ta có hệ quả sau

Hệ quả 1.5. *Gỉa sử $f(x,y)$ nhận (x_0,y_0) là điểm dừng. Ngoài ra, các đạo hàm riêng đến cấp hai tồn tại và liên tục tại (x_0,y_0). Lúc đó*

a) Nếu $D > 0$ và $A > 0$ thì (x_0,y_0) là điểm cực tiểu.

b) Nếu $D > 0$ và $A < 0$ thì (x_0,y_0) là điểm cực đại.

c) Nếu $D < 0$ thì (x_0,y_0) không phải là điểm cực trị.

Như vậy, nếu $D = 0$ thì ta vẫn chưa xác định được (x_0,y_0) có phải là điểm cực trị hay không.

1.4.3. Cực trị có điều kiện

Ta xét bài toán cực trị

$$(\mathcal{P}) \quad \begin{cases} \min f(x_1,x_2,\cdots,x_n), \\ g_1(x_1,x_2,\cdots,x_n) = 0, \\ \cdots \\ g_m(x_1,x_2,\cdots,x_n) = 0, \end{cases}$$

ở đó $m \leq n$. Tập hợp $X := \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_i(x) = 0; 1 \leq i \leq m\}$ được gọi là tập chấp nhận được của bài toán và mỗi điểm $x \in X$ được gọi là một điểm chấp nhận được.

Một điểm $\bar{x} \in X$ được gọi là nghiệm (địa phương) của bài toán $(\mathcal{P})$ nếu tồn tại lân cận U của $\bar{x}$ sao cho

$$f(\bar{x}) \leq f(x); \quad \forall x \in U \cap X.$$

Định lý sau cho ta một điều kiện cần của cực trị có điều kiện:

Định lý 1.21. *Giả sử $\bar{x}$ là một nghiệm của bài toán $(\mathcal{P})$ tại đó các hàm f và g_i khả vi liên tục. Hơn nữa, ma trận Jacobi*

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(\bar{x}) & \frac{\partial g_1}{\partial x_2}(\bar{x}) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(\bar{x}) \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1}(\bar{x}) & \frac{\partial g_2}{\partial x_2}(\bar{x}) & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial x_n}(\bar{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1}(\bar{x}) & \frac{\partial g_m}{\partial x_2}(\bar{x}) & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n}(\bar{x}) \end{pmatrix}$$

có hạng bằng m. Lúc đó tồn tại các số thực $\bar{\lambda}_1$, $\bar{\lambda}_2 \cdots, \bar{\lambda}_m$ sao cho

$$\nabla f(\bar{x}) - \sum_{i=1}^{m} \bar{\lambda}_i \nabla g_i(\bar{x}) = 0.$$

Các số $\bar{\lambda}_1$, ..., $\bar{\lambda}_m$ trong định lý trên được gọi là các nhân tử Lagrange của bài toán $(\mathcal{P})$ đối với điểm cực trị $\bar{x}$.

1.5. Thực hành tính toán trên Maple

1.5.1. Giới hạn và đồ thị hàm nhiều biến

a) **Định nghĩa hàm nhiều biến số**. Để đơn giản ta chỉ xét hàm hai biến.

Cú pháp: [> `f:=(x, y)- >` (biểu thức hàm theo x, y);

Ví dụ:

[> `f:= (x, y)- > 3*x∧2*sin(x*y);`

$$f := (x, y) \rightarrow 3x^2 sin(xy)$$

b) **Tính giới hạn của hàm nhiều biến**. Chẳng hạn, ta xét hàm hai biến, trường hợp tổng quát được viết tương tự.

Cú pháp: [> `limit(f(x, y), {x=a, y=b});` (`Limit` sẽ cho công thức hình thức)

Chú ý rằng nếu viết `limit(limit(f(x,y), x=a), y=b)` thì máy sẽ tính giới hạn lặp, trước tiên theo x và sau đó theo y. Có khi hàm không tồn tại giới hạn tại (a, b) nhưng vẫn tồn tại các giới hạn lặp.

Ví dụ:

[> `limit(x*y/(x∧2+y∧2), {y=0,x=0});`

$$\text{limit}\left(\frac{xy}{x^2+y^2}, \{y=0, x=0\}\right)$$

Tức là máy không tính nổi giới hạn này (vì không tồn tại). Tuy nhiên:

[> `limit(limit(x*y/(x∧2+y∧2), y=0), x=0});`

$$0$$

Muốn vẽ đồ thị hàm nhiều biến ta cần khởi động các gói lệnh `plottools`, `plots`.

c) **Vẽ đồ thị hàm** $z = f(x, y)$.

Cú pháp: [> `plot3d(f(x,y), x=a..b, y=c..d);`

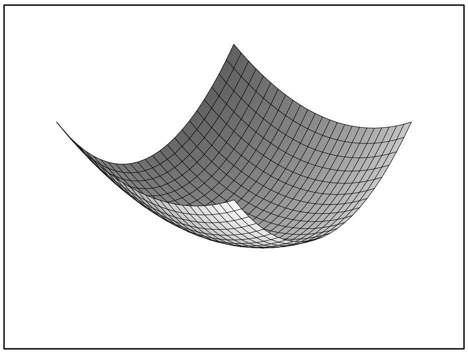
Lúc đó, đồ thị là một mặt trong không gian $Oxyz$ với miền xác định là hình chữ nhật $[a, b] \times [c, d]$.

Ví dụ:

[> `f:= (x, y) − > x∧2 + y∧2:`

[> `with(plots): with(plottools):`

[> `plot3d(f(x,y), x=-3..3, y=-2..2);`



Hình 1.1: Đồ thị hàm $z = x^2 + y^2$

Nếu vẽ nhiều mặt trên cùng một không gian toạ độ thì ta viết

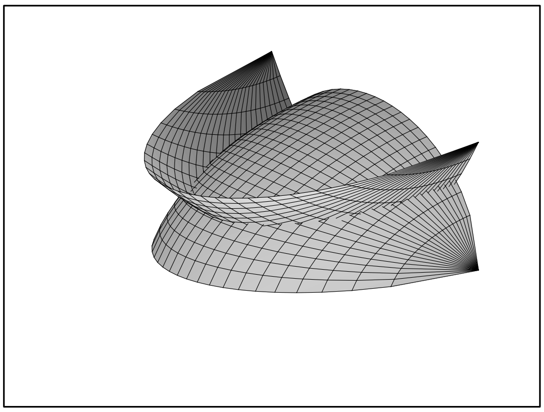
Cú pháp: [> `plot3d({f(x,y), g(x,y),...}, x=a..b, y=c..d);`

Ví dụ: (xem Hình 1.2)

[> `plot3d({x∧2+y∧2, sqrt(1-x∧2-y∧2)},y=0..sqrt(1-x∧2),x=-1..1);`

d) **Vẽ mặt được cho dưới dạng tham số**. Giả sử mặt S được cho bởi hệ

$$\begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \qquad (u, v) \in [a, b] \times [c, d]. \\ z = z(u, v), \end{cases}$$



Hình 1.2: Đồ thị các hàm $z = x^2 + y^2$ và $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

Để vẽ mặt S ta dùng lệnh (chú ý đừng nhầm lẫn với lệnh vẽ nhiều mặt cùng lúc)

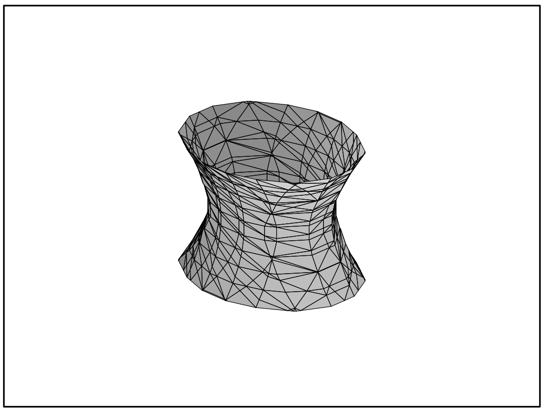
Cú pháp: [> `plot3d([x(u,v), y(u,v), z(u,v)], u=a..b, v=c..d);`

e) **Vẽ mặt được cho bởi phương trình ẩn dạng** $F(x, y, z) = 0$.

Cú pháp: [> `implicitplot3d(F(x,y,z)=0,x=a..b, y=c..d, z=e..f);`

Ví dụ: Để vẽ mặt $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - z^2 = 1$ trong hình hộp $[-5, 5] \times [-6, 6] \times [-1..1]$, ta viết

[> `implicitplot3d`(x∧2/4+y∧2/9- z∧2-1 =0, x=-5..5, y=-6..6, z=-1..1);



Hình 1.3: Đồ thị hàm ẩn $x^2/4 + y^2/9 - z^2 - 1 = 0$

f) **Vẽ các đường mức của một hàm hai biến**.

Cú pháp: [> `contourplot(f(x,y), x=a..b, y=c..d);`

Lúc đó, máy sẽ vẽ trên mặt phẳng Oxy các đường cong dạng $f(x, y) = \alpha$, với các α khác nhau.

1.5.2. Tính đạo hàm

Việc tính đạo hàm của hàm một biến hoặc đạo hàm riêng của hàm nhiều biến được thực hiện tương tự nhau.

a) **Tính đạo hàm riêng cấp một**.

Cú pháp: [> `diff`(hàm số, tên biến riêng); (dùng Diff thì cho công thức hình thức)

Ví dụ:

[> `diff(sqrt(1+yx∧2), x);`

$$\frac{yx}{\sqrt{1+x^2}}$$

[> `f:=(x,y)−>x*sin(x*y):`

[> `diff(f(x,y), y);`

$$x^2\cos(xy)$$

[> `Diff(f(x,y), x);`

$$\frac{\partial}{\partial x}x\sin(xy)$$

b) **Tính đạo hàm cấp cao**.

Cú pháp: [> `diff`(f(x,y), xk, ym);

Ví dụ: (với hàm f như trên)

[> `diff`(f(x, y),x$2, y$3);

$$8x^3\sin(xy)y - 12x^2\cos(xy) + x^4\cos(xy)y^2$$

c) **Tính građiên (chẳng hạn, hàm ba biến)**:

Cú pháp: [> `grad(f(x,y,z), [x,y,z]);`

d) **Tính Hessian**.

Cú pháp: [> `hessian(f(x,y,z), [x,y,z]);`

Ví dụ: (với f ở trên)

[> `grad(f(x,y), [x,y]);`

$$[\sin(xy) + x\cos(xy)y, x^2\cos(xy)]$$

[> `hessian(f(x,y), [x,y]);`

$$\begin{bmatrix} 2\cos(xy)y - x\sin(xy)y^2 & 2\cos(xy)x - x^2\sin(xy)y \\ 2\cos(xy)x - x^2\sin(xy)y & -x^3\sin(xy) \end{bmatrix}$$

1.5.3. Khai triển Taylor

Khai triển Taylor hàm $f(x, y)$ tại (a, b) đến cấp n: *Cú pháp:* [> `mtaylor(f(x,y), [x=a, y=b], n);`

Nếu khai triển tại $(0, 0)$ ta chỉ cần viết $[x, y]$ thay cho $[x = a, y = b]$; nếu không khai báo n thì ngầm định $n = 6$.

Ví dụ:

[> `mtaylor(sin(x + y∧3), [x, y ], 8);`

$$x + y^3 - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}y^3x^2 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7 - \frac{1}{2}y^6x + \frac{1}{24}y^3x^4$$

[> `mtaylor(sin(x + y∧3), [x, y ]);`

$$x + y^3 - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}y^3x^2 + \frac{1}{120}x^5$$

1.6. Bài tập

1.1. Cho hàm hai biến

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Cho biết hàm này liên tục tại những điểm nào? Tính $f'_x(0, 0)$, $f'_y(0, 0)$.

1.2. Tìm, hoặc chứng minh không tồn tại, các giới hạn

$$\lim_{x\to 0}(\lim_{y\to 0} f(x, y)); \quad \lim_{y\to 0}(\lim_{x\to 0} f(x, y)); \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y))$$

với

$$f(x, y) = \frac{|x + y|}{x^2 + y^2 - xy}.$$

1.3. Tìm, hoặc chứng minh không tồn tại, các giới hạn

$$\lim_{x\to 0}(\lim_{y\to 0} f(x, y)); \quad \lim_{y\to 0}(\lim_{x\to 0} f(x, y)); \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y))$$

với

$$f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2 + (x - y)^2}.$$

1.4. Cho hàm $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^6+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Chứng minh rằng hàm f gián đoạn tại điểm $(0,0)$ nhưng các đạo hàm riêng $f'_x(0,0)$, $f'_y(0,0)$ tồn tại.

1.5. Khảo sát tính liên tục và sự tồn tại các đạo hàm riêng cấp một của hàm hai biến

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1.6. Phác hoạ đồ thị của các hàm hai biến sau. Khảo sát tính liên tục và sự tồn tại các đạo hàm riêng cấp một của chúng

$$f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2-y^2}, & x^2+y^2 < 1; \\ 0, & x^2+y^2 \geq 1. \end{cases}$$

$$g(x,y) = \begin{cases} x^2+y^2, & x^2+y^2 < 1; \\ 1, & x^2+y^2 \geq 1. \end{cases}$$

1.7. Xét sự liên tục, khả vi của hàm hai biến

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2+y^2, & x \geq 0, \\ y^2, & x < 0. \end{cases}$$

1.8. Chứng minh rằng nếu f liên tục trên miền $D \subset \mathbb{R}^n$ và tồn tại $a, b \in D$ sao cho $f(a)f(b) < 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm trong D.

1.9. Cho $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ liên tục sao cho $f(0) < 0$ và $f(x) > 0$ với mọi $x \in S(0,1)$. Chứng minh rằng phương trình $f(x) = 0$ có vô số nghiệm.

1.10. Cho $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, với mỗi $x \in \mathbb{R}^n$ và $v \in \mathbb{R}^n$ ta định nghĩa hàm một biến thực:

$$g_{x,v}(t) := f(x+tv); \quad t \in \mathbb{R}.$$

a) Chứng minh f lồi $\Leftrightarrow g_{x,v}$ lồi với mọi $x, v \in \mathbb{R}^n$.

b) Từ đó suy ra nếu f khả vi cấp hai trên $\mathbb{R}^n$ thì f lồi khi và chỉ khi $\nabla^2 f(x)$ nửa xác định dương tại mọi điểm $x \in \mathbb{R}^n$.

1.11. Dùng vi phân cấp một của hàm hai biến để tính gần đúng biểu thức sau

$$\ln(e^{0.15+3\sin(0.01)} + \cos(0.01) - 1).$$

1.12. Tính gần đúng biểu thức $\tan\left(\dfrac{1.02}{0.96}\right)$, biết $\frac{\pi}{4} \approx 0.785$.

1.13. Tính gần đúng biểu thức $\arcsin(0.49 + \ln(1.02))$, biết $\dfrac{\pi}{6} \approx 0.523$.

1.14. Viết biểu thức vi phân toàn phần của hàm $z = 5x^3 \sin(x^2 + y)e^y$.

1.15. Viết biểu thức vi phân toàn phần của hàm $u = 5\sin(x + y^2 z)\cos(xy)$ phụ theo dt, biết $x = 3t^2 + 1$, $y = \ln t$, $z = e^t$.

1.16. Viết biểu thức vi phân toàn phần của hàm $z = 3x^2 y e^x$ phụ theo dr và $d\varphi$, biết $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.

1.17. Cho hàm 2 biến

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

Chứng minh rằng $f''_{xy}(0,0) \neq f''_{yx}(0,0)$.

1.18. Khảo sát sự tồn tại hàm ẩn dạng $y = f(x)$ hoặc $x = g(y)$ của phương trình

$$3xe^{x+y-\cos(\pi\ln(y+1))} + (x^2 - 4)\sin y - 3 = 0$$

trong lân cận điểm $M(1, 0)$. Nếu tồn tại, hãy xác định đạo hàm của hàm ẩn tại điểm tương ứng.

1.19. Cho hàm 3 biến $f(x, y, z) = 5x^2\cos(y + z^2)$. Xác định ma trận Hessian $\nabla^2 f(1, \pi, 0)$ và tính định thức của nó.

1.20. Cho hàm 2 biến $f(x, y) = 3(x+1)e^{y+x^2}$. Hãy tính vi phân $df(1, 0)$ và vi phân cấp hai $d^2 f(1, 0)$ tương ứng với vectơ gia $(\Delta x, \Delta y)$.

1.21. Khảo sát sự tồn tại hàm ẩn $y = f(x)$ của các phương trình sau

a) $5x^2 e^y + 3y\cos x = 0$ tại $(0, 0)$;

b) $\sin x + \cos y - 1 = 0$ tại $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Tính đạo hàm hàm ẩn tại các điểm tương ứng.

1.22. Khảo sát cực trị của các hàm hai biến thực:

$$\begin{array}{ll} z = x^3 + y^3 - 3xy; & z = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2; \\ z = x^3 y + xy^3 - xy; & z = xy^2 - x^2 y; \\ z = 2x^2 + 3y^2 - x^4; & z = xy^2 + x^2 y; \\ z = \dfrac{x + y + 1}{x^2 + y^2 + 1}; & z = \dfrac{1}{1 + x^2 + y^2}; \\ z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}; & z = (x^2 + y^2)e^{-x^2-y^2}; \\ z = xy^3 + x^3 y; & z = xy\sqrt{1 - 4x^2 - 9y^2}. \end{array}$$

1.23. Chứng minh hàm số sau có vô số điểm dừng, trong đó có một điểm cực đại

$$z = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2 - 2y^2.$$

Chương 2

ỨNG DỤNG CỦA PHÉP TÍNH VI PHÂN TRONG HÌNH HỌC

2.1. Các hệ toạ độ

2.1.1. Hệ toạ độ cực

Để biểu diễn một điểm trong mặt phẳng ta thường sử dụng hệ toạ độ Đêcac vuông góc. Nghĩa là người ta sử dụng hai trục toạ độ vuông góc Ox, Oy cắt nhau tại một điểm O. Mỗi điểm M trong mặt phẳng được xác định hoàn toàn bởi cặp số thực $(x, y) \in \mathbb{R}^2$; trong đó $x = \overline{OP}$, $y = \overline{OQ}$ với P và Q lần lượt là hình chiếu vuông góc của M lên Ox và Oy.

Nếu bây giờ ta đặc trưng mỗi điểm M trong mặt phẳng bởi cặp giá trị (r, φ), trong đó r là độ dài đoạn OM và φ là góc định hướng lập bởi trục Ox và vectơ $\overrightarrow{OM}$, thì cặp số này sẽ được gọi là toạ độ cực của điểm M. Rõ rằng, mỗi cặp $(r, \varphi) \in G = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ xác định duy nhất một điểm trên mặt phẳng. Tuy vậy, tương ứng với mỗi điểm M trên mặt phẳng thì có thể có nhiều cặp toạ độ cực khác nhau cho nó với các giá trị φ sai khác một bội của 2π. Đặc biệt để biểu diễn điểm O ta có thể dùng cặp $(0, \varphi)$ với φ tuỳ ý. Để việc biểu diễn là duy nhất (đối với các điểm $M \neq O$) người ta thường thu hẹp phạm vi của φ, chẳng hạn chỉ cho phép $(r, \varphi) \in G = [0, +\infty) \times [0, 2\pi)$ hoặc $(r, \varphi) \in G = [0, +\infty) \times [-\pi, \pi)$...

Mối liên hệ giữa toạ độ cực và toạ độ Đêcac được cho bởi hệ sau

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{cases}$$

Lúc đó, phương trình các đường trong mặt phẳng

$$f(x, y) = 0$$

cũng có thể được cho dưới dạng

$$g(r, \varphi) = 0$$

hay ngược lại. Chẳng hạn đường thẳng $x + y = 1$, đường tròn đơn vị $x^2 + y^2 = 1$ và đường parabol $y = x^2$ có thể được viết lại lần lượt là $r(\cos\varphi + \sin\varphi) = 1$, $r = 1$ và $r\sin\varphi - r^2\cos^2\varphi = 0$. Ngoài ra có một số đường mà cách biểu diễn theo hệ toạ độ này cho chúng ta một ý nghĩa hình học sáng sủa hơn hẳn dùng toạ độ khác. Chẳng hạn đường thẳng $y = 1$ hoàn toàn không nên viết $r\sin\varphi = 1$. Hay ngược lại đường xoáy trôn ốc $r = \varphi$ rất khó tìm được một cách biểu diễn trong toạ độ Đêcac.

2.1.2. Hệ toạ độ trụ

Tương tự trong mặt phẳng, trong không gian ta thường sử dụng hệ toạ độ Đêcac vuông góc. Nghĩa là người ta sử dụng ba trục toạ độ vuông góc Ox, Oy, Oz cắt nhau tại một điểm O. Mỗi điểm M trong không gian được xác định hoàn toàn bởi bộ ba số thực $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$; trong đó $x = \overline{OP}$, $y = \overline{OQ}$, $z = \overline{OR}$ với P, Q và R lần lượt là hình chiếu vuông góc của M lên Ox, Oy và Oz.

Nếu gọi N là hình chiếu của M lên mặt phẳng Oxy và ta đặc trưng cho điểm M trong không gian bởi bộ ba (r, φ, z) trong đó $z = \overline{OR}$, r là độ dài đoạn ON và φ là góc định hướng lập bởi trục Ox và vectơ $\overrightarrow{ON}$, thì bộ ba này sẽ được gọi là toạ độ trụ của điểm M. Nói cách khác, ta thay cặp (x, y) trong toạ độ Đêcac bởi toạ độ cực tương ứng (r, φ) và giữ nguyên toạ độ thứ ba: z. Cách xác định toạ độ như vậy cũng không duy nhất. Nếu thu hẹp phạm vi toạ độ là $(r, \varphi, z) \in [0, +\infty) \times [0, 2\pi) \times \mathbb{R}$ thì việc biểu diễn là duy nhất đối với các điểm không thuộc trục Oz.

Mối liên hệ giữa toạ độ trụ và toạ độ Đêcac được cho bởi hệ sau

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \\ z = z. \end{cases}$$

Lúc đó, phương trình $r^2 + z^2 = 1$ xác định mặt cầu đơn vị còn phương trình $z = r$ xác định một mặt nón hướng về chiều dương của trục Oz.

2.1.3. Hệ toạ độ cầu

Trong không gian người ta còn sử dụng hệ toạ độ cầu để biểu diễn các điểm. Cụ thể, ứng với một điểm M trong không gian có hình chiếu vuông góc lên mặt phẳng Oxy là N, ta gọi toạ độ cầu của M là bộ ba $(\rho, \varphi, \theta) \in [0, +\infty) \times [0, 2\pi) \times [-\pi, \pi]$ trong đó ρ là độ dài đoạn OM, φ là góc lập bởi Ox với vectơ $\overrightarrow{ON}$ còn θ là góc lập bởi Oz và vectơ $\overrightarrow{OM}$.

Mối liên hệ giữa toạ độ cầu và toạ độ Đêcac được cho bởi hệ sau

$$\begin{cases} x = \rho \sin\theta \cos\varphi, \\ y = \rho \sin\theta \sin\varphi, \\ z = \rho \cos\theta. \end{cases}$$

Dễ thấy rằng, mặt cầu đơn vị bây giờ có phương trình là $\rho = 1$ còn mặt nón $r = z$ trong toạ độ trụ bây giờ có phương trình trong toạ độ cầu là $\theta = \frac{\pi}{4}$. Trong khi đó, mặt parabol $z = x^2 + y^2$ có phương trình $\cos\theta = \rho \sin^2\theta$.

2.2. Hàm vectơ

2.2.1. Khái niệm

Cho I là một khoảng trong $\mathbb{R}$. Lúc đó, một ánh xạ

$$\begin{aligned} f :& I \longrightarrow \mathbb{R}^n; \\ t \in & I \longrightarrow f(t) \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

được gọi là một hàm vectơ (n chiều) biến số t xác định trong I. Với mỗi giá trị $t \in I$, $f(t)$ là một $n-$vectơ với n thành phần: $f(t) = (f_1(t), \cdots, f_n(t))$. Vì vậy việc cho một hàm vectơ $f(t)$ tương đương với việc cho n hàm số thực $f_i(t)$, $1 \leq i \leq n$, gọi là các hàm thành phần của f. Tập hợp

$$\mathcal{C} := \{f(t) \mid t \in I\}$$

được gọi là một đường cong trong $\mathbb{R}^n$. Khi $n = 2$ ta nhận được một đường cong phẳng và khi $n = 3$ ta có đường cong trong không gian. Thông thường, đường cong phẳng được cho bởi hàm $(x(t), y(t))$ hay được viết dưới dạng hệ

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \qquad t \in I.$$

Tương tự, đường cong trong không gian được xác định bởi

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \end{cases} \qquad t \in I.$$

Chẳng hạn, hệ

$$\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \\ z = t, \end{cases} \qquad t \in R$$

cho ta đường xoắn dạng lò xo bao quanh mặt trụ $x^2 + y^2 = 1$.

2.2.2. Giới hạn - Liên tục - Đạo hàm

Cho hàm vectơ $f : I \to \mathbb{R}^n$ và $t_0 \in I$. Ta nói vectơ $v \in \mathbb{R}^n$ là giới hạn của hàm f tại t_0 và ký hiệu

$$v = \lim_{t \to t_0} f(t)$$

nếu

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall t \in I : 0 < |t - t_0| < \delta \Rightarrow \|f(t) - v\| < \epsilon.$$

Sử dụng Bổ đề 3.3 trong giáo trình Giải tích 2 dễ chứng minh được rằng

$$v = \lim_{t \to t_0} f(t) \Longleftrightarrow v_i = \lim_{t \to t_0} f_i(t); \quad 1 \le i \le n. \tag{2.1}$$

Hàm f được gọi là liên tục tại t_0 nếu

$$f(t_0) = \lim_{t \to t_0} f(t),$$

được gọi là liên tục nếu nó liên tục tại mọi điểm thuộc khoảng I. Từ (2.1) ta có ngay kết quả sau

Mệnh đề 2.1. *Hàm vectơ f liên tục trên I (tại t_0) khi và chỉ khi các hàm thành phần f_i cũng liên tục trên I (tại t_0).*

Đạo hàm của hàm vectơ f tại điểm t_0 được định nghĩa là giới hạn sau nếu nó tồn tại:

$$f'(t_0) := \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}.$$

Mệnh đề 2.2. *Hàm vectơ f có đạo hàm tại t_0 khi và chỉ khi các hàm thành phần f_i cũng có đạo hàm tại điểm đó. Hơn nữa, ta có*

$$f'(t_0) = (f_1'(t_0), \cdots, f_n'(t_0)).$$

Mệnh đề 2.3. *Cho f và g là các hàm vectơ n chiều, có đạo hàm tại t_0 và λ là một số thực. Lúc đó, các hàm vectơ $f \pm g$, λf và hàm số $\langle f, g \rangle$ cũng có đạo hàm. Hơn nữa*

a) $(f \pm g)'(t_0) = f'(t_0) \pm g'(t_0)$,

b) $(\lambda f)'(t_0) = \lambda f'(t_0)$,

c) $\langle f, g \rangle'(t_0) = \langle f'(t_0), g(t_0) \rangle + \langle f(t_0), g'(t_0) \rangle$.

Hệ quả 2.1. *Nếu f là một hàm vectơ có đạo hàm sao cho $\|f(t)\|$ là hằng số, thì tại mọi điểm ta có $f'(t) \perp f(t)$.*

Nếu f là một hàm vectơ có đạo hàm tại mọi điểm trên I, thì f' cũng là một hàm vectơ. Nếu f' cũng có đạo hàm thì ta gọi đạo hàm này là đạo hàm cấp hai của f và ký hiệu là f''. Tương tự, ta có thể định nghĩa các đạo hàm cấp cao hơn của f. Sử dụng Mệnh đề 2.2 nhiều lần ta cũng thu được kết quả sau

Mệnh đề 2.4. *Hàm vectơ f có đạo hàm đến cấp k tại t_0 khi và chỉ khi các hàm thành phần f_i cũng có đạo hàm cấp k tại điểm đó. Hơn nữa, ta có*

$$f^{(k)}(t_0) = (f_1^{(k)}(t_0), \cdots, f_n^{(k)}(t_0)).$$

Một đường cong được gọi là liên tục, khả vi, khả vi liên tục v.v. nếu hàm vectơ f tương ứng có các tính chất đó.

2.3. Các đối tượng liên quan đến đường cong

2.3.1. Tiếp tuyến và pháp tuyến của đường cong phẳng

Cho đường cong phẳng $\mathcal{C}$ xác định bởi hệ

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \qquad t \in [a, b]. \tag{2.2}$$

Với $t_0 \in (a, b)$, $M_0 = f(t_0) = (x(t_0), y(t_0))$ là một điểm trên đường cong. Giả thiết thêm rằng $f'(t_0)$ tồn tại và khác không. Với số gia Δt đủ bé điểm $M_t = f(t_0 + \Delta t) = (x(t_0 + \Delta t), y(t_0 + \Delta t))$ nằm trên đường cong $\mathcal{C}$. Lúc đó $\frac{f(t_0+\Delta t)-f(t_0)}{\Delta t}$ là vectơ chỉ phương của cát tuyến M_0M_t. Khi $\Delta t \to 0$ ta có $M_t \to M_0$ và cát tuyến M_0M_t tiến dần về tiếp tuyến của đường cong tại M_0. Do đó, nếu $f'(t_0)$ tồn tại và khác không thì đó cũng chính là vectơ chỉ phương của tiếp tuyến đường cong $\mathcal{C}$ tại M_0. Đường thẳng đi qua M_0 và vuông góc với tiếp tuyến đường cong tại đó được gọi là pháp tuyến của đường cong. Rõ ràng phương trình của tiếp tuyến và pháp tuyến đường cong tại M_0 lần lượt được cho bởi

$$\begin{cases} x = x(t_0) + tx'(t_0), \\ y = y(t_0) + ty'(t_0), \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

và

$$x'(t_0)(x - x(t_0)) + y'(t_0)(y - y(t_0)) = 0.$$

Bây giờ giả sử đường cong $\mathcal{C}$ được cho bởi phương trình

$$F(x, y) = 0,$$

với $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ là hàm hai biến, có các đạo hàm riêng tại điểm $M_0(x_0, y_0) \in \mathcal{C}$. M_0 được gọi là điểm kỳ dị nếu $\nabla F(x_0, y_0) = 0$. Trường hợp ngược lại ta nói M_0 là điểm chính quy. Lúc đó, theo Định lý **??** tồn tại một hàm ẩn $y = y(x)$ (hay $x = x(y)$) với $y(x_0) = y_0$, $F(x, y(x)) = 0$ với mọi x và

$$F'_x(x_0, y_0) + F'_y(x_0, y_0).y'(x_0) = 0.$$

Mặt khác, chú ý rằng $\mathcal{C}$ có thể được biểu diễn bởi hệ phương trình tham số trong lân cận M_0 là

$$\begin{cases} x = x, \\ y = y(x). \end{cases}$$

Nên $(1, y'(x_0))$ cũng là vectơ chỉ phương của tiếp tuyến của $\mathcal{C}$ tại M_0. Do đó, $(F'_x(x_0, y_0), F'_y(x_0, y_0))$ là vectơ chỉ phương của pháp tuyến đường cong tại M_0 mà ta gọi là vectơ pháp của $\mathcal{C}$. Lúc này, phương trình đường tiếp tuyến của $\mathcal{C}$ tại M_0 là

$$(x - x_0).F'_x(x_0, y_0) + (y - y_0).F'_y(x_0, y_0) = 0$$

Ví dụ 2.1. Đường tròn đơn vị có phương trình $x^2 + y^2 = 1$. Ở đây, $F'_x = 2x$ và $F'_y = 2y$ nên tại mỗi điểm $M_0(x_0, y_0)$ trên đường tròn có thể chọn vectơ pháp là $\overrightarrow{n} = (x_0, y_0)$. Vậy phương trình tiếp tuyến đường tròn tại M_0 là $x_0(x - x_0) + y_0(y - y_0) = 0$, hay $x_0 x + y_0 y = 1$.

2.3.2. Tiếp tuyến và pháp diện của đường cong trong không gian

Giả sử $\mathcal{C}$ là đường cong khả vi trong không gian được xác định bởi hệ

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \end{cases} \qquad t \in [a, b]. \tag{2.3}$$

Bằng lập luận tương tự trên đường cong phẳng ta thấy, với mỗi $t_0 \in (a, b)$, $v := (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$ (nếu khác vectơ không) là vectơ chỉ phương của đường thẳng tiếp tuyến với $\mathcal{C}$ tại $M_0((x(t_0), y(t_0), z(t_0))$. Do đó phương trình tham số của tiếp tuyến này là

$$\begin{cases} x = x(t_0) + tx'(t_0), \\ y = y(t_0) + ty'(t_0), \\ z = z(t_0) + tz'(t_0), \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Mặt phẳng chứa M_0, vuông góc với v được gọi là pháp diện của đường cong. Dĩ nhiên, phương trình của pháp diện của $\mathcal{C}$ tại M_0 là

$$(x - x(t_0))x'(t_0) + (y - y(t_0))y'(t_0) + (z - z(t_0))z'(t_0) = 0.$$

2.3.3. Độ cong

a. Trường hợp đường cong phẳng

Cho $\mathcal{C}$ là đường cong phẳng khả vi hai lần, xác định bởi hệ (2.2). Lấy điểm $M(x(t), y(t)) \in \mathcal{C}$. Tập hợp $\{(x(\tau), y(\tau)) \mid \tau \in [a, t]\}$ chính là cung của đường cong có hai mút là $A(x(a), y(a))$ và M. Trong chương trình Giải tích I ta đã biết độ dài cung này được tính bởi

$$s(t) := \overset{\frown}{AM} = \int_a^t \sqrt{x'(\tau)^2 + y'(\tau)^2} d\tau$$

và do đó, vi phân cung là

$$ds(t) = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt.$$

Bây giờ cố định một điểm $M_0(x(t_0), y(t_0))$ với $t_0 \in (a, b)$. Với mỗi Δt đủ bé $t = t_0 + \Delta t \in (a, b)$, ta ký hiệu $\Delta\alpha$ là độ lớn của góc lập bởi hai vectơ tiếp tuyến của đường cong tại M_0 và $M_t(x(t), y(t))$, Δs là độ dài cung $\overset{\frown}{M_0 M_t}$.

Độ cong của $\mathcal{C}$ tại M_0 là giới hạn sau nếu nó tồn tại

$$C(M_0) := \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta s}. \tag{2.4}$$

Nếu $C(M_0) \neq 0$, đại lượng $\rho = \frac{1}{C(M_0)}$ được gọi là bán kính độ cong.

Ví dụ 2.2. Nếu $\mathcal{C}$ là một đoạn thẳng thì $\Delta\alpha$ luôn luôn bằng không. Do đó, độ cong tại mọi điểm của nó bằng không. Nếu $\mathcal{C}$ là đường tròn tâm I, bán kính $R > 0$ thì với $\Delta\alpha$ bé, $\Delta\alpha$ cũng chính là góc lập bởi hai bán kính IM_0 và IM_t. Do đó, độ dài cung Δs bằng $R\Delta\alpha$. Suy ra

$$C(M_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\alpha}{R\Delta\alpha} = \frac{1}{R}.$$

Lúc này, $\rho = R$ hay bán kính độ cong của đường tròn trùng với bán kính của nó. Ở đây ta thấy khái niệm độ cong khá hợp lý ở chỗ là độ cong của đường tròn càng bé khi bán kính của nó càng lớn.

Bổ đề 2.1.

a) Cho hai vectơ $\overrightarrow{m} = (m_1, m_2)$, $\overrightarrow{n} = (n_1, n_2)$ lập thành một góc nhọn. Lúc đó,

$$\sin(\widehat{\overrightarrow{m}, \overrightarrow{n}}) = \frac{|m_1 n_2 - m_2 n_1|}{\|\overrightarrow{m}\|.\|\overrightarrow{n}\|}. \tag{2.5}$$

b) Nếu $\overrightarrow{m} = (m_1, m_2, m_3)$ và $\overrightarrow{n} = (n_1, n_2, n_3)$, thì (2.5) được thay bằng

$$\sin(\widehat{\overrightarrow{m}, \overrightarrow{n}}) = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} m_1 & m_2 \\ n_1 & n_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} m_2 & m_3 \\ n_2 & n_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} m_3 & m_1 \\ n_3 & n_1 \end{vmatrix}^2}}{\|\overrightarrow{m}\|.\|\overrightarrow{n}\|}.$$

Định lý 2.5. *Giả sử $\mathcal{C}$ là đường cong phẳng, khả vi đến cấp hai, xác định bởi hệ (2.2) và $M(x(t), y(t))$, $t \in (a, b)$ là một điểm trên $\mathcal{C}$ sao cho $(x'(t), y'(t)) \neq (0, 0)$. Lúc đó*

$$C(M) = \frac{|x'y'' - x''y'|}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}. \tag{2.6}$$

Đặc biệt, nếu $\mathcal{C}$ được biểu diễn bởi phương trình $y = f(x)$, $x \in [a, b]$ thì với $M(x, f(x))$ ta có

$$C(M) = \frac{|f''|}{(1 + f'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Ví dụ 2.3. Đường cycloid: $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ $(a > 0)$ là quỹ tích của một điểm P cố định trên đường tròn bán kính a khi đường tròn này lăn trên trục Ox. Độ cong của đường cycloid tại mỗi điểm $M(a(t - \sin t), a(1 - \cos t))$ là

$$C(M) = \frac{|\cos t - 1|}{2\sqrt{a}(1 - \cos t)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\left|4a \sin \frac{t}{2}\right|}.$$

Như vậy, độ cong chỉ xác định tại các điểm M với $t \neq 2k\pi$.

Nếu đường cong được cho trong toạ độ cực: $r = f(\varphi)$, thì bằng cách viết $x = f(\varphi). \cos\varphi$, $y = f(\varphi). \sin\varphi$, xem như đó là phương trình tham số của đường cong, từ (2.6) ta có

$$C(M) = \frac{|r^2 + 2r'^2 - rr''|}{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

b. Trường hợp đường cong trong không gian

Cho đường cong $\mathcal{C}$ khả vi đến cấp hai trong không gian, được xác định bởi hệ (2.3). Tương tự như trong mặt phẳng ta có công thức vi phân cung

$$ds(t) = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}dt.$$

Với mỗi $t_0 \in (a, b)$ và Δt đủ bé, ta vẫn ký hiệu Δs là độ dài cung $\overset{\frown}{M_0M_t}$ còn $\Delta\alpha$ là số đo góc lập bởi các vectơ tiếp tuyến với đường cong tại M_0 và M_t, trong đó M_0 và M_t lần lượt là các điểm trên đường cong tương ứng với tham số t_0 và $t_0 + \Delta t$. Độ cong của $\mathcal{C}$ tại M_0 cũng được định nghĩa bởi công thức (2.4). Định lý sau cho chúng ta công thức tính độ cong của đường trong không gian.

Định lý 2.6. *Giả sử $M(x(t), y(t), z(t))$, $t \in (a, b)$ là một điểm trên đường cong $\mathcal{C}$ sao cho $(x'(t), y'(t), z'(t)) \neq (0, 0, 0)$. Lúc đó*

$$C(M) = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix}^2}}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

2.3.4. Hình bao của họ đường cong

Cho một họ đường cong phẳng $\mathcal{C}(\lambda)$ phụ thuộc tham số λ. Nếu mọi đường cong $\mathcal{C}(\lambda)$ đều tiếp xúc với một đường cong $\mathcal{L}$ và ngược lại, tại mỗi điểm $M \in \mathcal{L}$ đều tồn tại một đường cong $\mathcal{C}(\lambda)$ của họ tiếp xúc với $\mathcal{L}$ tại M, thì $\mathcal{L}$ được gọi là hình bao của họ $\mathcal{C}(\lambda)$.

Ví dụ 2.4.

* Phương trình $(x-\lambda)^2 + y^2 = R^2$, trong đó R là số cố định, biểu diễn một họ đường tròn bán kính R có tâm $(\lambda,0)$ chạy trên trục Ox. Hình bao của họ này là hai đường thẳng $y = \pm R$.

* Phương trình $x\cos\lambda + y\sin\lambda - 1 = 0$ biểu diễn một họ đường thẳng mà khoảng cách từ gốc O đến đường thẳng ấy bằng 1. Hình bao của họ này là đường tròn đơn vị.

Định lý 2.7. *Cho họ đường cong $F(x, y, \lambda) = 0$ phụ thuộc tham số λ. Nếu các đường của họ ấy không chứa điểm kỳ dị, thì phương trình của hình bao $\mathcal{L}$ của chúng được xác định bởi hệ*

$$\begin{cases} F(x, y, \lambda) = 0, \\ F'_\lambda(x, y, \lambda) = 0. \end{cases}$$

2.4. Mặt cong

2.4.1. Khái niệm

Cho D là một miền trong $\mathbb{R}^2$ và một ánh xạ

$$\begin{aligned} f :&D \longrightarrow \mathbb{R}^3; \\ (u, v) \in&D \longrightarrow f(u, v) \in \mathbb{R}^3. \end{aligned}$$

Với mỗi điểm $(u, v) \in D$, $f(u, v)$ là một vectơ trong không gian với 3 thành phần: $f(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$. Vì vậy việc cho ánh xạ f tương đương với việc cho 3 hàm số thực $x(u, v)$, $y(u, v)$ và $z(u, v)$. Tập hợp

$$\mathcal{S} := \{f(u, v) \mid (u, v) \in D\}$$

được gọi là một mặt cong trong không gian. Thông thường, mặt cong được cho bởi hệ sau mà ta gọi là phương trình tham số của mặt.

$$\begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \qquad (u, v) \in D. \\ z = z(u, v), \end{cases} \tag{2.7}$$

Nếu từ phương trình tham số ta giải được u, v theo x, y và từ đó đưa được về phương trình

$$z = g(x, y) \tag{2.8}$$

(hoặc $x = g(y, z)$, $y = g(z, x)$) thì (2.8) được gọi là dạng hiển của mặt cong $\mathcal{S}$.

Nếu ta loại được hai biến u, v từ (2.7) để nhận được phương trình

$$F(x, y, z) = 0, \tag{2.9}$$

trong đó F là hàm ba biến, thì phương trình này được gọi là dạng ẩn của mặt.

Mặt được gọi là liên tục nếu các hàm thành phần liên tục; được gọi là trơn nếu các hàm thành phần khả vi liên tục và ma trận Jacobi của f:

$$J_f := \begin{pmatrix} x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{pmatrix}$$

có hạng bằng 2. Sử dụng Định lý hàm ẩn ta có thể chứng minh được trong trường hợp mặt cong trơn thì tại lân cận của mỗi điểm của mặt, luôn tồn tại một biểu diễn dưới dạng hiển và một biểu diễn dưới dạng ẩn của mặt. Lúc này, các hàm g, F tương ứng cũng khả vi liên tục. Hơn nữa $\nabla F \neq 0$ tại mọi điểm của mặt.

Ví dụ 2.5. Mặt cầu tâm O bán kính $R > 0$ có phương trình tham số

$$\begin{cases} x = R \sin\theta \cos\varphi, \\ y = R \sin\theta \sin\varphi, \qquad (\theta, \varphi) \in [0, \pi] \times [0, 2\pi). \\ z = R\cos\theta, \end{cases}$$

Hoặc dưới dạng phương trình ẩn:

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0.$$

2.4.2. Tiếp diện và pháp tuyến của mặt cong

Giả sử $\mathcal{S}$ là một mặt cong trơn trong không gian và M_0 là một điểm của mặt. Ta nói một mặt phẳng (P) đi qua M_0 là mặt phẳng tiếp xúc hay tiếp diện của $\mathcal{S}$ tại M_0 nếu

$$\lim_{M \xrightarrow{\mathcal{S}} M_0} \frac{d(M, P)}{M_0 M} = 0, \tag{2.10}$$

trong đó $d(M, P)$ là khoảng cách từ M đến mặt phẳng (P). Ở đây, (2.10) được hiểu là

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall M \in \mathcal{S} : 0 < M_0M < \delta \Rightarrow \frac{d(M, P)}{M_0 M} < \epsilon.$$

Đường thẳng đi qua M_0 và vuông góc với tiếp diện của $\mathcal{S}$ tại M_0 được gọi là pháp tuyến của mặt tại điểm đó.

Định lý 2.8. *Giả sử $\mathcal{S}$ là mặt cong trơn được xác định bởi hệ (2.7) và $M_0 \in \mathcal{S}$ là điểm ứng với cặp tham số (u_0, v_0). Lúc đó tiếp diện của $\mathcal{S}$ tại M_0 là mặt phẳng đi qua M_0 và nhận hai vectơ sau làm vectơ chỉ phương*

$$f'_u(u_0,v_0) = (x'_u(u_0,v_0), y'_u(u_0,v_0), z'_u(u_0,v_0));$$
$$f'_v(u_0,v_0) = (x'_v(u_0,v_0), y'_v(u_0,v_0), z'_v(u_0,v_0)).$$

Từ định lý này suy ra phương trình tham số của tiếp diện tại M_0 của $\mathcal{S}$ là

$$\begin{cases} x = x(u_0,v_0) + u.x'_u(u_0,v_0) + v.x'_v(u_0,v_0), \\ y = y(u_0,v_0) + u.y'_u(u_0,v_0) + v.y'_v(u_0,v_0), \\ z = z(u_0,v_0) + u.z'_u(u_0,v_0) + v.z'_v(u_0,v_0), \end{cases} \qquad (u,v) \in \mathbb{R}^2.$$

Đặc biệt, nếu mặt được cho dưới dạng hiển (2.8) thì phương trình của tiếp diện tại $M_0(x_0, y_0, g(x_0,y_0))$ là

$$z = (x - x_0)g'_x(x_0,y_0) + (y - y_0)g'_y(x_0,y_0) + g(x_0,y_0), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Lúc đó ta có vectơ pháp của mặt: $\overrightarrow{n} = (g'_x(x_0,y_0), g'_y(x_0,y_0), -1)$.

Định lý 2.9. *Giả sử $\mathcal{S}$ là mặt cong trơn được xác định bởi phương trình ẩn (2.9) và $M_0(x_0,y_0,z_0) \in \mathcal{S}$. Lúc đó tiếp diện của $\mathcal{S}$ tại M_0 là mặt phẳng đi qua M_0 và nhận $\nabla F(M_0)$ làm vectơ pháp.*

Lúc này phương trình của tiếp diện là

$$(x - x_0)F'_x(x_0,y_0,z_0) + (y - y_0)F'_y(x_0,y_0,z_0) + (z - z_0)F'_z(x_0,y_0,z_0) = 0 \qquad (2.11)$$

và pháp tuyến có phương trình

$$\frac{x - x_0}{F'_x(x_0,y_0,z_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(x_0,y_0,z_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(x_0,y_0,z_0)}.$$

Ví dụ 2.6.

* Viết phương trình tiếp diện và pháp tuyến của mặt parabol $z = x^2 + y^2$ tại $M(1,2,5)$.

Ta có phương trình mặt ở dạng hiển với $g(x,y) = x^2 + y^2$. Tại M ta có $\overrightarrow{n} = (2,4,-1)$. Nên phương trình tiếp diện là

$$z = 2(x-1) + 4(y-2) + 5 \quad \text{hay} \quad 2x + 4y - z - 5 = 0$$

và phương trình pháp tuyến là

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = -\frac{z-5}{1}.$$

* Viết phương trình tiếp diện của mặt Êlip $x^2 + 2y^2 + 5z^2 = 8$ tại điểm $M(1,1,1)$.

Đây là phương trình dạng ẩn với $F(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 5z^2 - 8$. Áp dụng (2.11) ta có phương trình tiếp diện là

$$2(x-1) + 4(y-1) + 10(z-1) = 0 \quad \text{hay} \quad x + 2y + 5z - 8 = 0.$$

2.5. Thực hành tính toán

Phần thực hành trong chương này chủ yếu ta sẽ nghiên cứu cách vẽ các đường cong và mặt cong trong mặt phẳng và trong không gian, bao gồm cả các trường hợp đã xét trong Chương 1. Để thực hiện các lệnh trong mục này, nói chung, ta cần khởi động các gói công cụ `plots, plottools`.

2.5.1. Vẽ đường cong trong mặt phẳng

a. Dùng toạ độ Đê-các. Trong toạ độ Đê-các, một đường cong phẳng $(\mathcal{C})$ thường được biểu diễn như là đồ thị của hàm một biến f nào đó:

$$(\mathcal{C}): \quad y = f(x), \quad x \in [a, b],$$

hoặc được biểu diễn dưới dạng tham số:

$$(\mathcal{C}): \quad \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \qquad t \in [a, b],$$

hoặc dưới dạng một phương trình ẩn

$$(\mathcal{C}): \quad F(x, y) = 0.$$

Để vẽ đường cong trong trường hợp thứ nhất ta dùng lệnh

```
[> plot(f(x), x=a..b);
```

trong trường hợp thứ hai ta dùng lệnh

```
[> plot([x(t), y(t), t=a..b]);
```

và trong trường hợp thứ ba:

```
[> implicitplot(F(x,y)=0, x=a..b, y=c..d);
```

b. Dùng toạ độ cực. Trong toạ độ cực, một đường cong phẳng thường có hai cách biểu diễn

$$(\mathcal{C}): \quad r = f(\varphi); \quad \varphi \in [a, b]$$

hoặc

$$(\mathcal{C}): \quad \begin{cases} r = r(t), \\ \varphi = \varphi(t), \end{cases} \qquad t \in [a, b].$$

Để vẽ đường cong trong trường hợp thứ nhất ta dùng lệnh

```
[> polarplot(f(phi), phi=a..b);
```

và trong trường hợp thứ hai ta dùng lệnh

```
[> polarplot([r(t), phi(t), t=a..b]);
```

2.5.2. Vẽ mặt cong trong không gian

a. Dùng toạ độ Đê-các. Trong toạ độ Đê-các, một mặt cong phẳng $(\mathcal{S})$ cũng thường được biểu diễn như là đồ thị của hàm hai biến f nào đó:

$$(\mathcal{S}): \quad z = f(x,y), \quad (x,y) \in [a,b] \times [c,d],$$

hoặc được biểu diễn dưới dạng tham số:

$$(\mathcal{S}): \quad \begin{cases} x = x(s,t), \\ y = y(s,t), \\ z = z(s,t), \end{cases} \qquad (s,t) \in [a,b] \times [c,d],$$

hoặc bởi một phương trình ẩn:

$$(\mathcal{S}): \quad F(x,y,z) = 0.$$

Để vẽ mặt cong trong trường hợp thứ nhất ta dùng lệnh

```
[> plot3d(f(x,y), x=a..b, y=c..d);
```

trong trường hợp thứ hai ta dùng lệnh

```
[> plot3d([x(s,t), y(s,t), z(s,t)], s=a..b, t=c..d);
```

và trong trường hợp thứ ba ta dùng lệnh

```
[> implicitplot3d(F(x,y,z)=0, x=a..b, y=c..d, z=e..f);
```

b. Dùng toạ độ trụ. Trong toạ độ trụ, một mặt cong phẳng $(\mathcal{S})$ thường được biểu diễn bởi một trong hai cách:

$$(\mathcal{S}): \quad r = f(\varphi, z), \quad (\varphi, z) \in [a,b] \times [c,d],$$

hoặc

$$(\mathcal{S}): \quad \begin{cases} r = r(s,t), \\ \varphi = \varphi(s,t), \\ z = z(s,t), \end{cases} \qquad (s,t) \in [a,b] \times [c,d].$$

Để vẽ mặt cong trong trường hợp thứ nhất ta dùng lệnh

```
[> cylinderplot(f(phi, z), phi=a..b, z=c..d);
```

và trong trường hợp thứ hai ta dùng lệnh

```
[> cylinderplot([r(s,t), phi(s,t), z(s,t)], s=a..b, t=c..d);
```

c. Dùng toạ độ cầu. Trong toạ độ cầu, một mặt cong phẳng $(\mathcal{S})$ thường được biểu diễn bởi một trong hai cách:

$$(\mathcal{S}): \quad \rho = f(\varphi, \theta), \quad (\varphi, \theta) \in [a,b] \times [c,d],$$

hoặc

$$(\mathcal{S}):\quad \begin{cases} \rho = \rho(s,t), \\ \varphi = \varphi(s,t), \\ \theta = \theta(s,t), \end{cases} \qquad (s,t) \in [a,b] \times [c,d].$$

Để vẽ mặt cong trong trường hợp thứ nhất ta dùng lệnh

[> `sphereplot(f(phi, theta), phi=a..b, theta=c..d);`

và trong trường hợp thứ hai ta dùng lệnh

[> `sphereplot([rho(s,t), phi(s,t), theta(s,t)], s=a..b, t=c..d);`

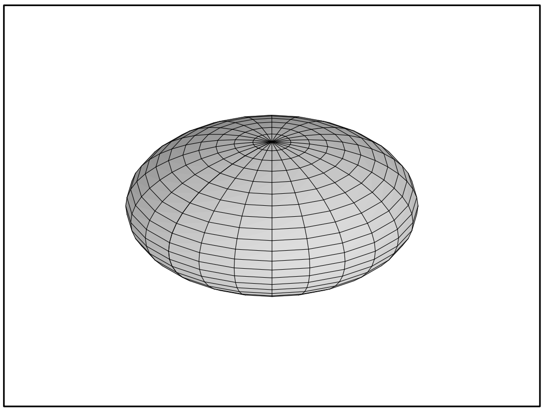
Ví dụ: Để vẽ mặt cầu đơn vị ta có thể dùng một trong các lệnh sau (xem Hình 3.1).

[> `plot3d([sin(s)*cos(t),sin(s)*sin(t),cos(s)],s=0..Pi,t=0..2*Pi);`

[> `cylinderplot(sqrt(1-z∧2), phi=0..2*Pi, z=-1..1);`

[> `cylinderplot([sin(s), phi, cos(s)], phi=0..2*Pi, s=0..Pi);`

[> `sphereplot(1, phi=0..2*Pi, theta=0..Pi);`



Hình 2.1: Mặt cầu đơn vị

2.5.3. Vận động đồ thị

Vận động đồ thị là sự biến thiên của đồ thị theo tham số. Điều đó có nghĩa là ta cho một họ đường cong $(\mathcal{C}_t)$ hay mặt cong $(\mathcal{S}_t)$ phụ thuộc vào một tham số t. Sau đó vẽ tất cả các đường/mặt này ứng với các giá trị t khác nhau. Họ đường cong, mặt cong có thể biểu diễn dưới các dạng khác nhau và theo các hệ toạ độ khác nhau. Ở đây, chúng ta chỉ xét họ được viết dưới dạng đơn giản:

$$(\mathcal{C}_t):\quad y = f(x,t), \quad x \in [a,b],\ \ t \in [t1, t2]$$

$$(\mathcal{S}_t):\quad z = f(x,y,t), \quad (x,y) \in [a,b] \times [c,d],\ \ t \in [t1, t2].$$

Để vận động họ $(\mathcal{C}_t)$ ta dùng lệnh

[> `animate(f(x, t), x=a..b, t=t1..t2);`

và vận động họ $(\mathcal{S}_t)$ bằng lệnh

[> `animate3d(f(x, y, t), x=a..b, y=c..d, t=t1..t2);`

Chú ý là khi thực hiện lệnh này ta thấy đồ thị chưa vận động bởi vì máy chỉ vẽ một đường/mặt ứng với một tham số cụ thể nào đó. Nếu đưa con trỏ chuột vào vùng đồ thị và kích trái chuột thì một bảng lệnh điiêu hành sẽ hiện ra ngay dưới thanh công cụ, gồm các ký hiệu **play, continuous, stop** quen thuộc. Nếu bạn muốn đồ thị vận động liên tục theo các tham số thì nhấn **continuous/play**, sau đó muốn dừng thì nhấn **stop**.

2.6. Bài tập

2.1. Viết phương trình tiếp diện và phương trình pháp tuyến của mặt $y = 3z^2 - xz + 1$ tại các điểm $A(x = 0, y = 1, z = 0)$ và $B(x = 2, y = 2, z = 1)$.

2.2. Viết phương trình tiếp diện và phương trình pháp tuyến của mặt $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$ tại các điểm $A(1, 0, 0)$ và $B(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{3})$.

2.3. Viết phương trình tiếp tuyến và phương trình pháp diện của đường cong

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = t; \quad t \in \mathbb{R}$$

tại các điểm $A(1, 0, 0)$ và $B(0, 1, \frac{\pi}{2})$.

2.4. Viết phương trình tiếp diện và phương trình pháp tuyến của mặt $z = 2x^2 + 3y^2 + 1$ tại các điểm $A(1, 0, 3)$ và $B(-1, -1, 6)$.

2.5. Viết phương trình tiếp tuyến và phương trình pháp diện của đường cong sau tại các điểm $(-1, -1, 2)$ và $(0, 0, 0)$:

$$\begin{cases} z = x^2 + y^2, \\ x + y + z = 0. \end{cases}$$

2.6. Viết phương trình của tiếp tuyến và pháp diện của đường cong

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 1 & = 0, \\ x - y & = 0, \end{cases}$$

tại điểm $M(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$.

2.7. Viết phương trình của tiếp tuyến và pháp diện của đường cong

$$\begin{cases} x = & 2\sin t, \\ y = & 5\cos(t^2+t), \\ z = & 1+3\sin t, \end{cases}$$

tại điểm $M(0,5,1)$.

2.8. Xác định độ cong của các đường cong sau tại điểm $M(0,1,\frac{\pi}{2})$:

a) $x=\cos t$, $y=\sin t$, $z=t$; b) $x=\cos t$, $y=\sin t$, $z=\frac{\pi}{2}$.

2.9. Xác định độ cong của đường cong phẳng $r=\varphi$ tại điểm (π,π) (tức là điểm $(-\pi,0)$ theo toạ độ Đê-các).

2.10. Hai mặt cong trơn $(\mathcal{S})$ và $(\mathcal{T})$ được gọi là tiếp xúc nhau tại điểm $M_0 \in (\mathcal{S})\cap(\mathcal{T})$ nếu tiếp diện tại M_0 của $(\mathcal{S})$ và của $(\mathcal{T})$ trùng nhau. Giả sử $(\mathcal{S})$ và $(\mathcal{T})$ lần lượt được biểu diễn bởi các phương trình ẩn $f(x,y,z)=0$ và $g(x,y,z)=0$. Chứng minh rằng $(\mathcal{S})$ và $(\mathcal{T})$ tiếp xúc nhau tại $M_0(x_0,y_0,z_0)$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} f(x_0,y_0,z_0)=g(x_0,y_0,z_0)=0, \\ \nabla f(x_0,y_0,z_0)=\nabla g(x_0,y_0,z_0). \end{cases}$$

2.11. Chứng minh rằng họ đường cong

$$(\mathcal{C}_\lambda): x^2-2\lambda^3x+y^2-2\lambda y+\lambda^6=0$$

có hình bao chứa đường thẳng $y=0$.