TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI
VIỆN TOÁN ỨNG DỤNG & TIN HỌC

TS. BÙI XUÂN DIỆU

# Bài Giảng

# GIẢI TÍCH III

(lưu hành nội bộ)

CHUỖI - PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN - PHƯƠNG PHÁP TOÁN TỬ LAPLACE

Tóm tắt lý thuyết, Các ví dụ, Bài tập và lời giải

**Hà Nội - 2019**
(bản cập nhật Ngày 22 tháng 5 năm 2019)

Tập Bài giảng vẫn đang trong quá trình hoàn thiện và có thể chứa những lỗi đánh máy, những lỗi kí hiệu và những chỗ sai chưa được kiểm tra hết. Tác giả mong nhận được sự đóng góp ý kiến để tập Bài giảng được hoàn thiện. Mọi ý kiến đóng góp xin gửi về địa chỉ "dieu.buixuan@hust.edu.vn"

Warning: This lecture notes have not been reviewed and may contain errors or typos. Use at your own risk!

*Hà Nội, Ngày 22 tháng 5 năm 2019.*

# Mục lục

# CHƯƠNG 1

# CHUỖI (11LT+11BT)

## §1. ĐẠI CƯƠNG VỀ CHUỖI SỐ

**Định nghĩa 1.1.** *Cho $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ là một dãy số. Tổng vô hạn*

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

*được gọi là một chuỗi số và được kí hiệu là $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, trong đó $a_n$ được gọi là số hạng tổng quát và $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ được gọi là tổng riêng thứ $n$.*

*i) Nếu dãy số $\{S_n\}$ là hội tụ và $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ tồn tại, thì ta nói chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ là hội tụ và có tổng bằng $S$ và viết*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S.$$

*ii) Ngược lại, ta nói chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ là phân kỳ.*

**Ví dụ 1.1.** *Hãy xét ví dụ trực quan đầu tiên về chuỗi số là như sau. Chúng ta bắt đầu với khoảng $[0,1]$. Chia đôi khoảng này ra thì ta được hai khoảng là $[0,1/2]$ và $(1/2,1]$, mỗi khoảng có độ dài bằng $1/2$. Sau đó ta lại tiếp tục chia đôi khoảng $[0,1/2]$, thì ta sẽ được hai khoảng, mỗi khoảng có độ dài bằng $1/4$. Tiếp tục kéo dài quá trình này ta sẽ được chuỗi số sau:*

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$$

**Ví dụ 1.2.** *Xét chuỗi số sau:*

$$1 + 2 + \cdots + n + \cdots$$

*Chuỗi số này có tổng riêng thứ $n$ bằng $n(n+1)/2$ nên tiến ra vô cùng khi $n$ tiến ra vô cùng. Nói cách khác, chuỗi số này là phân kỳ.*

**Ví dụ 1.3 (Ngụy biện toán học).** *Chứng minh rằng* $-1 = +\infty$.

*Chứng minh.* Xét chuỗi số

$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$$

Ta có

$$2S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots = 1 + S \Rightarrow S = 1.$$

Áp dụng cũng lập luận đó với chuỗi số

$$S = 1 + 2 + 4 + \cdots$$

thì

$$2S = 2 + 4 + 8 + \cdots = S - 1 \Rightarrow S = -1 \Rightarrow -1 = +\infty.$$

Tại sao với cùng một lập luận mà

$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots = 1$$

dẫn đến một kết quả đúng, trong khi đó

$$S = 1 + 2 + 4 + \cdots + 2^n + \cdots = -1$$

lại dẫn đến một kết quả sai? ■

**Ví dụ 1.4 (Ngụy biện toán học).** *Chứng minh rằng* $0 = 1$.

*Chứng minh.* Xét chuỗi số $S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$. Ta có

$$S = (1-1) + (1-1) + \cdots = 0 + 0 + \cdots = 0.$$

Mặt khác,

$$S = 1 + (-1+1) + (-1+1) + \cdots = 1 + 0 + 0 + \cdots = 1.$$

Vậy $0 = 1$. ■

**Ví dụ 1.5.** *Xét sự hội tụ và tính tổng (nếu có) của*[1] *chuỗi hình học* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} aq^n = a + aq + aq^2 + \cdots$ *Ta có*

$$\begin{cases} S_n & = a + aq + \cdots + aq^{n-1} \\ qS_n & = aq + aq^2 + \cdots + aq^n \end{cases}$$

[1]còn gọi là chuỗi cấp số nhân

*Do đó* $S_n = a\frac{1-q^n}{1-q} \quad (q \neq 1)$ *và*

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \begin{cases} \frac{a}{1-q} & \textit{nếu } |q| < 1 \\ \infty & \textit{nếu } |q| > 1. \end{cases}$$

- *Trường hợp* $q = 1$ *dễ thấy chuỗi số đã cho phân kỳ vì có tổng riêng thứ* $n$ *bằng* $an$*.*
- *Trường hợp* $q = -1$ *ta có* $S_n = \begin{cases} 0, & \textit{nếu } n \textit{ chẵn}, \\ a, & \textit{nếu } n \textit{ lẻ} \end{cases}$ *nên không tồn tại* $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$*.*

*Kết luận: chuỗi hình học đã cho hội tụ và có tổng bằng* $\frac{a}{1-q}$ *nếu* $|q| < 1$ *và phân kỳ nếu* $|q| \geq 1$*.*

**Ví dụ 1.6.** *Viết số thực sau* $2.3\overline{17} = 2.3171717\ldots$ *dưới dạng phân số.*

$$2.3\overline{17} = 2.3 + \frac{17}{10^3} + \frac{17}{10^5} + \frac{17}{10^7} + \cdots$$

*Sau số hạng đầu tiên thì chuỗi đã cho là một hình học với* $a = \frac{17}{10^3}$ *và* $q = \frac{1}{10^2}$*. Do đó*

$$2.3\overline{17} = \frac{\frac{17}{10^3}}{1 - \frac{1}{10^2}} = \frac{1147}{495}.$$

**Ví dụ 1.7.** *Chứng minh rằng* $1.9999\ldots = 2$.

*Chứng minh.* Ta có

$$1.9999\ldots = 1.\bar{9} = 1 + \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \cdots = 1 + \frac{9}{10}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^n$$

Sau số hạng đầu tiên thì tổng đã cho là một hình học với $a = \frac{9}{10}$ và $q = \frac{1}{10}$. Do đó,

$$1.9999\ldots = 1.\bar{9} = 1 + \frac{\frac{9}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = 2.$$

■

Nếu chỉ nhìn thoáng qua thì có vẻ như là $1.9999\ldots < 2$. Chính vì vậy, nếu chưa được học khái niệm về giới hạn hoặc chuỗi số, đẳng thức này có lẽ sẽ gây bối rối cho nhiều người.

**Ví dụ 1.8 (Nghịch lý Zeno).** [(2)] *Có lẽ, một trong những nghịch lý nổi tiếng nhất của toán học là nghịch lý Zeno, được đưa ra bởi nhà triết học Hy Lạp cổ đại Zeno of Elea (c. 490–430 BC). Giả sử bạn thả một quả bóng từ điểm $A$ có độ cao $1$ đơn vị độ dài nào đó so với mặt đất. Bạn nghĩ quả bóng sẽ rơi xuống mặt đất (dưới tác dụng của lực hấp dẫn). Tuy nhiên, điều này là không thể. Gọi $B$ là điểm hình chiếu của $A$ xuống mặt đất.*

1) *Để di chuyển từ $A$ đến $B$, quả bóng phải di chuyển một quãng đường bằng $\frac{1}{2}$ đến điểm $A_1$ là trung điểm $A$ và $B$.*

2) *Sau khi di chuyển đến $A_1$, quả bóng sẽ phải di chuyển một quãng đươcng bằng $\frac{1}{4}$ đến điểm $A_2$ là trung điểm giữa $A_1$ và $B$.*

3) *sau đó, quả bóng sẽ phải di chuyển một quãng đường bằng $\frac{1}{8}$ đến điểm $A_3$ là trung điểm của $A_2$ và $B$.*

4) *Quá trình này sẽ tiếp tục, đến bước thứ $n$ quả bóng sẽ phải di chuyển một quãng đường bằng $\frac{1}{2^n}$ đến điểm $A_n$ là trung điểm giữa $A_{n-1}$ và $B$.*

*Vì chuỗi này là vô hạn nên quả bóng sẽ không bao giờ chạm đến mặt đất.*

**Một số giải pháp được đề xuất.** Từ xưa đến nay đã có nhiều giải pháp được đề xuất, trong đó có những giải pháp đầu tiên của Aristotle và Archimedes

1) Aristotle (384 TCN-322 TCN) nhận xét rằng, vì khoảng cách giảm dần nên thời gian cần thiết để thực hiện di chuyển những khoảng cách đó cũng giảm dần

2) Archimedes đã trình bày một phương pháp để tìm ra một kết quả hữu hạn cho một tổng gồm vô hạn phần tử giảm dần, tức là lượng thời gian thực hiện ở mỗi bước giảm theo cấp số nhân, và có vô số khoảng thời gian nhưng tổng thời lượng cần thiết dành cho sự di chuyển từ điểm này đến điểm kia lại là một số hữu hạn, do đó vẫn có thể thực hiện được chuyển động này.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1.$$

[(2)] Một nghịch lý tương đương với nó là nghịch lý Achilles và rùa như sau. Achilles chạy đua với rùa. Vì Achilles chạy nhanh hơn rùa nên đồng ý rằng Achilles chấp rùa một đoạn 100 mét. Nếu chúng ta giả sử rằng mỗi tay đua đều bắt đầu chạy với một tốc độ không đổi (Achilles chạy rất nhanh và rùa rất chậm), thì sau một thời gian hữu hạn, Achilles sẽ chạy được 100 mét, tức anh ta đã đến được điểm xuất phát của con rùa. Nhưng trong thời gian này, con rùa cũng đã chạy được một quãng đường ngắn, ví dụ 10 mét. Sau đó Achilles lại tốn một khoảng thời gian nữa để chạy đến điểm cách 10 mét ấy, mà trong thời gian đó thì con rùa lại tiến xa hơn một chút nữa, và cứ như thế mãi. Vì vậy, bất cứ khi nào Achilles đến một vị trí mà con rùa đã đến, thì con rùa lại cách đó một đoạn. Bởi vì số lượng các điểm Achilles phải đến được mà con rùa đã đi qua là vô hạn, do đó anh ta không bao giờ có thể bắt kịp được con rùa

**Ví dụ 1.9.** *Chứng minh rằng chuỗi số sau hội tụ và tính* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$*. Trước hết ta phân tích* $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$*. Ta có*

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

*Do đó* $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 1$*.*

**Định lý 1.1 (Điều kiện cần để chuỗi hội tụ).**
*Nếu chuỗi số* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *là hội tụ, thì* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$*.*

*Chứng minh.* Đặt $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, ta có $a_n = S_n - S_{n-1}$. Vì $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ nên dãy số $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ là hội tụ. Đặt $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = S$. Vì $n-1 \to \infty$ khi $n \to \infty$ nên $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{n-1} = S$. Do đó

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to+\infty} S_n - \lim_{n\to+\infty} S_{n-1} = S - S = 0. \qquad \blacksquare$$

**Chú ý 1.1.**

1. *Mệnh đề đảo của Định lý 1.1 là không đúng. Chẳng hạn như chuỗi điều hòa sau đây* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *có* $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \to 0$ *khi* $n \to \infty$*, nhưng chuỗi này là phân kỳ (Xem Ví dụ 2.1 dưới đây).*

2. *Định lý 1.1 cho chúng ta một điều kiện đủ để kiểm tra một chuỗi là phân kỳ. Cụ thể, nếu* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ *không tồn tại hoặc* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n \neq 0$ *thì chuỗi đã cho là phân kỳ. Chẳng hạn như chuỗi số sau đây* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+1}$ *có* $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2}$ *nên chuỗi đã cho là phân kỳ. Tuy nhiên lưu ý rằng nếu* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ *thì chúng ta chưa có kết luận gì về tính hội tụ của chuỗi* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$*.*

3. *Thay đổi một số số hạng đầu tiên của một chuỗi thì không làm ảnh hưởng đến tính hội tụ hay phân kì của chuỗi số đó. Chẳng hạn như hai chuỗi số* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *và* $\sum_{n=2016}^{\infty} a_n$ *sẽ có cùng tính chất hội tụ hoặc phân kỳ.*

**Ví dụ 1.1.** Chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} n\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ là phân kì bởi vì khi $n \to \infty$

$$u_n = n\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \to 1$$

**Ví dụ 1.2 (Giữa kì, K61).** *Xét sự hội tụ của các chuỗi số* *a)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cos\frac{1}{n}$.

*b)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cos\frac{2}{n}$.

**Định lý 1.2 (Các phép toán trên chuỗi số hội tụ).** *Nếu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ và $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ là các chuỗi số hội tụ, thì chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n+\beta b_n)$ cũng là một chuỗi số hội tụ và*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n+\beta b_n)=\alpha\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\beta\sum_{n=1}^{\infty}b_n.$$

**Bài tập 1.1.** *Chứng minh rằng chuỗi số sau hội tụ và tính $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2016}{n(n+1)}+\frac{2017}{2^n}\right)$.*

**Bài tập 1.2.** *Xác định xem chuỗi sau đây là hội tụ hay phân kỳ. Nếu nó hội tụ, tính tổng của chúng.*

*(a)* $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{2}{n^2-1}$

*(b)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n}{n+1}$

*(c)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^n}{n^3}$

*(d)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(\frac{n^2+1}{2n^2+3}\right)$

*(e)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n}$

*(f)* $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^3-n}$.

[Gợi ý]

(a) Tách $\frac{2}{n^2-1}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}$.

(b) Tách $\ln\frac{n}{n+1}=\ln n-\ln(n+1)$.

(c) Chứng minh $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{e^n}{n^3}=\infty$ (bằng cách chuyển qua giới hạn của hàm số $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{e^x}{x^3}=\infty$). Chuỗi đã cho phân kì.

(d) Chứng minh $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\ln\frac{1}{2}$. Chuỗi đã cho phân kì.

(e) Chứng minh $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$. Chuỗi đã cho phân kì.

(f) Tách $\frac{1}{n^3-n}=\frac{1}{(n-1)n(n+1)}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(n-1)n}-\frac{1}{n(n+1)}\right]$.

**Bài tập 1.3.** *Xét sự hội tụ và tính tổng (nếu có) của các chuỗi sau*

*(a)* $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)+\cdots$

*(b)* $\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\cdots$

*(c)* $\frac{1}{9}+\frac{2}{225}+\cdots+\frac{n}{(2n-1)^2(2n+1)^2}+\cdots$

[Gợi ý]

(a) Viết chuỗi số đã cho thành tổng của hai chuỗi hình học (hội tụ) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$.

(b) Tách $\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$.

(c) Tách $\frac{n}{(2n-1)^2(2n+1)^2} = \frac{1}{8}\left[\frac{1}{(2n-1)^2} - \frac{1}{(2n+1)^2}\right]$.

## §2. CHUỖI SỐ DƯƠNG

**Định nghĩa 1.1.** *Chuỗi số* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *với* $a_n > 0$ *được gọi là một là chuỗi số dương.*

Nhận xét rằng một chuỗi số dương là hội tụ khi và chỉ khi dãy các tổng riêng $S_n$ của chúng là bị chặn. Trong bài này chúng ta sẽ nghiên cứu các tiêu chuẩn để một chuỗi số dương là hội tụ.

### 2.1 Tiêu chuẩn tích phân

**Định lý 2.1.** *Cho* $f(x)$ *là một hàm số liên tục, dương, giảm trên đoạn* $[1, \infty)$ *và* $a_n = f(n)$*. Khi đó chuỗi số* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *và tích phân suy rộng* $\int_1^{\infty} f(x)dx$ *có cùng tính chất hội tụ hoặc phân kỳ. Nói cách khác,*

*i) Nếu* $\int_1^{\infty} f(x)dx$ *là hội tụ thì* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *cũng là hội tụ.*

*ii) Nếu* $\int_1^{\infty} f(x)dx$ *là phân kỳ thì* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *cũng là phân kỳ.*

*Chứng minh.* Vì $f(x)$ là hàm số giảm nên

$$a_{n+1} = f(n+1) \leq f(x) \leq f(n) = a_n, \quad x \in [n, n+1], n = 1, 2, \cdots$$

Lấy tích phân từ $n$ đến $n+1$ ta được

$$a_{n+1} \leq \int\limits_n^{n+1} f(x)dx \leq a_n, \quad n = 1, 2, \cdots$$

Lấy tổng từ $1$ đến $M-1$ ta được

$$a_2 + a_3 + \cdots + a_M \leq \int\limits_1^2 f(x)dx + \int\limits_2^3 f(x)dx + \cdots + \int\limits_{M-1}^{M} f(x)dx \leq a_1 + a_2 + \cdots + a_{M-1}$$

hay

$$a_2 + a_3 + \cdots + a_M \leq \int\limits_1^M f(x)dx \leq a_1 + a_2 + \cdots + a_{M-1}. \tag{1.1}$$

i) Nếu $\int_0^{\infty} f(x)dx$ hội tụ, tức tồn tại $\lim\limits_{M\to\infty} \int_1^M f(x)dx = S$ thì từ bất đẳng thức (1.1) ta có $S_M - a_1 = u_2 + u_3 + \cdots + u_M$ là một dãy số tăng và bị chặn trên bởi $S$ nên tồn tại $\lim\limits_{M\to\infty} (S_M - a_1) = A$. Chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ và có tổng bằng $A + a_1$.

ii) Nếu $\int_0^{\infty} f(x)dx$ phân kì, trong trường hợp này vì hàm $f(x)$ dương nên điều này có nghĩa là $\lim\limits_{M\to\infty}\int_1^M f(x)dx = +\infty$. Bất đẳng thức (1.1) suy ra $\lim\limits_{M\to\infty} S_{M-1} = +\infty$. Chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ phân kì. ■

**Chú ý 1.1.** *Khi sử dụng tiêu chuẩn tích phân, không nhất thiết chuỗi số phải bắt đầu từ $n = 1$. Chẳng hạn như chúng ta có thể kiểm tra sự hội tụ của chuỗi số $\sum\limits_{n=4}^{\infty} \frac{1}{(n-1)^2}$ bằng cách kiểm tra sự hội tụ của tích phân suy rộng $\int_4^{\infty} \frac{1}{(x-1)^2}dx$.*

Tiêu chuẩn tích phân là một tiêu chuẩn rất hữu ích, đặc biệt là khi $a_n = f(n)$ với $f(x)$ là một hàm số sơ cấp mà nguyên hàm có thể tính được và cũng là một hàm số sơ cấp. Chẳng hạn như, xét sự hội tụ của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$. Hàm số $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ là liên tục, dương, và giảm trên đoạn $[1, \infty)$. Xét tích phân suy rộng

$$\int\limits_1^{\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x|_1^{\infty} = \frac{\pi}{4}.$$

Theo tiêu chuẩn tích phân, chuỗi số đã cho hội tụ.

**Ví dụ 2.1.** *Xét sự hội tụ của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \quad (\alpha > 0)$.*

*Chứng minh.* Xét hàm số $f(x) = \frac{1}{x^{\alpha}}$ là liên tục, dương, và giảm trên $[1, \infty)$. Dễ dàng kiểm tra thấy rằng tích phân suy rộng $\int_1^{\infty} f(x)dx$ là hội tụ nếu $\alpha > 1$ và phân kỳ nếu $0 < \alpha \le 1$. Áp dụng tiêu chuẩn tích phân ta có chuỗi đã cho hội tụ nếu $\alpha > 1$ và phân kỳ nếu $0 < \alpha \le 1$. ■

**Chú ý 1.2.**

*a) Hàm zeta được định nghĩa như sau $\zeta(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ và được sử dụng nhiều trong lý thuyết số. Nhà toán học Thụy Sĩ Euler là người đầu tiên tính được chính xác $\zeta(2) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Ông cũng là người tìm ra công thức $\zeta(4) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$. Hai công thức này sẽ được chứng minh ở Hệ quả 4.1 (Bài về chuỗi hàm số) và Hệ quả 6.1 (Bài về chuỗi Fourier).*

*b) Tổng $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ và giá trị của tích phân suy rộng $\int_1^{\infty} f(x)dx$ là khác nhau. Chẳng hạn như $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ trong khi đó $\int_1^{\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{4}$.*

**Bài tập 2.1.** *Dùng tiêu chuẩn tích phân chứng minh rằng chuỗi* $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$ *là hội tụ khi và chỉ khi* $p > 1$.

**Bài tập 2.2.** *Dùng tiêu chuẩn tích phân để xác định xem các chuỗi số sau đây là hội tụ hay phân kỳ.*

*a)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln \frac{1}{n}}{(n+2)^2}$ *b)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n^3}$ *c)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln n}{n^3}$ *d)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln(1+n)}{(n+3)^2}$

*e)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{e^{1/n}}{n^2}$ *f)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{e^n}$ *g)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln n}{n^p}$ *h)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln n}{3n^2}$

**Bài tập 2.3.** *Giải thích tại sao không thể dùng tiêu chuẩn tích phân để xác định xem chuỗi sau đây là hội tụ hay phân kỳ.*

*a)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos \pi n}{\sqrt{n}}$ *b)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos^2 n}{1+n^2}$

## 2.2 Các tiêu chuẩn so sánh

**Định lý 2.2 (Tiêu chuẩn so sánh 1).** *Cho hai chuỗi số dương* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *và* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *có* $a_n \le b_n$ *với mọi* $n$ *hoặc kể từ một số* $n$ *nào đó. Khi đó*

*i) Nếu* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *là hội tụ thì* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *cũng là hội tụ.*

*ii) Nếu* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *là phân kỳ thì* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *cũng là phân kỳ.*

*Chứng minh.* Từ giả thiết suy ra

$$A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \le b_1 + b_2 + \cdots + b_n = B_n. \tag{1.2}$$

i) Nếu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ hội tụ, nghĩa là tồn tại $\lim\limits_{n\to+\infty} B_n = B$ và $B_n \le B$ với mọi $n$. Bất đẳng thức (1.2) chứng tỏ dãy tổng riêng $A_n$ là một dãy số bị chặn, hơn nữa nó tăng do tính chất của chuỗi số dương, nên tồn tại $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n = A$. Chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ.

ii) Bạn đọc có thể tự chứng minh một cách đơn giản cũng dựa vào bất đẳng thức (1.2). ■

**Ví dụ 2.1.** *Xét sự hội tụ của chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n+1}$.

*Chứng minh.* Ta có $\frac{1}{n^2+n+1} < \frac{1}{n^2}$. Mà $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ là hội tụ theo Ví dụ 2.1, nên chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n+1}$ cũng là hội tụ. ■

**Ví dụ 2.2.** *Xét sự hội tụ của chuỗi* $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$.

*Chứng minh.* Ta có $\ln n < n$ với mọi $n \geq 2$. Do đó $0 < \frac{1}{n} < \frac{1}{\ln n}$. Mà chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ là phân kỳ theo Ví dụ 2.1, nên chuỗi $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ là phân kỳ. ■

**Ví dụ 2.3 (Cuối kì, K62).** *Xét sự hội tụ của chuỗi* $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{[\ln(\ln(n+1))]^{\ln n}}$.

[Lời giải] Ta có

$$u_n = \frac{1}{[\ln(\ln(n+1))]^{\ln n}} = \frac{1}{e^{\ln[\ln(\ln(n+1))]^{\ln n}}} = \frac{1}{e^{\ln n \ln[\ln(\ln(n+1))]}} = \frac{1}{n^{\ln[\ln(\ln(n+1))]}}.$$

Vì $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln[\ln(\ln(n+1))] = +\infty$ nên tồn tại $N_0 > 0$ sao cho $\ln[\ln(\ln(n+1))] > 2\ \forall n > N_0$

$$\Rightarrow u_n < \frac{1}{n^2} \forall n > N_0 \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} u_n \text{ hội tụ.}$$

**Ví dụ 2.4 (Giữa kì, K61).** *Xét sự hội tụ của các chuỗi số*

*a)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(2n+1)}$

*b)* $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(2n-1)}$

*c)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{\sqrt{n^3+1}}$.

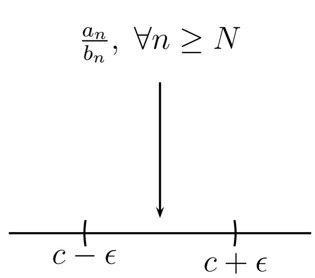
*d)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{\sqrt{n^3+1}}$.

**Định lý 2.3 (Định lý so sánh 2).** *Cho hai chuỗi số dương* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *và* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *thỏa mãn*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = c > 0.$$

*Khi đó* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *và* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *có cùng tính chất hội tụ hoặc phân kỳ.*

*Chứng minh.* Hình dung rằng $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = c$ nghĩa là với mọi $\epsilon > 0$ thì từ một lúc nào đó toàn bộ số hạng của dãy $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}_{n\geq N}$ sẽ chui vào trong khoảng $(c-\epsilon, c+\epsilon)$.




Hình 2.3

Theo giả thiết, với mọi $\epsilon > 0$, tồn tại số $N$ sao cho

$$c - \epsilon < \frac{a_n}{b_n} < c + \epsilon \Leftrightarrow (c-\epsilon)b_n < a_n < (c+\epsilon)b_n.$$

Lấy tổng từ $n = N$ đến $\infty$ ta được

$$(c-\epsilon)\sum_{n=N}^{\infty} b_n \le \sum_{n=N}^{\infty} a_n \le (c+\epsilon)\sum_{n=N}^{\infty} b_n. \tag{1.3}$$

Không mất tính tổng quát số $\epsilon$ có thể chọn sao cho $c - \epsilon > 0$. Khi đó

- vế phải của bất đẳng thức (1.3) chứng tỏ rằng nếu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ hội tụ thì $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ,
- vế trái của bất đẳng thức (1.3) chứng tỏ rằng nếu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ thì $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ hội tụ. ∎

**Chú ý 1.1.**

*a) Các trường hợp đặc biệt*

- ***Nếu*** $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ ***và chuỗi*** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ ***hội tụ thì*** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ***cũng hội tụ. Điều này dễ hiểu vì*** $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ ***suy ra với*** $n$ ***đủ lớn thì*** $\frac{a_n}{b_n} \le 1$ ***hay*** $a_n \le b_n$ ***với mọi*** $n \ge N$ ***nào đó.***
- ***Nếu*** $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$ ***và chuỗi*** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ ***phân kì thì*** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ***cũng phân kì. Điều này cũng dễ hiểu vì*** $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$ ***suy ra với*** $n$ ***đủ lớn thì*** $\frac{a_n}{b_n} \ge 1$ ***hay*** $a_n \ge b_n$ ***với mọi*** $n \ge N$ ***nào đó***

*b) Cũng giống như TPSR, khi xét sự hội tụ của chuỗi số người ta chỉ quan tâm đến "dáng điệu" của số hạng tổng quát* $a_n$ *tại vô cùng. Tiêu chuẩn so sánh thường được sử dụng để so sánh chuỗi số đã cho với một trong hai chuỗi số sau đây:*

- ***Chuỗi hình học*** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n \begin{cases} \text{hội tụ nếu } |q| < 1, \\ \text{phân kì nếu } |q| \ge 1. \end{cases}$
- ***Chuỗi hàm zeta*** $\zeta(\alpha) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \begin{cases} \text{hội tụ nếu } \alpha > 1, \\ \text{phân kì nếu } \alpha \le 1. \end{cases}$

**Ví dụ 2.1.** *Xét sự hội tụ của chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n}{\sqrt{n^5+1}}$.

*Chứng minh.* Số hạng trội (chiếm ưu thế) của tử số là $n^2$ và số hạng trội của mẫu số là $\sqrt{n^5} = n^{5/2}$. Điều đó gợi ý chúng ta so sánh chuỗi số đã cho với chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n^5}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$. Ta có

$$a_n = \frac{n^2+n}{\sqrt{n^5+1}}, \quad b_n = \frac{1}{n^{1/2}}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n^2+n).n^{1/2}}{\sqrt{n^5+1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n^5}}} = 1.$$

Mà chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$ là phân kỳ theo Ví dụ 2.1 nên chuỗi đã cho cũng phân kỳ. ■

**Ví dụ 2.2.** *Xét sự hội tụ của chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{4^n+5^n}$.

*Chứng minh.* Số hạng trội (chiếm ưu thế) của tử số là $3^n$ và số hạng trội của mẫu số là $5^n$. Điều này gợi ý chúng ta so sánh chuỗi số đã cho với chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n$. Ta có

$$a_n = \frac{2^n+3^n}{4^n+5^n}, \quad b_n = \left(\frac{3}{5}\right)^n$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(2^n+3^n)5^n}{(4^n+5^n)3^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n+1}{\left(\frac{4}{5}\right)^n+1} = 1.$$

Mà chuỗi hình học $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n$ là hội tụ theo Ví dụ 1.5, do đó chuỗi số đã cho cũng là hội tụ. ■

**Chú ý 1.2.** *Tiêu chuẩn so sánh thường được sử dụng để xét sự hội tụ của các chuỗi số có dạng sau:*

1. *Chuỗi có số hạng tổng quát là một phân thức, trong đó tử số và mẫu số đều là các đa thức của $n$ hoặc là các lũy thừa của $n$, chẳng hạn*

   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_0+a_1n^{\alpha_1}+a_2n^{\alpha_2}+\cdots+a_mn^{\alpha_m}}{b_0+b_1n^{\beta_1}+b_2n^{\beta_2}+\cdots+b_kn^{\beta_k}}, \text{ với } 0<\alpha_1<\alpha_2<\cdots<\alpha_m, 0<\beta_1<\beta_2<\cdots<\beta_k.$$

   *Khi đó số hạng trội của tử số là $a_mn^{\alpha_m}$ và số hạng trội của mẫu là $b_kn^{\beta_k}$. Điều này gợi ý chúng ta so sánh chuỗi đã cho với chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\alpha_m}}{n^{\beta_k}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\beta_k-\alpha_m}}$. Theo Ví dụ 2.1, chuỗi đã cho là hội tụ nếu $\beta_k-\alpha_m>1$ và phân kỳ nếu $\beta_k-\alpha_m\le 1$.*

2. *Chuỗi có số hạng tổng quát là một phân thức, trong đó tử số và mẫu số đều là tổng của các lũy thừa với số mũ là $n$, chẳng hạn*

   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_1a_1^n+\alpha_2a_2^n+\cdots+\alpha_ma_m^n}{\beta_1b_1^n+\beta_2b_2^n+\cdots+\beta_kb_k^n}, \text{ với } 0<a_1<a_2<\cdots<a_m, 0<b_1<b_2<\cdots<b_k.$$

*Khi đó số hạng trội của tử số là $\alpha_m a_m^n$ và số hạng trội của mẫu số là $\beta_k b_k^n$. Điều này gợi ý chúng ta so sánh chuỗi số đã cho với chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_m}{b_k}\right)^n$. Theo Ví dụ 1.5, chuỗi đã cho hội tụ nếu $\frac{a_m}{b_k}<1$ và phân kỳ nếu $\frac{a_m}{b_k}\geq 1$.*

3. *Một dạng chuỗi khác cũng sử dụng tiêu chuẩn so sánh, đó là các chuỗi số có sử dụng đến các VCB tương đương hoặc khai triển Maclaurin (trong học phần Giải tích I). Chẳng hạn như, xét sự hội tụ của chuỗi số*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n}\right).$$

*Xuất phát từ công thức khai triển Maclaurin của hàm số $\sin x$:*

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3),$$

*ở đó $o(x^3)$ là kí hiệu VCB bậc cao hơn $x^3$, ta có*

$$x-\sin x=\frac{x^3}{3!}+o(x^3)\sim\frac{x^3}{6}\ \textit{khi}\ x\to 0.$$

*Khi $n\to\infty$ thì $\frac{1}{n}\to 0$, do đó*

$$\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n}\sim\frac{1}{6n^3}\ \textit{khi}\ n\to\infty.$$

*Mà chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ hội tụ, nên theo tiêu chuẩn so sánh, chuỗi số đã cho cũng hội tụ. Một cách tương tự, xét sự hội tụ của các chuỗi số sau:*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right),\quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[n]{e}-1-\frac{1}{n}\right),\quad \sum_{n=1}^{\infty}\arcsin\frac{n-1}{n^2-n+1}.$$

*Một số khai triển Maclaurin*

- $(1+x)^\alpha = 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x^n)$
- $\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-\cdots+(-1)^n x^n+o(x^n)$
- $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+o(x^n)$
- $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n)$
- $\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+1})$
- $\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n})$
- $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o(x^n)$

*Một số VCB tương đương hay dùng khi $x\to 0$*

- $x \sim \sin x \sim \tan x \sim \arcsin x \sim \arctan x \sim e^x - 1 \sim \dfrac{a^x - 1}{\ln a} \sim \ln(1+x)$,
- $\sqrt[m]{1+\alpha x} - 1 \sim \ln \sqrt[m]{1+\alpha x} = \dfrac{1}{m} \ln(1+\alpha x) \sim \dfrac{\alpha x}{m}$,
- $1 - \cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$.

**Ví dụ 2.3 (Giữa kì, K61).** *Xét sự hội tụ, phân kì của các chuỗi số*

*a)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

*b)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{2}{n}\right)$

*c)* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \tan(\pi\sqrt{n^2+1})$.

*d)* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \tan(\pi\sqrt{n^2+3})$.

**Ví dụ 2.4.**

a) Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \arctan \dfrac{\pi}{2^n}$

Đây là một chuỗi số dương, khi $n \to \infty$, ta có $\arctan \dfrac{\pi}{2^n} \sim \dfrac{\pi}{2^n}$. Mà chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\pi}{2^n} = \pi \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ là hội tụ, nên chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \arctan \dfrac{\pi}{2^n}$ cũng hội tụ.

b) Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}{n^\alpha}$

Khi $n \to \infty$: $\dfrac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}{n^\alpha} = \dfrac{2}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1})n^\alpha} \sim \dfrac{1}{n^{\alpha + \frac{1}{2}}}$, do đó

Nếu $\alpha > \dfrac{1}{2}$: chuỗi số là hội tụ; nếu $\alpha \le \dfrac{1}{2}$, chuỗi số là phân kì.

c) Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt{n}}$.

Để sử dụng tiêu chuẩn so sánh đối với các chuỗi số kiểu này, chúng ta ghi nhớ hai giới hạn quan trọng sau.

**i)** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n^\alpha} = +\infty, (a > 1, \forall \alpha)$, hay $n^\alpha \le e^n$ khi $n$ là đủ lớn.

**ii)** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{\ln^\beta n} = +\infty, (\forall \beta)$, hay $\ln^\beta n \le n$ khi $n$ là đủ lớn.

Nói một cách khác thì khi $n \to \infty$, hàm số mũ, hàm đa thức và hàm số logarit của $n$ đều là các VCL. Tuy nhiên, hàm số mũ tiến ra vô cùng "nhanh hơn" hàm đa thức, và hàm đa thức "nhanh hơn" hàm số logarit.

Chúng ta sẽ dùng giới hạn đầu tiên: $(\sqrt{n})^\alpha \le e^{\sqrt{n}}$ khi $n$ đủ lớn, hay là tương đương, $e^{-\sqrt{n}} \le n^{-\frac{\alpha}{2}}$, với $n$ đủ lớn và với mọi $\alpha$. Chọn $\alpha = 4$, thì chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ là hội tụ; nên chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt{n}}$ cũng là hội tụ.

**Bài tập 2.4.** *Dùng tiêu chuẩn so sánh để xét sự hội tụ của các chuỗi số sau*

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(n+2)^4}$ 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2016^n}{2015^n + 2017^n}$ 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n\sin^2 n}{1+n^3}$ 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n+3}}$

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+\sin n}{\sqrt[3]{n^7+1}}$ 7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\frac{n+1}{n^3+n+1}$ 8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left[1+\frac{1}{3n^2}\right]$

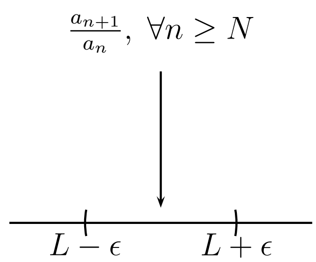
## 2.3 Tiêu chuẩn d'Alambert

**Định lý 2.4.** *Giả sử tồn tại* $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$. *Khi đó*

*i) Nếu* $L < 1$ *thì chuỗi đã cho hội tụ.*

*ii) Nếu* $L > 1$ *thì chuỗi đã cho phân kỳ.*

*Chứng minh.* 1. Hình dung rằng $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$ nghĩa là với mọi $\epsilon > 0$ thì từ một lúc nào đó toàn bộ số hạng của dãy $\left\{\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\}_{n\geq N}$ sẽ chui vào trong khoảng $(L-\epsilon, L+\epsilon)$.




Hình 2.4

Nếu $L < 1$ ta chọn số $\epsilon > 0$ bất kì nào đó sao cho $L + \epsilon < 1$. Vì $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$ nên tồn tại số $N$ sao cho

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < L + \epsilon,\ \forall n \geq N.$$

Do đó

$$a_n < (L+\epsilon)a_{n-1} < (L+\epsilon)^2 a_{n-2} < \cdots < a_N(L+\epsilon)^{n-N} = \frac{a_N}{(L+\epsilon)^N}.(L+\epsilon)^n,\ \forall n > N.$$

Chuỗi hình học $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(L+\epsilon)^n$ hội tụ ($L+\epsilon < 1$) nên theo tiêu chuẩn so sánh, chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ cũng hội tụ.

2. Nếu $L > 1$ thì $u_{n+1} > u_n$ với $n$ đủ lớn, chẳng hạn với mọi $n \geq N$. Khi đó, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n \geq a_N > 0$. Chuỗi đã cho phân kì theo tiêu chuẩn điều kiện cần. ■

**Chú ý:**

- Nếu $L = 1$ thì không kết luận được gì về sự hội tụ hay phân kì của chuỗi đã cho. Chẳng hạn như cả hai chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ và $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ đều thỏa mãn $L = 1$ nhưng chuỗi số đầu tiên phân kì còn chuỗi số sau hội tụ.

- Trong các bài toán có dùng tiêu chuẩn d'Alambert, giới hạn sau đây thường hay được sử dụng
$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n = e^{\alpha}.$$
*Chứng minh*. Giới hạn trên có thể được chứng minh bằng cách chuyển qua giới hạn của hàm số như sau.
Ta có
$$\lim_{x\to+\infty}\ln\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^x = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\alpha}{x}}{\frac{1}{x}} = \alpha.$$
Do đó
$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^x = e^{\alpha}.$$
■

**Ví dụ 2.1.** *Xét sự hội tụ của chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$.

*Chứng minh*. Ta có
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{2^{n+1}}{(n+1)!} : \frac{2^n}{n!} = \lim_{n\to+\infty}\frac{2}{n+1} = 0 < 1.$$

Theo tiêu chuẩn d'Alambert, chuỗi đa cho hội tụ. ■

**Ví dụ 2.2.** *Xét sự hội tụ của chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$.

*Chứng minh*. Ta có
$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to+\infty}\frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} : \frac{2^n n!}{n^n}\\ &= \lim_{n\to+\infty} 2\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\\ &= \lim_{n\to+\infty} 2\left[\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\right]^{\frac{n}{n+1}}\\ &= \frac{2}{e} < 1.\end{aligned}$$

Theo tiêu chuẩn d'Alambert, chuỗi đa cho hội tụ. ■

**Ví dụ 2.3.** *Xét sự hội tụ của chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2+5}{3^n}$. *Ta có*

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2+5}{3(n^2+5)} = \frac{1}{3} < 1$$

*nên chuỗi đa cho hội tụ theo tiêu chuẩn d'Alambert.*

**Ví dụ 2.4 (Giữa kì, K61).** *Xét sự hội tụ của các chuỗi số*

*a)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!}$ *b)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)!}$

**Bài tập 2.5.** *Dùng tiêu chuẩn d'Alambert để xét sự hội tụ của các chuỗi số sau*

*a)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5^n (n!)^2}{n^{2n}}$ *c)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2+n+1)}{2^n(n+1)}$ *e)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n+1}}{5^n \ln(n+1)}$ *g)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n+n+1}{n!\pi^n}$

*b)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)!!}{n^n}$ *d)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{n^n}$ *f)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sin \frac{n+\sin n}{3n+1}\right)^n$ *h)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{n+1}{2^n+1}\right)$.

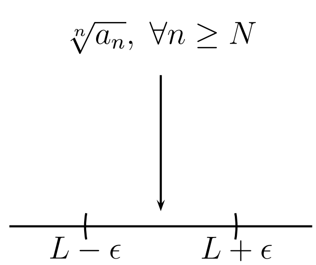
## 2.4 Tiêu chuẩn Cauchy

**Định lý 2.5.** *Giả sử tồn tại* $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$. ***Khi đó***

*i)* ***Nếu*** $L < 1$ ***thì chuỗi đã cho hội tụ.***

*ii)* ***Nếu*** $L > 1$ ***thì chuỗi đã cho phân kỳ.***

*Chứng minh.* i) Hình dung rằng $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$ nghĩa là với mọi $\epsilon > 0$ thì từ một lúc nào đó toàn bộ số hạng của dãy $\left\{\sqrt[n]{a_n}\right\}_{n\geq N}$ sẽ chui vào trong khoảng $(L-\epsilon, L+\epsilon)$.




Hình 2.5

Nếu $L < 1$ ta chọn số $\epsilon > 0$ bất kì nào đó sao cho $L+\epsilon < 1$. Vì $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$ nên tồn tại số $N$ sao cho

$$\sqrt[n]{a_n} < L+\epsilon \Leftrightarrow a_n < (L+\epsilon)^n,\ \forall n \geq N.$$

Chuỗi hình học $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(L+\epsilon)^n$ hội tụ (do $L+\epsilon < 1$) nên theo tiêu chuẩn so sánh, chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ cũng hội tụ.

ii) Nếu $L > 1$ ta chọn số $\epsilon > 0$ bất kì nào đó sao cho $L - \epsilon > 1$. Vì $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$ nên tồn tại số $N$ sao cho

$$\sqrt[n]{a_n} > L - \epsilon \Leftrightarrow a_n > (L-\epsilon)^n,\ \forall n \geq N.$$

Chuỗi hình học $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (L-\epsilon)^n$ phân kì (do $L - \epsilon > 1$) nên theo tiêu chuẩn so sánh, chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ cũng phân kì. ■

**Chú ý:**

- Nếu $L = 1$ thì không kết luận được gì về sự hội tụ hay phân kì của chuỗi đã cho. Chẳng hạn như cả hai chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ và $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ đều thỏa mãn $L = 1$ nhưng chuỗi số đầu tiên phân kì còn chuỗi số sau hội tụ.

- Trong các bài toán có dùng tiêu chuẩn Cauchy, các giới hạn sau đây thường hay được sử dụng
$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1, \quad \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1,\ \forall a > 0.$$
*Chứng minh.* Bạn đọc có thể dễ dàng chứng minh hai giới hạn trên bằng cách đưa về giới hạn của các hàm số sau đây:
$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}} = 1, \quad \lim_{x\to+\infty} a^{\frac{1}{x}} = 1,\ \forall a > 0.$$
■

- Thậm chí là, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{P(n)} = 1$ với mọi đa thức $P(n)$ có bậc lớn hơn hoặc bằng $1$. Thật vậy,
$$\lim_{n\to+\infty} \ln \sqrt[n]{P(n)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln P(n)}{n}.$$
Mặt khác, theo công thức L'Hospital
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln P(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{P(x)'}{P(x)} = 0$$
($P'(x)$ là đa thức có bậc nhỏ hơn $P(x)$). Vậy
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln P(n)}{n} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{P(n)} = 1.$$

**Ví dụ 2.1.** *Xét sự hội tụ của chuỗi số* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^n$.

*Chứng minh.* Ta có
$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n+1}{3n+1} = \frac{2}{3} < 1.$$
Theo tiêu chuẩn Cauchy chuỗi đã cho hội tụ. ■

**Ví dụ 2.2.** *Xét sự hội tụ của chuỗi số* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.

*Chứng minh.* Ta có

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n = \frac{1}{e} < 1.$$

Theo tiêu chuẩn Cauchy chuỗi đã cho hội tụ.

**Ví dụ 2.3 (Giữa kì, K61).** *Xét sự hội tụ của các chuỗi số*

*a)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n^2}}{(n+1)^{n^2}}$ *b)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{n^2}}{n^{n^2}}$

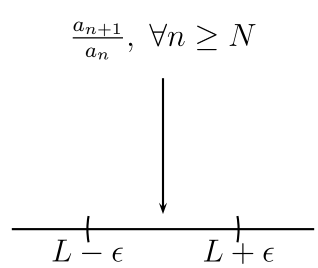
## 2.5 Đọc thêm: Tiêu chuẩn d'Alambert vs Tiêu chuẩn Cauchy

Định lý dưới đây khẳng định rằng tiêu chuẩn Cauchy mạnh hơn tiêu chuẩn d'Alambert, theo nghĩa là nếu có thể dùng tiêu chuẩn d'Alambert để kiểm tra sự hội tụ hay phân kì của một chuỗi số dương thì tiêu chuẩn Cauchy cũng có thể sử dụng được.

**Định lý 2.6.** *Cho chuỗi số dương* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$*. Nếu tồn tại* $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L \in [0, \infty]$ *thì*

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = L.$$

*Chứng minh.* Định lý trên được chứng minh một cách *rất đơn giản* chỉ dựa vào định nghĩa của giới hạn. Hình dung rằng $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$ nghĩa là với mọi $\epsilon > 0$ thì từ một lúc nào đó toàn bộ số hạng của dãy $\left\{\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\}_{n\geq N}$ sẽ chui vào trong khoảng $(L-\epsilon, L+\epsilon)$.




Hình 2.6

Một cách chính xác, với mọi $\epsilon > 0$, tồn tại $N = N(\epsilon)$ sao cho

$$L - \epsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < L + \epsilon, \ \forall n \geq N.$$

Do đó
$$(L-\epsilon)^{n-N} < \frac{a_{N+1}}{a_N}.\frac{a_{N+2}}{a_{N+1}}\cdots\frac{a_n}{a_{n-1}} < (L+\epsilon)^{n-N}$$
hay
$$(L-\epsilon)^{n-N} < \frac{a_n}{a_N} < (L+\epsilon)^{n-N},\ \forall n > N.$$
Từ đó suy ra
$$a_N(L-\epsilon)^{n-N} < a_n < a_N(L+\epsilon)^{n-N},\ \forall n > N.$$
Lấy căn bậc $n$ và cho $n \to \infty$ ta được
$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_N}\lim_{n\to+\infty}(L-\epsilon)^{1-\frac{N}{n}} \le \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n} \le \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_N}\lim_{n\to+\infty}(L+\epsilon)^{1-\frac{N}{n}}$$
Do đó
$$L-\epsilon \le \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n} \le L+\epsilon. \tag{1.4}$$
Chú ý rằng ở đây ta đã sử dụng $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_N} = 1$. Bất đẳng thức (1.4) đúng với mọi $\epsilon > 0$. Điều này chỉ có thể xảy ra khi
$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n} = L.$$
■

Mặc dù tiêu chuẩn Cauchy mạnh hơn tiêu chuẩn d'Alambert, nhưng đôi khi việc này chỉ *mang tính chất lý thuyết*. Có những bài tập "đặc thù" mà việc dùng tiêu chuẩn d'Alambert dễ dàng hơn rất nhiều so với tiêu chuẩn Cauchy. Chẳng hạn như,

**Ví dụ 2.1.** *Xét sự hội tụ của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$. Ta có*
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1} = 0 < 1$$
*nên chuỗi đã cho hội tụ. Nếu muốn dùng tiêu chuẩn Cauchy trong trường hợp này các bạn phải đi tính $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n!}}$. Giới hạn này không dễ tính, mặc dù theo Định lý 2.6,*
$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n!}} = 0.$$

**Bài tập 2.6.** *Chứng minh rằng*
$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n!}} = 0.$$

*Chứng minh.* Vì $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n} = 0$ nên theo định nghĩa giới hạn của dãy số, với mọi $\epsilon > 0$, tồn tại số $N = N(\epsilon)$ sao cho
$$\frac{1}{n} < \epsilon,\ \forall n \ge N.$$

Do đó,

$$0 \leq \sqrt[n]{\frac{1}{n!}} = \sqrt[n]{\frac{1}{1.2.\ldots.N\ldots n}} = \sqrt[n]{\frac{1}{N!}}.\sqrt[n]{\frac{1}{(N+1)(N+2)\ldots n}} \leq \sqrt[n]{\frac{1}{N!}}\sqrt[n]{\epsilon^{n-N}} = \sqrt[n]{\frac{1}{N!}}\epsilon^{1-\frac{N}{n}}.$$

Vì vậy

$$0 \leq \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}} \leq \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{N!}}\epsilon^{1-\frac{N}{n}} = \epsilon. \tag{1.5}$$

■

Chú ý rằng ở đây ta đã sử dụng giới hạn $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{N!}} = 1$, với mỗi số $N$ cho trước.
Bất đẳng thức (1.5) đúng với mỗi số $\epsilon > 0$ tùy ý nên $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}} = 0$.

Cuối cùng, để chỉ ra tiêu chuẩn Cauchy mạnh hơn tiêu chuẩn d'Alambert, chúng ta xét ví dụ sau:

**Ví dụ 2.2.** *Xét chuỗi số dương $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{-n+(-1)^n}$. Chứng minh rằng*

- *Không tồn tại $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$, nói cách khác tiêu chuẩn d'Alambert không sử dụng được trong trường hợp này.*
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{2}$, *do đó theo tiêu chuẩn Cauchy, chuỗi đã cho hội tụ.*

**Bài tập 2.7.** *Hãy xây dựng thêm các ví dụ khác mà tiêu chuẩn d'Alambert không áp dụng được nhưng có thể dùng tiêu chuẩn Cauchy để kiểm tra sự hội tụ hay phân kì của chuỗi đó.*

**Bài tập 2.8.** *Dùng tiêu chuẩn Cauchy để xét sự hội tụ của các chuỗi số sau*

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+n+1}{3n^2+n+1}\right)^n$ 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+2}\right)^n$ 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n^2}5^n}{2^n(n+1)^{n^2}}$

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{n+3}\right)^{n(n+4)}$ 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+3}{n+2}\right)^{n(n+4)}$ 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+\sqrt{n}+\sin n}{2n^2+1}\right)^{3n}$

## 2.6 Bài tập ôn tập

**Bài tập 2.9.** *Sử dụng các tiêu chuẩn: So sánh, d'Alembert, Cauchy, Tích phân, xét sự hội tụ của các chuỗi sau*

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{10n^2+1}$, (b) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{(n-1)(n+2)}}$, (c) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1+n}{n^2-1}\right)^2$,

(d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{n^{\frac{3}{4}}}$, (g) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$, (j) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \ln \frac{n^2+\sqrt{n}}{n^2-n} \tan \frac{1}{n^2}$,

(e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(\frac{1+n}{n}\right)^n$, (h) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln \frac{1+n}{n-1}$, (k) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(3n+1)!}{n^2 8^n}$,

(f) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$, (i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln \frac{1+n}{n}\right)$, (l) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1.3.5...(2n-1)}{2^{2n}(n-1)!}$.

[Gợi ý]

(a) Dùng tiêu chuẩn so sánh, chuỗi đã cho phân kì.

(b) Chứng minh $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 1$, chuỗi đã cho phân kì.

(c) Dùng tiêu chuẩn so sánh, chuỗi đã cho hội tụ.

(d) Nhân liên hợp và dùng tiêu chuẩn so sánh, chuỗi đã cho hội tụ.

(e) Dùng tiêu chuẩn so sánh, với gợi ý $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1+n}{n}\right)^n = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$, chuỗi đã cho hội tụ.

(f) Dùng tiêu chuẩn so sánh, chứng minh $\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}, \forall n \geq 2$, chuỗi đã cho phân kì.

(g) Dùng tiêu chuẩn so sánh, chứng minh $\frac{\ln}{\sqrt{n}} > \frac{\ln 2}{\sqrt{n}}, \forall n \geq 2$, chuỗi đã cho phân kì.

(h) Viết $\frac{1}{\sqrt{n}} \ln \frac{1+n}{n-1} = \frac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(1+\frac{2}{n-1}\right) \sim \frac{1}{\sqrt{n}}.\frac{2}{n-1}$ khi $n\to\infty$. Dùng tiêu chuẩn so sánh, chuỗi đã cho hội tụ.

(i) Nhớ lại khai triển Maclaurin trong học phần Giải tích I, $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$, do đó $x - \ln(1+x) \sim \frac{x^2}{2}$ khi $x \to 0$. Vậy $\frac{1}{n} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{2n^2}$ khi $n\to\infty$.

(j) $\ln \frac{n^2+\sqrt{n}}{n^2-n} \tan \frac{1}{n^2} = \ln\left(1+\frac{n+\sqrt{n}}{n^2-n}\right) \tan\frac{1}{n^2} \sim \frac{n+\sqrt{n}}{n^2-n}.\frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n^3}$ khi $n\to\infty$.

(k) Dùng tiêu chuẩn d'Alambert, chuỗi đã cho hội tụ.

(l) Dùng tiêu chuẩn d'Alambert, chuỗi đã cho phân kì.

**Bài tập 2.10.** *Xét sự hội tụ của các chuỗi số*

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$, (d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{(n-1)n}$, (g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln\frac{1}{n}}{n^2}$,

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n(n!)^2}{(2n)!}$, (e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{7^n(n!)^2}{n^{2n}}$, (h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\left[\pi(2+\sqrt{3})^n\right]$,

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+5}{2^n}$, (f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}\left(\frac{n}{4n-3}\right)^{2n}$, (i) $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n\ln n(\ln\ln n)^2}$,

(j) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e^n n!}{n^n}$.

[Gợi ý]

(a) Sử dụng tiêu chuẩn Cauchy, chuỗi đã cho hội tụ.

(b) Sử dụng tiêu chuẩn d'Alambert, chuỗi đã cho hội tụ.

(c) Sử dụng tiêu chuẩn d'Alambert, chuỗi đã cho hội tụ.

(d) Sử dụng tiêu chuẩn Cauchy, chuỗi đã cho hội tụ.

(e) Sử dụng tiêu chuẩn d'Alambert, chuỗi đã cho hội tụ.

(f) Có thể sử dụng tiêu chuẩn d'Alambert hoặc Cauchy, chuỗi đã cho hội tụ. Nếu sử dụng tiêu chuẩn Cauchy thì các bạn nên nhớ một giới hạn quan trọng sau $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. Chứng minh giới hạn này bằng cách $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln \sqrt[n]{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{n} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

(g) $\frac{\ln \frac{1}{n}}{n^2} = -\frac{\ln n}{n^2}$. Ta có $\ln n < \sqrt{n}$ với mọi $n \geq 4$, nên $\frac{\ln n}{n^2} < \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ với mọi $n \geq 4$. Dùng tiêu chuẩn so sánh, chuỗi đã cho hội tụ. Tại sao lại nghĩ đến bất đẳng thức $\ln n < \sqrt{n}$ với mọi $n \geq 4$? Chúng ta biết rằng $\ln n$ là vô cùng lớn bậc thấp hơn $x^\alpha$ với mọi $\alpha > 0$. Nói cách khác,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{n^\alpha} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\alpha x^\alpha} = 0.$$

Chính vì vậy, với mọi $\alpha > 0$ thì "đến một lúc nào đó", hay là với $n$ "đủ lớn", hoặc chính xác hơn, tồn tại $N \in \mathbb{N}$ sao cho

$$\ln n < n^\alpha \text{ với mọi } n \geq N.$$

Cụ thể, trong bài tập này chúng ta có thể chọn $\alpha = \frac{1}{2}$ như gợi ý trên, hoặc có thể chọn $\alpha \in (0,1)$ bất kì.

(h) $\{S_n\}, S_n = (2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n$ thỏa mãn $S_{n+2} = 4S_{n+1} - S_n$, với mọi $n \geq 0$.

Bằng quy nạp, có thể chứng minh được rằng $S_n$ là chia hết cho $4$, do đó nó là số chẵn với mọi $n$.

Vì vậy, $\sin[\pi(2+\sqrt{3})^n] = -\sin[\pi(2-\sqrt{3})^n] \sim -\pi(2-\sqrt{3})^n$ khi $n \to \infty$.

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \pi(2-\sqrt{3})^n$ là hội tụ bởi vì $0 < \pi(2-\sqrt{3}) < 1$, chuỗi đã cho hội tụ.

(i) Dùng tiêu chuẩn tích phân, chuỗi đã cho hội tụ.

(j) Dùng tiêu chuẩn d'Alambert, chuỗi đã cho hội tụ.

# §3. CHUỖI SỐ VỚI SỐ HẠNG CÓ DẤU BẤT KÌ

## 3.1 Chuỗi hội tụ tuyệt đối, bán hội tụ

**Định lý 3.1.** *Nếu* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *là hội tụ thì* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *cũng là hội tụ.*

*Chứng minh.* Đặt $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n, T_n = |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$, ta có

$$\begin{aligned} S_n + T_n &= (a_1 + |a_1|) + (a_2 + |a_2|) + \cdots + (a_n + |a_n|) \\ &\le 2|a_1| + 2|a_2| + \cdots + 2|a_n| \\ &\le 2T, \end{aligned} \tag{1.6}$$

ở đó $T = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Vậy $\{S_n + T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ là một dãy số tăng và bị chặn trên, nên tồn tại

$$A = \lim_{n\to+\infty} (S_n + T_n).$$

Suy ra

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = A - \lim_{n\to+\infty} T_n = A - T,$$

chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ và có tổng bằng $A - T$. ■

**Chú ý 1.1.** *Mệnh đề đảo của Định lý 3.1 là không đúng. Nghĩa là nếu chuỗi* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *hội tụ thì không kết luận được chuỗi* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *cũng là hội tụ, xem Ví dụ 3.1 dưới đây. Điều này dẫn chúng ta đến định nghĩa sau.*

**Định nghĩa 1.1 (Hội tụ tuyệt đối, bán hội tụ).** *Chuỗi* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *được gọi là*

*i) hội tụ tuyệt đối nếu* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *là hội tụ,*

*ii) bán hội tụ nếu* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *là hội tụ và* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *là phân kỳ.*

**Ví dụ 3.1.** *Xét sự hội tụ tuyệt đối của chuỗi số* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{2^n}$.

*Chứng minh.* Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^n \frac{n}{2^n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ là hội tụ (theo tiêu chuẩn d'Alambert) nên chuỗi đã cho là hội tụ tuyệt đối. ■

**Ví dụ 3.2.** *Xét sự hội tụ tuyệt đối của chuỗi số* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{\sqrt{n^3}}$.

*Chứng minh.* Xét chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\sin n}{\sqrt{n^3}}\right|$ có $\left|\frac{\sin n}{\sqrt{n^3}}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{n^3}}$. Mà chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3}}$ là hội tụ, do đó chuỗi số đã cho là hội tụ tuyệt đối. ■

**Chú ý 1.2.** *Nếu chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *là phân kỳ thì chưa kết luận được chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *cũng là phân kỳ, ví dụ như trường hợp chuỗi bán hội tụ trong Ví dụ 3.1 dưới đây chẳng hạn. Tuy nhiên, nếu chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *là phân kỳ theo tiêu chuẩn d'Alambert hoặc theo tiêu chuẩn Cauchy thì chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *cũng là phân kỳ.*

**Định lý 3.2 (Tiêu chuẩn d'Alambert mở rộng).** *Giả sử tồn tại* $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L$. *Khi đó*

*i) Nếu* $L < 1$ *thì chuỗi đã cho hội tụ tuyệt đối (và do đó hội tụ).*

*ii) Nếu* $L > 1$ *thì cả hai chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *và* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *đều là phân kỳ.*

**Định lý 3.3 (Tiêu chuẩn Cauchy mở rộng).** *Giả sử tồn tại* $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{|a_n|} = L$. *Khi đó*

*i) Nếu* $L < 1$ *thì chuỗi đã cho hội tụ tuyệt đối (và do đó hội tụ).*

*ii) Nếu* $L > 1$ *thì cả hai chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *và* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *đều là phân kỳ.*

**Ví dụ 3.1.** *Xét sự hội tụ của chuỗi số* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{an}{(1-a^2)^n} (0 < |a| \neq 1)$. *Ta có*

$$l = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{|a|n}}{|1-a^2|} = \frac{1}{|1-a^2|}.$$

*Nếu* $0 < |a| < \sqrt{2}$ *thì* $l = \dfrac{1}{|1-a^2|} > 1$, *chuỗi đã cho phân kì theo tiêu chuẩn Cauchy.*

*Nếu* $|a| > \sqrt{2}$ *thì* $l = \dfrac{1}{a^2-1} < 1$, *chuỗi đã cho hội tụ.*

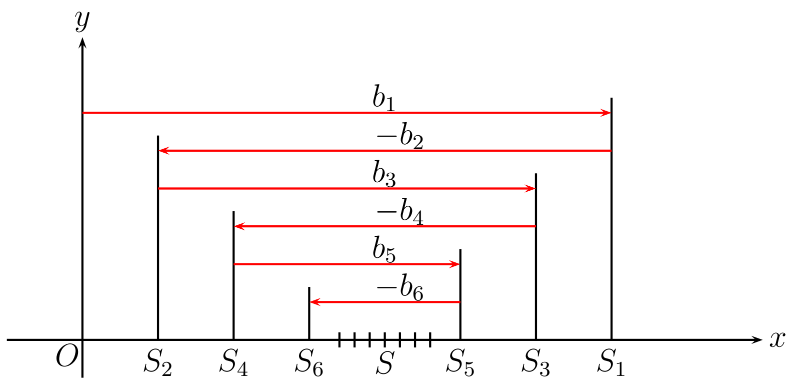
*Nếu* $|a| = \sqrt{2}$ *thì* $\lim\limits_{n\to\infty} |u_n| = \lim\limits_{n\to\infty} n\sqrt{2} = +\infty$, *chuỗi đã cho phân kì theo tiêu chuẩn điều kiện cần.*

Để chỉ ra cho bạn đọc các ví dụ về chuỗi bán hội tụ, chúng ta cần đến khái niệm chuỗi đan dấu sau.

## 3.2 Chuỗi đan dấu

**Định nghĩa 1.1.** *Chuỗi số có dạng* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ *với* $a_n > 0$ *được gọi là một chuỗi đan dấu.*

**Định lý 3.4 (Định lý Leibniz).** *Nếu* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *là một dãy số dương, giảm và* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ *thì* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ *là một chuỗi số hội tụ và* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n \leq a_1$.




*Chứng minh.* Xét dãy tổng riêng $S_{2n}$ có

$$S_{2n+2} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{2n} - a_{2n+2}) \geq S_{2n}.$$

Mặt khác

$$S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - \cdots (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n} \leq a_1.$$

Như vậy dãy tổng riêng chẵn $\{S_{2n}\}$ là một dãy số tăng và bị chặn trên bởi $a_1$ nên tồn tại $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{2n} = S \leq a_1$. Bây giờ xét dãy tổng riêng lẻ $S_{2n+1} = S2n + a_{2n+1}$ nên

$$\lim_{n\to+\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to+\infty} S_{2n} + \lim_{n\to+\infty} a_{2n+1} = S + 0 = S.$$

Kết luận: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ là một chuỗi số hội tụ và $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n = S \leq a_1$. ∎

**Ví dụ 3.1.** *Xét sự hội tụ tuyệt đối của chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n+1}$.

*Chứng minh.* Xét chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n+1}\right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ là phân kỳ. Mặt khác $a_n = \frac{1}{n+1}$ là một dãy số dương, giảm và $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$, do đó chuỗi đan dấu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n+1}$ là hội tụ. Vậy chuỗi số đã cho là bán hội tụ. ∎

**Ví dụ 3.2.** *Xét sự hội tụ tuyệt đối của chuỗi số* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n^2}{n^3+1}$.

*Chứng minh.* Dễ nhận thấy rằng chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\frac{n^2}{n^3+1}\right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^3+1}$ là phân kỳ. Xét chuỗi đan dấu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n^2}{n^3+1}$ có $a_n = \frac{n^2}{n^3+1}$. Trong trường hợp này sẽ không dễ dàng để nhìn thấy ngay $a_n$ là một chuỗi số giảm. Xét hàm số $f(x) = \frac{x^2}{x^3+1}$ có

$$f'(x) = \frac{x(2-x^3)}{(x^3+1)^2}.$$

$f'(x) < 0$ nếu $x > \sqrt[3]{2}$, do đó $f(x)$ là hàm số giảm trên $(2,\infty)$. Do đó $a_n > a_{n+1}$ với $n > 2$. Theo tiêu chuẩn Leibniz, chuỗi đan dấu đã cho hội tụ và do đó bán hội tụ. ■

**Bài tập 3.1.** *Xét sự hội tụ tuyệt đối và bán hội tụ của các chuỗi số sau.*

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+1}{3n+2n}$,

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2}{n^3+4}$,

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(n^2+n+1)}{2^n(n+1)}$,

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$,

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^2}{\pi^n}$,

f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n n!}$,

g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n$,

h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{1}{n\sqrt{n}}$,

i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n}$.

## 3.3 Hội tụ tuyệt đối vs Bán hội tụ

Chuỗi hội tụ tuyệt đối và bán hội tụ khác nhau căn bản ở nhận xét sau đây.

- Với chuỗi hội tụ tuyệt đối, cho dù có thay đổi vị trí các số hạng một cách tùy ý như thế nào đi nữa, chuỗi số mới nhận được vẫn hội tụ tuyệt đối và có tổng bằng chuỗi ban đầu.
- Còn với chuỗi bán hội tụ thì với mọi $M \in \mathbb{R}$ (thậm chí bằng $\infty$), tồn tại một cách thay đổi thay đổi vị trí các số hạng của chuỗi đã cho để nhận được chuỗi mới có tổng bằng $M$.

Đó chính là nội dung của hai Định lý rất sâu sắc, Định lý Dirichlet và Định lý Riemann.

**Định lý 3.5.**

1. *(Dirichlet) Cho chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ là hội tụ tuyệt đối và $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n| = S$. Gọi $\pi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ là một phép hoán vị (hay phép thế, phép song ánh, hay nói nôm na là một cách sắp xếp lại thứ tự các phần tử) bất kì của $\mathbb{N}$. Khi đó chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{\pi(n)}$ cũng hội tụ tuyệt đối và có tổng bằng $S$.*

2. *(Riemann) Cho chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ là bán hội tụ và $M$ là một số thực bất kì. Khi đó tồn tại một phép hoán vị $\pi$ trên $\mathbb{N}$ sao cho chuỗi $a_{\pi(n)}$ hội tụ và có tổng bằng $M$.*

*Chứng minh.* 1. Hiển nhiên

$$T_n = |a_{\pi(1)}| + |a_{\pi(2)}| + \cdots + |a_{\pi(n)}| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = S, \forall n,$$

nên dãy các tổng riêng $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} |a_{\pi(n)}|$ là một dãy số tăng và bị chặn. Do đó tồn tại $\lim_{n\to+\infty} T_n = T \leq S$. Bất đẳng thức ngược lại được chứng minh một cách tương tự. Vậy chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)}$ hội tụ tuyệt đối và

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_{\pi(n)}| = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = T.$$

Giả sử $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$. Để chứng minh chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)}$ cũng có tổng bằng $A$, ta viết

$$\begin{aligned} a_{\pi_n} &= \left(\frac{|a_{\pi_n}| + a_{\pi_n}}{2}\right) - \left(\frac{|a_{\pi_n}| - a_{\pi_n}}{2}\right) \\ &= a'_{\pi_n} - a''_{\pi_n}. \end{aligned} \tag{1.7}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} a'_{\pi_n}, \sum_{n=1}^{\infty} a''_{\pi_n}$ là các chuỗi số dương và theo chứng minh ở trên thì

$$\sum_{n=1}^{\infty} a'_{\pi_n} = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_{\pi_n}| + \sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi_n}\right) = \frac{1}{2}(T+A),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a''_{\pi_n} = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_{\pi_n}| - \sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi_n}\right) = \frac{1}{2}(T-A).$$

Do đó

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi_n} = \frac{1}{2}(T+A) + \frac{1}{2}(T-A) = A.$$

2. Ta thừa nhận Định lý này. ■

**Ví dụ 3.1.** *Chúng ta biết rằng chuỗi đan dấu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ là bán hội tụ. Giả sử*

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

*Bây giờ ta sẽ chỉ ra một cách sắp xếp lại chuỗi đan dấu trên để được một chuỗi mới có tổng chỉ bằng $\frac{1}{2}S$. Chuỗi mới như sau*

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \cdots,$$

*tức là thay vì dấu cộng và dấu trừ xen kẽ thì cứ một dấu cộng rồi đến hai dấu trừ. Như vậy mỗi block sẽ gồm ba phần tử là $\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k} = \frac{1}{2(2k-1)} - \frac{1}{2.2k}$. Vậy chuỗi mới có thể viết dưới dạng như sau:*

$$\begin{aligned}
&\left(1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) - \frac{1}{8} + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10}\right) - \frac{1}{12} + \cdots \\
=&\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \cdots + \frac{1}{2(2k-1)} - \frac{1}{2.2k} + \cdots \\
=&\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots\right) \\
=&\frac{1}{2}S.
\end{aligned}$$

## 3.4 Phép nhân chuỗi

**Định nghĩa 1.1.** *Cho $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ và $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ là hai chuỗi bất kì. Khi đó chuỗi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$, ở đó*

$$c_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n+1-k}$$

*được gọi là tích của hai chuỗi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ và $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$.*

**Định lý 3.6.** *Cho $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ và $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ là các chuỗi hội tụ tuyệt đối và $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = A$ và $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n = B$. Khi đó chuỗi tích $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ cũng hội tụ tuyệt đối và $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n = AB$.*

Tại sao lại định nghĩa phép nhân chuỗi của hai chuỗi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ và $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ theo cách như trên mà không phải là $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n b_n$? Có lẽ chúng xuất phát từ phép nhân hai đa thức. Giả sử

$$P_m(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_m x^m, \quad Q_p(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_m x^p.$$

Khi đó tích của hai đa thức trên sẽ là đa thức $c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_{m+p} x^{m+p}$ mà hệ số của $x^n$ sẽ được tính theo công thức:

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0 = \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n+1-k}.$$

Cũng tương tự như vậy, nếu ta có hai đa thức (chuỗi hình thức) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ và $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ thì phép nhân hai đa thức này sẽ được thực hiện như sau:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \tag{1.8}$$

với

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0 = \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n+1-k}.$$

Thay $x = 1$ trong công thức (1.8) ta được $\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n\right) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$.

Vậy chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ người ta có nghiên cứu không? Câu trả lời là có, và sự hội tụ của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ được thể hiện qua hai tiêu chuẩn hội tụ Dirichlet và Abel thú vị sau.

**Định lý 3.7.** *Cho chuỗi số* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$

1. *(Tiêu chuẩn Dirichlet) Nếu*
   - *dãy các tổng riêng của chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *là bị chặn, và*
   - $b_n$ *là dãy đơn điệu hội tụ đến* $0$

   *thì* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ *là một chuỗi số hội tụ.*

2. *(Tiêu chuẩn Abel) Nếu* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *hội tụ và* $b_n$ *là một dãy số đơn điệu bị chặn thì chuỗi số* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ *cũng hội tụ.*

*Chứng minh.* 1. Đặt $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_n b_n$ và $A_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_n$. Vì $a_k = A_k - A_{k-1}$, ta có

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n \\ &= A_1 b_1 + (A_2 - A_1) b_2 + (A_3 - A_2) b_3 + (A_4 - A_3) b_4 + \cdots + (A_n - A_{n-1}) b_n \\ &= A_1(b_1 - b_2) + A_2(b_2 - b_3) + A_3(b_3 - b_4) + \cdots + A_{n-1}(b_{n-1} - b_n) + A_n b_n \qquad (1.9) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1}) + A_n b_n. \end{aligned}$$

Theo giả thiết, dãy tổng riêng $A_n$ bị chặn, giả sử $|A_n| < M$ với mọi $n$. Khi đó

$$0 \le |A_n b_n| \le M |b_n|.$$

Vì thế $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n b_n = 0$ theo nguyên lý giới hạn kẹp.

Xét chuỗi $\sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k(b_k - b_{k+1})$ có

$$\sum_{k=1}^{n} |A_k(b_k - b_{k+1})| \leq \sum_{k=1}^{n} M(b_k - b_{k+1}) = M(b_1 - b_n) \to Mb_1 \text{ (khi } n \to \infty).$$

Vậy chuỗi $\sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k(b_k - b_{k+1})$ hội tụ tuyệt đối, do đó cũng hội tụ, nghĩa là tồn tại $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n-1} A_k(b_k - b_{k+1}) = S$. Phương trình (1.9) dẫn đến

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n-1} A_k(b_k - b_{k+1}) + \lim_{n\to+\infty} A_n b_n = S.$$

2. Cũng xuất phát từ công thức (1.9). Vì $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ là một dãy số đơn điệu bị chặn nên tồn tại $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = b$, hơn nữa $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ nên tồn tại $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n = A$. Ta có

$$\lim_{n\to+\infty} A_n b_n = Ab.$$

Vì $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ nên dãy các tổng riêng $A_n$ của nó bị chặn, tức là tồn tại số $M$ sao cho $|A_n| < M$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Xét chuỗi $\sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k(b_k - b_{k+1})$ có

$$\sum_{k=1}^{n} |A_k(b_k - b_{k+1})| \leq \sum_{k=1}^{n} M|b_k - b_{k+1}| = M|b_1 - b_n| \to M(|b_1 - b|).$$

Vậy chuỗi $\sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k(b_k - b_{k+1})$ hội tụ tuyệt đối, do đó cũng hội tụ, nghĩa là tồn tại $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n-1} A_k(b_k - b_{k+1}) = S$. Phương trình (1.9) dẫn đến

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n-1} A_k(b_k - b_{k+1}) + \lim_{n\to+\infty} A_n b_n = S + Ab.$$

■

## 3.5 Khi nào dùng tiêu chuẩn nào?

Như vậy có nhiều tiêu chuẩn khác nhau để kiểm tra xem một chuỗi là hội tụ hay phân kỳ. Sẽ là lãng phí thời gian và công sức nếu chúng ta lần lượt sử dụng các tiêu chuẩn cho đến khi nào thu được kết quả mong muốn. Gợi ý sau đây sẽ giúp độc giả dựa vào công thức của số hạng tổng quát $a_n$ để quyết định xem nên sử dụng tiêu chuẩn nào.

1. Nếu nhìn thấy ngay $\lim_{n\to+\infty} a_n \neq 0$ hoặc không tồn tại thì kết luận ngay chuỗi số đã cho là phân kì. Ví dụ $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n}{n+1}\right)$.

2. Chuỗi có số hạng tổng quát là một phân thức, trong đó tử số và mẫu số đều là các đa thức của $n$ hoặc chứa các lũy thừa của $n$, chẳng hạn

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_0 + a_1 n^{\alpha_1} + a_2 n^{\alpha_2} + \cdots + a_m n^{\alpha_m}}{b_0 + b_1 n^{\beta_1} + b_2 n^{\beta_2} + \cdots + b_k n^{\beta_k}}, \text{ với } 0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_m, 0 < \beta_1 < \cdots < \beta_k.$$

   Khi đó so sánh chuỗi đã cho với chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\alpha_m}}{n^{\beta_k}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\beta_k - \alpha_m}}$. Ví dụ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+\sqrt{n}+1}{n^{4+n}}$.

3. Chuỗi có số hạng tổng quát là một phân thức, trong đó tử số và mẫu số đều là tổng của các lũy thừa với số mũ là $n$, chẳng hạn

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_1 a_1^n + \alpha_2 a_2^n + \cdots + \alpha_m a_m^n}{\beta_1 b_1^n + \beta_2 b_2^n + \cdots + \beta_k b_k^n}, \text{ với } 0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_m, 0 < b_1 < b_2 < \cdots < b_k.$$

   Khi đó so sánh chuỗi số đã cho với chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_m}{b_k}\right)^n$. Chẳng hạn $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{4^n+5^n}$.

4. Một số chuỗi dùng tiêu chuẩn so sánh có sử dụng đến các VCB tương đương hoặc khai triển Maclaurin (trong học phần Giải tích I). Chẳng hạn như, xét sự hội tụ của chuỗi số

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n}\right).$$

5. Nếu chuỗi số là một hàm phân thức mà cả tử số và mẫu số có chứa cả các hàm đa thức, hàm số mũ, hàm số logarit, chẳng hạn

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + \ln n + 2^n}{n + \log_2 n + e^n}$$

   thì xử lý như thế nào? Trong trường hợp này, số hạng trội của tử số là $2^n$ và số hạng trội của mẫu số là $e^n$. Do đó, so sánh chuỗi số đã cho với chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{e}\right)^n$, ta có chuỗi số đã cho hội tụ. Nói cách khác, hàm đa thức, hàm số mũ (với cơ số $> 1$) và hàm số logarit (với cơ số $> 1$) đều tiến ra vô cùng khi $n \to +\infty$. Tuy nhiên, hàm số logarit tiến ra vô cùng "chậm hơn" hàm số đa thức (là VCL bậc thấp hơn), và hàm số đa thức tiến ra vô cùng "chậm hơn" hàm số mũ (là VCL bậc thấp hơn).

$$\boxed{\textbf{Hàm số logarit}} \prec \boxed{\textbf{Hàm số đa thức}} \prec \boxed{\textbf{Hàm số mũ}}$$

Cụ thể, bạn đọc có thể tự chứng minh dễ dàng hai giới hạn sau (bằng cách đưa về giới hạn của hàm số và dùng quy tắc L'Hospital):

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\log_a n}{n^\alpha}=0,\ \lim_{n\to+\infty}\frac{n^\alpha}{a^n}=0,\ \forall a>1,\alpha>0.$$

6. Nếu chuỗi là chuỗi đan dấu có dạng $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ hoặc $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ thì có thể nghĩ đến dùng tiêu chuẩn Leibniz. Ví dụ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^{2+1}}$.

7. Nếu chuỗi có số hạng tổng quát là một biểu thức có chứa $a^n, n!, (2n)!!, (2n+1)!!$ hoặc $n^n$ thì có thể nghĩ đến tiêu chuẩn d'Alambert. Ví dụ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}, \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}$.

8. Nếu chuỗi số có dạng $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(b_n)^n$ thì có thể nghĩ đến tiêu chuẩn Cauchy. Chẳng hạn $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.

9. Nếu $a_n=f(n)$, ở đó $\int_1^{\infty}f(x)dx$ có thể tính được, thì có thể nghĩ đến tiêu chuẩn tích phân. Chẳng hạn $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2e^{-n^3}, \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$.

Bạn đọc nên hiểu rằng **có thể nghĩ đến** ở đây là một lời khuyên, chứ không phải lúc nào cũng luôn luôn như vậy. Chẳng hạn như:

a) Chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cos\frac{1}{n}$ tuy là một chuỗi đan dấu, nhưng nó phân kì theo tiêu chuẩn điều kiện cần. Thật vậy, $\lim\limits_{n\to+\infty}\cos\frac{1}{n}=1$ nên không tồn tại $\lim\limits_{n\to+\infty}(-1)^n\cos\frac{1}{n}$.

b) Bài số 2e trong đề cương bài tập, chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left(\frac{1+n}{n}\right)^n$ tuy có hình thức làm ta liên tưởng đến tiêu chuẩn Cauchy, nhưng $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}=1$. Nói cách khác, tiêu chuẩn Cauchy không áp dụng được trong trường hợp này. Chúng ta sẽ dùng tiêu chuẩn so sánh để so sánh chuỗi số đã cho với $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ với nhận xét như sau:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1+n}{n}\right)^n=e.$$

## 3.6 Ví dụ về chuỗi bán hội tụ không phải là chuỗi đan dấu

Hầu hết các ví dụ về chuỗi bán hội tụ mà các bạn đã gặp đều có dạng chuỗi đan dấu. Để chỉ ra một ví dụ không tầm thường về chuỗi bán hội tụ mà không phải là chuỗi đan dấu chúng ta cần đến tiêu chuẩn Dirichlet (mở rộng của tiêu chuẩn Leibniz) sau.

**Định lý 3.8 (Tiêu chuẩn Dirichlet).** *Cho chuỗi số* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$. *Nếu*

*i) dãy các tổng riêng của chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *là bị chặn, và*

*ii)* $b_n$ *là dãy đơn điệu hội tụ đến* $0$

*thì* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ *là một chuỗi số hội tụ.*

Tiêu chuẩn Leibniz là một trường hợp riêng của tiêu chuẩn Dirichlet. Thật vậy, xét chuỗi đan dấu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ với $a_n = (-1)^{n-1}$. Dãy các tổng riêng của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$ có dạng $S_{2n} = 0, S_{2n+1} = 1$ nên $S_n \leq 1$ với mọi $n$.

**Ví dụ 3.1.** *Chứng minh rằng* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$ *là một chuỗi bán hội tụ.*

*Chứng minh.* Trước hết, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ với $a_n = \sin n, b_n = \frac{1}{n}$. Hiển nhiên, dãy $b_n$ là đơn điệu và hội tụ về $0$. Bây giờ ta đi chứng minh $S_N = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum\limits_{n=1}^{N} \sin n$ là một dãy số bị chặn. Thật vậy,

$$2\sin\frac{1}{2}S_N = 2\sin\left(\frac{1}{2}\right)\sum_{n=1}^{N}\sin n = \sum_{n=1}^{N}\left[\cos\left(n-\frac{1}{2}\right) - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\right] = \cos\left(\frac{1}{2}\right) - \cos\left(N+\frac{1}{2}\right).$$

Do đó

$$S_N = \frac{\cos\left(\frac{1}{2}\right) - \cos\left(N+\frac{1}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{1}{2}\right)} \leq \frac{1}{\sin\left(\frac{1}{2}\right)}.$$

Theo tiêu chuẩn Dirichlet, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$ là một chuỗi số hội tụ.

Việc tiếp theo là đi chứng minh $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\sin n}{n}\right|$ là một chuỗi số phân kì. Thật vậy, với mỗi số tự nhiên $k$, khoảng $\left[\frac{\pi}{6} + k\pi, \pi - \frac{\pi}{6} + k\pi\right]$ có độ dài bằng $\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = \frac{4\pi}{6} > 1$ nên chứa ít nhất một số tự nhiên $n_k$ nào đó. Khi đó

$$|\sin(n_k)| \geq \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{|\sin n_k|}{n_k} \geq \frac{1}{2}.\frac{1}{n_k} \geq \frac{1}{2}.\frac{1}{\pi(k+1)}.$$

Chuỗi điều hòa $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1}$ là phân kì nên theo tiêu chuẩn so sánh, chuỗi $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{|\sin n_k|}{n_k}$ cũng là phân kì. Cũng theo tiêu chuẩn so sánh, chuỗi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{|\sin n|}{n}$ là phân kì. ∎

**Chú ý 1.1.** *Người ta thậm chí còn tính được*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n} = \frac{\pi - 1}{2}.$$

*Xem chứng minh trong Bài tập 6.2.*

## 3.7 Bài tập ôn tập

**Bài tập 3.2 (Cuối kì, K61).** *Xét sự hội tụ của các chuỗi số*

*a)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{3^{n^2}}$,

*b)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{4^{n^2}}$,

*c)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\cos\frac{1}{n+1} - \cos\frac{1}{n}\right)$,

*d)* $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \left(\cos\frac{1}{n} - \cos\frac{1}{n-1}\right)$.

**Bài tập 3.3.** *Chứng minh rằng chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^p}$ *là*

*a) hội tụ tuyệt đối nếu* $p > 1$*,*

*b) bán hội tụ nếu* $p = 1$*,*

*c) bán hội tụ nếu* $0 < p < 1$*.*

[Gợi ý] Trường hợp $p = 1$ đã được chứng minh ở Ví dụ 3.1. Trường hợp $p > 1$ sử dụng tiêu chuẩn so sánh với

$$\left|\frac{\sin n}{n^p}\right| \leq \frac{1}{n^p}.$$

Trường hợp $p < 1$, chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^p}$ hội tụ theo tiêu chuẩn Dirichlet. Chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\sin n}{n^p}\right|$ là phân kì vì sử dụng tiêu chuẩn so sánh với

$$\left|\frac{\sin n}{n^p}\right| \geq \left|\frac{\sin n}{n}\right|.$$

**Bài tập 3.4.** *Chứng minh rằng chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^p}$ *là*

*a) hội tụ tuyệt đối nếu* $p > 1$*,*

*b) bán hội tụ nếu* $p = 1$*,*

*c) bán hội tụ nếu* $0 < p < 1$*.*

[Gợi ý] Trường hợp $p = 1$, xem lại cách chứng minh chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$ bán hội tụ trong Ví dụ 3.1. Các trường hợp $p > 1$ và $0 < p < 1$ chứng minh tương tự như Bài tập 3.3.

**Bài tập 3.5.** *Xét sự hội tụ của các chuỗi số sau.*

*(a)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right)^2$*,*

*(b)* $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n+1}{n-\ln n}$*,*

*(c)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \arcsin(e^{-n})$*,*

*(d)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin(\pi\sqrt{n^2+a^2})$,

*(e)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{3^n n!}$,

*(f)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\cos\frac{a}{n}\right)^{n^3}$,

*(g)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n^2}2^n}{(n+1)^{n^2}}$,

*(h)* $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}(\ln n)^{\beta}}, (\alpha, \beta > 0)$,

*(i)* $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n + 2\cos n\alpha}{n(\ln n)^{\frac{3}{2}}}$,

*(j)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{na}{(1-a^2)^n}, 0 < |a| \neq 1$.

[Gợi ý]

(a) Dùng tiêu chuẩn so sánh, chuỗi đã cho hội tụ.

(b) Nhận xét $a_{2n+1} = 0$ với mọi $n$. Sau đó dùng tiêu chuẩn so sánh đối với chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{2n}$, chuỗi đã cho phân kì.

(c) Dùng tiêu chuẩn so sánh, chuỗi đã cho hội tụ.

(d) $\sin(\pi\sqrt{n^2+a^2}) = (-1)^n \sin(\pi\sqrt{n^2+a^2} - n\pi) = (-1)^n \sin\dfrac{a^2\pi}{\sqrt{n^2+a^2}+n}$

$0 < \dfrac{a^2\pi}{\sqrt{n^2+a^2}+n} < \pi, \forall n$, khi $n$ đủ lớn, $\left\{\sin\dfrac{a^2\pi}{\sqrt{n^2+a^2}+n}\right\}$ là một dãy số dương hội tụ về $0$, chuỗi đã cho hội tụ theo tiêu chuẩn Leibniz.

(e) Dùng tiêu chuẩn d'Alambert, chuỗi đã cho hội tụ.

(f) Dùng tiêu chuẩn Cauchy, chuỗi đã cho hội tụ.

(g) Dùng tiêu chuẩn Cauchy, chuỗi đã cho hội tụ.

(h) Biện luận theo tham số $\alpha$, chia làm 3 trường hợp là $\alpha > 1$ (dùng tiêu chuẩn so sánh), $\alpha < 1$ (dùng tiêu chuẩn so sánh) và $\alpha = 1$ (dùng tiêu chuẩn tích phân).

(i) Dùng tiêu chuẩn so sánh kết hợp với tiêu chuẩn tích phân, chuỗi đã cho hội tụ.

(j) Dùng tiêu chuẩn Cauchy hoặc d'Alambert và biện luận theo tham số $a$.

**Bài tập 3.6.** *Tính tổng của các chuỗi số sau đây*

$a)\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{n!}$ $\qquad b)\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$ $\qquad c)\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{4n^2-1}$

$d)\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$ $\qquad e)\sum\limits_{n=1}^{\infty} \arctan\dfrac{1}{1+n+n^2}$

[Gợi ý]

a) $\dfrac{n^2}{n!} = \dfrac{n}{(n-1)!} = \dfrac{1}{(n-2)!} + \dfrac{1}{(n-1)!}, n \geq 2$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-2)!} = 2e$$

b) $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}} - \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} \Rightarrow S = -\frac{1}{\sqrt{2}+1} = 1-\sqrt{2}$$

c) $\dfrac{1}{4n^2-1} = \dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{1}{2n-1} - \dfrac{1}{2n+1}\Big)$

$$S_n = \frac{1}{2}\Big(1 - \frac{1}{2n+1}\Big) \Rightarrow S = \frac{1}{2}$$

d) $\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)} = \dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{1}{n(n+1)} - \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}\Big) = \dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{1}{n} - 2\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2}\Big)$

$$S_n = \frac{1}{2}\Big(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\Big) \Rightarrow S = \frac{1}{4}$$

e) $\arctan\dfrac{1}{1+n+n^2} = \arctan\dfrac{(n+1)-n}{1+(n+1)n} = \arctan(n+1) - \arctan n$

$$S_n = \arctan(n+1) - \arctan 1 \Rightarrow S = \frac{\pi}{4}.$$

**Bài tập 3.7.** *Chứng minh rằng các chuỗi số sau là phân kì*

*a)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-2n+1}{5n^2+(-1)^n\sqrt{n}}$ *b)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{n}{n+1}\Big)^{\frac{n}{2}}$ *c)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \arctan\frac{2^n}{n}$

[Gợi ý] Tất cả các chuỗi số này đều không thỏa mãn điều kiện cần, do đó đều phân kì.

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-2n+1}{5n^2+(-1)^n\sqrt{n}} = \frac{1}{5} \neq 0$

b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \Big(\frac{n}{n+1}\Big)^{\frac{n}{2}} = e^{-\frac{1}{2}} \neq 0$

c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \arctan\frac{2^n}{n} = \frac{\pi}{2} \neq 0$

**Bài tập 3.8.** *Sử dụng các tiêu chuẩn so sánh, d'Alembert, Cauchy hoặc tiêu chuẩn tích* *phân để xét sự hội tụ của các chuỗi số sau*

$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln \frac{n+1}{n-1}$ $\quad b) \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n^4+2n+1} - \sqrt{n^4+an})$ $\quad c) \sum_{n=1}^{\infty} n^3 e^{-n^2}$

$d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+5}{3^n}$ $\quad e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^2 2 + \ln^2 3 + \ldots + \ln^2 n}{n^{\alpha}}$ $\quad f) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n n!}{n^n}, (a \neq e)$

$g) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^{2n}(n-1)!}$ $\quad h) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n}\Big(1 - \frac{1}{n}\Big)^{n^2}$ $\quad i) \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}\Big(\frac{n}{4n-3}\Big)^{2n}$

$j) \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{n+a}{n+b}\Big)^{n^2}$ $\quad k) \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n (\ln \ln n)^2}$ $\quad l) \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln^p n}, (p > 0)$

**[Gợi ý]**

a) $\frac{1}{\sqrt{n}} \ln \frac{n+1}{n-1} \sim \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{2}{n-1} \sim \frac{2}{n^{\frac{3}{2}}}$ $(n \to \infty)$, **chuỗi đã cho hội tụ.**

b) $\sqrt{n^4+2n+1} - \sqrt{n^4+an} = \frac{(2-a)n+1}{\sqrt{n^4+2n+1} + \sqrt{n^4+an}} \sim \frac{(2-a)n+1}{2n^2}$

**Nếu** $a = 2$, $u_n \sim \frac{1}{2n^2}$ **chuỗi đã cho hội tụ.**

**Nếu** $a \neq 2$, $u_n \sim \frac{a-2}{2n}$, **chuỗi đã cho phân kì.**

c) **Với số** $n$ **đủ lớn:** $n^3 e^{-n^2} \leq \frac{1}{n^2}$, **chuỗi đã cho hội tụ.**

d) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2+5}{3^{n+1}} \frac{3^n}{n^2+5} = \frac{1}{3} < 1$, **chuỗi đã cho hội tụ.**

e) $\alpha > 2$: $a_n \leq \frac{\ln^2 n}{n^{\alpha-1}} \leq \frac{1}{n^{1+\varepsilon}}; (0 < \varepsilon < \alpha - 2)$, **chuỗi đã cho hội tụ.**

$\alpha \leq 2$: $a_n \geq \frac{\ln^2 2}{n^{\alpha-1}}$, **chuỗi đã cho phân kì.**

f) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n} = \frac{a}{e}$. **chuỗi đã cho hội tụ nếu** $a < e$, **phân kì nếu** $a > e$.

g) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)!!}{2^{2(n+1)} n!} \frac{2^{2n}(n-1)!}{(2n-1)!!} = \frac{1}{2} < 1$, **chuỗi đã cho hội tụ.**

h) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{5} \lim_{n\to\infty} \Big(1 - \frac{1}{n}\Big)^n = \frac{1}{5e} < 1$, **chuỗi đã cho hội tụ.**

i) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}\Big(\frac{n}{4n-3}\Big)^2 = \frac{1}{16} < 1$, **chuỗi đã cho hội tụ.**

j) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n+a}{n+b}\right)^n = e^{a-b}$.

Nếu $a > b$ thì $e^{a-b} > 1$ chuỗi đã cho phân kì.

Nếu $a < b$ thì $e^{a-b} < 1$ chuỗi đã cho hội tụ.

Nếu $a = b$, $a_n = 1$ không thỏa mãn điều kiên cần để chuỗi hội tụ, do đó chuỗi đã cho phân kì.

k) $f(x) = \dfrac{1}{x\ln x(\ln\ln x)^2}, x \geq 3$

$\int\limits_3^\infty f(x)dx = -\dfrac{1}{\ln\ln x}\Big|_3^\infty < +\infty$, chuỗi đã cho hội tụ.

l) $f(x) = \dfrac{1}{x\ln^p x}, x \geq 2$

$$\int\limits_2^\infty f(x)dx = \begin{cases} \ln\ln x\Big|_2^\infty & \text{nếu } p = 1 \\ \dfrac{(\ln x)^{1-p}}{1-p}\Big|_2^\infty & \text{nếu } p \neq 1 \end{cases}$$

chuỗi đã cho hội tụ nếu $p > 1$, phân kì nếu $0 < p \leq 1$.

**Bài tập 3.9.** *Sử dụng tiêu chuẩn Leibnitz để xét sự hội tụ của các chuỗi số sau*

*a)* $\sum\limits_{n=2}^\infty \dfrac{(-1)^n \ln n}{n}$  *b)* $\sum\limits_{n=2}^\infty (-1)^{n-1}\dfrac{\sqrt{n}}{n+e}$  *c)* $\sum\limits_{n=1}^\infty (-1)^n \dfrac{5n+3}{n^2+n}$

[Gợi ý]

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln n}{n} = 0$; $a_n = \dfrac{\ln n}{n}$ là giảm khi $n \to \infty$ bởi vì

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}; f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2} < 0, \forall x \geq 3$$

Chuỗi đã cho hội tụ.

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{n+e} = 0$; $a_n = \dfrac{\sqrt{n}}{n+e}$ là giảm khi $n \to \infty$ bởi vì

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+e}; f'(x) = \frac{e-x}{2\sqrt{x}(x+e)^2} < 0, \forall x \geq 3$$

Chuỗi đã cho hội tụ.

c) $\sum\limits_{n=1}^\infty (-1)^n \dfrac{5n+3}{n^2+n} = 2\sum\limits_{n=1}^\infty \dfrac{(-1)^n}{n+1} + 3\sum\limits_{n=1}^\infty \dfrac{(-1)^n}{n}$, chuỗi đã cho hội tụ bởi vì cả hai chuỗi ở vế phải đều hội tụ.

**Bài tập 3.10.** *Xét sự hội tụ của các chuỗi số sau*

*a)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^\alpha}; (\alpha > 1)$ *b)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^p}; (p > 0)$ *c)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n+2^n}$

*d)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{n} - \ln\frac{n+1}{n}\Big)$ *e)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin(\pi\sqrt{n^2+a^2}); a \in \mathbb{R}$ *f)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin[\pi(2+\sqrt{3})^n]$

*g)* $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha(\ln n)^\beta}, (\alpha, \beta > 0)$ *h)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \Big(\cos\frac{a}{n}\Big)^{n^3}; a \in \mathbb{R}$ *i)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$

[Gợi ý]

a) Chọn $0 < \varepsilon < \alpha - 1$, khi $n$ là đủ lớn $\frac{\ln n}{n^\alpha} \le \frac{1}{n^{\alpha-\varepsilon}}$, $\alpha - \varepsilon > 1$ do đó chuỗi đã cho hội tụ.

b) Với $1 > \varepsilon > 0$ bất kì, ta có, với số $n$ đủ lớn: $\frac{1}{(\ln n)^p} \ge \frac{1}{n^\varepsilon}$, chuỗi đã cho phân kì.

c) $\frac{2n}{n+2^n} \sim \frac{2n}{2^n}$ khi $n \to \infty$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2(n+1)}{2^{n+1}} \frac{2^n}{2n} = \frac{1}{2} < 1$, the chuỗi đã cho hội tụ.

d) $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ khi $x \to 0$, nên

$$n - \ln\Big(1 + \frac{1}{n}\Big) \sim \frac{1}{2n^2}, \text{ khi } n \to \infty$$

chuỗi đã cho hội tụ.

e) $\sin(\pi\sqrt{n^2+a^2}) = (-1)^n \sin(\pi\sqrt{n^2+a^2} - n\pi) = (-1)^n \sin\frac{a^2\pi}{\sqrt{n^2+a^2}+n}$

$0 < \frac{a^2\pi}{\sqrt{n^2+a^2}+n} < \pi, \forall n$, khi $n$ đủ lớn, $\Big\{\sin\frac{a^2\pi}{\sqrt{n^2+a^2}+n}\Big\}$ là một dãy số dương hội tụ về $0$, chuỗi đã cho hội tụ theo tiêu chuẩn Leibniz.

f) $\{S_n\}, S_n = (2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n$ thỏa mãn $S_{n+2} = 4S_{n+1} - S_n$, với mọi $n \ge 0$.

Bằng quy nạp, có thể chứng minh được rằng $S_n$ là số chẵn với mọi $n$.

Vì vậy, $\sin[\pi(2+\sqrt{3})^n] = -\sin[\pi(2-\sqrt{3})^n] \sim -\pi(2-\sqrt{3})^n$ khi $n \to \infty$.

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \pi(2-\sqrt{3})^n$ là hội tụ bởi vì $0 < \pi(2-\sqrt{3}) < 1$, chuỗi đã cho hội tụ.

g) $\alpha > 1$: $\frac{1}{n^\alpha(\ln n)^\beta} \le \frac{1}{n^{\alpha-\varepsilon}}$ ở đó $0 < \varepsilon < \alpha - 1$, chuỗi đã cho hội tụ.

$0 < \alpha < 1$: $\frac{1}{n^\alpha(\ln n)^\beta} \ge \frac{1}{n^{\alpha+\varepsilon}}$ ở đó $0 < \varepsilon < 1 - \alpha$, chuỗi đã cho phân kì.

$\alpha = 1$.

Kết luận, chuỗi đã cho hội tụ nếu và chỉ nếu $\alpha > 1$ hoặc $\alpha = 1, \beta > 1$; và phân kì nếu $0 < \alpha < 1$ hoặc $\alpha = 1, 0 < \beta \leq 1$.

h) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\cos\dfrac{a}{n}\right)^{n^2} = e^{-\frac{a^2}{2}} < 1$, chuỗi đã cho hội tụ.

i) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)^2}{2^{2n+1}} = 0$, chuỗi đã cho hội tụ.

# §4. CHUỖI HÀM SỐ

## 4.1 Chuỗi hàm số hội tụ

**Định nghĩa 1.1.** *Cho dãy các hàm số* $\{a_n(x)\}$. *Chuỗi hàm số được định nghĩa như sau:*

$$u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x).$$

*i) Chuỗi hàm số* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *được gọi là hội tụ tại* $x = x_0$ *nếu chuỗi số* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ *là hội tụ.*

*ii) Chuỗi hàm số* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *được gọi là phân kỳ tại* $x = x_0$ *nếu chuỗi số* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ *là phân kỳ.*

*Tập hợp các điểm hội tụ của* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *được gọi là miền hội tụ.*

**Ví dụ 4.1.** *Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm số* $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$.

*Chứng minh.* Tại mỗi điểm $x = x_0$ thì chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} x_0^n$ là một chuỗi hình học. Do đó, theo Ví dụ 1.5 thì chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} x_0^n$ là hội tụ nếu $|x_0| < 1$ và phân kỳ nếu $|x_0| \geq 1$. Vậy miền hội tụ của chuỗi hàm số đã cho là $(-1, 1)$. ■

**Ví dụ 4.2.** *Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm số* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$.

*Chứng minh.* Tại mỗi điểm $x = x_0$ xét chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{x_0}}$. Theo Ví dụ 2.1 thì chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{x_0}}$ là hội tụ nếu và chỉ nếu $x_0 > 1$. Vậy miền hội tụ của chuỗi hàm số đã cho là $(1, +\infty)$. ■

**Bài tập 4.1.** *Tìm miền hội tụ của các chuỗi số sau*

*a)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin x + \cos x}{n^2 + x^2}$,

*b)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$,

*c)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{2^n(n+1)}$,

*d)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{n^n} x^n$,

*e)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n+1} x^n}{5^n}$,

*f)* $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n + \sin x}{3n+1}$.

[Gợi ý]

a) Dùng tiêu chuẩn so sánh, miền hội tụ $\mathbb{R}$.

b) Dùng tiêu chuẩn d'Alambert, miền hội tụ $\mathbb{R}$.

c) Dùng tiêu chuẩn so sánh, miền hội tụ $\mathbb{R}$.

d) Dùng tiêu chuẩn d'Alambert, chuỗi đã cho hội tụ nếu $|x| < \frac{e}{2}$ và phân kì nếu $|x| > \frac{e}{2}$. Tại $x = \frac{e}{2}$, chuỗi đã cho trở thành $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{n^n} \left(\frac{e}{2}\right)^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n! \left(\frac{e}{n}\right)^n$.

**Ví dụ 4.3 (Cuối kì, K62).** *Xét sự hội tụ, phân kỳ của chuỗi số* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!e^n}{n^n}$.

Ta có

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1.$$

Trong trường hợp này các tiêu chuẩn Cauchy và d'Alambert đều không có hiệu quả. Tuy nhiên,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1 \Rightarrow u_{n+1} > u_n > \ldots > u_1 = e \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n \neq 0$$

nên chuỗi đã cho phân kỳ.

Kết luận: miền hội tụ là $|x| < \frac{e}{2}$.

Sẽ là khó hơn nhiều, nếu như ta thay đổi đề bài đi một chút như sau.

**Ví dụ 4.4.** *Xét sự hội tụ, phân kỳ của chuỗi số* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!e^n}$.

Lúc này, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ nên không thể dùng tiêu chuẩn điều kiện cần để chứng minh chuỗi phân kì như trên được. Chúng ta cần sử dụng đến các công cụ mạnh hơn của giải tích như:

- Công thức Stirling $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$ hoặc
- Tiêu chuẩn Raabe (xem Phụ lục C, Ví dụ 1.1): Giả thiết

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = 1,$$
$$\lim_{n\to+\infty} n\left(\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| - 1\right) = R.$$

Khi đó, $R > 1$ thì chuỗi hội tụ, $R < 1$ thì chuỗi phân kì.

e) Dùng tiêu chuẩn d'Alambert, miền hội tụ $|x| < \frac{5}{4}$.

f) Miền hội tụ bằng $\emptyset$ vì $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \sin\frac{1}{3} \neq 0$ với mọi $x$.

## 4.2 Chuỗi hàm số hội tụ đều

**Đặt vấn đề:** Cho chuỗi hàm số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$. Giả thiết rằng miền hội tụ của chuỗi hàm số này là $X$, và chuỗi hàm số này hội tụ đến hàm số $S(x)$ trên $X$, i.e.,

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x),\ x \in X.$$

- Nếu với mỗi $n$, hàm số $u_n(x)$ có tính chất A nào đó (liên tục, khả tích, khả vi), thì liệu hàm số $S(x)$ cũng có tính chất này?
- Phải chăng
$$S'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x),$$
nghĩa là chuyển dấu đạo hàm vào phía trong biểu thức $\sum$ được?

Chẳng hạn như, chuỗi hàm số sau đây đã gặp ở học phần Giải tích I:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Phải chăng

$$\cos x = (\sin x)' = \left(\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \left((-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Để trả lời được các câu hỏi này chúng ta cần đến khái niệm **hội tụ đều** sau.

**Định nghĩa 1.2.** *Chuỗi hàm số* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ ***hội tụ đều đến*** $S(x)$ ***trên tập*** $X$ ***nếu*** $\forall \epsilon > 0, \exists n(\epsilon) \in \mathbb{N}$ :

$$|S_n(x) - S(x)| < \epsilon, \forall n > n(\epsilon), \forall x \in X.$$

- Chú ý rằng trong định nghĩa trên, $n(\epsilon)$ chỉ phụ thuộc vào $\epsilon$ mà không phụ thuộc vào $x$.
- Ý nghĩa hình học: với $n$ đủ lớn thì $S_n(x)$ nằm hoàn toàn trong dải $(S(x) - \epsilon, S(x) + \epsilon), x \in X$.

**Định lý 4.1 (Tiêu chuẩn Cauchy).** *Chuỗi hàm số* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *hội tụ đều trên tập* $X$ *nếu* $\forall \epsilon > 0, \exists n(\epsilon) \in \mathbb{N}$ :

$$|S_p(x) - S_q(x)| < \epsilon, \forall p, q > n(\epsilon), \forall x \in X.$$

**Định lý 4.2 (Tiêu chuẩn Weierstrass).** *Nếu*

*i)* $|u_n(x)| \leq a_n, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in X$,

*ii) chuỗi số* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *hội tụ*

*thì chuỗi hàm số* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *hội tụ tuyệt đối và đều trên* $X$.

**Ví dụ 4.1.**

i) Chuỗi hàm số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos nx}{n^2+x^2}$ hội tụ đều trên $\mathbb{R}$ theo tiêu chuẩn Weierstrass. Thật vậy,

$$\left|\frac{\cos nx}{n^2+x^2}\right| \leq \frac{1}{n^2+x^2} \leq \frac{1}{n^2}, \forall x \in \mathbb{R}$$

và chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ là hội tụ.

ii) Xét chuỗi hàm số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n+x^2}$.

Với mỗi $x \in \mathbb{R}$, chuỗi số tương ứng là chuỗi đan dấu và hội tụ theo tiêu chuẩn Leibnitz. Kí hiệu tổng của chuỗi đã cho là $S(x)$, chính là tổng của chuỗi số tương ứng với $x$. Với mỗi $x \in \mathbb{R}$, ta có

$$|S(x) - S_n(x)| \leq \frac{1}{x^2+n+1} \leq \frac{1}{n+1} \to 0 \text{ khi } n \to \infty.$$

Do đó, chuỗi hàm số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n+x^2}$ hội tụ đều đến $S(x)$ (tại sao? gợi ý: dựa vào định nghĩa).

**Bài tập 4.2.** *Xét sự hội tụ đều của các chuỗi hàm số*

*a)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{x^2+n^2}, x \in \mathbb{R}$.

*b)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2+x^2}, x \in \mathbb{R}$.

*c)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n n \sqrt[3]{n}}, x \in [-2, 2]$.

*d)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} \left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^n, x \in [-1, 1]$.

[Gợi ý]

a) Dùng tiêu chuẩn Weierstrass, chuỗi đã cho hội tụ đều.

b) Dùng tiêu chuẩn Weierstrass, chuỗi đã cho hội tụ đều.

c) Dùng tiêu chuẩn Weierstrass, chuỗi đã cho hội tụ đều.

d) Đặt $y = \frac{2x+1}{x+2}$. Khảo sát hàm số này trong đoạn $[-1, 1]$ ta được $-1 \leq y \leq 1$. Dùng tiêu chuẩn Weierstrass, chuỗi đã cho hội tụ đều.

## 4.3 Các tính chất của chuỗi hàm số hội tụ đều

**Định lý 4.3 (Tính liên tục).** *Nếu*

*i)* $u_n(x)$ *liên tục trên* $X$ *với mọi* $n$*,*

*ii) Chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *hội tụ đều về* $S(x)$ *trên* $X$

*thì* $S(x)$ *liên tục trên* $X$*, i.e.,*

$$\lim_{x\to x_0} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x\to x_0} u_n(x).$$

**Ví dụ 4.1.** *Xét tính liên tục của chuỗi hàm số* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \arctan \frac{x}{\sqrt{n+1}}$.

[Gợi ý] Dùng tiêu chuẩn Weierstrass, chuỗi hàm số đã cho hội tụ đều trên $\mathbb{R}$, do đó liên tục.

**Định lý 4.4 (Tính khả tích).** *Nếu*

*i)* $u_n(x)$ *liên tục trên* $[a,b]$ *với mọi* $n$*,*

*ii) Chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *hội tụ đều về* $S(x)$ *trên* $[a,b]$

*thì* $S(x)$ *khả tích trên* $[a,b]$ *và*

$$\int\limits_a^b S(x)dx = \int\limits_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int\limits_a^b u_n(x)dx\right).$$

**Ví dụ 4.1.** *Tính tổng của chuỗi số* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{n+1}{(\sqrt{2})^n} = 1 + \sqrt{2} + \dfrac{3}{2} + \cdots + \dfrac{n+1}{(\sqrt{2})^n} + \cdots$

*Xét chuỗi hàm số* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n =: f(x)$*. Nhận xét:*

- *Chuỗi hàm số này không tính được một cách trực tiếp,*
- *tuy nhiên* $\int (n+1)x^n dx = x^{n+1}$ *và chuỗi hàm số* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^{n+1}$ *thì tính được và bằng* $\frac{x}{1-x}$ *(là cấp số nhân với công bội bằng* $x$*).*

*Do đó, chúng ta tích phân từng thành phần của chuỗi hàm số* $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$ *trong khoảng* $[0,x]$*:*

$$\int\limits_0^x f(t)dt = \int\limits_0^x \Big(\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)t^n\Big)dt = \sum_{n=0}^{\infty}\int\limits_0^x (n+1)t^n dx$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1} = \frac{x}{1-x}.$$

*Đạo hàm 2 vế phương trình này ta được,* $f(x) = \Big(\dfrac{x}{1-x}\Big)' = \dfrac{1}{(1-x)^2}$*.*

*Tổng của chuỗi số đã cho bằng*

$$1+\sqrt{2}+\frac{3}{2}+\ldots+\frac{n+1}{(\sqrt{2})^n}+\ldots = f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2(3+2\sqrt{2}).$$

**Chú ý 1.1.** *Việc còn lại là đi tìm miền hội tụ của chuỗi hàm số đã cho và kiểm tra điều kiện về tính hội tụ đều trong Định lý 4.4. Bằng tiêu chuẩn d'Alambert có thể kiểm tra chuỗi hàm số đã cho hội tụ nếu* $-1 < x < 1$*, hơn nữa chuỗi hàm số này hội tụ đều trên khoảng* $[0,\epsilon]$ *với mỗi* $\epsilon \in (0,1)$ *(theo tiêu chuẩn Weierstrass).*

**Ví dụ 4.2.** *Chứng minh rằng*

*a)* $\arctan x = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots, x \in [-1,1].$

*b)* $\frac{\pi}{4} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}.$

*Chứng minh.* Thật vậy, ta biết rằng

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n, |x| < 1,$$

vì đây là tổng của một cấp số nhân với công bội bằng $-x^2$. Lấy tích phân hai vế ta được

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Chuỗi bên phải hội tụ tại $x = \pm 1$ (theo tiêu chuẩn Leibniz), đặc biệt nó hội tụ đều trên $[-1,1]$. Ta có công thức sau:

$$\arctan 1 = \frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

■

**Bài tập 4.3.** *Tìm miền hội tụ và tính tổng* *a)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(n+1)(x-1)^n$ *b)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n(2n+1)x^{2n}$.

[Gợi ý] Nhận xét: $\int(n+1)(x-1)^n dx = (x-1)^{n+1}$, $\int(2n+1)x^{2n}dx = x^{2n+1}$.

a) Để đơn giản, có thể đặt $x-1=t$, dùng tiêu chuẩn d'Alambert hoặc Cauchy để tìm miền hội tụ của chuỗi hàm số đã cho (chú ý tại các đầu mút xét riêng). Sau đó xét hàm số $f(t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(n+1)t^n$ và tính $\int\limits_0^x f(t)dt$.

b) Dùng tiêu chuẩn d'Alambert hoặc Cauchy để tìm miền hội tụ của chuỗi hàm số đã cho (chú ý tại các đầu mút xét riêng). Sau đó xét hàm số $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n(2n+1)x^{2n}$ và tính $\int\limits_0^x f(t)dt$.

**Định lý 4.5 (Tính khả vi).** *Nếu*

*i)* $u_n(x)$ *khả vi liên tục trên* $(a,b)$ *với mọi* $n$*,*

*ii) Chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ *hội tụ về* $S(x)$ *trên* $(a,b)$*,*

*iii) Chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u'_n(x)$ *hội tụ đều trên* $(a,b)$

*thì* $S(x)$ *khả vi trên* $(a,b)$ *và*

$$S'(x)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}u'_n(x).$$

**Ví dụ 4.1.** *Tính tổng của chuỗi hàm số* $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n}$*. Nhận xét:*

- *Chuỗi hàm số này không tính tổng được một cách trực tiếp,*
- *tuy nhiên,* $\left(\frac{x^n}{n}\right)'=x^{n-1}$ *và chuỗi hàm số* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{n-1}$ *tính được tổng và bằng* $\frac{1}{x-1}$ *(vì là chuỗi hình học với công bội bằng* $x$*).*

*Do đó, đạo hàm 2 vế của biểu thức* $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n}$ *ta được*

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x}$$

*Nên*

$$S(x) = S(0) + \int_0^x S'(t)dt = \int_0^x \frac{dt}{1-t} = -\ln(1-x).$$

*Kết luận*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x). \tag{1.10}$$

**Chú ý 1.1.** *Việc còn lại là tìm miền hội tụ và kiểm tra điều kiện về tính hội tụ đều của chuỗi hàm số trong Định lý 4.5. Bằng tiêu chuẩn d'Alambert có thể kiểm tra chuỗi hàm số đã cho hội tụ nếu* $-1 < x < 1$.

- *Tại* $x = 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *là phân kì.*
- *Tại* $x = -1$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ *là hội tụ.*

*Vậy miền hội tụ của chuỗi hàm số đã cho là* $[-1, 1)$.

**Hệ quả 4.1.** *Chứng minh công thức Euler* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

*Chứng minh.* Xuất phát từ công thức (1.10), suy ra

$$\frac{\ln(1-x)}{x} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n}.$$

Lấy tích phân từ $0$ đến $1$ hai vế phương trình này ta được

$$-\frac{\pi^2}{6} = \int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x} dx = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \int_0^1 x^{n-1} dx = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

■

**Hệ quả 4.2.** *Chứng minh rằng*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2.$$

*Chứng minh.* Vì chuỗi hàm số $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ hội tụ tại $x = -1$ (theo tiêu chuẩn Leibniz), nên thay $x = -1$ trong công thức (1.10) ta được

$$S(-1) = -\ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}.$$

**Ví dụ 4.2.** *Tính tổng*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}.$$

**Ý tưởng:** *Để "đánh bay" số hạng $3n+1$ ở dưới mẫu số, ta xét chuỗi hàm*

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} x^{3n+1}$$

*và đi tính $S'(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{3n} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-x^3)^n = \frac{1}{1+x^3}$ (tổng vô hạn của một cấp số nhân với công bội bằng $-x^3$). Do đó,*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} = S(1) = \lim_{x \to 1^-} \int_0^x \frac{dx}{1+x^3} = \frac{1}{3} \ln 2 + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

**Bài tập 4.4.** *Tìm miền hội tụ và tính tổng*

*a)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (x+1)^n$, *b)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

[Gợi ý] Nhận xét: $\left[\frac{(x+1)^n}{n}\right]' = (x+1)^{n-1}$, $\left(\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right)' = x^{2n}$.

a) Để đơn giản, đặt $x+1 = t$, dùng tiêu chuẩn d'Alambert hoặc Cauchy để tìm miền hội tụ của chuỗi hàm số đã cho (chú ý tại các điểm đầu mút xét riêng). Sau đó đặt $S(t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} t^n$ và tính $S'(t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} t^{n-1} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-t)^{n-1}$, đây là tổng vô hạn của một cấp số nhân với công bội bằng $-t$.

b) Dùng tiêu chuẩn d'Alambert hoặc Cauchy để tìm miền hội tụ của chuỗi hàm số đã cho (chú ý tại các điểm đầu mút xét riêng). Sau đó đặt $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ và tính $S'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{2n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (x^2)^n$. Đây là là tổng vô hạn của một cấp số nhân với công bội bằng $x^2$.

## 4.4 Một số chú ý về chuỗi hàm

Có ba vấn đề chính đối với các bài toán về chuỗi hàm số.

1. **Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm số.** Tại mỗi $x = x_0$, coi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u(x_0)$ là một chuỗi số thông thường và tìm miền hội tụ bằng các phương pháp đã biết (so sánh, d'Alambert, Cauchy, tích phân). Khi tìm miền hội tụ của chuỗi hàm số bằng tiêu chuẩn Cauchy hoặc d'Alambert, tại các điểm đầu mút (làm cho $L = \lim\limits_{n \to +\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$, hoặc $L = \lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$) ta phải xét riêng.

   **Ví dụ 4.3 (Giữa kì, K61).** *Xét sự hội tụ của chuỗi hàm*

a) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{x^2+n+2}$, b) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{x^2+n+2}$.

2. **Chứng minh chuỗi hàm số hội tụ đều** (định nghĩa, tiêu chuẩn Weierstrass, tiêu chuẩn Cauchy).

   **Ví dụ 4.4 (Giữa kì, K61).** *Xét sự hội tụ đều trên* $[0, +\infty)$ *của chuỗi hàm số*

   a) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{3^{-nx}}{4^n}$, b) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{-nx}}{3^n}$.

3. **Tính tổng của chuỗi hàm số** $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$. Nếu có sử dụng đến tính khả vi hoặc khả tích của nó, phải dựa vào biểu thức của $u_n(x)$ để quyết định xem sẽ đi tính $S'(x)$ hay $\int_0^x S(t)dt$. Chẳng hạn như

   - $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (\alpha n+1)x^{\alpha n}$ thì sẽ đi tính $\int_0^x S(t)dt$, vì $\int_0^x (\alpha n+1)t^{\alpha n}dt = x^{\alpha n+1}$.
   - $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{\alpha n}}{\alpha n}$ thì sẽ đi tính $S'(x)$ vì $\left(\frac{x^{\alpha n}}{\alpha n}\right)' = x^{\alpha n-1}$.

   **Ví dụ 4.5 (Giữa kì, K61).** *Tìm miền hội tụ và tính tổng của chuỗi (hàm) số*

   a) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n2^n}$, b) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{[1+(n-1)x](1+nx)}$, c) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{[1-(n-1)x](1-nx)}$.

   **Ví dụ 4.6 (Cuối kì, K62).** *Tính tổng*

   a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^n}$, b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\pi^n}$.

## 4.5 Bài tập ôn tập

**Bài tập 4.5.** *Tìm miền hội tụ của các chuỗi hàm số sau*

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+x^n}$,

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}$,

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{xn^x}$,

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{2^{nx}}$,

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{1+n^2x}$,

f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^n\left(x+\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{x-e}}$,

g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)^\alpha}\left(\frac{3x-2}{x}\right)^n$,

h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(x^n + \frac{1}{2^n x^n}\right)$,

i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{x^{nn}}$,

j) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{(n+1)^5}(x+2)^{1-2n}$.

**Bài tập 4.6.** *Dùng tiêu chuẩn Weierstrass, chứng minh các chuỗi sau hội tụ đều trên các tập tương ứng*

*a)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(1+x^2)^n}$ *trên* $\mathbb{R}$,

*b)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} \left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^n$ *trên* $[-1,1]$,

*c)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}\sqrt{1+nx}}$ *trên* $[0,\infty)$,

*d)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n^2x^2}}{n^2}$ *trên* $\mathbb{R}$.

# §5. Chuỗi lũy thừa

**Định nghĩa 1.1.** *Chuỗi lũy thừa là một chuỗi hàm số có dạng*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots, \tag{1.11}$$

*ở đó $x$ là biến số còn $a_n$ là các hệ số.*

Tại mỗi điểm $x = x_0$ cố định, chuỗi đã cho có thể hội tụ hoặc phân kỳ. Tập hợp tất cả các điểm mà chuỗi đã cho hội tụ được gọi là miền hội tụ. Khi đó tổng của nó là

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots,$$

ở đó tập xác định của hàm số $f(x)$ là miền hội tụ của chuỗi (1.11).

Chẳng hạn như, nếu $a_n = 1$ với mọi $n$, thì chuỗi (1.11) đã cho trở thành chuỗi hình học

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots,$$

sẽ hội tụ nếu $-1 < x < 1$ và phân kỳ nếu $|x| \geq 1$.

**Ví dụ 5.1.** *Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.*

*Chứng minh.* Đặt $a_n = \frac{x^n}{n}$. Khi đó

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{x^{n+1}}{a_n} . \frac{n}{x^n}\right| \to x \text{ khi } n \to \infty.$$

Do đó theo tiêu chuẩn d'Alambert, chuỗi đã cho hội tụ nếu $|x| < 1$ và phân kỳ nếu $|x| > 1$. Chú ý rằng tiêu chuẩn d'Alambert không đưa thông tin gì về sự hội tụ hay phân kỳ của chuỗi tại $x = \pm 1$. Vì thế chúng ta sẽ xét riêng 2 trường hợp này. Tại $x = 1$, chuỗi trở thành $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, chuỗi này phân kì. Tại $x = -1$, chuỗi trở thành $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$. Chuỗi này là chuỗi đan dấu và hội tụ theo tiêu chuẩn Leibniz (xem lại Ví dụ 3.1). Kết luận: miền hội tụ của chuỗi hàm số đã cho là $[-1, 1)$. ■

**Ví dụ 5.2.** *Tìm tập xác định của hàm số Bessel được định nghĩa bởi*

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}.$$

*Chứng minh.* Ta có

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(-1)^{n+1} x^{2n+2}}{2^{2n+2}[(n+1)!]^2} . \frac{2^{2n}(n!)^2}{(-1)^n x^{2n}}\right| = \frac{x^2}{4(n+1)^2} \to 0 \text{ khi } n \to \infty.$$

Theo tiêu chuẩn d'Alambert, chuỗi hàm số đã cho hội tụ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Nói cách khác, tập xác định của hàm số Bessel là $\mathbb{R}$. ■

**Định lý 5.1 (Định lý Abel).** *Nếu chuỗi lũy thừa* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *hội tụ tại* $x_0 \neq 0$*, thì nó cũng hội tụ tại mọi điểm* $x$ *mà* $|x| < |x_0|$.

*Chứng minh.* Ta có

$$|a_n x^n| \leq |a_n x_0^n|.\left|\frac{x}{x_0}\right|^n.$$

Vì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_0^n$ hội tụ nên $\lim_{n\to+\infty} a_n x_0^n = 0$. Do đó, tồn tại số $M$ sao cho $|a_n x_0^n| \leq M$ với mọi $n$. Vậy

$$|a_n x^n| \leq M\left|\frac{x}{x_0}\right|^n, \ \forall n.$$

Do đó, nếu $|x| < |x_0|$ thì $\left|\frac{x}{x_0}\right| < 1$, chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{x}{x_0}\right|^n$ hội tụ. Theo tiêu chuẩn so sánh, chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ cũng hội tụ. ∎

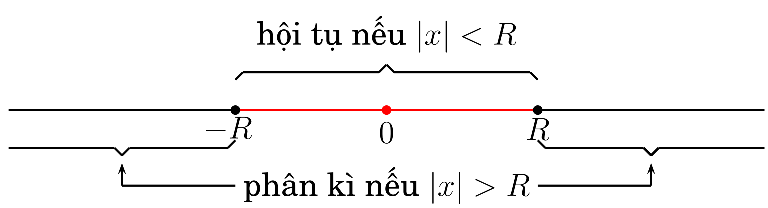
**Hệ quả 5.1.** *Nếu chuỗi lũy thừa* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *phân kỳ tại* $x_0 \neq 0$*, thì nó cũng phân kỳ tại mọi điểm* $x$ *mà* $|x| > |x_0|$.

**Hệ quả 5.2.** *Với mỗi chuỗi lũy thừa* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *cho trước, chỉ có 3 khả năng sau có thể xảy ra.*

*i) Chuỗi hội tụ tại duy nhất điểm* $x = 0$.

*ii) Chuỗi hội tụ tại mọi điểm* $x \in \mathbb{R}$.

*iii) Tồn tại một số thực dương* $R$ *sao cho chuỗi đã cho hội tụ nếu* $|x| < R$ *và phân kỳ nếu* $|x| > R$.




**Định nghĩa 1.1.** *Bán kính hội tụ của một chuỗi lũy thừa được định nghĩa là bằng*

- $0$ *trong trường hợp i),*
- $\infty$ *trong trường hợp ii),*
- *số thực dương* $R$ *trong trường hợp iii)*

*của Hệ quả 5.2 nêu trên.*

**Định lý 5.2 (Cách tìm bán kính hội tụ).** *Nếu* $\rho = \lim\limits_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ *hoặc* $\rho = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n}$ *thì bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa là* $R = \frac{1}{\rho}$*, với quy ước là*

- $R = 0$ *nếu* $\rho = \infty$ *và*
- $R = \infty$ *nếu* $\rho = 0$*.*

*Chứng minh.* Nếu $\rho = \lim\limits_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \neq 0$, ta có

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|.|x| = \rho|x|.$$

Do đó, theo tiêu chuẩn d'Alambert,

- Nếu $\rho|x| < 1$ hay $|x| < \frac{1}{\rho}$ thì chuỗi đã cho hội tụ,
- Nếu $\rho|x| > 1$ hay $|x| > \frac{1}{\rho}$ thì chuỗi đã cho hội tụ.

Theo Định nghĩa 1.1 thì $R = \frac{1}{\rho}$.

Nếu $\rho = \lim\limits_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 0$ thì

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|.|x| = 0, \ \forall x,$$

chuỗi đã cho hội tụ với mọi $x \in \mathbb{R}$, nghĩa là $R = +\infty$.

Nếu $\rho = +\infty$ thì

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|.|x| = +\infty, \ \forall x \neq 0,$$

chuỗi đã cho hội tụ tại điểm duy nhất $x = 0$, nghĩa là $R = 0$.

Chứng minh hoàn toàn tương tự cho trường hợp $\rho = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. ■

**Ví dụ 5.1.** *Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm số sau* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n x^n}{\sqrt{n+1}}$*.*

*Chứng minh.* Ta có

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|-3\sqrt{\frac{n+1}{n+2}}\right| \to 3 \text{ khi } n \to \infty.$$

Vậy bán kính hội tụ của chuỗi đã cho là $R = \frac{1}{3}$.

1. Tại $x = -\frac{1}{3}$ chuỗi đã cho trở thành $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$. Chuỗi này là một chuỗi đan dấu và hội tụ theo tiêu chuẩn Leibniz.
2. Tại $x = \frac{1}{3}$ chuỗi đã cho trở thành $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$. Chuỗi này phân kỳ.

Kết luận: miền hội tụ của chuỗi lũy thừa đã cho là $[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$. ■

**Ví dụ 5.2 (Giữa kì, K61).** *Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm số* *a)* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n+1}(x-1)^n$.

*b)* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n-1}(x+1)^n$.

*c)* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2n+1}(x-2)^n$.

*d)* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{2n+1}{n}(x+2)^n$.

*e)* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(2x-1)^n}{3n-1}$. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(2x+1)^n}{3n+1}$.

**Bài tập 5.1.** *Tìm miền hội tụ của các chuỗi lũy thừa sau.*

*a)* $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$ *b)* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{n(x+2)^n}{3^{n+1}}$ *c)* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{n(x+1)^n}{4^n}$

*d)* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{3^n(x+4)^n}{\sqrt{n+1}}$ *e)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n!(2x-1)^n$ *f)* $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{x^{2n}}{n(\ln n)^2}$

## 5.1 Các tính chất của chuỗi lũy thừa

**Định lý 5.3.** *Giả sử rằng chuỗi lũy thừa* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *có bán kính hội tụ bằng* $R > 0$ *và đặt* $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *với* $|x| < R$*. Khi đó*

1. *Chuỗi lũy thừa hội tụ đều trên mọi khoảng* $[a, b] \subset (-R, R)$*.*

2. $f(x)$ *là hàm số liên tục trên* $(-R, R)$*.*

3. $f(x)$ *là hàm số khả vi (và do đó liên tục) trên khoảng* $(-R, R)$ *và*

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{d}{dx} a_n x^n dx \right) = a_1 + 2a_2 x + \cdots + n a_n x^{n-1} + \cdots .$$

4. $f(x)$ *là hàm số khả tích trên mọi đoạn* $[a, b] \subset (-R, R)$ *và*

$$\int\limits_0^x f(t)dt = a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + \cdots + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots$$

Sau đây chúng ta sẽ áp dụng các tính chất trên để khai triển một số hàm số đơn giản thành chuỗi lũy thừa. Trước hết, hãy xét một chuỗi hàm số đơn giản (chuỗi hình học) mà ta đã gặp ở Ví dụ 1.5:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad (|x| < 1).$$

Thay $x$ bằng $-x$ trong phương trình đã cho ta được

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n. \tag{1.12}$$

Đặt $f(x) = \ln(1+x)$, ta có $f'(x) = \frac{1}{1+x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$. Do đó

$$f(x) = \int \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + C.$$

Kết hợp với $f(0) = 0$ ta có $C = 0$. Vậy ta có biểu thức chuỗi lũy thừa của hàm số $f(x) = \ln(1+x)$ là

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}.$$

**Ví dụ 5.1.** *Tìm biểu diễn chuỗi lũy thừa của hàm số $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.*

*Chứng minh.* Thay $x$ bởi $x^2$ trong phương trình 1.12 ta có

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}. \tag{1.13}$$

■

**Ví dụ 5.2.** *Tìm biểu diễn chuỗi lũy thừa của hàm số $f(x) = \arctan x$.*

*Chứng minh.* Theo Phương trình 1.13 ta có

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}.$$

Do đó

$$f(x) = \int \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} = C + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Kết hợp với điều kiện $f(0) = 0$ ta có $C = 0$. Kết luận:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

**Bài tập 5.2.** *Một cách tương tự, tìm biểu diễn chuỗi lũy thừa của hàm số $f(x) = \operatorname{arccot} x$.*

[Gợi ý] Có thể sử dụng đẳng thức $\arctan x + \operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2}$ để suy ra biểu diễn chuỗi lũy thừa của hàm số $f(x) = \operatorname{arccot} x$.

**Bài tập 5.3.** *Tìm biểu diễn chuỗi lũy thừa của các hàm số sau:*

*a)* $f(x) = \dfrac{2}{3-x}$ *b)* $f(x) = \dfrac{5}{1-4x^2}$ *c)* $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$

*d)* $f(x) = \dfrac{2}{x^2-x-2}$ *e)* $f(x) = \dfrac{x+2}{2x^2-x-1}$ *f)* $f(x) = \dfrac{x^2+x}{(1-x)^3}$

## 5.2 Khai triển một hàm số thành chuỗi lũy thừa

Trong bài trước, chúng ta đã áp dụng các tính chất của chuỗi lũy thừa để tìm biểu diễn lũy thừa của một số hàm số phân thức nhất định. Trong trường hợp $f(x)$ là một hàm số bất kỳ, thì tìm biểu diễn lũy thừa của $f(x)$ như thế nào? Mục đích của bài này là để trả lời câu hỏi đó.

**Định lý 5.4.** *Nếu hàm số $f(x)$ có biểu diễn chuỗi lũy thừa tại điểm $a$, nghĩa là*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n, \quad |x-a| < R,$$

*thì các hệ số của chuỗi lũy thừa được xác định bởi công thức $a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$.*

Như vậy nếu hàm số $f(x)$ có biểu diễn chuỗi lũy thừa tại $a$, thì

- nó phải có đạo hàm mọi cấp trong lân cận của điểm $a$, và
- biểu diễn chuỗi lũy thừa của nó phải có dạng

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n. \tag{1.14}$$

*Chứng minh.* Theo giả thiết,

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n + \cdots \tag{1.15}$$

Thay $x = a$ vào phương trình (1.15) ta được

$$f(a) = a_0.$$

Đạo hàm 2 vế của phương trình (1.15):

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x-a) + \cdots + na_n(x-a)^{n-1} + \cdots \tag{1.16}$$

Thay $x = a$ vào phương trình (1.16) ta được

$$f'(a) = a_1.$$

Tiếp tục quá trình này ta được $a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$. ■

Điều kiện hàm số $f(x)$ có đạo hàm mọi cấp trong lân cận của điểm $a$ chỉ là điều kiện cần, chứ chưa phải là điều kiện đủ. Nghĩa là, có những hàm số khả vi vô hạn nhưng lại không khai triển được thành chuỗi Taylor. Ví dụ như hàm số sau đây

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{nếu } x \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$$

có $f^{(n)}(0) = 0$ với mọi $n$ nên chuỗi Maclaurin của nó bằng $0$.

**Định nghĩa 1.1.** *Chuỗi lũy thừa trong Phương trình 1.14 được gọi là chuỗi Taylor của hàm số $f(x)$ tại điểm $a$. Trường hợp $a = 0$ thì chuỗi Taylor trở thành*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n. \tag{1.17}$$

*Chuỗi 1.17 được gọi là chuỗi Maclaurin của hàm số $f(x)$.*

**Ví dụ 5.1.** *Tìm chuỗi Maclaurin của hàm số $f(x) = e^x$ và tìm bán kính hội tụ của nó.*

*Chứng minh.* $f(x) = e^x \Rightarrow f^{(n)}(x) = e^x$. Do đó $f^{(n)}(0) = 1$ với mọi $n$. Chuỗi Maclaurin của hàm số $f(x)$ là

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

Để tìm bán kính hội tụ, xét $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{n!}{(n+1)!}\right| = \frac{1}{n+1} \to 0$ khi $n \to \infty$. Do đó bán kính hội tụ $R = \infty$, i.e., chuỗi đã cho hội tụ với mọi $x$. ■

**Định nghĩa 1.2.** *Nếu chuỗi Taylor* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ *hội tụ đến hàm số $f(x)$ trong một lân cận $B_a(R) = \{x : |x - a| < R\}$ nào đó của điểm $a$ thì ta nói hàm số $f(x)$ khai triển được thành chuỗi Taylor trong lân cận đó.*

**Hai câu hỏi đặt ra đối với chuỗi Taylor của hàm số $f(x)$:**

- Chuỗi Taylor $F(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ có hội tụ không?
- Nếu nó hội tụ thì liệu nó có hội tụ đến hàm số $f(x)$ hay không?

Định lý sau đây trả lời các câu hỏi đó.

**Định lý 5.5.** *Nếu $f(x)$ có đạo hàm mọi cấp trong lân cận $B_a(R) = \{x : |x - a| < R\}$ của điểm $a$ và $|f^{(n)}(\xi)| \le M$ với mọi $\xi \in B_a(R)$, thì chuỗi Taylor* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ *hội tụ đến $f(x)$ trong lân cận $B_a(R)$. Nghĩa là $f(x)$ khai triển được thành chuỗi Taylor tại $a$,*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n, \quad |x - a| < R.$$

**Ví dụ 5.1.** *Chứng minh rằng* $e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},\ \forall x \in \mathbb{R}.$

*Chứng minh.* Xét lân cận $B_0(R) = \{x : |x| < R\}$ với $R > 0$ nào đó. Hàm số $f(x) = e^x$ có

$$|f^n(x)| = e^x < e^R = M, \ \forall x \in B_0(R).$$

Theo Định lý 5.5, $f(x)$ khai triển được thành chuỗi Taylor tại $x = 0$ trong lân cận $B_0(R)$,

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \ \forall x \in B_0(R).$$

Vì số $R$ có thể chọn một cách tùy ý nên $e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \ \forall x \in \mathbb{R}$. ■

## 5.3 Khai triển Maclaurin một số hàm số sơ cấp

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\frac{1}{1-x}$ | $= \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ | $= 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$ | $R = 1$ |
| $\frac{1}{1+x}$ | $= \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$ | $= 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + \cdots$ | $R = 1$ |
| $e^x$ | $= \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ | $= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$ | $R = \infty$ |
| $\sin x$ | $= \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ | $= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$ | $R = \infty$ |
| $\cos x$ | $= \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ | $= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$ | $R = \infty$ |
| $\sinh x$ | $= \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ | $= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$ | $R = \infty$ |
| $\cosh x$ | $= \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ | $= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$ | $R = \infty$ |
| $\arctan x$ | $= \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ | $= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots$ | $R = 1$ |
| $\arcsin x$ | $= \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ | $= x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots$ | $R = 1$ |
| $\ln(1+x)$ | $= \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ | $= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots$ | $R = 1$ |
| $\ln(1-x)$ | $= -\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ | $= -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^n}{n} - \cdots$ | $R = 1$ |
| $(1+x)^k$ | $= \sum\limits_{n=0}^{\infty} \binom{k}{n} x^n$ | $= 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2!}x^2 + \cdots + \binom{k}{n} x^n + \cdots$ | $R = 1$ |

Để khai triển một hàm số thành chuỗi Taylor (Maclaurin) có hai phương pháp.

**Phương pháp 1:** Tính các đạo hàm cấp cao $f^{(n)}(x)$ để suy ra chuỗi lũy thừa của $f(x)$ tại $x = a$ là $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$. Tuy nhiên, không phải lúc nào việc tính các đạo hàm cấp cao của $f(x)$ cũng dễ dàng. Vì thế người ta thường làm theo cách sau.

**Phương pháp 2:** Dựa vào khai triển Maclaurin của các hàm số sơ cấp đã biết. Chẳng hạn như:

**Ví dụ 5.2.** *a) Tìm khai triển Maclaurin của hàm số* $f(x) = \arcsin x$.

*b) Tính đạo hàm cấp cao* $\arcsin^{(n)}(0)$.

[Lời giải]

a) Nhận xét $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Trong trường hợp này có lẽ "không có" hoặc "rất khó" để tìm ra công thức tính đạo hàm cấp cao của hàm số $\arcsin x$. Vì vậy, ta xuất phát từ công thức khai triển Maclaurin của hàm số $(1+x)^\alpha$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n.$$

Thay $\alpha = -\frac{1}{2}$ ta được

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)\ldots\left(-\frac{1}{2}-(n-1)\right)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n-1)!!}{2^n n!} x^n.$$

Thay $x$ bằng $-x^2$ ta được

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n-1)!!}{2^n n!}(-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n}$$

Do đó

$$\arcsin x = \int\limits_0^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \int\limits_0^x t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

b) Dựa vào công thức khai triển Maclaurin của hàm số $\arcsin x$ suy ra

$$\begin{cases} \arcsin^{(2n)}(0) = 0, \\ \arcsin^{(2n+1)}(0) = [(2n-1)!!]^2. \end{cases}$$

(2)Các hàm số hyperbolic: $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\cosh = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

**Bài tập 5.4.** *Một cách tương tự, tìm khai triển Maclaurin của hàm số $f(x) = \arccos x$.*

[Gợi ý] Có thể dựa vào đẳng thức $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ để suy ra khai triển Maclaurin của hàm số $f(x) = \arccos x$.

**Ví dụ 5.3.** *Khai triển hàm số $f(x) = \sin 2x + x\cos 2x$ thành chuỗi Maclaurin.*

[Lời giải] Thay $x$ bằng $2x$ trong các khai triển Maclaurin của hàm số $\sin x$ và $\cos x$ ta có:

$$\sin 2x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(2x)^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cos 2x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!}$$

Do đó

$$\sin 2x + x\cos 2x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(2x)^{2n+1}}{(2n+1)!} + x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 2^{2n} \frac{2n+3}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

**Ví dụ 5.4.** *Khai triển $f(x) = \cos\frac{\pi x}{3}$ thành chuỗi lũy thừa của $x-2$.*

[Lời giải] Đặt $t = x-2 \Rightarrow x = t+2$.

$$\cos\frac{\pi x}{3} = \cos\frac{\pi}{3}(t+2) = \cos\frac{2\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3}t - \sin\frac{2\pi}{3}\sin\frac{\pi}{3}t.$$

Thay $x$ bằng $\frac{\pi}{3}t$ trong các khai triển Maclaurin của hàm số $\sin x$ và $\cos x$ ta được

$$\cos\frac{\pi}{3}t = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\left(\frac{\pi}{3}t\right)^{2n}}{(2n)!}, \quad \sin\frac{\pi}{3}t = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\left(\frac{\pi}{3}t\right)^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Vậy

$$\begin{aligned}\cos\frac{\pi x}{3} &= -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\left(\frac{\pi}{3}t\right)^{2n}}{(2n)!} - \frac{\sqrt{3}}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\left(\frac{\pi}{3}t\right)^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\left(\frac{\pi}{3}\right)^{2n}}{(2n)!}(x-2)^{2n} - \frac{\sqrt{3}}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\left(\frac{\pi}{3}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!}(x-2)^{2n+1}.\end{aligned} \tag{1.18}$$

**Ví dụ 5.5.** *Khai triển $f(x) = \frac{1}{x^2+5x+6}$ thành chuỗi lũy thừa của $x-1$.*

[Lời giải] Đặt $t = x-1 \Rightarrow x = t+1$.

$$\frac{1}{x^2+5x+6} = \frac{1}{(t+1)^2+5(t+1)+6} = \frac{1}{t^2+7t+12} = \frac{1}{t+3} - \frac{1}{t+4} = \frac{1}{3}.\frac{1}{1+\frac{t}{3}} - \frac{1}{4}.\frac{1}{1+\frac{t}{4}}.$$

Thay $x$ lần lượt bằng $\frac{t}{3}$ và $\frac{t}{4}$ trong khai triển của hàm số $\frac{1}{1+x}$ ta được

$$\frac{1}{1+\frac{t}{3}} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{t}{3}\right)^n, \quad \frac{1}{1+\frac{t}{4}} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{t}{4}\right)^n.$$

Do đó

$$\frac{1}{x^2+5x+6} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{t}{3}\right)^n - \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{t}{4}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{3^{n+1}} - \frac{1}{4^{n+1}}\right)(x-1)^n.$$

**Ví dụ 5.6 (Giữa kì, K61).** *Khai triển thành chuỗi Maclaurin hàm số*

*a)* $f(x) = \ln(1+2x)$,

*b)* $f(x) = \ln(1-2x)$,

*c)* $f(x) = \frac{1}{x^2-3x+2}$,

*d)* $f(x) = \frac{1}{x^2+3x+2}$.

## 5.4 Đọc thêm: Công thức Euler

Chứng minh công thức Euler sau

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

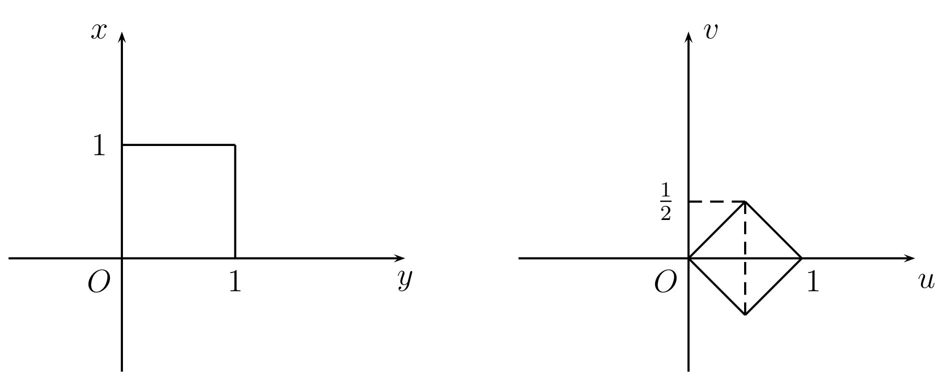
Có nhiều cách để chứng minh công thức này, một trong những cách đó là sử dụng khai triển Fourier (xem Hệ quả 6.1). Sau đây, tác giả giới thiệu hai phương pháp chứng minh khác dựa vào Tích phân kép (Giải tích II) và dựa vào khai triển Maclaurin.

### Dùng tích phân kép (Giải tích II) để chứng minh Công thức Euler

Trước hết, vì $\int_0^1 x^n dx = \int_0^1 y^n dy = \frac{1}{n+1}$ nên

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 x^n dx \int_0^1 y^n dy = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \int_0^1 (xy)^n dxdy = \int_0^1 \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} (xy)^n dxdy = \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-xy} dxdy.$$

Để tính được tích phân kép này ta thực hiện phép đổi biến $x = u - v, y = u + v$. Khi đó $J = 2$ và miền $D$ sẽ biến thành miền $D_{uv}$ như hình vẽ (Tại sao? Phải dựa vào nhận xét phép đổi biến biến biên của miền $D$ thành biên của miền $D_{uv}$).



Ta có

$$I = \int\limits_{D} \frac{1}{1-xy} dxdy = 2 \int\limits_{D_{uv}} \frac{1}{1-u^2+v^2} dudv$$
$$= 4 \int\limits_0^{\frac{1}{2}} du \int\limits_0^{u} \frac{1}{1-u^2+v^2} dv + 4 \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} du \int\limits_0^{1-u} \frac{1}{1-u^2+v^2} dv. \quad (1.19)$$

Vì

$$\int\limits_0^z \frac{dt}{a^2+t^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{t}{a}\Big|_0^z = \frac{1}{a} \arctan \frac{z}{a}$$

nên

$$I = 4 \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \arctan \frac{u}{\sqrt{1-u^2}} du + 4 \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \arctan \frac{1-u}{\sqrt{1-u^2}} du = I_1 + I_2.$$

Đặt $u = \sin\theta$ đối với tích phân $I_1$ ta được

$$I_1 = 4 \int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}} \arctan \frac{\sin\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}} d\theta = 4 \int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \arctan(\tan\theta) d\theta = 4 \int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \theta d\theta = \frac{\pi^2}{18}. \quad (1.20)$$

Đặt $u = \cos 2\theta$ đối với tích phân $I_2$ ta được

$$I_2 = 4 \int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{2\sin 2\theta}{\sqrt{1-\cos^2 2\theta}} \arctan \left( \frac{1-\cos 2\theta}{\sqrt{1-\cos^2 2\theta}} \right) d\theta = 8 \int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \arctan(\tan\theta) d\theta = \frac{\pi^2}{9}.$$

Kết luận $I = \frac{\pi^2}{18} + \frac{\pi^2}{9} = \frac{\pi^2}{6}$.

### Dùng khai triển Maclaurin để chứng minh công thức Euler

Trước hết

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{3}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Do đó

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}. \quad (1.21)$$

Xuất phát từ công thức khai triển Maclaurin của hàm số $\arcsin x$,

$$\arcsin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad (|x| \le 1)$$

thay $x$ bởi $\sin t$ ta được

$$t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{\sin^{2n+1} t}{2n+1}, \quad (|t| \leq \frac{\pi}{2}).$$

Lấy tích phân từ $0$ đến $\frac{\pi}{2}$ cả hai vế ta được

$$\frac{\pi^2}{8} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} tdt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} tdt. \tag{1.22}$$

Sử dụng công thức tích phân từng phần

$$\begin{aligned} I_{2n+1} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} tdt \\ &= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} xd\cos x \\ &= -\sin^{2n} x \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2n \sin^{2n-1} x \cos^2 xdx \\ &= 2n(I_{2n-1} - I_{2n+1}). \end{aligned}$$

suy ra công thức truy hồi

$$I_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} I_{2n} = \cdots = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} I_1 = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}.$$

Thay vào (1.22)

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

(1.21) được chứng minh.

## 5.5 Ứng dụng của chuỗi lũy thừa

**Tính gần đúng (xem lại trong học phần Giải tích I)**

**Ví dụ 5.7.** *Tính gần đúng* $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ *với độ chính xác* $10^{-3}$.

**Tính giới hạn (xem lại trong học phần Giải tích I)**

**Ví dụ 5.8.** *a) Tính* $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$.

*b) Xét sự hội tụ của chuỗi số* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{\sqrt{n}} - \sin \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$.

## 5.6 Bài tập ôn tập

**Bài tập 5.5.** *Chứng minh các công thức sau*

*a)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$

*b)* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} = \ln 2$

*c)* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)(n+2)} = 2\ln 2 - 1$

*d)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(4n^2-1)} = 2\ln 2 - 1$

*e)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n} = \ln 2$

*f)* $\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n}\right)\frac{1}{n} = \ln 2$

*g)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n(2n-1)} = \ln 2$

*h)* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots = \frac{1}{e}$

*i)* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots = e.$

**Bài tập 5.6.** *Tìm miền hội tụ của các chuỗi hàm số sau đây*

$a)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^n(x+\frac{1}{n})}{\sqrt{x-e}}$ $\quad b)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{1+n^2x}$ $\quad c)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+x)^n}{n^{x+n}}$

$d)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{2^{nx}}$ $\quad e)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}$ $\quad f)\sum_{n=1}^{\infty} \tan^n(x+\frac{1}{n})$

[Gợi ý]

a) Tập xác định: $x > e$. Áp dụng tiêu chuẩn Cauchy ta có $\sqrt[n]{a_n} = \ln\left(x + \frac{1}{n}\right) \to \ln x > 1$ khi $n \to \infty$, do đó chuỗi hàm số đã cho phân kì nếu $x > e$. Kết luận: miền hội tụ là $\emptyset$.

b) Nếu $x = 0$ thì $|a_n| = 1$, chuỗi phân kì.

Nếu $x \neq 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{1+n^2x} = \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\frac{1}{x}+n^2}$.

Với mỗi $x$, $\left\{\frac{1}{\frac{1}{x}+n^2}\right\}$ là một dãy số dương, giảm về $0$ khi $n \to \infty$, nên chuỗi đã cho hội tụ (theo tiêu chuẩn Leibniz). Miền hội tụ của chuỗi hàm số đã cho là $\mathbb{R}^*$.

c) Ta có $a_n = \left(\frac{n+x}{n}\right)^n \frac{1}{n^x} \sim e^x \frac{1}{n^x}$, nên chuỗi hàm số đã cho hội tụ nếu và chỉ nếu $x > 1$. Miền hội tụ là $(1, +\infty)$.

d) Nếu $x > 0$ thì $\left|\frac{\cos nx}{2^{nx}}\right| \leq \frac{1}{2^{nx}}$. Chuỗi hàm số $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^x}\right)^n$ là hội tụ vì $2^x > 1$, do đó chuỗi hàm số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{2^{nx}}$ là hội tụ nếu $x > 0$.

Nếu $x \le 0$, giả sử rằng chuỗi đã cho hội tụ tại $x$. Khi đó, theo điều kiện cần để chuỗi số hội tụ

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cos nx}{2^{nx}} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \cos nx = 0,$$

điều này là không thể xảy ra. Miền hội tụ là $(0, +\infty)$.

e) $|x| > 1$: $|a_n| = \dfrac{|x|^n}{1+x^{2n}} \sim \Big(\dfrac{1}{|x|}\Big)^n$ as $n \to \infty$; $\dfrac{1}{|x|} < 1$, chuỗi hàm số đã cho hội tụ.

$|x| < 1$: $|a_n| = \dfrac{|x|^n}{1+x^{2n}} \sim |x|^n$ as $n \to \infty$; $|x| < 1$, chuỗi hàm số đã cho hội tụ.

$|x| = 1$, $|a_n| = \dfrac{1}{2} \nrightarrow 0$, chuỗi hàm số đã cho phân kì. Miền hội tụ là $\mathbb{R}\backslash\{\pm 1\}$.

f) $\sqrt[n]{|a_n|} = \tan\Big(x + \dfrac{1}{n}\Big) \to \tan x$ khi $n \to \infty$.

Nếu $\tan x < 1 \Leftrightarrow -\dfrac{\pi}{4} + k\pi < x < \dfrac{\pi}{4} + k\pi$, chuỗi hàm số đã cho hội tụ.

Nếu $\tan x = 1 \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{4} + k\pi$: $a_n \to e^{\pm 2} \neq 0$ khi $n \to \infty$, chuỗi hàm số đã cho phân kì.

Nếu $\tan x > 1$, chuỗi hàm số đã cho phân kì.

Miền hội tụ: $\Big( -\dfrac{\pi}{4} + k\pi, \dfrac{\pi}{4} + k\pi\Big); (k \in \mathbb{Z})$.

**Bài tập 5.7.** *Kiểm tra tính hội tụ đều của các chuỗi hàm số sau đây*

*a)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (1-x)x^n$ *trong khoảng* $[0,1]$.

*b)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\Big(1 + \dfrac{x^2}{n^2 \ln n}\Big)$ *trong khoảng* $[-a, a], (a > 0)$.

*c)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \dfrac{x}{3^n}$ *trong khoảng* $[-a, a], (a > 0)$.

*d)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a^n \Big(\dfrac{2x+1}{x+2}\Big)^n$ *trong khoảng* $[-1, 1]$, $(|a| < 1)$.

[Gợi ý]

a) $S_n(x) = x - x^{n+1} \to x$ nếu $0 \le x < 1$, và $S_n(1) \to 0$ khi $n \to \infty$. Vì hàm số

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{nếu } x = 1, \\ x, & \text{nếu } 0 \le x < 1 \end{cases}$$

không liên tục trên $[0, 1]$, nên chuỗi hàm số đã cho không hội tụ đều.

b) Ta có $\ln(1+x) \leq x, \forall x \geq 0$, nên

$$\ln\left(1+\frac{x^2}{n\ln^2 n}\right) \leq \frac{x^2}{n\ln^2 n} \leq \frac{a^2}{n\ln^2 n}, \forall x \in [-a,a]$$

Mặt khác, chuỗi $a^2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$ là hội tụ, nên theo tiêu chuẩn Weierstrass, chuỗi hàm số đã cho hội tụ đều trên $[-a,a]$.

c) $\left|2^n \sin\frac{x}{3^n}\right| \leq a\left(\frac{2}{3}\right)^n$; chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ là hội tụ nên theo tiêu chuẩn Weierstrass, chuỗi hàm số đã cho hội tụ đều trong khoảng $[-a,a]$.

d) Ta có $\frac{2x+1}{x+2} \in [-1,1]$ với mọi $x \in [-1,1]$, nên $\left|a^n\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^n\right| \leq |a|^n$. Mặt khác, chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a|^n$ là hội tụ, nên theo tiêu chuẩn Weierstrass, chuỗi hàm số đã cho hội tụ đều trên $[-1,1]$.

**Bài tập 5.8.** *Tìm bán kính hội tụ và miền hội tụ của các chuỗi lũy thừa sau*

$$a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n}} \qquad b)\sum_{n=1}^{\infty}x^n\ln(n+1) \qquad c)\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}x^n$$

$$d)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n.n!}{(2n)!}x^{2n} \qquad e)\sum_{n=1}^{\infty}(-2)^n\frac{x^{3n+1}}{n+1} \qquad f)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}.x^{n-1}}{(2n-1)^2\sqrt{3^{n-1}}}$$

[Gợi ý]

a) $R=1$, miền hội tụ là $[-1,1)$.

b) $R=1$, miền hội tụ là $(-1,1)$.

c) $R=\frac{1}{e}$, miền hội tụ là $\left(-\frac{1}{e},\frac{1}{e}\right)$.

d) $R=+\infty$, miền hội tụ là $(-\infty,+\infty)$.

e) $R=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$, miền hội tụ là $\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}},\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right]$.

f) $R=\frac{\sqrt{3}}{2}$, miền hội tụ là $\left[-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$.

**Bài tập 5.9.** *Tìm tổng của các chuỗi hàm số sau*

$$a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{(2n)!!} \qquad b)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{2n-1} \qquad c)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}$$

$$d)\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^{n-1} \qquad e)\sum_{n=1}^{\infty}n(n+2)x^n \qquad f)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4n^2-1}$$

[Gợi ý]

a) $S(x) = x(e^{\frac{x}{2}} - 1), \forall x \in \mathbb{R}$.

b) $R = 1$, $\forall x \in (-1, 1)$: $S(x) = x \arctan x$.

c) $R = 1$, $\forall x \in (-1, 1)$: $S(x) = \dfrac{1}{4} \ln \dfrac{1+x}{1-x} + \dfrac{1}{2} \arctan x$.

d) $R = 1$, $\forall x \in (-1, 1)$: $S(x) = \dfrac{1+x}{(1-x)^3}$

e) $R = 1$, $\forall x \in (-1, 1)$: $S(x) = \dfrac{x^2 - 3x}{(x-1)^3}$

f) Xét chuỗi hàm số $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)(2n-1)} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{x^2+1}{2x} \arctan x$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{4n^2 - 1} = \lim\limits_{x \to 1} S(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\pi}{4}$.

**Bài tập 5.10.** *Tìm miền hội tụ của các chuỗi hàm số sau*

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^2}$,

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(x-1)^n}$,

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^{2n+5}}{n^2+4}$,

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-1)^{2n}}{n2^n}$,

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n-1}} \left(\frac{2x-1}{x+1}\right)^n$,

f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n+1}$,

g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^{2n-1}}{2n4^n}$,

h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n-1)^{2n}(x-1)^n}{(3n-2)^{2n}}$,

i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}(x+3)^n$.

**Bài tập 5.11.** *Tính tổng của các chuỗi sau*

a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+5}}{3^{2n}(2n+1)}, x \in (-3, 3)$,

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)3^{n-1}}$,

c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+2}}{(2n+1)(2n+2)}, x \in (-1, 1)$,

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+2n}{n^2+n}\right) x^n, x \in (-1, 1)$.

**Bài tập 5.12.** *Khai triển thành chuỗi Maclaurin*

a) $f(x) = \frac{x^3+x+1}{x^2-4x+3}$,

b) $f(x) = \sin 3x + x \cos 3x$,

c) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$,

d) $f(x) = \ln(1 + x - 2x^2)$.

**Bài tập 5.13.** *a) Khai triển* $f(x) = \sqrt{x}$ *thành chuỗi lũy thừa của* $x - 4$,

*b) Khai triển* $f(x) = \sin \frac{\pi x}{3}$ *thành chuỗi lũy thừa của* $x - 1$,

*c) Khai triển* $f(x) = \frac{1}{x^2+3x+2}$ *thành chuỗi lũy thừa của* $x + 4$, *d) Khai triển* $f(x) = \ln x$ *thành chuỗi lũy thừa của* $\frac{1-x}{1+x}$.

**Bài tập 5.14.** *Chứng minh rằng*

*a)* $e^{\cos x} = e\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{4x^4}{4!} - \frac{31x^6}{6!} + \cdots\right), -\infty < x < \infty$.

*b)* $\ln(x + \sqrt{x^2+1}) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, -1 \leq x \leq 1$.

*c)* $\frac{\ln(1+x)}{1+x} = x - \left(1 + \frac{1}{2}\right) x^2 + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) x^3 - \cdots, -1 < x < 1$.

*d)* $(\ln(1+x))^2 = x^2 - \left(1 + \frac{1}{2}\right) \frac{2x^3}{3} + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \frac{2x^4}{4} - \cdots, -1 < x \leq 1$.

# §6. CHUỖI FOURIER

Chuỗi Fourier được đặt tên của nhà toán học Joseph Fourier, người đã có những đóng góp quan trọng trong việc nghiên cứu các chuỗi lượng giác. Ông đã tiếp nối các công trình nghiên cứu trước đó của Leonhard Euler, Jean le Rond d'Alembert, và Daniel Bernoulli. Fourier đã giới thiệu các chuỗi lượng giác với mục đích giải bài toán truyền nhiệt trong một mặt kim loại. Các công trình nghiên cứu đầu tiên của ông về vấn đề này là *Mémoire sur la propagation de la chaleur dans les corps solides* (vào năm 1807) và *Théorie analytique de la chaleur* (vào năm 1822).

Phương trình truyền nhiệt là một phương trình đạo hàm riêng. Trước các công trình nghiên cứu của Fourier, trong trường hợp tổng quát người ta không tìm được nghiệm của phương trình truyền nhiệt, mặc dù các nghiệm riêng trong một số trường hợp cụ thể đã được biết nếu như nguồn nhiệt có dáng điệu đơn giản như là các sóng hình sine hay cosine. Các nghiệm đơn giản này ngày nay đôi khi được gọi là nghiệm riêng. Ý tưởng của Fourier là mô hình một nguồn nhiệt phức tạp dưới dạng là một tổ hợp tuyến tính của các sóng hình sine và cosine, và để tìm nghiệm dưới dạng tổ hợp tuyến tính của các nghiệm riêng tương ứng. Tổ hợp tuyến tính này được gọi là chuỗi Fourier.

Mặc dầu động lực ban đầu là để giải quyết phương trình truyền nhiệt, chuỗi Fourier về sau cũng được áp dụng cho các lĩnh vực khác nhau như kĩ thuật điện, xử lý ảnh, vật lý lượng tử.

## 6.1 Chuỗi lượng giác & chuỗi Fourier

Chuỗi Fourier của một hàm tuần hoàn, được đặt tên theo nhà toán học Joseph Fourier (1768–1830), là một cách biểu diễn hàm số đó dưới dạng tổng của các hàm tuần hoàn có dạng hàm $\sin$ và hàm $\cos$. Một cách tổng quát, một chuỗi có dạng

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad a_n, b_n \in R \tag{1.23}$$

được gọi là một chuỗi lượng giác.

**Chú ý 1.1.** *i) Nếu các chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ và $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |b_n|$ hội tụ thì chuỗi lượng giác (1.23) hội tụ tuyệt đối trên $\mathbb{R}$.*

*ii) Tuy nhiên, nếu chuỗi lượng giác (1.23) hội tụ thì không suy ra được các chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ và $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |b_n|$ hội tụ.*

**Định lý 6.1.** *Nếu hàm số $f(x)$ tuần hoàn với chu kỳ $2\pi$ và có biểu diễn*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad a_n, b_n \in R$$

*thì các hệ số của nó được tính theo công thức*

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx, a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx, b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx. \tag{1.24}$$

[Gợi ý] Định lý trên được chứng minh khá đơn giản dựa vào các nhận xét sau đây.

- $\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx = 0,$
- $\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx = 0, \forall n \neq 0,$
- $\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx = 0,$
- $\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx = \begin{cases} 0, & \textbf{nếu } m \neq n, \\ \pi, & \textbf{nếu } m = n, \end{cases}$
- $\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx = \begin{cases} 0, & \textbf{nếu } m \neq n, \\ \pi, & \textbf{nếu } m = n. \end{cases}$

**Định nghĩa 1.1.** *Chuỗi lượng giác $S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ với các hệ số $a_0, a_n, b_n$ xác định bởi (1.24) được gọi là chuỗi Fourier (hay là khai triển Fourier) của hàm số $f(x)$.*

## 6.2 Khai triển một hàm số thành chuỗi Fourier

**Hai câu hỏi đặt ra đối với chuỗi Fourier của hàm số $f(x)$:**

- Chuỗi Fourier $S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ này có hội tụ không?
- Trong trường hợp hội tụ, liệu nó có hội tụ đến hàm số $f(x)$?

**Định nghĩa 1.2.** *Nếu chuỗi Fourier của hàm $f(x)$ hội tụ về hàm $f(x)$ thì ta nói hàm $f(x)$ được khai triển thành chuỗi Fourier*

**Điều kiện để hàm số khai triển được thành chuỗi Fourier**

**Định lý 6.2 (Dirichlet).** *Nếu*

*i) $f(x)$ tuần hoàn với chu kì $2\pi$ ,*

*ii) đơn điệu từng khúc,*

*iii) bị chặn trên $[-\pi, \pi]$*

*thì chuỗi Fourier của nó hội tụ tại mọi điểm trên đoạn* $[-\pi, \pi]$*, và*

$$S(x) = \begin{cases} f(x), & \textit{nếu } x \textit{ là điểm liên tục của } f(x) \\ \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} & \textit{nếu } x \textit{ là điểm gián đoạn của } f(x). \end{cases}$$

**Định lý 6.3 (Đẳng thức Parseval).** *Nếu hàm số* $f(x)$ *thỏa mãn các điều kiện của Định lý Dirichlet thì bất đẳng thức Parseval sau được thỏa mãn*

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2).$$

**Bài tập 6.1.** *Khai triển thành chuỗi Fourier hàm số* $f(x)$ *tuần hoàn với chu kì* $2\pi$*, xác định như sau*

*a)* $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le \pi \\ -1, & -\pi \le x < 0. \end{cases}$

*b)* $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le \pi \\ -1, & -\pi \le x < 0. \end{cases}$

*c)* $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le \pi \\ 0, & -\pi \le x < 0. \end{cases}$

*d)* $f(x) = x^2, -\pi < x < \pi$*.*

[Lời giải]

b) Ta có

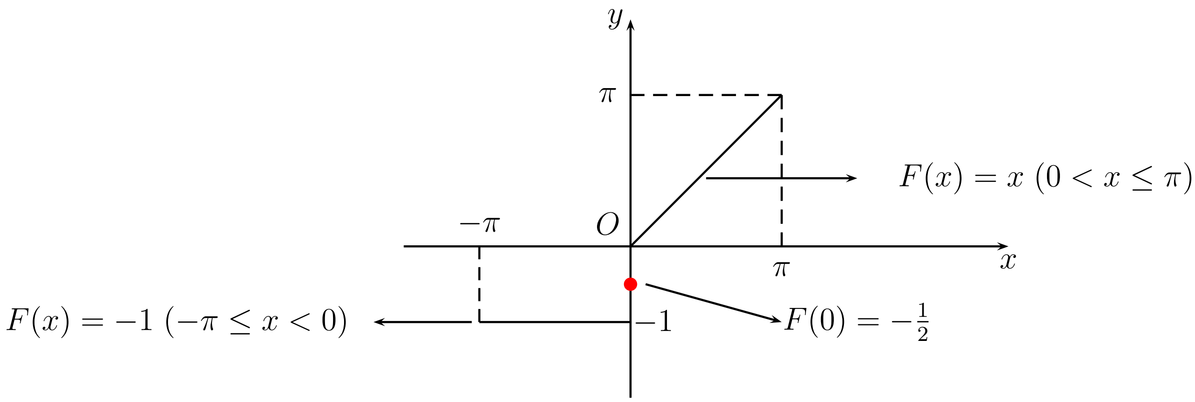
$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} xdx = -1 + \frac{\pi}{2}.$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -\cos nxdx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\cos nxdx = \begin{cases} 0 & \text{nếu } n \text{ chẵn,} \\ \frac{-2}{n^2\pi} & \text{nếu } n \text{ lẻ.} \end{cases}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -\sin nxdx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\sin nxdx = \begin{cases} \frac{-1}{n} & \text{nếu } n \text{ chẵn,} \\ \frac{2}{\pi} + \frac{1}{n} & \text{nếu } n \text{ lẻ.} \end{cases}$$

Vậy chuỗi Fourier của hàm số đã cho là

$$F(x) = -\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2}{(2n+1)^2\pi}\cos(2n+1)x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{2n}\sin 2nx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{\pi} + \frac{1}{2n+1}\right)\sin(2n+1)x.$$




Theo Định lý Dirichlet, giá trị của chuỗi Fourier này tại những điểm liên tục bằng $f(x)$, còn tại điểm gián đoạn $x=0$ bằng $\frac{f(0^+)+f(0^-)}{2} = -\frac{1}{2}$. Nghĩa là

$$F(x) = \begin{cases} x, & 0 < x \le \pi \\ -\frac{1}{2}, & x = 0, \\ -1, & -\pi \le x < 0. \end{cases}$$

Thay $x=0$ ta có

$$F(0) = -\frac{1}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2}{(2n+1)^2\pi} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Đây chính là công thức Euler.

c) Ta có

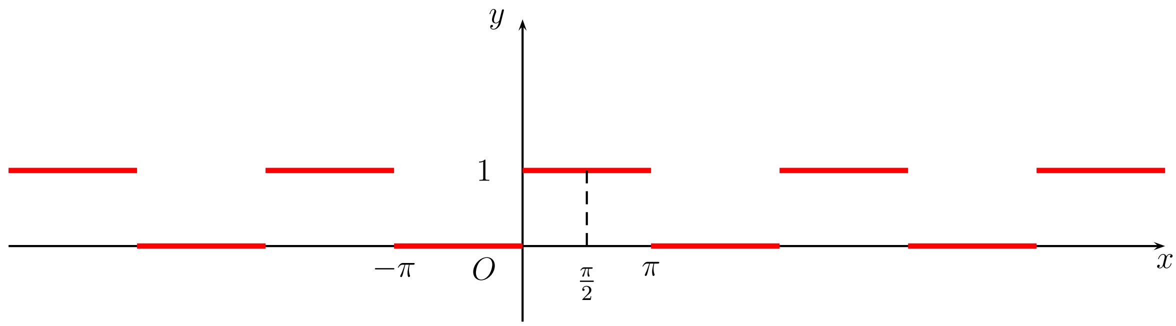
$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} 0dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} dx = 1.$$

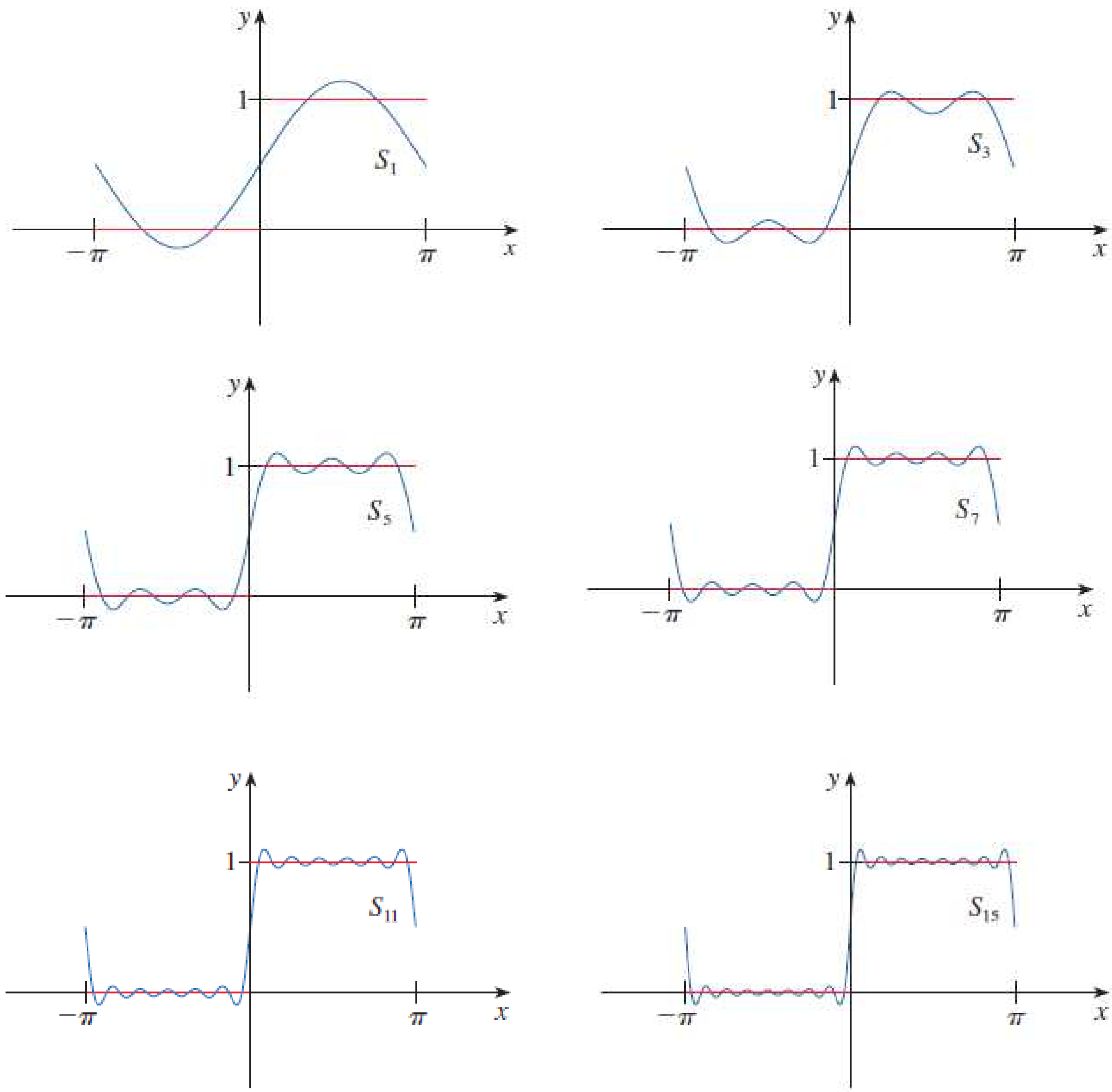
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \cos nx dx = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \sin nx dx = -\frac{1}{n\pi}(\cos n\pi - \cos 0) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } n \text{ chẵn}, \\ \frac{2}{n\pi} & \text{nếu } n \text{ lẻ}. \end{cases}$$

Vậy chuỗi Fourier của hàm số đã cho là

$$S(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n-1)\pi}\sin(2n-1)x.$$




Ta có dãy các tổng riêng của chuỗi Fourier đã cho là

$$S_n(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sin x + \frac{3}{2\pi}\sin 3x + \cdots + \frac{2}{n\pi}\sin nx.$$

Khi $n$ càng lớn, dãy các tổng riêng này xấp xỉ hàm số $f(x)$ ban đầu càng tốt hơn. Nhìn hình vẽ ta có thể nhận ra rằng $S_n(x) \to f(x)$ ngoại trừ điểm $x = 0$ và những điểm $x = n\pi$. Nói cách khác, $S(x) = f(x)$ tại những điểm mà ở đó $f(x)$ liên tục. Còn tại những điểm gián đoạn $x = n\pi$ thì $S_n(x) \to \frac{1}{2}$.

Ngoài ra, khi thay giá trị $x = \frac{\pi}{2}$ vào ta được

$$S\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n-1)\pi}(-1)^n \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} = \frac{\pi}{4}.$$

**Ví dụ 6.1 (Giữa kì, K61).** *Khai triển thành chuỗi Fourier các hàm số tuần hoàn với chu kì $2\pi$ sau.*

*a)* $f(x) = \begin{cases} 1, & -\pi \le x < 0 \\ -1, & 0 \le x < \pi \end{cases}$

*b)* $f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi \le x < 0 \\ 1, & 0 \le x < \pi \end{cases}$

*c)* $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-\pi, \pi) \setminus \{0\} \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

*d)* $f(x) = \begin{cases} -1, & x \in [-\pi, \pi) \setminus \{0\} \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

## 6.3 Khai triển hàm số chẵn, hàm số lẻ

- Nếu $f(x)$ là hàm số chẵn thì $a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos kx dx$ và $b_k = 0, \forall k \in \mathbb{N}$.
- Nếu $f(x)$ là hàm số lẻ thì $b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin kx dx$ và $a_k = 0, \forall k \in \mathbb{N}$.

**Ví dụ 6.2.** *Tìm chuỗi Fourier của hàm số tuần hoàn với chu kì $2\pi$ xác định như sau $f(x) = x$ với $x \in [-\pi, \pi]$.*

[Lời giải] Vì $f(x) = x$ là một hàm số lẻ nên

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = 0, n \ge 0$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \sin nx dx = \frac{2}{\pi}\Big[-\frac{x}{n}\cos nx\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\frac{\cos nx}{n}dx\Big]$$

$$= (-1)^{n+1}\frac{2}{n}, \quad (n \ge 1)$$

Do đó,

$$f(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx.$$

**Ví dụ 6.3.** *Khai triển Fourier hàm số $f(x)$ tuần hoàn với chu kì $2\pi$ và bằng $1 - \frac{x^2}{\pi^2}$ trên $[-\pi, \pi]$.*

[Lời giải] Ta có $f(x)$ là hàm số chẵn nên $b_n = 0$ với mọi $n$.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)dx = \frac{4}{3}.$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\cos nx dx = (-1)^{n+1}\frac{4}{n^2\pi^2}.$$

Do $f(x)$ là hàm số liên tục nên theo tiêu chuẩn Dirichlet, chuỗi Fourier của nó hội tụ đều đến $f(x)$ trên $\mathbb{R}$,

$$f(x) = 1 - \frac{x^2}{\pi^2} = \frac{2}{3} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2}. \tag{1.25}$$

**Hệ quả 6.1.** *Xuất phát từ công thức (1.25), hãy chứng minh các công thức Euler sau:*

*a)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, *b)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

*Chứng minh.* a) Lấy $x = \pi$ trong công thức (1.25) ta được

$$0 = \frac{2}{3} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$

Suy ra

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

b) Đẳng thức Parseval

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$$

dẫn ta đến

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)^2 dx = \frac{8}{9} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{16}{\pi^4 n^4}.$$

Vì thế

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

■

**Hệ quả 6.2.** *Chứng minh các công thức sau* *a)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$, *b)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

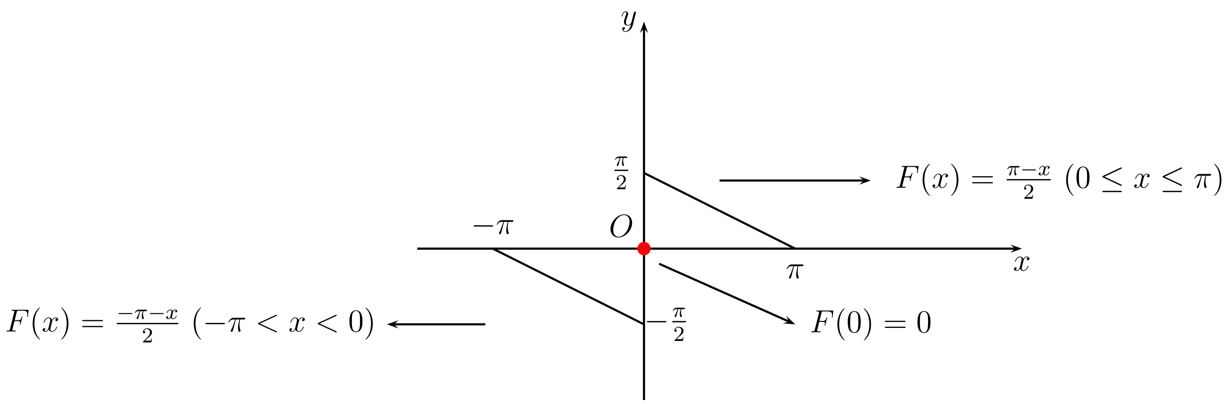
[Gợi ý]

a) Lấy $x = 0$ trong công thức (1.25) sẽ dẫn đến $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{6} + \frac{\pi^2}{12}\right) = \frac{\pi^2}{8}$.

**Bài tập 6.2.** *a) Khai triển Fourier hàm số $f(x)$ lẻ, tuần hoàn với chu kì $2\pi$ xác định như sau $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$ với $x \in [0, \pi]$.*

*b) Áp dụng, tính $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$.*




[Đáp số]

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}.$$

Thay $x = 1$ trong công thức trên ta được

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n} = \frac{\pi - 1}{2}.$$

**Bài tập 6.3 (Cuối kì, K61).** *a) Khai triển hàm số $f(x)$ lẻ, tuần hoàn với chu kì $2\pi$, thỏa mãn $f(x) = x, 0 \le x \le \pi$ thành chuỗi Fourier.*

*b) Khai triển hàm số $f(x)$ chẵn, tuần hoàn với chu kì $2\pi$, thỏa mãn $f(x) = x, 0 \le x \le \pi$ thành chuỗi Fourier.*

**Bài tập 6.4.** *Khai triển thành chuỗi Fourier theo các hàm số cosine, theo các hàm số sine của các hàm số sau* *a)* $f(x) = 1 - x, 0 \leq x \leq \pi$.

*b)* $f(x) = \pi + x, 0 \leq x \leq \pi$.

*c)* $f(x) = x(\pi - x), 0 < x < \pi$.

*d)* $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0, & \frac{\pi}{2} < x \leq \pi \end{cases}$.

## 6.4 Khai triển hàm số tuần hoàn với chu kỳ bất kỳ

Nếu hàm số $f(x)$ tuần hoàn với chu kì $2L$, đơn điệu từng khúc và bị chặn trên $[-L, L]$ thì thực hiện phép đổi biến $x' = \frac{\pi}{L}x$ ta có

$$f(x) = f\left(\frac{L}{\pi}x'\right) = F(x')$$

sẽ tuần hoàn với chu kì $2\pi$. Áp dụng khai triển Fourier cho hàm số $F(x')$ ta có

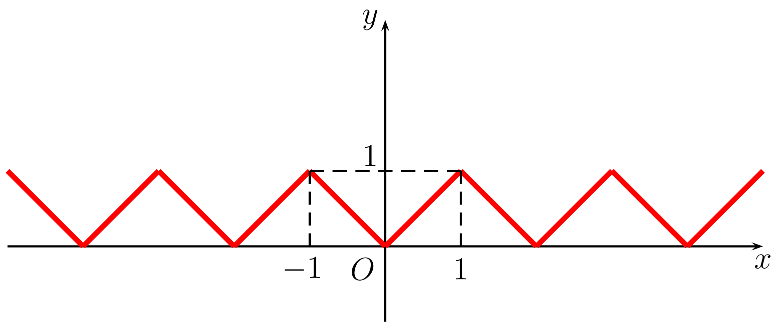
$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n \cos n\frac{\pi}{L}x + b_n \sin\frac{\pi}{L}x\right)),$$

ở đó

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)dx, a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos n\frac{\pi}{L}xdx, b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin n\frac{\pi}{L}xdx.$$

**Ví dụ 6.4.** *Tìm khai triển Fourier của hàm số tuần hoàn với chu kì* $L = 2$ *xác định như sau* $f(x) = |x|$ *trong khoảng* $(-1, 1)$.

[Lời giải]




Chuỗi Fourier của hàm số $f(x)$ là

$$S(x) = \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{(2n-1)^2\pi^2}\cos[(2n-1)\pi x].$$

Vì $f(x) = |x|$ là một hàm số liên tục với mọi $x \in \mathbb{R}$ nên

$$|x| = \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{(2n-1)^2\pi^2}\cos[(2n-1)\pi x].$$

Thay $x = 0$ ta được

$$0 = \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(2n-1)^2\pi^2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

**Ví dụ 6.5.** Tìm khai triển Fourier của hàm số tuần hoàn với chu kì $2l$ xác định như sau $f(x) = x$ trong khoảng $(a, a+2l)$.

[Lời giải] Vì tích phân của một hàm số tuần hoàn trên mỗi khoảng có độ dài bằng chu kì đều bằng nhau, nên

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx = \frac{1}{l}\int_{a}^{a+2l} f(x)dx = \frac{1}{l}\int_{a}^{a+2l} xdx = 2(a+l)$$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{l}\int_{a}^{a+2l} x\cos\frac{n\pi x}{l}dx = \frac{1}{l}\Big(\frac{xl}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{l}\Big|_a^{a+2l} - \frac{l}{n\pi}\int_{a}^{a+2l}\sin\frac{n\pi x}{l}dx\Big)\\
&= \frac{1}{l}\Big(\frac{2l^2}{n\pi}\sin\frac{\pi na}{l} + \frac{l^2}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{l}\Big|_a^{a+2l}\Big)\\
&= \frac{2l}{n\pi}\sin\frac{\pi na}{l}, n \geq 1\\
b_n &= \frac{1}{l}\int_{a}^{a+2l} x\sin\frac{n\pi x}{l}dx = \frac{1}{l}\Big(\frac{-xl}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{l}\Big|_a^{a+2l} + \frac{l}{n\pi}\int_{a}^{a+2l}\cos\frac{n\pi x}{l}dx\Big)\\
&= \frac{-2l}{n\pi}\cos\frac{\pi na}{l}, n \geq 1
\end{aligned}$$

Do đó, nếu $x \neq a + 2nl$,

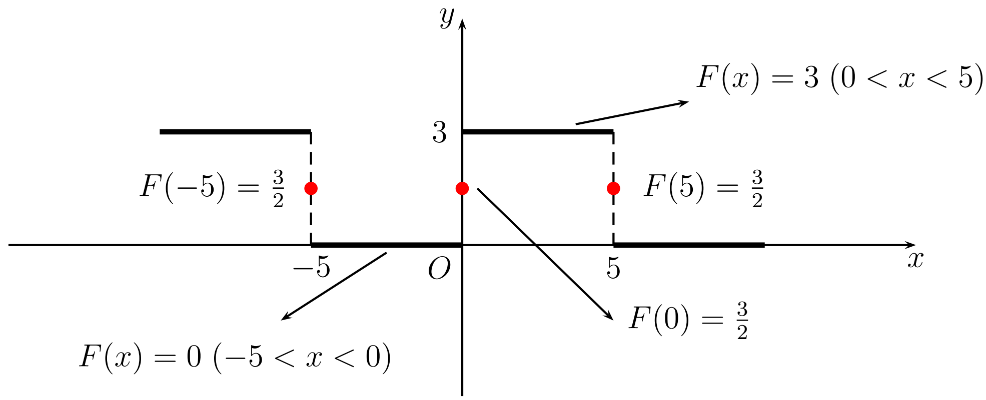
$$\begin{aligned}
f(x) =& (a+l) + \frac{2l}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\Big(\sin\frac{n\pi a}{l}\cos\frac{n\pi x}{l} - \cos\frac{n\pi a}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\Big)\\
=& a + l + \frac{2l}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{l}(a-x)
\end{aligned}$$

**Ví dụ 6.6.** *Cho hàm số $f(x)$ tuần hoàn với chu kì $2L = 10$ xác định như sau:*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -5 < x < 0,\\ 3, & 0 < x < 5.\end{cases}$$

*a) Hãy tìm các hệ số Fourier và viết chuỗi Fourier của hàm số của $f(x)$.*

*b) Giá trị của hàm $f(x)$ tại $x = -5, x = 0$ và $x = 5$ phải bằng bao nhiêu để chuỗi Fourier của nó hội tụ về $f(x)$ trong khoảng $[-5, 5]$.*




[Gợi ý] Chuỗi Fourier tương ứng là

$$\frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3(1 - \cos n\pi)}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{5}.$$

Vì hàm số $f(x)$ thỏa mãn các điều kiện của Định lý Dirichlet nên chuỗi Fourier của nó hội tụ tới $f(x)$ tại những điểm liên tục của nó và bằng $\frac{f(x+0)-f(x-0)}{2}$ tại những điểm gián đoạn. Tại những điểm $x = -5, x = 0$ và $x = 5$ là những điểm gián đoạn, chuỗi Fourier của nó hội tụ tới $\frac{3+0}{2} = \frac{3}{2}$. Do đó, nếu ta định nghĩa hàm số như sau

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}, & x = -5, \\ 0, & -5 < x < 0, \\ \frac{3}{2}, & x = 0 \\ 3, & 0 < x < 5, \\ \frac{3}{2}, & x = 5 \end{cases}$$

thì chuỗi Fourier của nó sẽ hội tụ đến $f(x)$ với $x \in [-5, 5]$.

**Bài tập 6.5.** *Khai triển Fourier hàm số* $f(x) = x^2, -2 \leq x \leq 2$ *tuần hoàn với chu kì* $2L = 4$.

## 6.5 Khai triển chuỗi Fourier hàm số trên đoạn $[a, b]$ bất kì

Cho hàm số $f(x)$ đơn điệu từng khúc và bị chặn trên $[a, b]$. Muốn khai triển hàm số $f(x)$ thành chuỗi Fourier thì ta làm như sau:

- Xây dựng hàm số $g(x)$ tuần hoàn với chu kì $\geq (b - a)$ sao cho $g(x) = f(x)$ trên $[a, b]$.

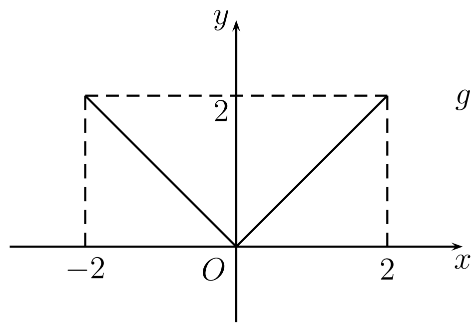
- Khai triển hàm $g(x)$ thành chuỗi Fourier thì tổng của chuỗi bằng $f(x)$ tại $x \in [a, b]$ (có thể trừ những điểm gián đoạn của $f(x)$).

Vì hàm $g(x)$ không duy nhất nên có nhiều chuỗi Fourier biểu diễn hàm số $f(x)$, nói riêng

- nếu $g(x)$ chẵn thì chuỗi Fourier của nó chỉ gồm những hàm số cosine,
- nếu $g(x)$ lẻ thì chuỗi Fourier của nó chỉ gồm những hàm số sine.

**Ví dụ 6.7.** *Khai triển hàm số $f(x) = x, 0 < x < 2$ dưới dạng chuỗi Fourier của các hàm sine và dưới dạng chuỗi Fourier của các hàm cosine.*

*Để khai triển $f(x)$ thành chuỗi Fourier của các hàm cosine, ta xây dựng một hàm số chẵn, tuần hoàn với chu kì bằng $2L = 4$ và $g(x) = x$ nếu $0 < x < 2$.*




$$g(x) = \begin{cases} x, & \text{nếu } 0 < x < 2 \\ -x, & \text{nếu } -2 \leq x \leq 0. \end{cases}$$

*Ta có, $b_n = 0, n \geq 1$ và*

$$a_0 = \int_0^2 x dx = 2;$$

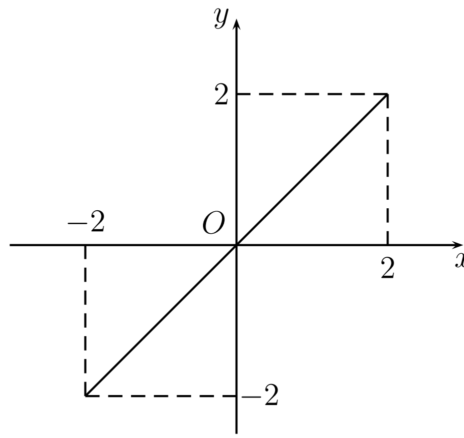
$$a_n = \int_0^2 x \cos \frac{n\pi x}{2} dx = \frac{2x}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2 - \frac{2}{n\pi} \int_0^2 \sin \frac{n\pi x}{2} dx$$

$$= \frac{4}{n^2\pi^2}(\cos n\pi - 1) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } n \text{ là chẵn} \\ -\dfrac{8}{n^2\pi^2} & \text{nếu } n \text{ là lẻ} \end{cases}$$

*Do đó, với $0 < x < 2$,*

$$f(x) = 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \cos \frac{(2n+1)\pi x}{2}.$$

*Để khai triên $f(x)$ thành chuỗi Fourier của các hàm sine, ta xây dựng một hàm số lẻ, tuần hoàn với chu kì bằng $2L = 4$ và $g(x) = x$ nếu $0 < x < 2$.*




$$g(x) = \begin{cases} x, & \textbf{\textit{nếu}}\ 0 < x < 2 \\ x, & \textbf{\textit{nếu}}\ -2 \le x \le 0. \end{cases}$$

*Ta có,* $a_n = 0, n \ge 0$*, và*

$$b_n = \int_0^2 x \sin \frac{n\pi x}{2} dx = -\frac{2x}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{2} \Big|_0^2 + \frac{2}{n\pi} \int_0^2 \cos \frac{n\pi x}{2} dx$$
$$= -\frac{4}{n\pi} \cos n\pi = 4\frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}$$

*Do đó, với* $0 < x < 2$*,*

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin \frac{n\pi x}{2}.$$

## 6.6 Bài tập ôn tập

**Bài tập 6.6 (Cuối kì, K61).** *Cho hàm số* $f(x)$ *tuần hoàn với chu kì* $2\pi$ *thỏa mãn*

$$f(x) = \begin{cases} -x, \ \textbf{\textit{nếu}}\ -\pi < x < 0, \\ 1, \ \textbf{\textit{nếu}}\ 0 < x < \pi, \end{cases}$$

*Khai triển Fourier hàm số* $f(x)$ *và áp dụng tính* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

**Bài tập 6.7.** *Tìm khai triển Fourier của các hàm số sau*

*a)* $f(x)$ *là tuần hoàn với chu kì* $T = 2\pi$ *và* $f(x) = |x|$ *trong khoảng* $[-\pi, \pi]$.

*b)* $f(x)$ *là tuần hoàn với chu kì* $T = 2\pi$*, và* $f(x) = \dfrac{\pi - x}{2}$ *trong khoảng* $(0, 2\pi)$.

*c)* $f(x)$ *là tuần hoàn với chu kì* $T = 2\pi$ *và* $f(x) = \sin ax$ *trong khoảng* $(-\pi, \pi)$*,* $a \neq \mathbb{Z}$*.*

[Gợi ý]

a) $f(x) = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}, \forall x \in [-\pi, \pi].$

b) $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n}, \forall x \in (0, 2\pi).$

c) $f(x) = \dfrac{2\sin a\pi}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n n}{a^2 - n^2}\sin nx, \forall x \in (-\pi, \pi).$

**Bài tập 6.8.** *Khai triển các hàm số sau dưới dạng chuỗi Fourier của các hàm số cosine và sine.*

*a)* $f(x) = \begin{cases} 0 & \textbf{\textit{nếu }} 0 \le x \le h \\ 1 & \textbf{\textit{nếu }} h < x \le \pi \end{cases}$ ***trong khoảng*** $[0, \pi]$.

*b)* $f(x) = \begin{cases} x & \textbf{\textit{nếu }} 0 \le x \le 1 \\ 1 & \textbf{\textit{nếu }} 1 < x < 2 \\ 3 - x & \textbf{\textit{nếu }} 2 \le x \le 3 \end{cases}$ ***trong khoảng*** $(0, 3)$.

[Gợi ý]

a) $f(x) = \dfrac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos(nh) + (-1)^{n+1}}{n}\sin nx$ và $f(x) = \dfrac{\pi - h}{\pi} - \dfrac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin(nh)}{n}\cos nx$

b) $f(x) = \dfrac{2}{3} + \dfrac{3}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}\Big(\cos\dfrac{2n\pi}{3} - 1\Big)\cos\dfrac{2n\pi x}{3}$ và

$f(x) = \dfrac{9}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}\Big(\sin\dfrac{n\pi}{3} + \sin\dfrac{2n\pi}{3}\Big)\sin\dfrac{2n\pi x}{3}$

**Bài tập 6.9.** *Chứng minh rằng với* $0 \le x \le \pi$*,*

*a)* $x(\pi - x) = \frac{\pi^2}{6} - \left(\frac{\cos 2x}{1^2} + \frac{\cos 4x}{2^2} + \frac{\cos 6x}{3^2} + \cdots\right).$

*b)* $x(\pi - x) = \frac{8}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1^3} + \frac{\sin 3x}{3^3} + \frac{\sin 5x}{5^3} + \cdots\right).$

[Gợi ý] Tìm khai triển hàm số $f(x) = x(\pi - x)$ dưới dạng chuỗi Fourier của các hàm số cosine và sine tương ứng.

**Bài tập 6.10.** *Sử dụng kết quả của Bài tập 6.9, chứng minh rằng*

*a)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ *b)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$ *c)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$

**Bài tập 6.11.** *Sử dụng kết quả của Bài tập 6.9, và đẳng thức Parseval chứng minh rằng* *a)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$, *b)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}$.

**Bài tập 6.12.** *Sử dụng kết quả của Bài tập 6.11 chứng minh rằng*

*a)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$, *b)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^6} = \frac{\pi^6}{960}$.

**Bài tập 6.13.** *Khai triển hàm số $f(x) = \sin x, 0 < x < \pi$ dưới dạng chuỗi Fourier của hàm cosine.*

[Đáp số] $\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos 2x}{2^2-1} + \frac{\cos 4x}{4^2-1} + \frac{\cos 6x}{6^2-1} + \cdots\right) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{(2n)^2-1}$.

**Bài tập 6.14.** *Áp dụng kết quả của Bài tập 6.13, chứng minh rằng*

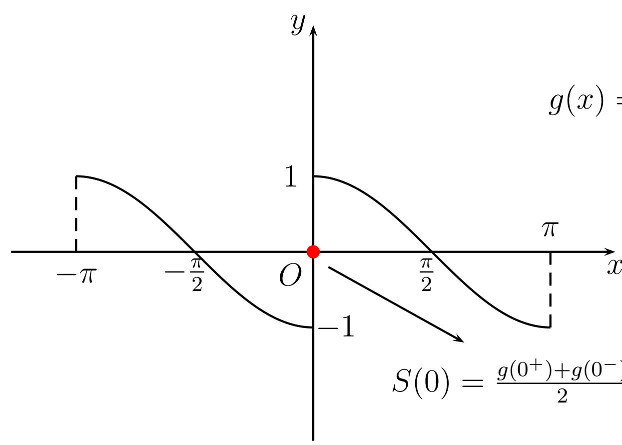
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2(2n+1)^2} = \frac{1}{1^2.3^2} + \frac{1}{3^2.5^2} + \frac{1}{5^2.7^2} + \cdots = \frac{\pi^2-8}{16}.$$

**Bài tập 6.15.** *Khai triển hàm số $f(x) = \cos x, 0 < x < \pi$ dưới dạng chuỗi Fourier của hàm sine.*

[Đáp số] $S(x) = \frac{8}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin 2nx}{4n^2-1}$. Giải thích tại sao

$$f(0) = \cos 0 = 1 \neq S(0) = 0.$$

[Gợi ý] Muốn khai triển hàm số $f(x) = \cos x$ thành chuỗi Fourier của hàm số sine ta phải mở rộng thành hàm số $g(x)$ lẻ, tuần hoàn chu kì $2\pi$, thỏa mãn $g(x) = \cos x, 0 < x < \pi$.




$$g(x) = \begin{cases} \cos x, & 0 < x < \pi, \\ -\cos x, & -\pi < x < 0. \end{cases}$$

$$S(0) = \frac{g(0^+)+g(0^-)}{2} = 0$$

**Bài tập 6.16.** *Khai triển Fourier các hàm số sau* *a)* $f(x) = |x|, |x| < 1$,

*b)* $f(x) = 2x, 0 < x < 1$,

*c)* $f(x) = 10 - x, 5 < x < 15$.

**Bài tập 6.17.** *Cho* $f(x) = x^2$ *trên* $[-\pi, \pi]$*. Hãy khai triển Fourier của hàm* $f(x)$*, sau đó tính tổng các chuỗi số*

*a)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$,

*b)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

# CHƯƠNG 2

# PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN (11 LT + 12 BT)

Để miêu tả các quá trình trong tự nhiên, người ta thường diễn đạt chúng dưới các dạng các mô hình toán học, cho dù là dưới dạng trực giác hay là dưới dạng các định luật vật lý dựa trên các nghiên cứu thực nghiệm. Các mô hình toán học này thường được biểu diễn dưới dạng các phương trình vi phân, các phương trình chứa một ẩn hàm và các đạo hàm của nó. Điều này có lẽ không gây ngạc nhiên, bởi vì trong thực tế chúng ta thường bắt gặp rất nhiều các quá trình có "sự thay đổi", mà sự thay đổi giá trị của một đại lượng nào đó tại một thời điểm $t$ thì chính là đạo hàm của đại lượng đó tại $t$. Chẳng hạn như, vận tốc chính là đạo hàm của hàm khoảng cách, và gia tốc thì chính là đạo hàm của hàm vận tốc. Ngoài ra, chúng ta cũng muốn dự báo giá trị tương lai dựa trên sự thay đổi của các giá trị hiện tại. Chúng ta sẽ bắt đầu bằng một vài ví dụ đơn giản dưới đây.

**Mô hình tăng trưởng dân số.**

Một mô hình (đơn giản nhất) cho sự tăng trưởng dân số là dựa vào giả thiết rằng dân số tăng với tốc độ tỉ lệ với độ lớn của nó. Tất nhiên, giả thiết này chỉ đạt được với điều kiện lý tưởng, đó là môi trường sống thuận lợi, đầy đủ thức ăn, không có dịch bệnh, ... Trong mô hình này,

$t =$ thời gian (biến độc lập)

$P =$ Số lượng cá thể (biến phụ thuộc)

Tốc độ tăng trưởng dân số chính là đạo hàm của $P$ theo $t$, $dP/dt$. Do đó, giả thiết rằng dân số tăng với tốc độ tỉ lệ với độ lớn của nó có thể được viết dưới dạng phương trình sau đây

$$\frac{dP}{dt} = kP \tag{2.1}$$

ở đó $k$ là tỉ lệ tăng dân số, là một hằng số. Phương trình 2.1 là phương trình dạng đơn giản nhất cho mô hình tăng trưởng dân số. Nó là một phương trình vi phân vì nó chứa một ẩn hàm $P$ và đạo hàm của nó $dP/dt$.

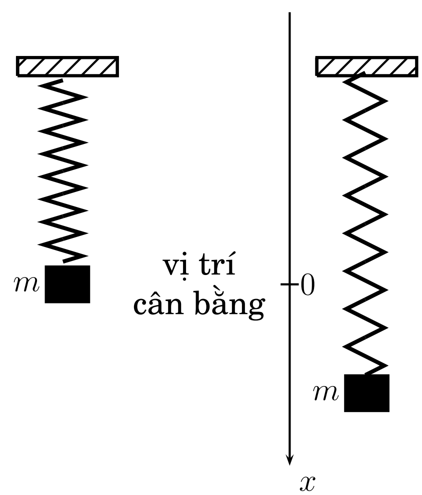
**Ví dụ 0.1.** *Theo số liệu tại www.census.gov vào giữa năm* $1999$ *số dân toàn thế giới đạt tới* $6$ *tỉ người và đang tăng thêm khoảng* $212$ *ngàn người mỗi ngày. Giả sử là mức tăng dân số tự nhiên tiếp tục với tỷ lệ này, hỏi rằng:*

(a) *Tỷ lệ tăng* $k$ *hàng năm là bao nhiêu?*

(b) *Vào giữa thế kỉ* $21$*, dân số toàn thế giới sẽ là bao nhiêu?*

(c) *Hỏi sau bao lâu số dân toàn thế giới sẽ tăng gấp* $10$ *lần–nghĩa là đạt tới* $60$ *tỉ mà các nhà nhân khẩu học tin là mức tối đa mà hành tinh của chúng ta có thể cung cấp đầy đủ lương thực?*

**Mô hình cho sự chuyển động của lò xo**




Bây giờ chúng ta chuyển sang một ví dụ về một mô hình xuất hiện trong vật lý. Chúng ta xét sự chuyển động của một vật thể có khối lượng $m$ được gắn vào một lò xo thẳng đứng (xem hình vẽ trên). Theo Định luật Hooke, nếu lò xo được kéo dãn (hay nén lại) $x$-đơn vị khỏi vị trí cân bằng của nó thì sẽ xuất hiện một phản lực mà tỉ lệ với $x$:

$$\text{phản lực} = -kx$$

ở đó $k$ là một hằng số dương (được gọi là hằng số lò xo). Nếu chúng ta bỏ qua mọi ngoại lực, thì theo Định luật 2 của Newton (lực bằng khối lượng nhân với gia tốc), ta có

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \tag{2.2}$$

Đây là một ví dụ về một dạng phương trình vi phân cấp hai, vì nó chứa đạo hàm cấp hai của ẩn hàm. Hãy xem chúng ta có thể dự đoán nghiệm của phương trình đã cho như thế nào. Trước hết, phương trình 2.2 có thể được viết dưới dạng sau

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x,$$

nghĩa là đạo hàm cấp hai của $x$ tỉ lệ với $x$ nhưng có dấu ngược lại. Chúng ta đã biết hai hàm số có tính chất này ở phổ thông, đó là các hàm số sine và cosine. Thực tế, mọi nghiệm của phương trình 2.2 đều có thể viết dưới dạng tổ hợp của các hàm số sine và cosine. Điều này có lẽ cũng không gây ngạc nhiên, bởi vì chúng ta dự đoán rằng vật thể này sẽ dao động xung quanh điểm cân bằng của lò xo, cho nên sẽ thật hợp lý nếu nghiệm của nó có chứa các hàm lượng giác.

**Ví dụ 0.2.** *Chứng minh rằng với mọi $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, các hàm số sau đây đều là nghiệm của phương trình 2.2:*

$$x(t) = C_1 \cos\sqrt{\frac{k}{m}} + C_2 \sin\sqrt{\frac{k}{m}}.$$

## §1. CÁC KHÁI NIỆM MỞ ĐẦU

- Phương trình vi phân (viết tắt: PTVP) là những phương trình có dạng

  $$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0,$$

  trong đó $x$ là biến số độc lập, $y = y(x)$ là hàm số phải tìm, $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ là các đạo hàm của nó.

- Nghiệm của PTVP: là hàm số $y = y(x)$ thỏa mãn phương trình trên.

- Giải PTVP: là tìm tất cả các nghiệm của nó.

- Cấp của PTVP: là cấp cao nhất của đạo hàm của $y$ có mặt trong phương trình.

- PTVP tuyến tính là những phương trình mà hàm số $F$ là hàm bậc nhất đối với các biến $y, y', \ldots, y^{(n)}$. Dạng tổng quát của PTVP tuyến tính cấp $n$ là:

  $$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x),$$

  trong đó $a_1(x), \cdots, a_n(x)$ là những hàm số cho trước.

**Ví dụ 1.1.** *Giải các PTVP sau* ***a)*** $y' = \sin x$ ***b)*** $y' = \ln x$ ***c)*** $y'' = xe^x$.

**Ví dụ 1.2.** *Chứng minh rằng mọi hàm số trong họ các hàm số sau đây*

$$y = \frac{1 + ce^t}{1 - ce^t}$$

*đều là một nghiệm của PTVP* $y' = \frac{1}{2}(y^2 - 1)$.

# §2. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP MỘT

## 2.1 Đại cương về phương trình vi phân cấp một

Xét bài toán giá trị ban đầu (Cauchy)

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \tag{2.3}$$

**Định lý 2.1 (Sự tồn tại duy nhất nghiệm).** *Giả thiết*

- $f(x, y)$ *liên tục trên miền* $D \subset \mathbb{R}^2$*,*
- $(x_0, y_0) \in D$*.*

*Khi đó*

- *trong lân cận* $U_\epsilon(x_0)$ *nào đó của* $x_0$ *tồn tại ít nhất một nghiệm* $y = y(x)$ *của phương trình* $y' = f(x, y)$ *thỏa mãn* $y(x_0) = y_0$.
- *Ngoài ra, nếu* $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ *liên tục trên* $D$ *thì nghiệm trên là duy nhất.*

**Chú ý 2.1.**

- *Vi phạm điều kiện* $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ *liên tục trên* $D$ *có thể phá vỡ tính duy nhất nghiệm của bài toán. Ví dụ,* $y' = 2\sqrt{y}, y(0) = 0$.
- *Vi phạm giả thiết* $f(x, y)$ *liên tục trên* $D$ *có thể làm bài toán vô nghiệm. Ví dụ,* $y' = \frac{2y}{x}, y(0) = 1$.

**Định nghĩa 2.1.** *Xét PTVP cấp một tổng quát*

$$y' = f(x, y). \tag{2.4}$$

1. *Nghiệm tổng quát của phương trình là họ các hàm số* $y = \varphi(x, C)$ *thỏa mãn:*
    - *với mỗi* $C$*,* $\varphi(x, C)$ *là một nghiệm của phương trình (2.4),*
    - $\forall x_0, y_0 \in D, \exists C = C_0$*:* $\varphi(x, C_0)$ *là nghiệm của bài toán Cauchy (2.3).*

   *Khi đó* $\varphi(x, C_0)$ *được gọi là một nghiệm riêng.*
2. *Nghiệm kì dị là nghiệm không nằm trong họ nghiệm tổng quát.*
3. *Tích phân tổng quát là nghiệm tổng quát được cho dưới dạng hàm ẩn* $\phi(x, y, C) = 0$.

4. *Khi cho $C = C_0$ cụ thể ta có tích phân riêng $\phi(x, y, C) = 0$.*

**Ví dụ 2.1.** *Xét phương trình*

$$y' = 2\sqrt{y}, y \geq 0.$$

*Giả sử $y \neq 0$, chia hai vế của phương trình cho $2\sqrt{y}$ ta được*

$$(\sqrt{y})' = 1,$$

*do đó $\sqrt{y} = x + C$. Như vậy trong miền*

$$G = \begin{cases} -\infty < x < +\infty, \\ 0 < y < +\infty \end{cases}$$

*phương trình có nghiệm tổng quát là $y = (x + C)^2, x > -C$. Thật vậy, trong miền $G$ hàm $f(x, y) = 2\sqrt{y}$ liên tục và có đạo hàm riêng $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{y}}$ cũng liên tục. Ngoài ra, phương trình còn có một nghiệm $y(x) = 0$. Nghiệm này là nghiệm kì dị.*

**Ví dụ 2.2.** *Tìm nghiệm (hoặc tích phân) tổng quát của các PTVP*

*a)* $y' = \sin x$, *b)* $y' = \ln x$, *c)* $y' = xe^x$.

## 2.2 Các phương trình khuyết

Chúng ta trước hết xét một lớp các PTVP cấp một đơn giản nhất, đó là các phương trình khuyết, i.e., khi phương trình không có sự xuất hiện của $y$ hoặc $x$.

1. Phương trình khuyết $y$: là những phương trình có dạng $F(x, y') = 0$.

   - Nếu giải được $y' = f(x)$ thì $y = \displaystyle\int f(x)dx$.

   - Nếu giải được $x = f(y')$ thì đặt $y' = t$ ta có $\begin{cases} x = f(t) \\ y = \displaystyle\int tf'(t)dt. \end{cases}$

     Đây chính là tích phân tổng quát của phương trình được cho dưới dạng tham số.

   - Nếu giải được $\begin{cases} x = f(t) \\ y' = g(t) \end{cases}$ thì ta có $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{f'(t)dt} = g(t)$. Do đó

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = \displaystyle\int g(t)f'(t)dt. \end{cases}$$

     Đây chính là tích phân tổng quát của phương trình được cho dưới dạng tham số.

2. Phương trình khuyết $x$: là những phương trình có dạng $F(y, y') = 0$.

   - Nếu giải được $y' = f(y)$ thì ta có $\frac{dy}{dx} = f(y) \Rightarrow x = \int \frac{1}{f(y)} dy$.
   - Nếu giải được $y = f(y')$, đặt $y' = t$ thì $\begin{cases} x = \int \frac{f'(t)}{t} dt \\ y = f(t). \end{cases}$
   - Nếu giải được dưới dạng tham số $\begin{cases} y = f(t), \\ y' = g(t) \end{cases}$ thì $x = \int \frac{f'(t)}{g(t)} dt$.

**Ví dụ 2.3.** *Giải các PTVP sau* *a)* $x = y'^2 - y' + 2$ *b)* $y^2 + y'^2 = 4$.

## 2.3 Phương trình vi phân với biến số phân ly

**Định nghĩa 2.2.** *Phương trình có dạng* $f(y)dy = g(x)dx$ *hay* $y' = \frac{g(x)}{f(y)}$ *được gọi là PTVP với biến số phân ly.*

Sở dĩ phương trình như trên được gọi là PTVP với biến số phân ly, vì nó được tách thành hai vế, một vế chỉ chứa $x$, và một vế chỉ chứa $y$.

**Cách giải:** tích phân hai vế của phương trình trên ta được

$$\int f(y)dy = \int g(x)dx \Rightarrow F(y) = G(x) + C.$$

**Ví dụ 2.4 (Giữa kì, K61).** *Giải các PTVP*

*a)* $1 + x + xy'y = 0$, *b)* $1 + x - xy'y = 0$

**Bài tập 2.1.** *Giải các PTVP sau*

*a)* $\tan y dx - x \ln x dy = 0$,

*b)* $y' \cos y = y$,

*c)* $\frac{4+y^2}{\sqrt{x^2+4x+13}} = \frac{3y+2}{x+1} y'$,

*d)* $y' = a \cos y + b \ (b > a > 0)$,

*e)* $y' - y^2 - 3y + 4 = 0$,

*f)* $y'(2x + y) = 1$,

*g)* $y' = \sin(y - x - 1)$,

*h)* $y' = \frac{x-y-1}{x-y-2}$,

*i)* $x^2(y^3 + 5)dx + (x^3 + 5)y^2 dy = 0, y(0) = 1$,

*j)* $xydx + (1 + y^2)\sqrt{1 + x^2} dy = 0, y(\sqrt{8}) = 1$.

## 2.4 Phương trình vi phân đẳng cấp

**Định nghĩa 2.3.** *Phương trình có dạng* $y' = F\left(\frac{y}{x}\right)$ *được gọi là phương trình đẳng cấp.*

**Cách giải:** Đặt $v = \frac{y}{x}$ ta có $y' = v + xv'$. Thay vào phương trình ta được PTVP với biến số phân ly

$$\frac{dx}{x} = \frac{dv}{F(v) - v}.$$

**Bài tập 2.2 (Cuối kì, K62).** *Giải các phương trình vi phân*

*a)* $2y' + \left(\frac{y}{x}\right)^2 = -1.$

*b)* $2y' - \left(\frac{y}{x}\right)^2 = 1.$

**Bài tập 2.3.** *Giải các PTVP*

*a)* $y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{y} + 1$,

*b)* $xy' = x \sin \frac{y}{x} + y$,

*c)* $x^2y' + y^2 + xy + x^2 = 0,$

*d)* $(x + 2y)dx - xdy = 0$,

*e)* $xydy - y^2dx = (x + y)^2 e^{-\frac{y}{x}} dx$,

*f)* $(x - 2y + 3)dy + (2x + y - 1)dx = 0$,

*g)* $xy' = y \ln \frac{y}{x}, y(1) = 1$,

*h)* $(\sqrt{xy} - x)dy + ydx = 0, y(1) = 1.$

## 2.5 Phương trình đưa được về phương trình đẳng cấp

Xét phương trình

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right) \tag{2.5}$$

Nhận xét rằng nếu $c_1 = c_2 = 0$ thì (2.5) là phương trình đẳng cấp. Nếu một trong hai số $c_1, c_2$ khác $0$ thì ta sẽ tìm cách đưa (2.5) về dạng đẳng cấp.

1. Nếu định thức $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ thì áp dụng phép đổi biến số $\begin{cases} x = u + \alpha \\ y = v + \beta \end{cases}$ trong đó $u, v$ là các biến số mới, $\alpha, \beta$ là các tham số cần tìm để phương trình mới thu được là đẳng cấp. Thay vào (2.5) ta được

$$\frac{dv}{du} = \frac{dv}{dy}\frac{dy}{dx}\frac{dx}{du} = \frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1u + b_1v + a_1\alpha + b_1\beta + c_1}{a_2u + b_2v + a_2\alpha + b_2\beta + c_2}\right). \tag{2.6}$$

Để (2.6) là đẳng cấp thì ta chọn $\alpha, \beta$ sao cho

$$\begin{cases} a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0 \\ a_2\alpha + b_2\beta + c_2 = 0. \end{cases} \tag{2.7}$$

Phương trình (2.7) có nghiệm duy nhất vì định thức Crame của hệ $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ khác $0$.

2. Nếu định thức $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$ thì $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \lambda$. Do đó phương trình (2.5) có dạng

$$y' = f\left(\frac{(a_1x + b_1y) + c_1}{\lambda(a_1x + b_1y) + c_2}\right) = \varphi(a_1x + b_1y). \tag{2.8}$$

Đặt $z = a_1x + b_1y$ thì $z' = a_1 + b_1y'$, sẽ dẫn đến phương trình phân ly dạng

$$\frac{dz}{dx} = a_1 + b_1\varphi(z).$$

## 2.6 Phương trình vi phân tuyến tính

**Định nghĩa 2.4.** *Phương trình có dạng*

$$y' + p(x)y = q(x) \tag{2.9}$$

*được gọi là PTVP tuyến tính cấp một.*

**Có ba cách giải PTVP tuyến tính cấp một:** phương pháp thừa số tích phân - phương pháp công thức nghiệm tổng quát - phương pháp biến thiên hằng số

**Phương pháp thừa số tích phân**

Chúng ta hãy xuất phát từ một ví dụ đơn giản sau:

**Ví dụ 2.5.** *Giải PTVP*

$$y' + \frac{1}{x}y = 2. \tag{2.10}$$

[Lời giải] Nhân cả hai vế của phương trình trên với $x$ ta được $xy' + y = 2x$. Phương trình này có thể được viết lại dưới dạng

$$(xy)' = 2x.$$

Do đó, tích phân cả hai vế của phương trình trên dẫn đến tích phân tổng quát

$$xy = x^2 + C.$$

Một cách tổng quát, mọi PTVP tuyến tính cấp một đều có thể giải một cách tương tự như trên bằng cách nhân cả hai vế của (2.9) với một đại lượng thích hợp $\rho(x)$, được gọi là thừa số tích phân.

- Tìm hàm số $\rho(x)$ sao cho vế trái của phương trình (2.9) sẽ trở thành đạo hàm của $\rho(x).y(x)$, nghĩa là
$$\rho(x)(y'(x) + py(x)) = (\rho(x)y(x))'.$$
Giải phương trình này, tính được thừa số tích phân $\rho(x) = e^{\int p(x)dx}$.

- Nhân hai vế của phương trình (2.9) với $\rho(x)$, phương trình trở thành
$$\frac{d}{dx}(\rho(x)y(x)) = \rho(x)q(x).$$

- Tích phân hai vế phương trình này ta được $\rho(x)y(x) = \int \rho(x)q(x)dx + C$.

**Ví dụ 2.6.** *Giải PTVP* $y' + 3x^2y = 6x^2$.

*Chứng minh.* Một thừa số tích phân của phương trình trên là
$$I(x) = e^{\int 3x^2dx} = e^{x^3}$$
Nhân cả 2 vế của phương trình trên với $e^{x^3}$, ta được
$$e^{x^3}y' + 3x^2e^{x^3}y = 6x^2e^{x^3}$$
hay là
$$\frac{d}{dx}(e^{x^2}y) = 6x^2e^{x^3}.$$
Tích phân hai vế của phương trình này dẫn đến
$$e^{x^2}y = \int 6x^2e^{x^3}dx = 2e^{x^3} + C,$$
hay là
$$y = 2 + Ce^{-x^3}.$$

**Ví dụ 2.7.** *Giải các PTVP* *a)* $y' - 2xy = 1 - 2x^2$ *b)* $y' = \frac{1}{x}(2y + xe^x - 2e^x)$.

**Phương pháp biến thiên hằng số**

- Giải PTVP tuyến tính cấp một thuần nhất $y' + p(x)y = 0$ để được nghiệm tổng quát là $y = Ce^{-\int p(x)dx}$.

- Cho hằng số $C$ biến thiên, i.e., $C = C(x)$ phụ thuộc vào $x$ để được $y = C(x)e^{-\int p(x)dx}$.

- Thay vào phương trình $y' + p(x)y = q(x)$ và giải ra
$$C(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C_0.$$

**Bài tập 2.4.** *Giải các PTVP*

*a)* $y' - 2xy = 1 - 2x^2$,

*b)* $y' = \frac{1}{x}(2y + xe^x - 2e^x)$,

*c)* $y' + y\cos x = \sin x\cos x, y(0) = 0$,

*d)* $y'\sqrt{1-x^2} + y = \arcsin x, y(0) = 0$.

### Công thức nghiệm tổng quát

**Định lý 2.2 (Công thức nghiệm tổng quát).** *Nếu các hàm $p(x), q(x)$ liên tục trong một khoảng mở $I$ nào đó chứa điểm $x_0$ thì phương trình*

$$y' + p(x)y = q(x)$$

*có NTQ là*

$$y(x) = y(x) = e^{-\int p(x)dx}\left[\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C\right].$$

*Nói riêng, bài toán giá trị ban đầu*

$$y' + p(x)y = q(x), \quad y(x_0) = y_0$$

*có nghiệm duy nhất $y(x)$ trên $I$ được cho bởi công thức*

$$y(x) = e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)dt}\left[\int\limits_{x_0}^{x} q(t)e^{\int_{x_0}^{t} p(s)ds}dt + y_0.\right]$$

**Bài tập 2.5.** *Giải các PTVP*

*a)* $x(1+x^2)y' + y = \arctan x$,

*b)* $y'(x+y^2) = y$,

*c)* $(2xy+3)dy - y^2dx = 0$,

*d)* $(1+y^2)dx = (-x + \arctan y)dy$.

## 2.7 Phương trình Bernoulli

Trong mục này, chúng ta xét một lớp các phương trình có thể đưa được về PTVP tuyến tính, đó là phương trình Bernoulli.

**Định nghĩa 2.1.** *Phương trình có dạng $y' + p(x)y = q(x)y^\alpha, 0 \neq \alpha \neq 1$ được gọi là phương trình Bernoulli.*

**Cách giải:** Đặt $v = y^{1-\alpha}$ để đưa về PTVP tuyến tính

$$v' + (1-\alpha)p(x)v = (1-\alpha)q(x).$$

**Bài tập 2.6.** *Giải các PTVP*

*a)* $y' + \frac{xy}{1-x^2} = x\sqrt{y}$,

*b)* $y' + \frac{y}{x} = x^2y^4$,

*c)* $ydx + (x + x^2y^2)dy = 0$,

*d)* $y' - 2y\tan x + y^2\sin^2 x = 0$,

*e)* $3dy + (1 + 3y^3)y\sin x dx = 0, y(\pi/2) = 1$,

*f)* $(y^2 + 2y + x^2)y' + 2x = 0, y(1) = 0$.

## 2.8 Phương trình vi phân toàn phần

**Định nghĩa 2.2.** *Phương trình* $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ *được gọi là PTVP toàn phần nếu tồn tại hàm* $u(x,y)$ *sao cho* $du(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)$.

**Cách giải:** Tích phân hai vế phương trình $du(x,y) = 0$ ta được tích phân tổng quát của phương trình là

$$u(x,y) = C.$$

**Định lý 2.3 (Tiêu chuẩn kiểm tra PTVP toàn phần).** *Phương trình* $P(x,y)dx+Q(x,y)dy = 0$ *là toàn phần nếu và chỉ nếu* $P, Q$ *cùng với các ĐHR của nó liên tục và* $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$*. Hàm số* $u(x,y)$ *được tìm theo công thức*

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x,y)dy = \int_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy. \qquad (2.11)$$

Do đó, tích phân tổng quát của phương trình là

$$\int_{x_0}^{x} P(t,y_0)dt + \int_{y_0}^{y} Q(x,t)dt = C \text{ hoặc } \int_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy = C.$$

**Ví dụ 2.1.** *Giải PTVP* $(3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^3)dy = 0$.

[Lời giải]

**Cách 1.**

**B1.** Kiểm tra điều kiện để PTVP là toàn phần. Thật vậy,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 12xy$$

**B2.** Áp dụng công thức (2.11), chọn $(x_0, y_0) = (0, 1)$, ta có

$$u(x,y) = \int_{0}^{x} (3x^2 + 6xy^2)dx + \int_{1}^{y} 4y^3dy = x^3 + 3x^2y^2 + y^4 - 1.$$

Vậy tích phân tổng quát của phương trình là

$$x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = C.$$

Có cách nào không cần nhớ công thức (2.11) mà vẫn giải được bài tập trên hay không?
**Cách 2.**

**B1.** Kiểm tra điều kiện để PTVP là toàn phần.

**B2.** Ta cần tìm hàm số $u(x,y)$ sao cho $du(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$, nghĩa là

$$u'_x = P(x,y) = 3x^2 + 6xy^2, \quad u'_y = 6x^2y + 4y^3.$$

Xuất phát từ phương trình $u'_x = P(x,y) = 3x^2 + 6xy^2$ ta có

$$u(x,y) = \int (3x^2 + 6xy^2)dx = x^3 + 3x^2y^2 + g(y).$$

Tiếp theo, phương trình $u'_y = 6x^2y + 4y^3$ dẫn đến $6xy^2 + g'(y) = 6x^2y + 4y^3$, hay là $g'(y) = 4y^3$. Do đó, có thể chọn $g(y) = y^4$ chẳng hạn.

Vậy tích phân tổng quát của phương trình là

$$u(x,y) = x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = C.$$

**Bài tập 2.7.** *Giải các PTVP*

*a)* $(x^2 + y)dx + (x - 2y)dy = 0$,

*b)* $\left(y + \frac{2}{x^2}\right)dx + \left(x - \frac{3}{y^2}\right)dy = 0$,

*c)* $(e^x + y + \sin y)dx + (e^y + x + \cos y)dy = 0$,

*d)* $e^y dx - (xe^y - 2y)dy = 0, y(1) = 0.$

## 2.9 Thừa số tích phân

Xét PTVP $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ với $Q'_x \neq P'_y$. Phương trình này chưa phải là PTVP toàn phần. Mục đích của chúng ta là biến đổi phương trình này về một PTVP toàn phần.

**Định nghĩa 2.1 (Thừa số tích phân).** *Nếu có thể tìm được hàm số $\mu(x) \neq 0$ (hoặc $\mu(y) \neq 0$) sao cho phương trình $\mu P dx + \mu Q dy = 0$ là PTVP toàn phần thì hàm số $\mu$ được gọi là thừa số tích phân.*

Khi đó, theo tiêu chuẩn kiểm tra PTVP toàn phần,

$$\frac{\partial}{\partial x}(\mu Q) = \frac{\partial}{\partial y}(\mu P).$$

**Cách tìm thừa số tích phân:** Không phải lúc nào cũng tìm được thừa số tích phân, mà chỉ trong một số TH đặc biệt. Chẳng hạn như,

- Nếu $\mu = \mu(x)$ thì

$$\frac{\partial}{\partial x}(\mu(x)Q) = \mu'(x)Q(x) + \mu(x)Q'_x, \quad \frac{\partial}{\partial y}(\mu(x)P) = \mu(x)P'_y$$

Phương trình

$$\frac{\partial}{\partial x}(\mu Q) = \frac{\partial}{\partial y}(\mu P)$$

dẫn đến

$$\mu'(x)Q(x) + \mu(x)Q'_x = \mu(x)P'_y$$

hay là

$$\frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = -\frac{Q'_x - P'_y}{Q}$$

Do đó, nếu $\frac{Q'_x - P'_y}{Q} = \varphi(x)$ thì $\mu(x) = e^{-\int \varphi(x)dx}$.

- Một cách tương tự, nếu $\frac{Q'_x - P'_y}{P} = \psi(y)$ thì $\mu(y) = e^{\int \psi(y)dy}$.

**Ví dụ 2.2.** *Giải PTVP* $(x^2 - y)dx + (x^2y^2 + x)dy = 0$.

[Lời giải] Ta có

$$\frac{Q'_x - P'_y}{Q} = \frac{2(1 + xy^2)}{x(xy^2 + 1)} = \frac{2}{x}.$$

Do đó

$$\mu(x) = e^{-2\int \frac{dx}{x}} = \frac{1}{x^2}.$$

Nhân hai vế của PT đã cho với $\frac{1}{x^2}$ ta được PTVP toàn phần

$$\left(1 - \frac{y}{x^2}\right)dx + \left(y^2 + \frac{1}{x}\right)dy = 0.$$

Giải PT này ta được tích phân tổng quát là

$$3x^2 + xy^3 + 3y - Cx = 0.$$

**Bài tập 2.8.** *Tìm thừa số tích phân và giải PTVP* $(x + y^2)dx - 2xydy = 0$.

**Bài tập 2.9.** *Tìm thừa số tích phân* $\alpha(y)$ *để phương trình sau là phương trình vi phân toàn phần và giải phương trình đó với* $\alpha$ *tìm được*

$$(2xy^2 - 3y^3)dx + (y - 3xy^2)dy$$

**Bài tập 2.10.** *Tìm thừa số tích phân* $\alpha(x)$ *để phương trình sau là phương trình vi phân toàn phần và giải phương trình đó với* $\alpha$ *tìm được*

$$\left[\frac{1}{x+y} - \ln(x+y)\right]dx + \frac{1}{x+y}dy = 0.$$

## 2.10 Bài tập ôn tập

**Bài tập 2.11.** *Giải các phương trình sau*

a) $y' = \sqrt{4x+2y-1}$,

b) $(y^2-3x^2)dy + 2xydx = 0, y(0) = 1$,

c) $y' - \frac{y-1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$,

d) $y' + y = e^{\frac{x}{2}}\sqrt{y}, y(0) = \frac{9}{4}$.

**Bài tập 2.12.** *Chứng minh rằng*

a) $y = x\displaystyle\int_1^x e^{t^2}dt$ là nghiệm của phương trình $xy' - y = x^2e^{x^2}$,

b) $y = x + \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n(n-1)}$ là nghiệm của phương trình $(1-x)dy = (1+x-y)dx$.

# §3. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP HAI

## 3.1 Đại cương về phương trình vi phân cấp hai

Xét bài toán giá trị ban đầu (Cauchy)

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y'), \\ y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0. \end{cases} \tag{2.12}$$

**Định lý 3.1 (Sự tồn tại duy nhất nghiệm).** *Giả thiết*

- $f(x, y, y'), \frac{\partial f}{\partial y} f(x, y, y'), \frac{\partial f}{\partial y'} f(x, y, y')$ *liên tục trên* $D \subset \mathbb{R}^3$*,*
- $(x_0, y_0, y'_0) \in D$*.*

*Khi đó bài toán Cauchy (2.12) có nghiệm duy nhất trong* $D$*.*

**Định nghĩa 2.1 (Nghiệm tổng quát).** *Hàm* $y = \varphi(x, C_1, C_2)$ *được gọi là NTQ của*

$$y'' = f(x, y, y') \tag{2.13}$$

*nếu*

- *với mỗi* $C_1, C_2$ *thì* $\varphi(x, C_1, C_2)$ *là một nghiệm của (2.13),*
- $\forall (x_0, y_0, y'_0) \in D$*, tồn tại* $C_1^0, C_2^0$ *sao cho* $y = \varphi(x, C_1^0, C_2^0)$ *là nghiệm của bài toán Cauchy (2.12).*

**Định nghĩa 2.2 (Tích phân tổng quát).** *Phương trình* $\phi(x, y, C_1, C_2) = 0$ *xác định nghiệm tổng quát của phương trình (2.13) dưới dạng hàm ẩn được gọi là tích phân tổng quát. Với* $C_1 = C_1^0, C_2 = C_2^0$ *cụ thể, phương trình* $\phi(x, y, C_1^0, C_2^0) = 0$ *được gọi là tích phân riêng.*

**Ví dụ 3.1.** *Giải PTVP* $y'' = e^x$ *ta được NTQ của phương trình* $y = e^x + C_1 x + C_2$*.*

## 3.2 Các phương trình khuyết

Nguyên tắc chung để giải các phương trình vi phân cấp hai khuyết đó là đưa về PTVP cấp một.

**Phương trình khuyết $y$**

Xét phương trình $F(x, y', y'') = 0$.

- Đặt $y' = u$ để đưa về PTVP cấp một $F(x, u, u') = 0$.
- Giả sử giải phương trình này được NTQ $u = \varphi(x, C)$.
- Giải PTVP cấp một $y' = \varphi(x, C)$.

**Bài tập 3.1.** *Giải các PTVP*

a) $x = (y'')^2 + y'' + 1$,

b) $y'' = \frac{1}{x}$,

c) $y'' = x + \sin x$,

d) $y'' = \ln x$.

e) $y'' = \arctan x$,

f) $xy'' = x^2 - x, y(0) = 0$,

g) $(1 - x^2)y'' - xy' = 2$,

h) $y'' = y' + x$,

i) $2xy'y'' = y'^2 - 1$,

j) $xy'' + xy'^2 = y', y(2) = 2, y'(2) = 1$.

**Phương trình khuyết $x$**

Xét phương trình $F(y, y', y'') = 0$.

- Đặt $u = y' \Leftrightarrow u = \frac{dy}{dx}$ ta có $y'' = \frac{du}{dx} = u\frac{du}{dy}$. Phương trình đã cho được đưa về PTVP cấp một $F(y, u, u\frac{du}{dy}) = 0$, ở đó $u$ là một hàm số đối với biến $y$.
- Giả sử giải phương trình này được NTQ $u = \varphi(y, C)$.
- Giải PTVP cấp một $y' = \varphi(y, C)$ ta được nghiệm cần tìm.

**Bài tập 3.2.** *Giải các PTVP*

a) $y'^2 + 2yy'' = 0$,

b) $yy'' + y'^2 = 1$,

c) $2yy'' = y'^2 + 1$,

d) $y'^2 + 2yy'' = 0$,

e) $yy'' + 1 = y'^2$,

f) $yy'' = y'^2 - y'^3$.

g) $y'' + y'^2 = 2e^{-y}$,

h) $y'(1 + y'^2) = y''$,

i) $1 + yy'' + y'^2 = 0, y(1) = 0, y'(1) = 1$.

## 3.3 Phương trình vi phân tuyến tính cấp hai

**Định nghĩa 2.3 (Phương trình vi phân tuyến tính cấp hai).** *Phương trình vi phân có dạng*

$$y'' + p(x)y' + q(x) = f(x) \tag{2.14}$$

*được gọi là PTVP TT cấp hai không thuần nhất. Nếu $f(x) = 0$ thì phương trình vi phân có dạng*

$$y'' + p(x)y' + q(x) = 0 \tag{2.15}$$

*được gọi là PTVP TT cấp hai thuần nhất*

### Giải PTVP tuyến tính cấp hai thuần nhất

Trước hết ta có nhận xét đơn giản sau.

**Định lý 3.2.** *Nếu $y_1(x), y_2(x)$ là các nghiệm của (2.15) trong khoảng $(a, b)$ thì hàm số*

$$y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$$

*cũng là một nghiệm của phương trình (2.15) trong khoảng $(a, b)$, ở đó $C_1, C_2$ là các hằng số bất kì.*

Hai Định lý 3.5 và 3.6 sau đây nói rằng NTQ của phương trình (2.15) có dạng

$$y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$$

với điều kiện là $y_1(x)$ và $y_2(x)$ là các nghiệm ĐLTT.

### Hệ nghiệm cơ bản - Độc lập tuyến tính - Phụ thuộc tuyến tính

Các khái niệm véctơ độc lập tuyến tính (ĐLTT), phụ thuộc tuyến tính (PTTT) đã được giới thiệu ở môn Đại số. Cụ thể:

**Định nghĩa 2.1.** *Các hàm số $y_1(x), y_2(x)$ được gọi là PTTT nếu tồn tại các hằng số $\alpha_1, \alpha_2$ không đồng thời bằng $0$ sao cho*

$$\alpha_1y_1(x) + \alpha_2y_2(x) = 0 \text{ trên } (a, b). \tag{2.16}$$

*Các hàm số $y_1(x), y_2(x)$ được gọi là ĐLTT trên $(a, b)$ nếu nó không PTTT. Nói cách khác, hệ thức (2.16) chỉ xảy ra nếu $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.*

**Chú ý 2.1.** *Nếu $y_1(x), y_2(x)$ là PTTT, không mất tính tổng quát, ta giả sử $\alpha_1$ trong hệ thức (2.16) là khác $0$. Khi đó $y_1(x) = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}y_2(x)$. Nói cách khác $\frac{y_1(x)}{y_2(x)} = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ là hằng số trên $(a, b)$. Ngược lại, nếu $\frac{y_1(x)}{y_2(x)}$ không phải là hằng số trên $(a, b)$ thì $y_1(x)$ và $y_2(x)$ là ĐLTT.*

Các Định lý sau đây sẽ cho phép chúng ta kiểm tra được khi nào hai nghiệm của phương trình (2.15) là ĐLTT.

**Định lý 3.3.** *Nếu $y_1(x), y_2(x)$ là PTTT trên $(a,b)$ thì định thức Wronsky của chúng*

$$W(y_1,y_2)(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = 0$$

*trên $(a,b)$.*

*Chứng minh.* Nếu $y_1(x), y_2(x)$ là PTTT trên $(a,b)$ thì giả sử $y_1(x) = \alpha y_2(x)$. Khi đó dễ dàng tính được định thức Wronsky của chúng bằng $0$. ■

Để đơn giản về mặt kí hiệu, nếu $y_1, y_2$ đã rõ ràng thì ta kí hiệu $W(x) := W(y_1,y_2)(x)$.

**Hệ quả 3.1.** *Nếu $W(y_1,y_2)(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0$ tại $x_0$ nào đó thuộc $(a,b)$ thì $y_1, y_2$ là ĐLTT.*

**Chú ý 2.1.** *Chú ý rằng điều ngược lại của Định lý 3.3 là không đúng. Chẳng hạn như các hàm số*

$$f(x) = \begin{cases} x^2, \text{ nếu } x \geq 0, \\ 0, \text{ nếu } x \leq 0 \end{cases} \quad \text{và } g(x) = \begin{cases} 0, \text{ nếu } x \geq 0, \\ x^2, \text{ nếu } x \leq 0 \end{cases}$$

*có $W(f,g) = 0$ trên $(-\infty,+\infty)$, tuy nhiên $f, g$ là ĐLTT. Tuy nhiên, nếu có thêm điều kiện $y_1$ và $y_2$ là các nghiệm của PT (2.17) thì điều ngược lại của Định lý 3.3 vẫn đúng. Đó chính là nội dung của Định lý sau đây.*

**Định lý 3.4.** *Nếu $y_1(x), y_2(x)$ là các nghiệm của phương trình (2.15) thì chúng là PTTT trên $(a,b)$ nếu và chỉ nếu*

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = 0, \forall x \in (a,b).$$

*Chứng minh.* $\boxed{\Rightarrow}$ Đã chứng minh ở trong Định lý 3.3.

$\boxed{\Leftarrow}$ Giả thiết $W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = 0, \forall x \in (a,b)$. Lấy điểm $x_0 \in (a,b)$ và xét hệ phương trình với ẩn số $\alpha_1, \alpha_2$:

$$\begin{cases} \alpha_1 y_1(x_0) + \alpha_2 y_2(x_0) = 0, \\ \alpha_1 y_1'(x_0) + \alpha_2 y_2'(x_0) = 0. \end{cases}$$

Định thức Crame của hệ này là $W(x_0) = 0$ nên hệ phương trình có nghiệm không tầm thường $\alpha_1, \alpha_2$ không đồng thời bằng $0$. Xét hàm số

$$y(x) = \alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x).$$

Nhận xét rằng $y(x)$ là một nghiệm của bài toán Cauchy

$$\begin{cases} y'' + p(x)y + q(x) = 0, \\ y(0) = 0, y'(0) = 0. \end{cases}$$

Mặt khác, $y(x) = 0$ cũng là một nghiệm của bài toán Cauchy này nên theo định lý về sự tồn tại duy nhất nghiệm, $y(x) = \alpha y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) = 0$ trên $(a, b)$. Vì $\alpha_1, \alpha_2$ không đồng thời bằng $0$ nên hệ thức này chứng tỏ $y_1(x), y_2(x)$ là PTTT trên $(a, b)$. ■

**Hệ quả 3.1.** *Định thức Wronsky của hai nghiệm của phương trình thuần nhất (2.15) hoặc là đồng nhất bằng* $0$ *trên* $(a, b)$ *hoặc là khác* $0$ *tại mọi điểm của khoảng* $(a, b)$.

**Định lý 3.5.** *Nếu* $y_1(x), y_2(x)$ *là các nghiệm ĐLTT trên* $(a, b)$ *của (2.15) thì NTQ của phương trình (2.15) trong miền* $(a, b) \times \mathbb{R}$ *là*

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x).$$

*Chứng minh.* Hiển nhiên là nếu $y_1(x), y_2(x)$ là các nghiệm của (2.15) thì $y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ cũng là một nghiệm của nó với mỗi $C_1, C_2$. Theo định nghĩa, muốn chứng minh đây là NTQ của phương trình ta phải chỉ ra với mỗi $(x_0, y_0, y_0') \in (a, b) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, có thể tìm được $C_1, C_2$ sao cho bài toán Cauchy

$$\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x) = 0, \\ y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0' \end{cases}$$

có nghiệm là $y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$. Thay vào điều kiện ban đầu $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0'$ ta có hệ

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) = y_0, \\ C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) = y_0'. \end{cases}$$

Hệ này có định thức Crame chính là định thức Wronsky $W(x_0)$ và do đó nó khác $0$. Như vậy có thể giải được $C_1^0, C_2^0$ và

$$y(x) = C_1^0 y_1(x) + C_2^0 y_2(x)$$

chính là nghiệm cần tìm. ■

**Định nghĩa 2.1.** *Hai nghiệm ĐLTT của phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất cấp hai được gọi là hệ nghiệm cơ bản của nó.*

**Định lý 3.6.** *Phương trình (2.15) với các hệ số $p(x), q(x)$ liên tục trên $(a, b)$ có vô số hệ nghiệm cơ bản. Hơn nữa số nghiệm ĐLTT lớn nhất của phương trình đúng bằng $2$, nghĩa là mọi hệ $3$ nghiệm $y_1, y_2, y_3$ của (2.15) đều PTTT trên $(a, b)$.*

*Chứng minh.* Trước hết ta chọn một ma trận $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ sao cho $\det A \neq 0$. Lấy $x_0 \in (a, b)$ bất kì và xét hai bài toán Cauchy sau

$$\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x) = 0, \\ y(x_0) = a_{11}, y'(x_0) = a_{21} \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x) = 0, \\ y(x_0) = a_{21}, y'(x_0) = a_{22}. \end{cases}$$

Theo định lý về sự tồn tại duy nhất nghiệm (Định lý 3.1), hai bài toán Cauchy này có nghiệm duy nhất, được kí hiệu lần lượt là $y_1(x)$ và $y_2(x)$. Định thức Wronsky của hệ nghiệm này taij $x_0$ chính bằng

$$W(y_1, y_2)(x_0) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Do đó, hệ nghiệm này là ĐLTT trên $(a, b)$. Vì ma trận $A$ có thể chọn bất kì sao cho $\det A \neq 0$ nên có vô số hệ nghiệm cơ bản (nếu chọn $A$ là ma trận đơn vị thì hệ nghiệm cơ bản thu được tương ứng được gọi là hệ nghiệm cơ bản chuẩn tắc).

Tiếp theo, ta đi chứng minh mọi hệ $3$ nghiệm $y_1(x), y_2(x), y_3(x)$ của (2.15) đều PTTT.

- Nếu hệ con $y_1(x), y_2(x)$ là PTTT trên $(a, b)$ thì đương nhiên hệ $y_1(x), y_2(x), y_3(x)$ cũng PTTT.
- Nếu hệ con $y_1(x), y_2(x)$ là ĐLTT trên $(a, b)$ thì chúng lập thành hệ nghiệm cơ bản. Do đó, tồn tại $C_1, C_2$ sao cho
$$y_3(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x),$$
tức là hệ $y_1(x), y_2(x), y_3(x)$ là PTTT. Ta có điều phải chứng minh. ■

Kết luận:

- Định lý 3.6 nói rằng luôn luôn tìm được hệ nghiệm cơ bản của (2.15) bao gồm hai nghiệm ĐLTT.
- Định lý 3.5 nói rằng nếu đã tìm được hệ nghiệm cơ bản của (2.15) thì sẽ tìm được NTQ của nó.

Công thức Liouville sau đây nói rằng, không nhất thiết phải tìm hai nghiệm ĐLTT của phương trình thuần nhất (2.15) mà chỉ cần tìm một nghiệm riêng của nó mà thôi. Nghiệm riêng ĐLTT thứ hai có thể được tìm dựa vào nghiệm riêng thứ nhất.

**Định lý 3.7.** • *Nếu biết một nghiệm riêng* $y_1 \neq 0$ *của (2.15) thì có thể tìm được một nghiệm riêng* $y_2$ *của (2.15) ĐLTT với* $y_1$ *và có dạng* $y_2(x) = y_1(x)u(x)$.

• *Công thức Liouville:*

$$y_2 = y_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(x)dx} dx.$$

**Ví dụ 3.1.** *Giải phương trình* $(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$ *biết nó có một nghiệm riêng* $y_1 = x$.

[Lời giải] Từ công thức Liouville ta tìm được một nghiệm riêng ĐLTT với $y_1$ là

$$y_2(x) = \frac{1}{2} x \ln \frac{1+x}{1-x} - 1.$$

Do đó, NTQ của phương trình là

$$y = C_1 x + C_2 \left( \frac{1}{2} x \ln \frac{1+x}{1-x} - 1 \right).$$

**Ví dụ 3.2.** *Giải phương trình Bessel*

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \left(1 - \frac{1}{4x^2}\right) y = 0, \quad x > 0.$$

*biết nó có một nghiệm riêng* $y_1 = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$.

**Tìm nghiệm riêng khác không như thế nào?** Đây là một câu hỏi khó và nói chung, không có phương pháp tổng quát để tìm nghiệm riêng của phương trình (2.15). Chỉ trong một số trường hợp đặc biệt, chẳng hạn như phương trình vi phân tuyến tính cấp hai với hệ số hằng (sẽ được học ở bài ngay tiếp theo đây), thì chúng ta mới có phương pháp tổng quát để giải lớp các bài toán này.

**Bài tập 3.3 (Cuối kì, K62).** *Giải phương trình vi phân*

*a)* $(x+1)y'' - (2x+3)y' + (x+2)y = 0$, *b)* $(x+2)y'' - (2x+5)y' + (x+3)y = 0$.

**Bài tập 3.4.** *Giải các PTVP*

*a)* $y'' = xy' + y + 1$, *c)* $(2x+1)y'' + 4xy' - 4y = 0$,

*b)* $x^2y'' + xy' - y = 0, (y_1 = x)$ *d)* $xy'' - (2x+1)y' + (x+1)y = 0$.

**Giải PTVP tuyến tính cấp hai không thuần nhất**

**Định lý 3.8.** *NTQ của phương trình không thuần nhất (2.14) có dạng $y = \bar{y} + Y$, ở đó $\bar{y}$ là NTQ của phương trình thuần nhất (2.15) và $Y$ là một nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất (2.14).*

**NTQ của PT không thuần nhất = NTQ của PT thuần nhất + một nghiệm riêng.**

**Ví dụ 3.1.** *Giải PTVP $y'' + 4x = 2$.*

[Lời giải] Dễ dàng kiểm tra trực tiếp rằng phương trình thuần nhất $y'' + 4x = 0$ có hai nghiệm ĐLTT là $y_1 = \sin 2x, y_2 = \cos 2x$ và do đó NTQ của phương trình thuần nhất là

$$y = C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x.$$

Phương trình không thuần nhất $y'' + 4x = 2$ có một nghiệm riêng là $y = 1$. Do đó, NTQ của phương trình ban đầu là

$$y = C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x + 1.$$

Như vậy, việc giải PTVP không thuần nhất được quy về bài toán giải PTVP thuần nhất và tìm một nghiệm riêng của nó. Tuy nhiên, nghiệm riêng của PTVP không thuần nhất không phải lúc nào cũng tìm được một cách dễ dàng. Do đó, ngoài phương pháp đi tìm một nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất (2.14) nêu trên, phương pháp Lagrange sau đây sẽ giúp chúng ta tìm NTQ của phương trình không thuần nhất thông qua NTQ của phương trình thuần nhất.

**Phương pháp biến thiên hằng số Lagrange**

- Giả sử tìm được NTQ của phương trình thuần nhất (2.15) là $\bar{y} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$.
- Cho $C_1$ và $C_2$ biến thiên, i.e., $C_1 = C_1(x), C_2 = C_2(x)$, chúng ta sẽ đi tìm nghiệm của PTVP không thuần nhất dưới dạng

  $$y = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x).$$

  Ta có

  $$y' = (C_1' y_1 + C_2' y_2) + (C_1 y_1' + C_2 y_2').$$

  Muốn tìm được hai hàm số $C_1(x)$ và $C_2(x)$ ta cần phải đặt hai điều kiện lên chúng. Điều kiện đầu tiên đó là $y = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x)$ phải thỏa mãn phương trình không thuần nhất (2.14). Điều kiện thứ hai có thể được chọn sao cho tính toán của chúng ta là đơn giản nhất. Xuất phát từ phương trình $y' = (C_1' y_1 + C_2' y_2) + (C_1 y_1' + C_2 y_2')$, ta có thể nghĩ đến một điều kiện

  $$C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0.$$

Khi đó

$$y'' = C_1'y_1' + C_2'y_2' + C_1y_1'' + C_2y_2''.$$

Thay các biểu thức của $y'$ và $y''$ vừa tính trên vào phương trình (2.14) ta được

$$(C_1'y_1' + C_2'y_2' + C_1y_1'' + C_2y_2'') + p(C_1y_1' + C_2y_2') + q(C_1y_1 + C_2y_2) = f(x)$$

hay

$$C_1(y_1'' + py_1 + qy_1) + C_2(y_2'' + py_2' + qy_2) + (C_1'y_1' + C_2'y_2') = f(x).$$

Do $y_1, y_2$ là các nghiệm của phương trình thuần nhất, nên

$$y_1'' + py_1 + qy_1 = y_2'' + py_2' + qy_2 = 0.$$

Do đó dẫn chúng ta tới hệ phương trình $\begin{cases} C_1'y_1 + C_2'y_2 = 0 \\ C_1'y_1' + C_2'y_2' = f(x) \end{cases}$

- Giải hệ phương trình trên và suy ra NTQ của phương trình không thuần nhất (2.14).

**Ví dụ 3.2.** *Giải PTVP* $xy'' - y' = x^2$.

[Lời giải] Xét phương trình thuần nhất tương ứng

$$xy'' - y' = 0$$

có thể viết được dưới dạng

$$\frac{y''}{y'} = \frac{1}{x}$$

suy ra $y' = C_1x$ và $y = \frac{C_1}{2}x^2 + C_2$. Do đó, hệ nghiệm cơ bản của phương trình là $y_1(x) = 1, y_2(x) = x^2$. Ta đi tìm nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất dưới dạng $y^*(x) = C_1(x) + C_2(x)x^2$, trong đó $C_1(x), C_2(x)$ thỏa mãn

$$\begin{cases} 1.C_1'(x) + x^2C_2'(x) = 0, \\ 0.C_1'(x) + 2xC_2'(x) = x^2. \end{cases}$$

Giải hệ này ta được $\begin{cases} C_1'(x) = -\frac{x^2}{2}, \\ C_2'(x) = \frac{1}{2}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1(x) = -\frac{x^3}{6}, \\ C_2(x) = \frac{x}{2}. \end{cases}$

Do đó, $y^*(x) = -\frac{x^3}{6} + \frac{x^3}{2} = \frac{x^3}{3}$ và NTQ của phương trình là

$$y = C_1 + C_2x^2 + \frac{x^3}{3}.$$

**Bài tập 3.5.** *Giải các PTVP*

*a)* $y'' - y' = \frac{2-x}{x^3}e^x$,

*b)* $x^2y'' + xy' - y = x^2$,

*c)* $x^2y'' - xy' = 3x^3$,

*d)* $y'' + 3y' + 2y = e^x$.

**Bài tập 3.6.** *Giải phương trình*

$$(2x - x^2)y'' + 2(x-1)y' - 2y = -2$$

*biết nó có hai nghiệm riêng* $y_1 = x, y_2 = 1$.

**Định lý 3.9 (Nguyên lý chồng chất nghiệm).** *Nếu*

- $y_1$ *là nghiệm của phương trình* $y'' + p(x)y' + q(x) = f_1(x)$,
- $y_2$ *là nghiệm của phương trình* $y'' + p(x)y' + q(x) = f_2(x)$

*thì* $y = y_1 + y_2$ *là nghiệm của phương trình* $y'' + p(x)y' + q(x) = f_1(x) + f_2(x)$.

## 3.4 Phương trình vi phân tuyến tính cấp hai có hệ số hằng số

Trong bài học này chúng ta sẽ nghiên cứu một lớp đặc biệt của PTVP tuyến tính cấp hai, đó là các PT có hệ số là hằng số như sau:

$$\text{phương trình thuần nhất } y'' + py' + qy = 0, \tag{2.17}$$

$$\text{phương trình không thuần nhất } y'' + py' + qy = f(x). \tag{2.18}$$

**Phương pháp đặc trưng giải PT thuần nhất**

Chúng ta cần tìm một nghiệm riêng của phương trình (2.17), tức là tìm một hàm số $y = y(x)$ thỏa mãn $y'' + py' + qy = 0$. Trước hết, hãy nghĩ đến một "ứng viên" cho nghiệm riêng này, đó là các hàm số có dạng $y = e^{\alpha x}$. Hàm số này có tính chất đặc biệt, đó là $y' = \alpha y, y'' = \alpha^2 y$. Do đó, nếu $y = e^{\alpha x}$ là một nghiệm của phương trình (2.17) thì

$$e^{\alpha x}(\alpha^2 + p\alpha + q) = 0.$$

**Bổ đề 2.1.** *Nếu* $y = e^{\alpha x}$ *là một nghiệm của phương trình thuần nhất (2.17) thì* $\alpha$ *là một nghiệm của phương trình*

$$X^2 + pX + q = 0. \tag{2.19}$$

*Ngược lại, nếu* $\alpha$ *là một nghiệm của phương trình (2.19) thì* $y = e^{\alpha x}$ *là một nghiệm của phương trình (2.17).*

Phương trình (2.19) được gọi là phương trình đặc trưng của phương trình vi phân tuyến tính cấp hai thuần nhất (2.17).

- Nếu PTĐT có hai nghiệm thực phân biệt $\alpha_1 \neq \alpha_2$ thì $y = e^{\alpha_1 x}$ và $y = e^{\alpha_2 x}$ là các nghiệm riêng ĐLTT của phương trình (2.17). Do đó, NTQ của phương trình (2) là

$$y = C_1 e^{\alpha_1 x} + C_2 e^{\alpha_2 x}.$$

- Nếu PTĐT có nghiệm kép $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2$ thì $y_1 = e^{\alpha x}$ là một nghiệm riêng của (2.17). Một nghiệm riêng khác được tìm dựa vào công thức Liouville, đó là

$$y_2 = y_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(x)dx} dx = xe^{\alpha x}.$$

Do đó, NTQ của phương trình (2) là

$$y = (C_1 x + C_2) e^{\alpha x}.$$

- Nếu PTĐT có hai nghiệm phức liên hợp $X = \alpha \pm i\beta$ thì NTQ của (2) là

$$\begin{aligned} y &= C_1 e^{(\alpha + i\beta)x} + C_2 e^{(\alpha - i\beta)x} \\ &= C_1 e^{\alpha x}(\cos \beta x + i \sin \beta x) + C_2 e^{\alpha x}(\cos \beta x - i \sin \beta x) \\ &= e^{\alpha x}[(C_1 + C_2)\cos \beta x + i(C_1 - C_2)\sin \beta x] \\ &= e^{\alpha x}(c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x), \end{aligned}$$

ở đó $c_1 = C_1 + C_2, c_2 = i(C_1 - C_2)$.

| Phương trình đặc trưng | NTQ của $y'' + py' + q = 0$ |
|---|---|
| Có hai nghiệm phân biệt $\alpha_1 \neq \alpha_2$ | $y = C_1 e^{\alpha_1 x} + C_2 e^{\alpha_2 x}$ |
| Có nghiệm kép $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2$ | $y = (C_1 x + C_2) e^{\alpha x}$ |
| Có hai nghiệm phức liên hợp $X = \alpha \pm i\beta$ | $y = e^{\alpha x}(c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)$ |

Bảng tổng hợp: NTQ của phương trình $y'' + py' + q = 0$

**Bài tập 3.7.** *Giải các PTVP*

*a)* $y'' - 3y' + 2y = 0$,

*b)* $y'' + 4y' + 4y = 0$,

*c)* $y'' + y' + y = 0$.

*d)* $y'' + 3y' + 2y = 0$.

**Giải PTVP tuyến tính cấp hai không thuần nhất**

**NTQ của PT không thuần nhất = NTQ của PT thuần nhất + một nghiệm riêng.**

Do vậy, việc giải PTVP tuyến tính cấp hai không thuần nhất được đưa về bài toán tìm một nghiệm riêng của nó. Nghiệm riêng của PTVP không thuần nhất không phải lúc nào cũng tìm được một cách dễ dàng. Một trong những cách làm là dùng phương pháp biến thiên hằng số Lagrange. Tuy nhiên, trong một số trường hợp đặc biệt dưới đây, nghiệm riêng có thể tìm được một cách khá đơn giản dựa vào biểu thức của vế phải $f(x)$.

**Vế phải** $f(x) = e^{\alpha x} P_n(x)$, với $P_n(x)$ là một đa thức cấp $n$ của $x$.

- Nếu $\alpha$ không là nghiệm của PTĐT, ta tìm nghiệm riêng của (2.18) dưới dạng $y = e^{\alpha x} Q_n(x)$.
- Nếu $\alpha$ là nghiệm đơn của PTĐT, ta tìm nghiệm riêng của (2.18) dưới dạng $y = xe^{\alpha x} Q_n(x)$.
- Nếu $\alpha$ là nghiệm kép của PTĐT, ta tìm nghiệm riêng của (2.18) dưới dạng $y = x^2 e^{\alpha x} Q_n(x)$.

**Bài tập 3.8.** *Giải các PTVP*

*a)* $y'' - y' - x = 0$,

*b)* $y'' + y = xe^x + 3e^{-x}$,

*c)* $y'' + 3y' - 10y = xe^{-2x}$,

*d)* $y'' - 3y' + 2y = x$,

*e)* $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}$,

*f)* $y'' + y' + y = xe^x$,

*g)* $y'' - y' = x + y$,

*h)* $y'' + 3y' + 2y = xe^{-x}$.

**Vế phải** $f(x) = P_m(x) \cos \beta x + P_n(x) \sin \beta x$, với $P_m(x), P_m$ là các đa thức cấp $m, n$ tương ứng của $x$. Đặt $l = \max\{m, n\}$.

- Nếu $\pm i\beta$ không là nghiệm của PTĐT, ta tìm nghiệm riêng của (2.18) dưới dạng
$$y = Q_l(x) \cos \beta x + R_l(x) \sin \beta x.$$
- Nếu $\pm i\beta$ là nghiệm của PTĐT, ta tìm nghiệm riêng của (2.18) dưới dạng
$$y = x[Q_l(x) \cos \beta x + R_l(x) \sin \beta x].$$

**Bài tập 3.9.** *Giải các PTVP*

*a)* $y'' + y = 4x\sin x$,

*b)* $y'' + y = 2\cos x\cos 2x$,

*c)* $y'' - 3y' + 2y = \sin x$,

*d)* $y'' + 4y' + 4y = x\sin -2x$,

*e)* $y'' + y' + y = x^2$.

*f)* $y'' + 3y' + 2y = -x\sin x$.

**Vế phải** $f(x) = e^{\alpha x}[P_m(x)\cos\beta x + P_n(x)\sin\beta x]$**.** Đặt $l = \max\{m,n\}$. Có thể đặt $y = e^{\alpha x}z$ để đưa về TH vế phải $f(x) = P_m(x)\cos\beta x + P_n(x)\sin\beta x$, hoặc biện luận như sau:

- Nếu $\alpha \pm i\beta$ không là nghiệm của PTĐT, ta tìm nghiệm riêng của (2.18) dưới dạng

$$y = e^{\alpha x}[Q_l(x)\cos\beta x + R_l(x)\sin\beta x].$$

- Nếu $\alpha \pm i\beta$ là nghiệm của PTĐT, ta tìm nghiệm riêng của (2.18) dưới dạng

$$y = xe^{\alpha x}[Q_l(x)\cos\beta x + R_l(x)\sin\beta x].$$

**Chú ý 2.1.** *Các kết quả ở bài học này được phát biểu cho PTVP TT cấp hai. Tuy nhiên, chúng cũng đúng cho hệ PTVP TT cấp $n \geq 2$ bất kì. Chẳng hạn như:*

- *Định thức Wronsky $W(x)$ của $n$ nghiệm của một PTVP TT cấp $n$ là khác $0$ với mọi $x \in (a,b)$ khi và chỉ khi chúng ĐLTT trên đó.*
- *NTQ của PTVP TT cấp $n$ thuần nhất có dạng*

$$y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \ldots + C_ny_n(x),$$

  *ở đó $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ là các nghiệm ĐLTT (hay còn gọi là hệ nghiệm cơ bản).*
- *NTQ của PT không thuần nhất = NTQ của PT thuần nhất + một nghiệm riêng.*
- *Nguyên lý chồng chất nghiệm.*

**Bài tập 3.10.** *Giải các PTVP*

*a)* $y'' - 3y' + 2y = e^x\sin x$,

*b)* $y'' - 4y' - 8y = e^{2x} + \sin 2x$,

*c)* $y'' - 22y' + y = \sin x + \sinh x$,

*d)* $y'' + 4y' + 4y = e^x\sin(-2x)$,

*e)* $y'' + y' + y = e^{-2x}\sin x$.

*f)* $y'' + 3y' + 2y = e^{-x}\sin x$.

Trong trường hợp vế phải của phương trình không thuần nhất không có các dạng đặc biệt như trên, chúng ta sẽ sử dụng phương pháp biến thiên hằng số Lagrange (xem lại phần Phương pháp biến thiên hằng số ở trang 114). Chẳng hạn như,

**Bài tập 3.11.** *Giải các phương trình sau* *a)* $y'' - y = \frac{e^x}{1+e^x}$, *b)* $y'' + y' = \tan x$, *c)* $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$.

## 3.5 PTVP tuyến tính đưa được về PTVP tuyến tính với hệ số hằng

Xét PTVP tuyến tính cấp hai thuần nhất

$$y'' + p(x)y' + q(x) = 0. \tag{2.20}$$

Giả sử thực hiện phép đổi biến số $t = \psi(x)$. Khi đó,

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = y'_t\psi'(x),$$
$$y'' = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dt}\left(y'_t\psi'(x)\right)\frac{dt}{dx} = y''t[\psi'(x)]^2 + y'_t\psi''(x).$$

Thay vào phương trình (2.20) và chia cả hai vế cho $[\psi'(x)]^2$ ta được

$$y''(t) + \left(\frac{\psi''(x) + p(x)\psi'(x)}{\psi'(x)^2}\right)y'_t + \frac{q(x)}{\psi'(x)^2} = 0.$$

Muốn phương trình thu được có hệ số hằng thì điều kiện cần là

$$\frac{q(x)}{\psi'(x)^2} = C_0$$

hay là

$$\psi(x) = C\int\sqrt{|q(x)|}dx.$$

Kết luận: Nếu phương trình (2.20) có thể đưa được về PTVP tuyến tính với hệ số hằng bằng phép đổi biến số độc lập $t = \psi(x)$ thì phép đổi biến đó phải theo công thức

$$\psi(x) = C\int\sqrt{|q(x)|}dx. \tag{2.21}$$

Tất nhiên, không phải lúc nào phép thế (2.21) cũng đưa được phương trình (2.20) về phương trình với hệ số hằng, vì nó còn phải thỏa mãn thêm một điều kiện nữa, đó là

$$\frac{\psi''(x) + p(x)\psi'(x)}{\psi'(x)^2} = \text{ hằng số.}$$

Dưới đây sẽ chỉ ra hai lớp phương trình đưa được về PTVP với hệ số hằng nhờ phép thế (2.21), đó là phương trình Euler và phương trình Chebysev.

## 3.6 Phương trình Euler

Trong mục này chúng ta sẽ nghiên cứu một lớp các PTVP cấp hai đưa đưa được về PTVP TT cấp hai hệ số hằng, đó là phương trình Euler.

**Định nghĩa 2.1 (Phương trình Euler).** *Phương trình có dạng*

$$x^2y'' + axy' + by = 0, a, b \in \mathbb{R}$$

*được gọi là phương trình Euler.*

Chia hai vế của phương trình cho $x^2$ ta được

$$y'' + \frac{a}{x}y' + \frac{b}{x^2}y = 0,$$

ở đây $p(x) = \frac{a}{x}, q(x) = \frac{b}{x^2}$. Áp dụng phép thế (2.21) ta được

$$t = C\int\sqrt{|q(x)|}dx = C\sqrt{|b|}\ln|x|.$$

Để đơn giản, có thể chọn $C$ sao cho $C\sqrt{|b|} = 1$, ta có $t = \ln|x|$.
**Cách giải phương trình Euler:**

1. Đặt $|x| = e^t \Leftrightarrow t = \ln|x|$. Ta có
   - $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}\frac{dy}{dt} \Rightarrow xy' = \frac{dy}{dt}$.
   - $y'' = \frac{d}{dx}y' = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}\right) = \frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right) \Rightarrow x^2y'' = \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}$.
2. Thay vào PT để đưa về PTVP TT cấp hai hệ số hằng

$$\frac{d^2y}{dt^2} + (a-1)\frac{dy}{dt} + by = 0.$$

**Ví dụ 3.1.** *Giải PTVP* $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$ *trong khoảng* $(0, +\infty)$.

[Lời giải] Đặt $x = e^t$ và thay vào phương trình ta được

$$y_t'' - 3y_t' + 2y = 0.$$

NTQ của PT này là $y = C_1e^t + C_2e^{2t}$. Thay $t = \ln x$ vào ta được NTQ của PT ban đầu là

$$y = C_1x + C_2x^2.$$

**Bài tập 3.12.** *Giải các PTVP*

a) $x^2y'' - 3xy' + 4y = \frac{x^3}{2}, y(1) = \frac{1}{2}, y'(1) = 1,$

b) $y'' - \frac{y'}{x} + \frac{y}{x^2} = \frac{2}{x},$

c) $x^2y'' + 2xy' - 6y = 0,$

d) $x^2y'' - 9xy' + 21y = 0,$

e) $x^2y'' - 2xy' + 2y = 2x^3 - x,$

f) $x^2y'' + xy' + y = x.$

## 3.7 Phương trình Chebysev

**Định nghĩa 2.2.** *Phương trình có dạng*

$$(1 - x^2)y'' - xy' + n^2y = 0$$

*được gọi là phương trình Chebysev.*

Áp dụng phép thế (2.21) ta được

$$t = C \int \sqrt{\frac{n^2}{|1 - x^2|}} dx.$$

Để đơn giản, chọn $C = -\frac{1}{n}$ ta được $t = \arccos x$ hay $x = \cos t$. Thay vào phương trình và rút gọn ta được PTVP tuyế ntính với hệ số hằng

$$y''_t + n^2y = 0.$$

Phương trình này có NTQ là $y = C_1 \cos nt + C_2 \sin nt$, do đó NTQ của phương trình Chebysev là

$$y = C_1 \cos(n \arccos x) + C_2 \sin(n \arccos x).$$

## 3.8 Đọc thêm: Phương pháp đặc trưng giải PTVP tuyến tính cấp $n$ với hệ số hằng

Xét PTVP tuyến tính cấp $n$ sau:

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \cdots + a_ny = 0, \tag{2.22}$$

trong đó $a_1, a_2, \ldots, a_n$ là các hằng số thực. Xét phương trình đặc trưng

$$X^n + a_1X^{n-1} + \cdots + a_n = 0. \tag{2.23}$$

Ta chia thành các trường hợp sau.

1. Nếu PTĐT (2.23) có $n$ nghiệm thực khác nhau $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Khi đó, mỗi nghiệm đơn $\lambda_i$ của PTĐT sẽ tương ứng với một nghiệm riêng $e^{\lambda_i x}$ ĐLTT của (2.22). Do đó, NTQ của phương trình (2.22) là

$$y = C_1e^{\lambda_1 x} + C_2e^{\lambda_2 x} + \cdots + C_ne^{\lambda_n x}.$$

2. Nếu PTĐT (2.23) có $n$ nghiệm khác nhau, nhưng trong đó có một nghiệm $\lambda_i = \alpha + i\beta$ nào đó là nghiệm phức. Khi đó $\alpha - i\beta$ là nghiệm phức liên hợp của $\lambda_i$. Đối với cặp nghiệm phức liên hợp này, $e^{\alpha x}\cos\beta x$ và $e^{\alpha x}\sin\beta x$ là các nghiệm ĐLTT của (2.22). Như vậy, ứng với mỗi cặp nghiệm phức liên hợp $\alpha \pm i\beta$ của PTĐT ta tìm được hai nghiệm riêng ĐLTT của phương trình (2.22) là $e^{\alpha x}\cos\beta x, e^{\alpha x}\sin\beta x$. Kết hợp chúng với các nghiệm ĐLTT khác ta được NTQ của PT đã cho, chẳng hạn như,

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \cdots C_{i1} e^{\alpha x}\cos\beta x + C_{i2} e^{\alpha x}\sin\beta x + \cdots + C_n e^{\lambda_n x}.$$

3. Nếu PTĐT có nghiệm $\lambda_i$ nào đó bội $k$ thì $k$ nghiệm ĐLTT tương ứng là

$$e^{\lambda_i x}, xe^{\lambda_i x}, x^2 e^{\lambda_i x}, \ldots, x^{k-1} e^{\lambda_i x}.$$

Kết hợp chúng với các nghiệm ĐLTT khác ta được NTQ của PT đã cho.

4. Nếu PTĐT có cặp nghiệm phức $\lambda_i = \alpha \pm i\beta$ nào đó bội $k$ thì $2k$ nghiệm ĐLTT tương ứng là

$$e^{\alpha x}\cos\beta x, xe^{\alpha x}\cos\beta x, \ldots, x^{k-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,$$

và

$$e^{\alpha x}\sin\beta x, xe^{\alpha x}\sin\beta x, \ldots, x^{k-1}e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Kết hợp chúng với các nghiệm ĐLTT khác ta được NTQ của PT đã cho

## 3.9 Bài tập ôn tập

**Bài tập 3.13 (Cuối kì, K62).** *Giải phương trình vi phân*

*a)* $y'' - 2y' - 3y = -14\cos x - 8\sin x$, *b)* $y'' - 4y' = -11\cos x - 14\sin x$.

**Bài tập 3.14.** *Giải phương trình*

$$(x^2+1)y'' + 2xy' + \frac{4y}{x^2+1} = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

*với phép biến đổi* $x = \tan t$.

**Bài tập 3.15.** *Giải phương trình*

$$\frac{y''}{y'^3} + \frac{2}{y'} - x + y = e^y \cos y$$

*bằng cách coi* $x$ *là hàm của* $y$.

**Bài tập 3.16.** *Giải các phương trình sau* *a)* $y'' - 2my' + m^2y = (x-1)e^{mx} + 2\sin x, m \in \mathbb{R}$,

*b)* $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x} + (2x-1)e^x + 2.$

**Bài tập 3.17.** *Tìm bốn số hạng đầu tiên khác không của chuỗi luỹ thừa mà tổng của chuỗi đó là nghiệm của phương trình sau*

*a)* $y'' - x - y^2 = 0, y(0) = 0, y'(0) = 1$,

*b)* $y'' = (2x-1)y - 1, y(0) = 0, y'(0) = 1$,

*c)* $(x^2-1)y'' + 4xy' + 2y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 1$,

*d)* $y'' + xy' + y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 2$.

# §4. ĐẠI CƯƠNG VỀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP MỘT

**Định nghĩa 2.1.** *Một hệ PTVP cấp một chuẩn tắc là hệ PTVP có dạng*

$$\begin{cases} y_1' &= f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ y_2' &= f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ &\vdots \\ y_n' &= f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \end{cases} \tag{2.24}$$

*ở đó $x$ là biến số độc lập, $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ là các hàm số phải tìm. Các hàm số $f_1(x, y_1, \ldots, y_n)$, $f_2(x, y_1, \ldots, y_n), \ldots, f_n(x, y_1, \ldots, y_n)$ xác định trong miền $D$ của không gian $\mathbb{R}^{n+1}$.*

**Định nghĩa 2.2 (Bài toán Cauchy).** *Cho điểm $(x_0, y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0) \in D$. Bài toán giá trị ban đầu hay bài toán Cauchy là bài toán tìm nghiệm của hệ phương trình 2.24 thỏa mãn điều kiện ban đầu*

$$y_1(x_0) = y_1^0, y_2(x_0) = y_2^0, \ldots, y_n(x_0) = y_n^0. \tag{2.25}$$

**Định lý 4.1 (Sự tồn tại duy nhất nghiệm).** *Giả thiết*

- *Các hàm $f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ cùng với các ĐHR $\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ liên tục trên miền $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$.*
- $(x_0, y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0) \in D$.

*Khi đó tồn tại một lân cận $U_\epsilon(x_0)$ của $x_0$ để bài toán Cauchy (2.24) + (2.25) có nghiệm duy nhất.*

## 4.1 Các loại nghiệm của hệ PTVP

**Định nghĩa 2.1 (Các loại nghiệm của hệ PTVP).**

1. **Nghiệm tổng quát.** *Ta nói $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, ở đó $y_i = \varphi_i(x, C_1, \ldots, C_n)$, là NTQ của hệ PTVP nếu*
   - *với mỗi $C_1, \ldots, C_n$ thì $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ thỏa mãn hệ PTVP (2.24).*
   - *$\forall (x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0) \in D$, tồn tại bộ $C_i = C_i^0$ sao cho các hàm số $y_i = \varphi_i(x, C_1^0, \ldots, C_n^0)$ thỏa mãn bài toán Cauchy (2.24) + (2.25).*

2. **Tích phân tổng quát** *Hệ hàm*

$$\begin{cases} \phi_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = C_1, \\ \phi_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = C_2, \\ \vdots \\ \phi_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = C_n \end{cases}$$

*xác định NTQ của hệ PTVP trong miền $D$ được gọi là tích phân tổng quát.*

3. **Nghiệm riêng.** *Nghiệm nhận được từ NTQ với các hằng số $C_1, C_2, \ldots, C_n$ xác định được gọi là nghiệm riêng.*

4. **Nghiệm kì dị.** *Nghiệm của hệ mà tại mỗi điểm của nó tính duy nhất nghiệm của bài toán Cauchy bị phá vỡ được gọi là nghiệm kì dị.*

**Ví dụ 4.1.** *Xét hệ PTVP*

$$\begin{cases} y' = x + \frac{2}{x}y - \sqrt{z}, \\ z' = 2\sqrt{z}. \end{cases}$$

*Tích phân phương trình thư hai ta được*

$$z = (x + C_1)^2.$$

*Thay giá trị này vào phương trình thứ nhất và tích phân ta được $y = C_1 x + C_2 x^2$. Vậy hệ hàm*

$$\begin{cases} y = C_1 x + C_2 x^2, \\ z = (x + C_1)^2 \end{cases}$$

*là NTQ của HPT đang xét trong miền*

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \neq 0, \}.$$

*Ngoài ra, phương trình thứ hai có một nghiệm kì dị $z = 0$. Thay vào phương trình đầu ta được*

$$y = x^2(C + \ln|x|).$$

*Do đó, HPT đã cho có một họ nghiệm kì dị*

$$\begin{cases} y = x^2(C + \ln|x|), \\ z = 0. \end{cases}$$

## 4.2 Mối liên hệ giữa PTVP cấp $n$ và hệ $n$ PTVP cấp một

- Mọi PTVP cấp $n$
$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) = 0$$
luôn đưa được về hệ PTVP chuẩn tắc. Bằng cách đặt $y_1 = y$ ta có
$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ \vdots \\ y_{n-1}' = y_n \\ y_n' = f(x, y_1, \ldots, y_n). \end{cases}$$

- Ngược lại, một hệ PTVP chuẩn tắc luôn đưa được về PT cấp cao bằng cách khử những hàm số chưa biết từ các PT của hệ. Chẳng hạn như, để đơn giản ta xét hệ hai phương trình $\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2) \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2). \end{cases}$
Đạo hàm hai vế phương trình đầu tiên theo $x$ ta được
$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1}\frac{dy_1}{dx} + \frac{\partial f_1}{\partial y_2}\frac{dy_2}{dx} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} f_1(x, y_1, y_2) + \frac{\partial f_1}{\partial y_2} f_2(x, y_1, y_2) = F(x, y_1, y_2).$$
Tiếp theo, từ phương trình đầu tiên của hệ, ta giải được $y_2$ qua $x, y_1, y_1'$. Chẳng hạn như $y_2 = g(x, y_1, y_1')$ và thay vào phương trình $y_1'' = F(x, y_1, y_2)$ ta được một PTVP cấp hai với hàm số phải tìm là $y_1(x)$ sau
$$y_1'' = F(x, y_1, g(x, y_1, y_1')).$$

**Ví dụ 4.2.** *Giải hệ PTVP* $\begin{cases} y' = 5y + 4z \\ z' = 4y + 5z. \end{cases}$

[Gợi ý] Đạo hàm 2 vế của phương trình đầu tiên ta được
$$y'' = 5y' + 4z'.$$
Thay $z' = 4y + 5z = 4y + 5.\frac{1}{4}(y' - 5y) = \frac{5}{4}y' - \frac{9}{4}y$ vào ta được PTVP TT cấp hai
$$y'' = 5y' + 4\left(\frac{5}{4}y' - \frac{9}{4}y\right) \Leftrightarrow y'' - 10y' + 9y = 0.$$
Giải PTVP TT cấp hai này để ra NTQ của $y$, sau đó thay vào HPT để giải ra $z$.

# §5. Hệ phương trình vi phân tuyến tính cấp một

Ở bài trước, chúng ta đã thấy rằng mọi PTVP cấp $n$ đều đưa được về hệ $n$ PTVP cấp một, và ngược lại. Nghĩa là, có sự tương ứng 1-1 giữa PTVP cấp $n$ và hệ $n$ PTVP cấp một. Trong bài học này, chúng ta sẽ phát biểu một số kết quả tương ứng (không chứng minh) của PTVP TT cấp $n$ sang hệ $n$ PTVP TT cấp một. Chẳng hạn như:

- Định thức Wronsky của $n$ nghiệm của hệ PTVP TT cấp một thuần nhất bằng $0$ trên $(a, b)$ khi và chỉ khi chúng ĐLTT trên đó.
- NTQ của hệ hệ PTVP TT cấp một thuần nhất có dạng

$$Y(x) = C_1Y_1(x) + C_2Y_2(x) + \ldots + C_nY_n(x),$$

  ở đó $Y_1(x), Y_2(x), \cdots, Y_n(x)$ là các nghiệm ĐLTT (hay còn gọi là hệ nghiệm cơ bản).
- NTQ của HPT không thuần nhất = NTQ của HPT thuần nhất + một nghiệm riêng.
- Nguyên lý chồng chất nghiệm.

## 5.1 Hệ PTVP TT cấp một thuần nhất

Xét hệ PTVP tuyến tính có dạng

$$\begin{cases} y_1' &= a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \ldots + a_{1n}(x)y_n, \\ y_2' &= a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \ldots + a_{2n}(x)y_n, \\ &\vdots \\ y_n' &= a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \ldots + a_{nn}(x)y_n, \end{cases} \tag{2.26}$$

với giả thiết rằng các hàm số $a_{ij}(x)$ liên tục trên khoảng $(a, b)$. Để đơn giản, đặt

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \ldots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \ldots & a_{2n}(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \ldots & a_{nn}(x) \end{pmatrix}$$

thì HPT đã cho có thể được viết dưới dạng

$$y' = A(x)y.$$

**Sự ĐLTT và PTTT của hệ véctơ hàm**

Cho hệ véc tơ hàm

$$Y_1(x) = \begin{pmatrix} y_{11}(x) \\ y_{21}(x) \\ \vdots \\ y_{n1}(x) \end{pmatrix}, Y_2(x) = \begin{pmatrix} y_{12}(x) \\ y_{22}(x) \\ \vdots \\ y_{n2}(x) \end{pmatrix}, \ldots, Y_n(x) = \begin{pmatrix} y_{1n}(x) \\ y_{2n}(x) \\ \vdots \\ y_{nn}(x) \end{pmatrix}$$

xác định trên $(a, b)$.

**Định nghĩa 2.1.** *Hệ véc tơ hàm $Y_1(x), Y_2(x), \ldots, Y_n(x)$ được gọi là PTTT trên $(a, b)$ nếu tồn tại các hằng số $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ không đồng thời bằng $0$ sao cho*

$$\alpha_1 Y_1(x) + \alpha_2 Y_2(x) + \ldots + \alpha_n Y_n(x) = 0$$

*trên $(a, b)$. Ngược lại ta nói hệ véc tơ hàm này là ĐLTT.*

Định thức

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_{11}(x) & y_{12}(x) & \ldots & y_{1n}(x) \\ y_{21}(x) & y_{22}(x) & \ldots & y_{2n}(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_{n1}(x) & y_{n2}(x) & \ldots & y_{nn}(x) \end{vmatrix}$$

được gọi là định thức Wronsky của hệ véc tơ hàm nói trên.

**Định lý 5.1.** *Nếu hệ véc tơ hàm $Y_1(x), Y_2(x), \ldots, Y_n(x)$ là PTTT trên $(a, b)$ thì định thức Wronsky của chúng bằng $0$ trên $(a, b)$. Hơn nữa, nếu $Y_1(x), Y_2(x), \ldots, Y_n(x)$ là $n$ nghiệm của hệ PTVP (2.26) và định thức Wronsky của chúng bằng $0$ trên $(a, b)$ thì chúng PTTT trên $(a, b)$.y*

**Hệ quả 5.1.** *Định thức Wronksky của $n$ nghiệm của hệ PTVP (2.26) hoặc là khác $0$ với mọi $x \in (a, b)$ (nếu chúng PTTT) hoặc là đồng nhất bằng $0$ trên đó (nếu chúng ĐLTT).*

**Hệ nghiệm cơ bản**

**Định nghĩa 2.1.** *Hệ $n$ nghiệm ĐLTT của hệ phương trình (2.26) được gọi là hệ nghiệm cơ bản của nó.*

**Định lý 5.2.** *Giả sử $Y_1(x), Y_2(x), \ldots, Y_n(x)$ là hệ nghiệm cơ bản của hệ phương trình (2.26) thì NTQ của hệ là*

$$Y(x) = C_1 Y_1(x) + C_2 Y_2(x) + \ldots + C_n Y_n(x),$$

*ở đó $C_1, C_2, \ldots, C_n$ là các hằng số tùy ý.*

Như vậy, việc giải hệ PTVP tuyến tính cấp một được quy về việc tìm hệ nghiệm cơ bản của nó.

## 5.2 Hệ PTVP TT cấp một không thuần nhất

Xét hệ PTVP tuyến tính có dạng

$$\begin{cases} y_1' &= a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \ldots + a_{1n}(x)y_n + f_1(x), \\ y_2' &= a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \ldots + a_{2n}(x)y_n + f_2(x), \\ &\vdots \\ y_n' &= a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \ldots + a_{nn}(x)y_n + f_n(x), \end{cases} \tag{2.27}$$

với giả thiết rằng các hàm số $a_{ij}(x)$ và $f_i(x)$ liên tục trên khoảng $(a, b)$. Để đơn giản, đặt

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \ldots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \ldots & a_{2n}(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \ldots & a_{nn}(x) \end{pmatrix}, F(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}$$

thì HPT đã cho có thể được viết dưới dạng

$$Y' = A(x)Y + F(x).$$

**Định lý 5.3.** *NTQ của hệ PTVP TT không thuần nhất (2.27) có dạng*

$$Y = C_1Y_1(x) + C_2Y_2(x) + \cdots + C_nY_n(x) + Y^*(x),$$

*ở đó $C_1Y_1(x) + C_2Y_2(x) + \cdots + C_nY_n(x)$ là NTQ của hệ PTVP TT thuần nhất (2.26) và $Y^*(x)$ là một nghiệm riêng của (2.27).*

**Định lý 5.4 (Nguyên lý chồng chất nghiệm).** *Nếu $Y_1(x)$ và $Y_2(x)$ là hai nghiệm tương ứng của các hệ PTVP TT*

$$Y' = A(x)Y + F_1(x), \quad Y' = A(x)Y + F_2(x)$$

*thì $Y(x) = Y_1(x) + Y_2(x)$ là nghiệm của HPT*

$$Y' = A(x)Y + F_1(x) + F_2(x).$$

## 5.3 PP biến thiên hằng số giải hệ PTVP TT cấp một

Để đơn giản, xét hệ hai PTVP TT cấp một thuần nhất

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2, \\ y_2' = a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 \end{cases} \tag{2.28}$$

và hệ PTVP không thuần nhất tương ứng

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + f_1(x), \\ y_2' = a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + f_2(x). \end{cases} \tag{2.29}$$

Giả sử tìm được $Y_1(x) = \begin{pmatrix} y_{11}(x) \\ y_{21}(x) \end{pmatrix}$ và $Y_2(x) = \begin{pmatrix} y_{12}(x) \\ y_{22}(x) \end{pmatrix}$ là hệ nghiệm cơ bản của (2.28). Ta tìm nghiệm riêng của (2.29) dưới dạng

$$Y^*(x) = C_1(x)Y_1(X) + C_2(x)Y_2(X) = \begin{pmatrix} C_1(x)y_{11}(x) + C_2(x)y_{12}(x) \\ C_1(x)y_{21}(x) + C_2(x)y_{22}(x). \end{pmatrix}$$

Tính $(Y^*)'$ và thay vào hệ PT (2.29) ta được

$$\begin{cases} C_1'(x)y_{11}(x) + C_2'(x)y_{12}(x) = f_1(x) \\ C_1'(x)y_{21}(x) + C_2'(x)y_{22}(x) = f_2(x). \end{cases}$$

Định thức Crame của hệ này chính là định thức Wronsky của hệ hai nghiệm ĐLTT $Y_1(x)$ và $Y_2(x)$ nên khác $0$. Từ đó giải được

$$\begin{cases} C_1'(x) = \varphi(x), \\ C_2'(x) = \psi(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1(x) = \int \varphi(x)dx, \\ C_2(x) = \int \psi(x)dx. \end{cases}$$

**Ví dụ 5.1.** *Giải hệ PTVP*

$$\begin{cases} y' = z, \\ z' = -y + \frac{1}{\cos x}. \end{cases}$$

*Trước hết, tìm nghiệm của PT thuần nhất*

$$\begin{cases} y' = z, \\ z' = -y \end{cases}$$

*bằng PP khử ta được NTQ của hệ thuần nhất là*

$$\begin{cases} y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x, \\ z(x) = -C_1 \sin x + C_2 \cos x. \end{cases}$$

*Ta tìm nghiệm riêng của hệ không thuần nhất dưới dạng*

$$\begin{cases} y^*(x) = C_1(x) \cos x + C_2(x) \sin x, \\ z^*(x) = -C_1(x) \sin x + C_2(x) \cos x, \end{cases}$$

*trong đó* $C_1(x), C_2(x)$ *được xác định nhờ HPT*

$$\begin{cases} C_1'(x) \cos x + C_2'(x) \sin x = 0, \\ -C_1'(x) \sin x + C_2'(x) \cos x = \frac{1}{\cos x}. \end{cases}$$

*Giải hệ này ta được* $C_1'(x) = -\frac{\sin x}{\cos x}, C_2'(x) = 1$*, do đó có thể chọn* $C_1(x) = \ln|\cos x|$ *và* $C_2(x) = x$*.*
*Kết luận: NTQ của HPT đã cho là*

$$\begin{cases} y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \cos x \ln|\cos x| + x \sin x, \\ z(x) = -C_1 \sin x + C_2 \cos x - \sin x \ln|\cos x| + x \cos x. \end{cases}$$

# §6. HỆ PTVP TT THUẦN NHẤT VỚI HỆ SỐ HẰNG SỐ

## 6.1 Phương pháp đặc trưng

Để đơn giản, ta xét hệ hai phương trình

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \\ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 \end{cases} \Leftrightarrow y' = Ay, \text{ với } y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Tìm các trị riêng và véctơ riêng của $A$.

1. Nếu $A$ có hai trị riêng phân biệt $\alpha_1 \neq \alpha_2$ ứng với các VTR $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$ thì

$$y = C_1 e^{\alpha_1 x} v_1 + C_2 e^{\alpha_2 x} v_2.$$

Công thức tường minh: nếu $v_1 = \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{pmatrix}$ thì

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = C_1 e^{\alpha_1 x} \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{pmatrix} + C_2 e^{\alpha_2 x} \begin{pmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = C_1 e^{\lambda_1 x} v_{11} + C_2 e^{\lambda_2 x} v_{21} \\ y_2 = C_1 e^{\lambda_1 x} v_{21} + C_2 e^{\lambda_2 x} v_{22}. \end{cases}$$

2. Nếu $A$ có hai trị riêng phức $\alpha \pm i\beta$, ở đó $\alpha + i\beta$ có một VTR $v = a + bi$ thì

$$y = C_1 e^{\alpha x}(a\cos\beta x - b\sin\beta x) + C_2 e^{\alpha x}(a\sin\beta x + b\cos\beta x).$$

Công thức tường minh: Nếu $v = a + bi = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ thì

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = C_1 e^{\alpha x} \left[ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cos\beta x - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \sin\beta x \right] + C_2 e^{\alpha x} \left[ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \sin\beta x - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \cos\beta x \right]$$

3. Nếu $A$ có một trị riêng $\alpha$ bội hai thì

   - Nếu $\alpha$ có hai VTR ĐLTT $v_1, v_2$ thì

$$y = C_1 e^{\alpha x} v_1 + C_2 e^{\alpha x} v_2.$$

Công thức tường minh: nếu $v_1 = \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{pmatrix}$ thì

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = C_1 e^{\alpha x} \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{pmatrix} + C_2 e^{\alpha x} \begin{pmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{pmatrix}$$

- Nếu $\alpha$ chỉ có một VTR ĐLTT là $v$ thì

$$y = C_1 e^{\alpha x} v + C_2 e^{\alpha x}(vx + \eta),$$

ở đó véctơ $\eta$ được tìm từ HPT $(A - \alpha I)\eta = v$.

Công thức tường minh: nếu $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \eta = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}$ thì

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = C_1 e^{\alpha x} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + C_2 e^{\alpha x} \left[ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} \right].$$

**Ví dụ 6.1.** *Giải hệ PTVP* $\begin{cases} y' = 2y + z \\ z' = y + 2z. \end{cases}$

[Lời giải] PTĐT

$$\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$$

có hai nghiệm thực $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3$.

Ứng với $\lambda_1 = 1$ ta tìm được một VTR là $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Ứng với $\lambda_2 = 3$ ta tìm được một VTR là $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Do đó, NTQ của phương trình là

$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 e^{3x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} y = C_1 e^x + C_2 e^{3x} \\ z = -C_1 e^x + C_2 e^{3x}. \end{cases}$$

**Ví dụ 6.2.** *Giải hệ PTVP* $\begin{cases} y' = 2y - z \\ z' = y + 2z. \end{cases}$

[Lời giải] PTĐT

$$\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$$

có cặp nghiệm phức liên hợp $\lambda = 2 \pm i$.

Ứng với $\lambda = 2 + i$ ta tìm được một VTR là $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Do đó, NTQ của hệ PT là

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} &= C_1 e^{2x} \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cos x - \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \sin x \right] + C_2 e^{2x} \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sin x - \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cos x \right] \\ &= C_1 e^{2x} \begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix} + C_2 e^{2x} \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

**Ví dụ 6.3.** *Giải hệ PTVP* $\begin{cases} y' = y - z \\ z' = y + 3z. \end{cases}$

[Lời giải] PTĐT

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$$

có nghiệm $\lambda = 2$ bội hai.

Ứng với $\lambda = 2$ ta tìm được một VTR là $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Từ PT $(A - 2I)\eta = v$ ta chọn véctơ $\eta = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Do đó, NTQ của HPT là

$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{2x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 e^{2x} \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right] \Leftrightarrow \begin{cases} y = (C_1 + C_2 x) e^{2x} \\ z = -(C_1 + C_2 + C_2 x) e^{2x}. \end{cases}$$

## 6.2 Phương pháp khử

Để đơn giản, xét hệ PTVP

$$\begin{cases} y' = a_{11} y + a_{12} z + f(x), \\ z' = a_{21} y + a_{22} z + g(x). \end{cases}$$

Đạo hàm hai vế PT đầu tiên ta được

$$\begin{aligned} y'' &= a_{11}y' + a_{12}z' + f'(x) \\ &= a_{11}y' + a_{12}[a_{21}y + a_{22}z + g(x)] + f'(x) \\ &= a_{11}y' + a_{12}a_{21}y + a_{22}a_{12}z + [f'(x) + a_{12}g(x)]. \end{aligned} \tag{2.30}$$

Từ phương trình đầu tiên, rút $z$ theo $y$ ta được

$$a_{12}z = y' - a_{11}y - f(x).$$

Thế vào PT (2.30) ta được

$$\begin{aligned} y'' &= a_{11}y' + a_{12}a_{21}y + a_{22}[y' - a_{11}y - f(x)] + [f'(x) + a_{12}g(x)] \\ &= (a_{11} + a_{22})y' + (a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22})y + [f'(x) + a_{12}g(x) - a_{22}f(x)] \end{aligned} \tag{2.31}$$

hay là

$$y'' - (a_{11} + a_{22})y' + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} y = f'(x) + a_{12}g(x) - a_{22}f(x).$$

Từ PTVP TT cấp hai này ta giải ra được $y$, thế vào hệ để giải ra $z$.

**Ví dụ 6.4.** *Giải hệ PTVP*

$$\begin{cases} x'(t) = 3x - 2y, \\ y'(t) = 2x - y. \end{cases}$$

*Đạo hàm hai vế của PT đầu ta được*

$$x''(t) = 3x'(t) - 2y'(t) = 3x'(t) - 2(2x - y). \tag{2.32}$$

*Từ phương trình đầu tiên ta rút ra được* $2y = 3x - x'(t)$. *Thế vào (2.32) ta được*

$$x''(t) - 2x'(t) + x = 0.$$

*Giải PTVP TT cấp hai này bằng PP đặc trưng ta được*

$$x(t) = C_1e^t + C_2te^t.$$

*Thay vào phương trình ban đầu của hệ ta thu được*

$$y(t) = \left(C_1 - \frac{C_2}{2} + C_2t\right)e^t.$$

*Vậy NTQ của hệ là*

$$\begin{cases} x(t) = C_1e^t + C_2te^t, \\ y(t) = \left(C_1 - \frac{C_2}{2} + C_2t\right)e^t. \end{cases}$$

## 6.3 Bài tập ôn tập

**Bài tập 6.1 (Cuối kì, K62).** *Giải các hệ PTVP sau*

a) $\begin{cases} y' = y + z + e^x, \\ z' = y - z. \end{cases}$

b) $\begin{cases} y' = y - z - e^x, \\ z' = y + z. \end{cases}$

**Bài tập 6.2.** *Giải các hệ PTVP sau*

a) $\begin{cases} \frac{dy}{dx} = y + z, \\ \frac{dz}{dx} = x + y + z. \end{cases}$

b) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - 5y, \\ \frac{dy}{dt} = 5x - 6y. \end{cases}$

c) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = -x + \frac{1}{\cos t}. \end{cases}$

d) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{y}{x-y}, \\ \frac{dy}{dt} = \frac{x}{x-y}. \end{cases}$

# CHƯƠNG 3

# PHƯƠNG PHÁP TOÁN TỬ LAPLACE (8 LT + 7 BT)

## §1. PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE VÀ PHÉP BIẾN ĐỔI NGƯỢC

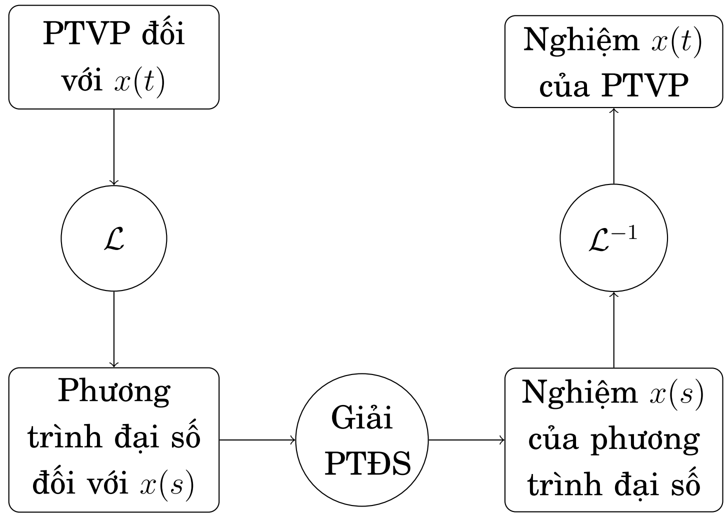
Biến đổi Laplace là một phép biến đổi tích phân của hàm số $f(t)$ từ miền thời gian sang miền tần số $F(s)$. Phép biến đổi này được đặt tên sau khám phá của nhà toán học và thiên văn học Pierre-Simon Laplace, người đã sử dụng một phép biến đổi tương tự (ngày nay được gọi là phép biến đổi $z$) trong các nghiên cứu của ông trong lý thuyết xác suất. Biến đổi Laplace và cùng với biến đổi Fourier là hai trong số những phép biến đổi quan trọng bậc nhất và thường được sử dụng trong giải các bài toán vật lý. Qua biến đổi Laplace, các phép toán giải tích phức tạp như đạo hàm, tích phân được đơn giản hóa thành các phép tính đại số, giống như cách mà hàm logarit chuyển một phép toán nhân các số thành phép cộng các logarit của chúng. Chẳng hạn như, xét hệ phương trình

$$\begin{cases} x^{\alpha_1} y^{\beta_1} = a_1, \\ x^{\alpha_2} y^{\beta_2} = a_2. \end{cases}$$

Bằng cách lấy logarit cơ số tự nhiên hai vế dẫn đến hệ phương trình

$$\begin{cases} \alpha_1 \ln x + \beta_1 \ln y = \ln a_1, \\ \alpha_2 \ln x + \beta_2 \ln y = \ln a_2. \end{cases}$$

Cũng như vậy, ý tưởng sử dụng phép biến đổi Laplace được thể hiện qua sơ đồ sau đây.




Vì vậy nó đặc biệt hữu ích trong giải các phương trình vi phân, phương trình đạo hàm riêng, phương trình tích phân, những phương trình thường xuất hiện trong các bài toán vật lý, trong phân tích mạch điện, xử lý số liệu, dao động điều hòa, các hệ cơ học. Bởi vì qua biến đổi Laplace các phương trình này có thể chuyển thành các phương trình đại số đơn giản hơn. Giải ra nghiệm là các hàm ảnh trong không gian $p$, chúng ta dùng biến đổi Laplace ngược để có lại hàm gốc trong không gian thực $t$.

## 1.1 Phép biến đổi Laplace

**Định nghĩa 3.1 (Phép biến đổi Laplace).** *Phép biến đổi Laplace của hàm số $f(t)$ là hàm số $F(s)$ được định nghĩa bởi*

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} := \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt, \quad s, f(t) \in \mathbb{R}.^{(1)}$$

**Ví dụ 1.1.** *Tính phép biến đổi Laplace của hàm số mũ $f(t) = e^{at}$.*

$$\mathcal{L}\{e^{at}\}(s) = \int_0^\infty e^{-st} e^{at} dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t} dt = -\frac{e^{-(s-a)t}}{s-a}\Big|_0^\infty = \frac{1}{s-a} \textbf{ nếu } s > a.$$

**Bài tập 1.1.** *Tính*

*a)* $\mathcal{L}\{1\}(s)$.

*b)* $\mathcal{L}\{e^{at}\}(s), a \in R$.

*c)* $\mathcal{L}\{t^a\}(s), a > -1$.

*d)* $\mathcal{L}\{t^n\}(s), n \in \mathbb{N}$.

*e)* $\mathcal{L}\{\cos kt\}$.

*f)* $\mathcal{L}\{\sin kt\}$.

(1) So sánh với phép biến đổi Fourier $\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-2\pi i \xi x} dx$

[Gợi ý] Bằng cách viết
$$\cos kt = \frac{e^{ikt}+e^{-ikt}}{2},$$
ta có thể suy ra phép biến đổi Laplace của $\cos kt$ bằng
$$\mathcal{L}\{\cos kt\}(s) = \frac{s}{s^2+k^2}.$$
Tương tự, bằng cách viết
$$\cos kt = \frac{e^{ikt}-e^{-ikt}}{2},$$
để suy ra phép biến đổi Laplace của $\sin kt$ bằng
$$\mathcal{L}\{\sin kt\}(s) = \frac{k}{s^2+k^2}.$$

**Định lý 1.1 (Tính tuyến tính của phép biến đổi Laplace).** *Cho $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ và giả thiết tồn tại $\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$, $\mathcal{L}\{g(t)\}(s)$. Khi đó*
$$\mathcal{L}\{\alpha f(t)+\beta g(t)\}(s) = \alpha\mathcal{L}\{f(t)\}(s)+\beta\mathcal{L}\{g(t)\}(s).$$

**Ví dụ 1.1.** *Tính*

*a)* $\mathcal{L}\{6e^{-5t}+e^{3t}+5t^3-9\}$

*b)* $\mathcal{L}\{4\cos(4t)-9\sin(4t)+2\cos(10t)\}$,

*c)* $\mathcal{L}\{3\sinh(2t)+3\sin(2t)\}$,[2]

*d)* $\mathcal{L}\{e^{3t}+\cos(6t)-e^{3t}\cos(6t)\}$.

[Gợi ý]

a) $F(s) = \frac{6}{s+5}+\frac{1}{s-3}+\frac{30}{s^4}-\frac{9}{s}$.

b) $F(s) = \frac{4s}{s^2+16}-\frac{36}{s^2+16}+\frac{2s}{s^2+100}$.

c) $F(s) = \frac{6}{s^2-4}+\frac{6}{s^2+4}$.

d) $\frac{1}{s-3}+\frac{s}{s^2+36}-\frac{s-3}{(s-3)^2+36}$.

**Bài tập 1.2.** *Tính*

*a)* $\mathcal{L}\{t\}$,

*b)* $\mathcal{L}\{e^{3t+1}\}$,

*c)* $\mathcal{L}\{\sin^2 t\}$,

*d)* $\mathcal{L}\{\cos^2 t\}$,

*e)* $\mathcal{L}\{3t^2+4t^{3/2}\}$,

*f)* $\mathcal{L}\{\cosh kt\}$, [3]

*g)* $\mathcal{L}\{\sinh kt\}$,

*h)* $\mathcal{L}\{3e^{2t}+2\sin^2 3t\}$.

[2] Hàm số sine hyperbolic $\sinh x = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$.
[3] Hàm số cosine hyperbolic $\cosh x = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$.

### Sự tồn tại của phép biến đổi Laplace

**Định nghĩa 3.1.** *Hàm $f$ được gọi là bậc mũ khi $t \to +\infty$ nếu tồn tại các hằng số không âm $M, \alpha, T$ sao cho*

$$|f(t)| \leq Me^{\alpha t}, \forall t > T.$$

**Định lý 1.2 (Sự tồn tại của phép biến đổi Laplace).** *Nếu hàm $f$ liên tục từng khúc với $t \geq 0$ (hàm $f$ chỉ có một số hữu hạn các điểm gián đoạn loại I) và là bậc mũ khi $t \to \infty$ thì tồn tại $\mathcal{L}\{f(t)\}(s), \forall s > \alpha$.*

**Hệ quả 1.1.** *Nếu $f(t)$ thỏa mãn giả thiết của Định lý trên thì $\lim\limits_{s \to +\infty} F(s) = 0$.*

**Chú ý 3.1.** *Hàm $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$ không liên tục từng khúc tại $t = 0$ và là bậc mũ khi $t \to +\infty$ nhưng có $\mathcal{L}\{t^{-1/2}\}(s) = \sqrt{\frac{\pi}{s}}$.*

Bảng các phép biến đổi Laplace

| $f(t)$ | $F(s)$ | $s$ |
|---|---|---|
| $1$ | $\frac{1}{s}$ | $s > 0$ |
| $t$ | $\frac{1}{s^2}$ | $s > 0$ |
| $t^n$ $(n \in \mathbb{N})$ | $\frac{n!}{s^{n+1}}$ | $s > 0$ |
| $t^a$ $(a > -1)$ | $\frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$ | $s > 0$ |
| $e^{at}$ | $\frac{1}{s-a}$ | $s > a$ |
| $\cos kt$ | $\frac{s}{s^2+k^2}$ | $s > 0$ |
| $\sin kt$ | $\frac{k}{s^2+k^2}$ | $s > 0$ |
| $\cosh kt$ | $\frac{s}{s^2-k^2}$ | $s > \lvert k\rvert$ |
| $\sinh kt$ | $\frac{k}{s^2-k^2}$ | $s > \lvert k\rvert$ |
| $u(t-a)$ $(a > 0)$ | $\frac{e^{-as}}{s}$ | $s > 0$ |

**Bài tập 1.3.** *Sử dụng bảng phép biến đổi Laplace, tìm phép biến đổi Laplace của các hàm số sau*

*a)* $f(t) = \sqrt{t} + 3t$, *d)* $f(t) = \cos^2 2t$, *g)* $f(t) = \sin 3t \cos 3t$,

*b)* $f(t) = t - 2e^{3t}$, *e)* $f(t) = (1+t)^3$, *h)* $f(t) = \sinh^2 3t$.

*c)* $f(t) = 1 + \cosh 5t$, *f)* $f(t) = te^t$, *i)* $f(t) = \cosh^2 3t$.

## 1.2 Phép biến đổi Laplace nghịch đảo

**Định nghĩa 3.1.** *Nếu* $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ *thì ta nói* $f(t)$ *là biến đổi Laplace ngược của hàm số* $F(s)$ *và viết* $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$.

**Ví dụ 1.1.**

a) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+k^2}\right\} = \cos kt, (s > 0)$

b) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^4}\right\} = \frac{1}{3}t^3,$

c) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2-k^2}\right\} = \cosh kt\ (s > k > 0),$

d) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{s-5}\right\} = 4e^{5t}.$

**Chú ý 3.2.**

- *Phép biến đổi Laplace cũng có tính chất tuyến tính, i.e.,*

$$\mathcal{L}^{-1}\{aF(s) + bG(s)\} = a\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} + b\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}.$$

- *Mọi hàm hữu tỉ (bậc tử nhỏ hơn bậc mẫu) là ảnh của phép biến đổi Laplace.*

**Ví dụ 1.2.** *Tìm biến đổi Laplace ngược của các hàm số sau*

a) $F(s) = \frac{6}{s} - \frac{1}{s-8} + \frac{4}{s-3},$

b) $H(s) = \frac{19}{s+2} - \frac{1}{3s-5} + \frac{7}{s^5},$

c) $K(s) = \frac{6s}{s^2+25} + \frac{3}{s^2+25},$

d) $G(s) = \frac{8}{3s^2+12} + \frac{3}{s^2-49}.$

[Gợi ý]

a) $f(t) = 6 - e^{8t} + 4e^{3t},$

b) $h(t) = 19e^{-2t} - \frac{1}{3}e^{\frac{5t}{3}} + \frac{7}{24}t^4.$

c) $k(t) = 6\cos(5t) + \frac{3}{5}\sin(5t).$

d) $g(t) = \frac{4}{3}\sin(2t) + \frac{3}{7}\sinh(7t).$

**Sự duy nhất của biến đổi Laplace nghịch đảo**

**Định lý 1.3 (Sự duy nhất của biến đổi Laplace nghịch đảo).** *Giả sử rằng các hàm* $f(t), g(t)$ *thỏa mãn giả thiết của Định lý về sự tồn tại của phép biến đổi Laplace để tồn tại* $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s), G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}(s)$. *Nếu* $F(s) = G(s), \forall s > c$ *thì* $f(t) = g(t)$ *tại* $t$ *mà cả hai hàm liên tục.*

**Chú ý 3.1.** *Hai hàm liên tục từng khúc, là bậc mũ và bằng nhau qua phép biến đổi Laplace chỉ có thể khác nhau tại những điểm gián đoạn cô lập. Điều này không quan trọng trong hầu hết các ứng dụng thực tế.*

**Bài tập 1.4.** *Sử dụng bảng phép biến đổi Laplace, tìm phép biến đổi Laplace ngược của hàm số sau* *a)* $F(s) = \frac{3}{s^4}$, *c)* $F(s) = \frac{3}{s-4}$, *e)* $F(s) = \frac{10s-3}{25-s^2}$,

*b)* $F(s) = \frac{1}{s} - \frac{2}{s^{\frac{5}{2}}}$, *d)* $F(s) = \frac{5-3s}{s^2+9}$, *f)* $F(s) = 2s^{-1}e^{-3s}$.

**Bài tập 1.5.** *Tính*

*a)* $\mathcal{L}\left\{\cos^2 t\right\}$, *c)* $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^3}\right\}$,

*b)* $\mathcal{L}\left\{\sin 2t \cos 4t\right\}$, *d)* $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5s-2}{9-s^2}\right\}$.

# §2. PHÉP BIẾN ĐỔI CỦA BÀI TOÁN VỚI GIÁ TRỊ BAN ĐẦU

## 2.1 Phép biến đổi của đạo hàm, nghiệm của bài toán giá trị ban đầu

**Định nghĩa 3.1.** *Hàm $f$ được gọi là trơn từng khúc trên $[a,b]$ nếu nó khả vi trên $[a,b]$ trừ ra một số hữu hạn điểm và $f'(t)$ liên tục từng khúc trên $[a,b]$.*

**Định lý 2.1 (Phép biến đổi Laplace của đạo hàm).** *Cho $f(t)$ liên tục và trơn từng khúc với $t \geq 0$ và là bậc mũ khi $t \to +\infty$ (tức tồn tại hằng số không âm $c, M, T$ thoả mãn: $|f(t)| \leq Me^{ct}, t \geq T$). Khi đó tồn tại $\mathcal{L}\{f'(t)\}(s)$ với $s > c$ và*

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0) = sF(s) - f(0).$$

**Ví dụ 2.1.** *Chứng minh rằng $\mathcal{L}\{t^n e^{at}\} = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}, n \in \mathbb{N}$.*

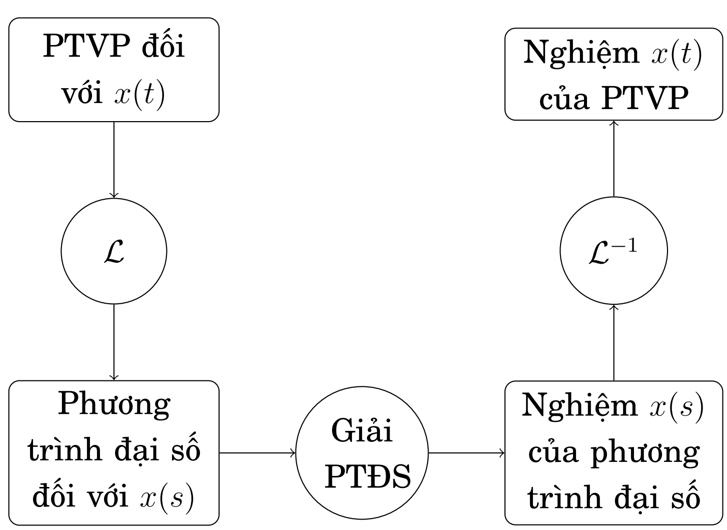
**Định lý 2.2 (Phép biến đổi Laplace của đạo hàm cấp cao).** *Giả sử rằng các hàm số $f, f' \dots f^{(n-1)}$ liên tục và trơn từng khúc với $t \geq 0$ và là bậc mũ khi $t \to \infty$. Khi đó tồn tại $\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\}$ với $s > c$ và có*

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n\mathcal{L}\{f(t)\} - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0).$$

**Ví dụ 2.1.** *Chứng minh rằng $\mathcal{L}\{t \sinh kt\} = \frac{2sk}{s^2-k^2}$.*

**Ví dụ 2.2.** *Giải PTVP $x'' - x' - 6x = 0$ với điều kiện $x(0) = 2, x'(0) = -1$.*

**Sơ đồ sử dụng phép biến đổi Laplace giải PTVP**



**Chú ý 3.1.**

- *Phương pháp biến đổi Laplace cho lời giải của bài toán giá trị ban đầu mà không cần phân biệt đó là phương trình vi phân thuần nhất hay là không thuần nhất.*
- *Ngoài việc áp dụng để giải bài toán giá trị ban đầu, phép biến đổi Laplace cũng có khả năng biến đổi hệ phương trình vi phân tuyến tính thành một hệ phương trình đại số tuyến tính.*

**Ví dụ 2.3.** *Giải bài toán giá trị ban đầu* $y'' - 10y' + 9y = 5t, y(0) = -1, y'(0) = 2.$

[Gợi ý] Tác động phép biến đổi Laplace vào hai vế của phương trình đã cho để được phương trình đại số

$$[s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)] - 10[sY(s) - y(0)] + 9Y(s) = \frac{5}{s^2}.$$

Giải ra ta được

$$Y(s) = \frac{5}{s^2(s-9)(s-1)} + \frac{12-s}{(s-9)(s-1)} = \frac{50}{81}\frac{1}{s} + \frac{5}{9}\frac{1}{s^2} + \frac{31}{81}\frac{1}{s-9} - 2\frac{1}{s-1}.$$

Do đó,

$$y(t) = \frac{50}{81} + \frac{5}{9}t + \frac{31}{81}e^{9t} - 2e^t.$$

**Ví dụ 2.4.** *Giải bài toán giá trị ban đầu* $2y'' + 3y' - 2y = te^{-2t}, y(0) = 0, y'(0) = -2.$

[Gợi ý] Tác động phép biến đổi Laplace vào hai vế của phương trình đã cho để được phương trình đại số

$$2[s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)] + 3[sY(s) - y(0)] - 2Y(s) = \frac{1}{(s+2)^2}.$$

Giải ra ta được

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{(2s-1)(s+2)^3} - \frac{4}{(2s-1)(s+2)} \\ &= \frac{1}{125}\left(-96\frac{1}{s-\frac{1}{2}} + 96\frac{1}{s+2} - 10\frac{1}{(s+2)^2} - \frac{25}{2}\frac{2!}{(s+2)^3}\right). \end{aligned}$$

Do đó,

$$y(t) = \frac{1}{125}\left(-96e^{\frac{t}{2}} + 96e^{-2t} - 10te^{-2t} - \frac{25}{2}t^2e^{-2t}\right).$$

**Bài tập 2.1.** *Sử dụng phép biến đổi Laplace để giải bài toán giá trị ban đầu*

***a)*** $x'' + 4x = \sin 3t, x(0) = x'(0) = 0,$

***b)*** $x'' + 9x = 0, x(0) = 3, x'(0) = 4,$

***c)*** $x'' + 4x = 0, x(0) = 5, x'(0) = 0,$

***d)*** $x'' + x = \sin 2t, x(0) = 0, x'(0) = 0,$

*e)* $x'' + 4x' + 3x = 1, x(0) = x'(0) = 0,$

*f)* $x'' - x' - 2x = 0, x(0) = 0, x'(0) = 2,$

*g)* $x'' + x = \cos 3t, x(0) = 1, x'(0) = 0,$

*h)* $x'' + 3x' + 2x = t, x(0) = 0, x'(0) = 2.$

**Bài tập 2.2.** *Sử dụng phép biến đổi Laplace để giải hệ phương trình vi phân tuyến tính sau*

*a)* $$\begin{cases} 2x'' = -6x + 2y, \\ y'' = 2x - 2y + 40\sin 3t, \\ x(0) = x'(0) = y(0) = y'(0) = 0, \end{cases}$$

*b)* $$\begin{cases} x' + 2y' + x = 0, \\ x' - y' + y = 0, \\ x(0) = 0, y(0) = 1, \end{cases}$$

*c)* $$\begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = 6x + 3y, \\ x(0) = 1, y(0) = -2, \end{cases}$$

*d)* $$\begin{cases} x'' + x' + y' + 2x - y = 0, \\ y'' + x' + y' + 4x - 2y = 0, \\ x(0) = y(0) = 1, x'(0) = y'(0) = 0, \end{cases}$$

*e)* $$\begin{cases} x'' + 2x + 4y = 0, \\ y'' + x + 2y = 0, \\ x(0) = y(0) = 0, x'(0) = y'(0) = -1. \end{cases}$$

## 2.2 Phép biến đổi Laplace của hàm số $f(t)$ có dạng $f(t) = tg(t)$

**Ví dụ 2.5.** *Tìm Phép biến đổi Laplace của* $f(t) = te^{at}$.

[Gợi ý]

- Tính $f'(t) = e^{at} + af(t)$.
- Tác động biến đổi Laplace lên hai vế và suy ra $\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{(s-a)^2}$.

**Ví dụ 2.6.** *Tìm phép biến đổi Laplace của* $f(t) = t\sin at$.

[Gợi ý]

- Tính $f''(t) = 2a\cos at - a^2 f(t)$.
- Tác động biến đổi Laplace lên hai vế và suy ra $\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$.

**Bài tập 2.3.** *Sử dụng Định lí 2.1 (Phép biến đổi Laplace của đạo hàm), chứng minh rằng* *a)* $\mathcal{L}\{t^n e^{at}\} = \frac{n}{s-a}\mathcal{L}\{t^{n-1}e^{at}\}$,

*b)* $\mathcal{L}\{t^n e^{at}\} = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}, n \in \mathbb{N}$,

*c)* $\mathcal{L}\{t\sinh kt\} = \frac{2sk}{(s^2-k^2)^2}$,

*d)* $\mathcal{L}\{t\cosh kt\} = \frac{s^2+k^2}{(s^2-k^2)^2}$,

*e)* $\mathcal{L}\{t\cos kt\} = \frac{s^2-k^2}{(s^2+k^2)^2}$.

## 2.3 Phép biến đổi Laplace của tích phân

**Định lý 2.3 (Phép biến đổi Laplace của tích phân).** *Nếu $f(t)$ liên tục, trơn từng khúc với $t \geq 0$ và là bậc mũ khi $t \to +\infty$ thì*

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \frac{1}{s}\mathcal{L}\{f(t)\} \text{ với } s > c,$$

*hay là*

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s}\right\} = \int_0^t f(\tau)d\tau = \int_0^t \mathcal{L}^{-1}\{F\}(\tau)d\tau.$$

**Ví dụ 2.1.** *Tìm biến đổi Laplace ngược của $G(s) = \frac{1}{s^2(s-a)}$.*

[Gợi ý] Ta có

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s-a)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{s(s-a)}}{s}\right\} = \int_0^t \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s-a)}\right\}d\tau. \tag{3.1}$$

Vì vậy ta đi tính

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s-a)}\right\} = \int_0^t \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-a}\right\} = \int_0^t e^{a\tau}d\tau = \frac{1}{a}(e^{at}-1),$$

sau đó thay vào phương trình (3.1).

**Bài tập 2.4.** *Dùng Định lí 2.3 (Phép biến đổi Laplace của tích phân) để tìm phép biến đổi Laplace nghịch đảo của các hàm số sau*

*a)* $F(s) = \frac{1}{s(s-3)}$,

*b)* $F(s) = \frac{1}{s(s^2+4)}$,

*c)* $F(s) = \frac{1}{s^2(s^2+1)}$,

*d)* $F(s) = \frac{1}{s^2(s^2-1)}$,

*e)* $F(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)}$.

# §3. PHÉP TỊNH TIẾN VÀ PHÂN THỨC ĐƠN GIẢN

## 3.1 Phép tịnh tiến

**Định lý 3.1 (Phép biến đổi trên trục $s$).** *Nếu $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ tồn tại với $s > c$, thì tồn tại $\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\}$ với $s > a + c$ và có*

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a) := \mathcal{L}\{f(t)\}(s-a),$$

*hay tương đương với*

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s-a)\} = e^{at}f(t) := e^{at}\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(t).$$

*Chứng minh.* Định lý trên được chứng minh một cách trực tiếp như sau.

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = \int_0^\infty e^{-(s-a)t}f(t) = F(s-a).$$

■

**Ví dụ 3.1.** *Xuất phát từ công thức $\mathcal{L}\{\cos kt\}(s) = \frac{s}{s^2+k^2}$ ta có*

$$\mathcal{L}\{e^{at}\cos kt\}(s) = \frac{s-a}{(s-a)^2+k^2} \quad (s > a).$$

*Tương tự như vậy, từ công thức $\mathcal{L}\{\sin kt\}(s) = \frac{k}{s^2+k^2}$ ta có*

$$\mathcal{L}\{e^{at}\sin kt\}(s) = \frac{k}{(s-a)^2+k^2} \quad (s > a).$$

**Bài tập 3.1.** *Chứng minh rằng $\mathcal{L}\{e^{at}t^n\} = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}, \quad s > a.$*

**Bài tập 3.2.** *Áp dụng Định lí 3.1 (Phép tịnh tiến) để tìm phép biến đổi Laplace của các hàm số sau*

*a)* $f(t) = t^4e^{\pi t}$, *b)* $f(t) = e^{-2t}\sin 3\pi t$, *c)* $f(t) = e^{-\frac{t}{2}}\cos 2\left(t - \frac{\pi}{8}\right)$.

**Bài tập 3.3.** *Áp dụng Định lí 3.1 (Phép tịnh tiến) để tìm phép biến đổi Laplace ngược của các hàm số sau*

*a)* $F(s) = \frac{3}{2s-4}$, *b)* $F(s) = \frac{1}{s^2+4s+4}$, *c)* $F(s) = \frac{3s+5}{s^2-6s+25}$.

## 3.2 Phép biến đổi Laplace ngược của các hàm phân thức

Chúng ta mở đầu bài hôm nay với một nhận xét sau: Phương trình vi phân tuyến tính với hệ số hằng có nghiệm là biến đổi Laplace nghịch đảo của hàm hữu tỉ $\frac{P(s)}{Q(s)}$. Thật vậy, xét phương trình

$$y'' + py' + qy = 0, y(0) = a, y'(0) = b.$$

Tác động phép biến đổi Laplace vào cả hai vế ta được

$$(s^2Y(s) - sa - b) + p(sY(s) - a) + qY(s) = 0.$$

Phương trình đại số này có nghiệm là

$$Y(s) = \frac{(s+p)a + b}{s^2 + ps + q}.$$

Như vậy, điều đó dẫn tới nhu cầu tìm một thuật toán để tính phép biến đổi Laplace ngược của các hàm phân thức. Cũng giống như thuật toán tính tích phân của các hàm phân thức đã được học ở học phần Giải tích 1, việc tìm phép biến đổi Laplace ngược của hàm phân thức cũng được quy về việc tìm phép biến đổi Laplace ngược của các hàm phân thức đơn giản.

- Phân tích $\frac{P(s)}{Q(s)}$ thành tổng của các phân thức đơn giản có bậc ở mẫu là các đa thức bậc nhất hoặc bậc hai vô nghiệm.
- Như vậy, phép biến đổi Laplace ngược của hàm phân thức được đưa về tính phép biến đổi Laplace ngược của bốn hàm phân thức đơn giản sau:

I. $\dfrac{A}{s-a}$ II. $\dfrac{A}{(s-a)^k}$

III. $\dfrac{Ms+N}{(s-a)^2+b^2}$ IV. $\dfrac{Ms+N}{[(s-a)^2+b^2]^k}$

Phép biến đổi Laplace ngược của ba hàm phân thức đơn giản đầu tiên có thể được tính dựa vào các công thức sau:

- $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-a}\right\} = e^{at}$.
- $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}\right\} = e^{at}\cos bt$.
- $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-a)^k}\right\} = \frac{1}{(k-1)!}t^{k-1}e^{at}$.
- $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{b}{(s-a)^2+b^2}\right\} = e^{at}\sin bt$.

Phép biến đổi Laplace ngược của hàm phân thức đơn giản thứ tư, $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{Ms+N}{[(s-a)^2+b^2]^k}\right\}$, sẽ được tính thông qua công thức

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)G(s)\} = (f * g)(t).$$

(xem Định lý 4.1 ở §4). Với những công cụ ở thời điểm hiện tại, dựa vào $\mathcal{L}\{t\sin kt\} = \frac{2ks}{(s^2+k^2)^2}$, chúng ta mới chỉ xử lý được

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-a}{[(s-a)^2+b^2]^2}\right\} = e^{at}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+b^2)^2}\right\} = \frac{1}{2b}e^{at}t\sin bt$$

**Ví dụ 3.2.** *Tìm phép biến đổi Laplace ngược của*

*a)* $F(s) = \frac{6s-5}{s^2+7}$,

*b)* $K(s) = \frac{1-3s}{s^2+8s+21}$,

*c)* $G(s) = \frac{3s-2}{2s^2-6s-2}$,

*d)* $H(s) = \frac{s+7}{s^2-3s-10}$.

[Gợi ý]

a) Ta có

$$F(s) = 6\frac{s}{s^2+7} - \frac{5}{\sqrt{7}}\frac{\sqrt{7}}{s^2+7} \text{ nên } f(t) = 6\cos(\sqrt{7}t) - \frac{5}{\sqrt{7}}\sin(\sqrt{7}t)$$

b) Phân tích

$$F(s) = \frac{1-3s}{(s+4)^2+5} = -3\frac{s+4}{(s+4)^2+5} + \frac{13}{\sqrt{5}}\frac{\sqrt{5}}{(s+4)^2+5}.$$

Do đó

$$k(t) = -3e^{-4t}\cos(\sqrt{5}t) + \frac{13}{\sqrt{5}}e^{-4t}\sin(\sqrt{5}t).$$

c) Phân tích

$$G(s) = \frac{1}{2}\frac{3s-2}{\left(s-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{13}{4}} = \frac{1}{2}\left(3\frac{s-\frac{3}{2}}{\left(s-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{13}{4}} + \frac{5}{\sqrt{13}}\frac{\frac{\sqrt{13}}{2}}{\left(s-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{13}{4}}\right).$$

Do đó,

$$g(t) = \frac{1}{2}\left(3e^{\frac{3t}{2}}\cosh\left(\frac{\sqrt{13}}{2}t\right) + \frac{5}{\sqrt{13}}e^{\frac{3t}{2}}\sinh\left(\frac{\sqrt{13}}{2}t\right)\right).$$

d) Phân tích

$$H(s) = -\frac{5}{7}\frac{1}{s+2} + \frac{12}{7}\frac{1}{s-5}.$$

Do đó,

$$h(t) = -\frac{5}{7}e^{-2t} + \frac{12}{7}e^{5t}.$$

**Ví dụ 3.3.** *Tìm phép biến đổi Laplace ngược của*

*a)* $F(s) = \frac{86s-78}{(s+3)(s-4)(5s-1)}$,

*b)* $K(s) = \frac{2-5s}{(s-6)(s^2+11)}$,

*c)* $G(s) = \frac{25}{s^3(s^2+4s+5)}$.

[Gợi ý]

a) Phân tích
$$F(s) = -3\frac{1}{s+3} + 2\frac{1}{s-4} + \frac{1}{s-\frac{1}{5}}.$$
Do đó
$$f(t) = -3e^{-3t} + 2e^{4t} + e^{\frac{t}{5}}.$$

b) Phân tích
$$K(s) = \frac{1}{47}\left(-28\frac{1}{s-6} + 28\frac{s}{s^1+11} - \frac{67}{\sqrt{11}}\frac{\sqrt{11}}{s^2+11}\right).$$
Do đó,
$$k(t) = \frac{1}{47}\left(-28e^{6t} + 28\cos\sqrt{11}t - \frac{67}{\sqrt{11}}\sin\sqrt{11}t\right).$$

c) Phân tích
$$G(s) = \frac{1}{5}\left(11\frac{1}{s} - 20\frac{1}{s^2} + \frac{25}{2}\frac{2!}{s^3} - 11\frac{s+2}{(s+2)^2+1} - 2\frac{1}{(s+2)^2+1}\right).$$
Do đó
$$g(t) = \frac{1}{5}\left(11 - 20t + \frac{25}{2}t^2 - 11e^{-2t}\cos t - 2e^{-2t}\sin t\right).$$

**Bài tập 3.4.** *Tìm phép biến đổi Laplace ngược của*

*a)* $F(s) = \frac{s^2+1}{s^3-2s^2-8s}$,

*b)* $G(s) = \frac{s^2+2s}{s^4+52s^2+4}$,

*c)* $H(s) = \frac{s^2-2s}{s^4+3s^2+2}$.

**Bài tập 3.5.** *Giải các bài toán giá trị ban đầu*

*a)* $x'' - 6x' + 8x = 2, x(0) = 0 = x'(0)$,

*b)* $x'' + 4x' + 8x = e^{-t}, x(0) = 0 = x'(0)$,

*c)* $x^{(4)} - x = 0, x(0) = 1, x'(0) = x''(0) = x'''(0) = 0$,

*d)* $x^{(4)} + 13x'' + 36x = 0, x(0) = x''(0) = 0, x'(0) = 2, x'''(0) = -13$.

**Bài tập 3.6.** *Sử dụng các phân thức đơn giản để tìm phép biến đổi Laplace ngược của các hàm số sau*

*a)* $F(s) = \frac{1}{s^2-4}$,

*b)* $F(s) = \frac{5-2s}{s^2+7s+10}$,

*c)* $F(s) = \frac{1}{s^3-5s^2}$,

*d)* $F(s) = \frac{1}{s^4-16}$,

*e)* $F(s) = \frac{s^2-2s}{s^4+5s^2+4}$,

*f)* $F(s) = \frac{s^2+3}{(s^2+2s+2)^2}$.

**Bài tập 3.7.** *Sử dụng phép phân tích* $s^4+4a^4=(s^2-2as+2a^2)(s^2+2as+2a^2)$*, chứng minh rằng*

*a)* $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^3}{s^4+4a^4}\right\}=\cosh at\cos at$*,*

*b)* $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2}{s^4+4a^4}\right\}=\frac{1}{2a}(\cosh at\sin at+\sinh at\cos at)$*,*

*c)* $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^4+4a^4}\right\}=\frac{1}{2a^2}\sinh at\sin at$*.*

# §4. ĐẠO HÀM, TÍCH PHÂN VÀ TÍCH CÁC PHÉP BIẾN ĐỔI

## 4.1 Tích chập - Phép biến đổi Laplace của tích chập

**Ví dụ 4.1.** *Xét bài toán giá trị ban đầu* $x'' + x = \cos t, x(0) = x'(0) = 0$. *Dùng PP Laplace ta tính được* $\mathcal{L}\{x(t)\}(s) = \frac{s}{s^2+1}\frac{1}{s^2+1} = \mathcal{L}\{\cos t\}\mathcal{L}\{\sin t\}$.

- $\mathcal{L}\{\cos t \sin t\} \neq \mathcal{L}\{\cos t\}\mathcal{L}\{\sin t\}$.
- *Tìm phép biến đổi Laplace ngược của một tích như thế nào?*

**Định nghĩa 3.1 (Tích chập).** *Tích chập đối với phép biến đổi Laplace của hai hàm* $f, g$ *liên tục từng khúc được định nghĩa với như sau:* $(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau, t \geq 0$.

**Định lý 4.1.** *Giả thiết* $f(t), g(t)$ *liên tục từng khúc với* $t \geq 0$ *và là bậc mũ khi* $t \to \infty$. *Khi đó*

$$\mathcal{L}\{(f * g)(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\}\mathcal{L}\{g(t)\}$$

*và*

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)G(s)\} = (f * g)(t).$$

**Ví dụ 4.1.** *Chứng minh công thức Jacobi liên hệ giữa hàm Gamma và Beta sau:*

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},$$

*ở đó*

$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx, \quad B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx.$$

*Chứng minh.* Trước hết, ta có nhận xét sau:

$$\mathcal{L}(x^{p-1}) = s^{-p}\Gamma(p).$$

Thật vậy, theo định nghĩa

$$\mathcal{L}(x^{p-1}) = \int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-sx}dx = s^{-p}\int_0^{\infty} y^{p-1}e^{-y}dy = s^{-p}\Gamma(p) \quad (\text{đổi biến } sx = y).$$

Như vậy,

$$\Gamma(p) = s^p\mathcal{L}(x^{p-1}), \quad \Gamma(q) = s^q\mathcal{L}(x^{q-1}).$$

Do đó,

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = s^{p+q}\mathcal{L}(x^{p-1})\mathcal{L}(x^{q-1}),$$

hay là

$$\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{s^{p+q}} = \mathcal{L}(x^{p-1})\mathcal{L}(x^{q-1}).$$

Tác động phép biến đổi Laplace ngược vào hai vế tai được

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{s^{p+q}}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\mathcal{L}(x^{p-1})\mathcal{L}(x^{q-1})\right) = (x^{p-1}) * (x^{q-1}) = \int\limits_0^x (x-y)^{p-1}y^{q-1}dy.$$

Đổi biến số $u = \frac{y}{x}$ đối với tích phân sau ta thu được

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{s^{p+q}}\right) = x^{p+q-1}\int\limits_0^1 (1-u)^{p-1}u^{q-1}du = x^{p+q-1}B(p,q).$$

Lại tác động phép biến đổi Laplace vào cả hai vế của phương trình trên ta thu được

$$\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{s^{p+q}} = B(p,q)\mathcal{L}(x^{p+q-1}) = B(p,q)\frac{\Gamma(p+q)}{s^{p+q}}.$$

Từ đó suy ra

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

■

**Ví dụ 4.2.** *Tìm biến đổi Laplace ngược của hàm số* $H(s) = \frac{1}{(s^2+a^2)^2}$.

[Gợi ý] Ta có

$$H(s) = \left(\frac{1}{s^2+a^2}\right)\left(\frac{1}{s^2+a^2}\right) = F(s)G(s),$$

ở đó $F(s) = G(s) = \frac{1}{s^2+a^2}$. Do đó, $f(t) = g(t) = \frac{1}{a}\sin at$ và

$$h(t) = (f*g)(t) = \frac{1}{a^2}\int\limits_0^t \sin(at-a\tau)\sin(a\tau)d\tau = \frac{1}{2a^3}[\sin at - at\cos at].$$

**Ví dụ 4.3.** *Giải bài toán giá trị ban đầu* $4y'' + y = g(t), y(0) = 3, y'(0) = -7$.

[Gợi ý] Tác động phép biến đổi Laplace vào hai vế ta được

$$\begin{aligned}
&4[s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)] + Y(s) = G(s)\\
\Leftrightarrow &Y(s) = \frac{12s-28}{4\left(s^2+\frac{1}{4}\right)} + \frac{G(s)}{4\left(s^2+\frac{1}{4}\right)}\\
\Leftrightarrow &Y(s) = 3\frac{1}{s^2+\frac{1}{4}} - 14\frac{\frac{1}{2}}{s^2+\frac{1}{4}} + \frac{1}{2}G(s)\frac{\frac{1}{2}}{s^2+\frac{1}{4}}.
\end{aligned}$$

Do đó,

$$
\begin{aligned}
y(t) &= 3\cos\frac{t}{2} - 14\sin\frac{t}{2} + \frac{1}{2}(g * f)(t) \\
&= 3\cos\frac{t}{2} - 14\sin\frac{t}{2} + \frac{1}{2}\int_0^t \sin\frac{\tau}{2} g(t-\tau)d\tau,
\end{aligned}
$$

ở đó $f(t) = 2\sin\frac{t}{2}$.

**Bài tập 4.1.** *Tính phép biến đổi Laplace ngược của các hàm số sau*

*a)* $\frac{2}{(s-1)(s^2+4)}$,

*b)* $\frac{1}{s(s^2+4)}$,

*c)* $\frac{1}{s^2(s^2+k^2)}$,

*d)* $\frac{1}{s(s^2+4s+5)}$.

**Bài tập 4.2.** *Áp dụng Định lí tích chập để tìm biến đổi Laplace ngược của các hàm sau*

*a)* $F(s) = \frac{1}{s(s-3)}$,

*b)* $F(s) = \frac{1}{(s^2+9)^2}$,

*c)* $F(s) = \frac{s^2}{(s^2+4)^2}$,

*d)* $F(s) = \frac{s}{(s-3)(s^2+1)}$.

## 4.2 Vi phân của phép biến đổi

**Định lý 4.2 (Vi phân của phép biến đổi).** *Nếu* $f(t)$ *liên tục từng khúc với* $t \geq 0$ *và là bậc mũ thì*

$$F'(s) = \mathcal{L}\{-tf(t)\}, s > c \Leftrightarrow f(t) := \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = -\frac{1}{t}\mathcal{L}^{-1}\{F'(s)\}.$$

*Tổng quát:* $F^{(n)}(s) = (-1)^n\mathcal{L}\{t^n f(t)\}, n \in \mathbb{N}$.

**Ví dụ 4.1.** *Xuất phát từ công thức* $\mathcal{L}\{e^{at}\}(s) = \frac{1}{s-a}$ *ta có*

$$\mathcal{L}\{te^{at}\}(s) = -\left(\frac{1}{s-a}\right)' = \frac{1}{(s-a)^2}.$$

*Tổng quát,*

$$\mathcal{L}\{t^n e^{at}\}(s) = (-1)^n\left(\frac{1}{s-a}\right)^{(n)} = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}.$$

**Ví dụ 4.2.** *Tính* $\mathcal{L}\{t\cosh(3t)\}(s)$.

[Gợi ý] Ta có $F(s) = \mathcal{L}\{tg(t)\} = -G'(s)$, ở đó $g(t) = \cosh(3t)$. Do đó

$$G(s) = \frac{s}{s^2-9}, \quad F(s) = G'(s) = -\frac{s^2+9}{(s^2-9)^2}.$$

**Ví dụ 4.3.** *Tính* $\mathcal{L}\{t^2\sin(2t)\}(s)$.

[Gợi ý] Ta có $F(s) = \mathcal{L}\{t^2 g(t)\} = G''(s)$, ở đó $g(t) = \sin(2t)$. Do đó

$$G(s) = \frac{2}{s^2+4}, \quad F(s) = G'(s) = \frac{12s^2-6}{(s^2+4)^3}.$$

**Bài tập 4.3 (Cuối kì, K62).** *Tìm biến đổi Laplace của* $f(t) = t\cos^2 t$.

**Bài tập 4.4.** *Tính a)* $\mathcal{L}\{t^2\sin kt\}$ *b)* $\mathcal{L}\{t^2\cos kt\}$.

**Bài tập 4.5.** *Dùng Định lí 4.2 (Vi phân của phép biến đổi Laplace) để tìm phép biến đổi Laplace của các hàm sau*

*a)* $f(t) = t\sin 3t$, *b)* $f(t) = te^{2t}\cos 3t$.

## 4.3 Tích phân của phép biến đổi

**Định lý 4.3 (Tích phân của phép biến đổi).** *Giả thiết* $f(t)$ *liên tục từng khúc đối với* $t \geq 0$ *và là bậc mũ,* $\exists \lim\limits_{t\to 0^+} \frac{f(t)}{t}$. *Khi đó*

$$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t}{t}\right\} = \int\limits_s^\infty F(\tau)d\tau, s > c$$

*hay là*

$$f(t) := \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = t\mathcal{L}^{-1}\left\{\int\limits_s^\infty F(\tau)d\tau\right\}.$$

**Bài tập 4.6.** *Dùng Định lí 4.3 (tích phân của phép biến đổi Laplace) để tìm phép biến đổi Laplace của các hàm sau*

*a)* $f(t) = \frac{\sin t}{t}$,

*b)* $f(t) = \frac{e^{3t}-1}{t}$,

*c)* $f(t) = \frac{\sinh t}{t}$,

*d)* $f(t) = \frac{\cosh t}{t}$,

*e)* $f(t) = \frac{1-\cos 2t}{t}$,

*f)* $f(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{t}$.

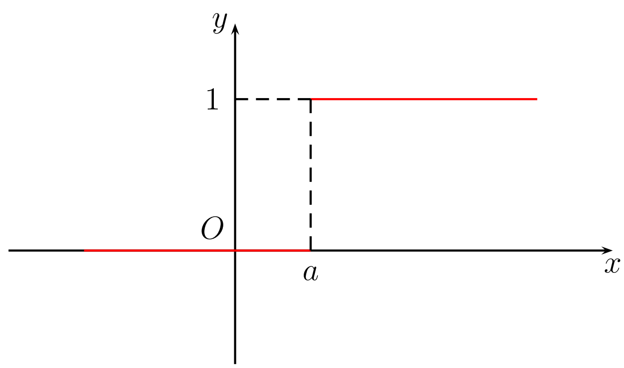
**Bài tập 4.7.** *Tìm phép biến đổi Laplace nghịch đảo của các hàm sau*

*a)* $F(s) = \ln\frac{s-2}{s+2}$, *b)* $F(s) = \ln\frac{s^2+1}{(s+2)(s-3)}$, *c)* $F(s) = \ln\left(1+\frac{1}{s^2}\right)$.

## 4.4 Phép biến đổi Laplace của hàm Heaviside và tịnh tiến trên trục

Sau đây chúng ta nghiên cứu phép biến đổi Laplace của một lớp các hàm số, đó là hàm bậc thang, để giải một lớp các phương trình vi phân có chứa các hàm này. Một trong số các hàm này là hàm Heaviside, được định nghĩa như sau

$$u_a(t) = \begin{cases} 0, & \text{nếu } t < a, \\ 1, & \text{nếu } t \geq a \end{cases}$$




Đồ thị của hàm số Heavise

Tuy hàm số Heaviside chỉ nhận giá trị $0$ và $1$ nhưng có thể dùng nó để biểu diễn các hàm bậc thang khác. Chẳng hạn như hàm số

$$f(t) = \begin{cases} 4, & \text{nếu } t < a, \\ 7, & \text{nếu } t \geq a \end{cases}$$

có thể biểu diễn qua hàm Heaviside $f(t) = 4 - 3u_a(t)$. Hoặc như hàm số phức tạp hơn sau đây

$$g(t) = \begin{cases} -4, & \text{nếu } t < 6, \\ 25, & \text{nếu } 6 \leq t < 8, \\ 16, & \text{nếu } 8 \leq t < 30, \\ 10, & \text{nếu } t \geq 30 \end{cases}$$

có thể biểu diễn qua hàm Heaviside như sau $g(t) = -4 + 29u_6(t) - 9u_8(t) - 6u_{30}(t)$.

**Định lý 4.4 (Phép tịnh tiến trên trục $t$).** *Nếu* $\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$ *tồn tại với* $s > c$ *thì*

$$\mathcal{L}\{u(t-a)f(t-a)\} = e^{-as}F(s) =: e^{-as}\mathcal{L}\{f(t)\},$$

*ở đó* $u_a(t) = u(t-a) = \begin{cases} 0, & t < a, \\ 1, & t \geq a \end{cases}$ *là hàm bậc thang đơn vị tại* $t = a$ *(hàm Heaviside). Hay là*

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\} = u(t-a)f(t-a), s > c + a.$$

**Ví dụ 4.1.** *Tìm phép biến đổi Laplace của các hàm số sau*

*a)* $g(t) = 10u_{12}(t) + 2(t-6)^3u_6(t) - (7 - e^{12-3t})u_4(t)$,

*b)* $f(t) = -t^2u_3(t) + u_5(t)\cos t$,

*c)* $h(t) = \begin{cases} t^4, & \textit{nếu } t < 5, \\ t^4 + 3\sin\left(\frac{t}{10} - \frac{1}{2}\right), & \textit{nếu } t \geq 5, \end{cases}$

*d)* $f(t) = \begin{cases} t, & \textit{nếu } t < 6, \\ -8 + (t-6)^2, & \textit{nếu } t \geq 6. \end{cases}$

[Lời giải]

a) $G(s) = \frac{10e^{-12s}}{s} + \frac{12e^{-6s}}{s^{3+1}} - \left(\frac{7}{s} - \frac{1}{s+3}\right)e^{-4s}$.

b) $F(s) = -\left(\frac{2}{s^3} + \frac{6}{s^2} + \frac{9}{s}\right)e^{-3s} + \left(\frac{s\cos 5 - \sin 5}{s^2+1}\right)e^{-5s}$.

c) $H(s) = \frac{24}{s^5} + \frac{\frac{3}{10}e^{-5s}}{s^2 + \frac{1}{100}}$.

d) $F(s) = \frac{1}{s^2} + \left(\frac{2}{s^3} - \frac{1}{s^2} - \frac{14}{s}\right)e^{-6s}$.

**Bài tập 4.8.** *Tính*

*a)* $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-as}}{s^3}\right\}$,

*b)* $\mathcal{L}\{g(t)\}$ *với* $g(t) = \begin{cases} 0, & t < 3, \\ t^2, & t \geq 3. \end{cases}$

**Bài tập 4.9.** *Giải bài toán giá trị ban đầu*

$$mx'' + cx' + kx = f(t), x(0) = x'(0) = 0$$

*trong các trường hợp sau:*

*a)* $m = 1, k = 4, c = 0, f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < \pi, \\ 0, & t \geq \pi. \end{cases}$

*b)* $m = 1, k = 9, c = 9, f(t) = \begin{cases} \sin t, & 0 \leq t < 2\pi, \\ 0, & t \geq 2\pi. \end{cases}$

*c)* $m = 1, k = 4, c = 4, f(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 2, \\ 0, & t \geq 2. \end{cases}$

**Bài tập 4.10 (Cuối kì, K62).** *Giải các bài toán giá trị ban đầu*

*a)* $y'' + 9y = \begin{cases} 0, & \text{nếu } t < \pi, \\ t, & \text{nếu } t \geq \pi, \end{cases} \quad y(0) = 0, y'(0) = 0.$

*b)* $y'' + 4y = \begin{cases} 0, & \text{nếu } t < \pi, \\ t, & \text{nếu } t \geq \pi, \end{cases} \quad y(0) = 0, y'(0) = 0.$

## 4.5 Bài toán giá trị ban đầu đối với PTVP có hệ số là hàm số

Sau khi đã *trải nghiệm* rất nhiều các tính chất và kĩ thuật biến hóa khác nhau của phép biến đổi Laplace, đến đây có lẽ các bạn đã hình dung ra phép biến đổi Laplace được sử dụng để giải các bài toán giá trị ban đầu như thế nào. Tuy nhiên, sẽ là **không thuyết phục** nếu chỉ có các ví dụ về ứng dụng của phép biến đổi Laplace để giải PTVP tuyến tính cấp hai hệ số hằng. Bởi vì đối với các PTVP tuyến tính cấp hai hệ số hằng, ở Chương 2 các bạn đã được học phương pháp đặc trưng để giải. **Sức mạnh** của phép biến đổi Laplace không chỉ có vậy, mục đích của bài này là đưa ra các ví dụ về các bài toán giá trị ban đầu đối với PTVP có hệ số là hàm số, mà các phương pháp ở Chương 2 không thực hiện được.

**Ví dụ 4.2.** *Giải bài toán giá trị ban đầu* $y'' + 3ty' - 6y = 2, y(0) = 0, y'(0) = 0.$

[Gợi ý] Ta có

$$\mathcal{L}\{ty'\} = -\frac{d}{ds}(\mathcal{L}\{y'\}) = -\frac{d}{ds}(sY(s) - y(0)) = -sY'(s) - Y(s).$$

Tác động phép biến đổi Laplace vào hai vế của phương trình ban đầu ta được

$$[s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)] + 3[-sY'(s) - Y(s)] - 6Y(s) = \frac{2}{s}$$
$$\Leftrightarrow Y'(s) + \left(\frac{3}{s} - \frac{s}{3}\right)Y(s) = -\frac{2}{3s^2}.$$

Không giống như các ví dụ trước, chúng ta không thu được một phương trình đại số, mà là một phương trình vi phân. Giải PTVP này ta được

$$Y(s) = \frac{2}{s^3} + C\frac{e^{\frac{s^2}{6}}}{s^3}.$$

Để $Y(s)$ là biến đổi Laplace của hàm $y(t)$ nào đó thì

$$\lim_{s\to\infty} Y(s) = 0.$$

Điều này chỉ xảy ra khi $C = 0$. Do đó, $Y(s) = \frac{2}{s^3}$ và $y(t) = t^2$.

**Ví dụ 4.3.** *Giải bài toán giá trị ban đầu* $ty'' - ty' + y = 2, y(0) = 2, y'(0) = -4.$

[Gợi ý] Ta có

$$\mathcal{L}\{ty'\} = -\frac{d}{ds}(\mathcal{L}\{y'\}) = -\frac{d}{ds}(sY(s) - y(0)) = -sY'(s) - Y(s)$$

và

$$\mathcal{L}\{ty''\} = -\frac{d}{ds}(\mathcal{L}\{y''\}) = -\frac{d}{ds}(s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)) = -s^2Y'(s) - 2sY(s) + y(0).$$

Tác động phép biến đổi Laplace vào cả hai vế của phương trình ban đầu ta được

$$[-s^2Y'(s) - 2sY(s) + y(0)] - [-sY'(s) - Y(s)] + Y(s) = \frac{2}{s}$$
$$\Leftrightarrow Y'(s) + \frac{2}{s}Y(s) = \frac{2}{s^2}.$$

Giải PTVP tuyến tính cấp một này ta được $Y(s) = \frac{2}{s} + \frac{C}{s^2}$. Do đó, $y(t) = 2 + ct$. Kết hợp với điều kiện $y'(0) = -4$ ta được $C = -4$. Kết luận

$$y(t) = 2 - 4t.$$

**Bài tập 4.11.** *Biến đổi các phương trình vi phân sau để tìm nghiệm không tầm thường sao cho* $x(0) = 0$

*a)* $tx'' + (t-2)x' + x = 0$,

*b)* $tx'' - (4t+1)x' + 2(2t+1)x = 0$,

*c)* $tx'' - 2x' + tx = 0$,

*d)* $tx'' + (4t-2)x' + (13t-4)x = 0$.

**Bài tập 4.12 (Cuối kì, K62).** *Giải bài toán giá trị ban đầu bằng phương pháp sử dụng phép biến đổi Laplace*

*a)* $ty'' - ty' + y = 2, y(0) = 2, y'(0) = -4$,

*b)* $ty'' - ty' + y = 1, y(0) = 1, y'(0) = -4$.

| $f(t)$ | $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s)$ | $F(s)$ | $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(t)$ |
|---|---|---|---|
| $e^{at}f(t)$ | $F(s-a)$ | $F(s-a)$ | $e^{at}\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(t)$ |
| $u(t-a)f(t)$ | $e^{-as}F(s)$ | $e^{-as}F(s)$ | $u(t-a)f(t)$ |
| $t^n f(t)$ | $(-1)^n \frac{d^n}{ds^n}F(s)$ | $F(s)$ | $-\frac{1}{t}\mathcal{L}^{-1}\{F'(s)\}(t)$ |
| $(f*g)t$ | $F(s)G(s)$ | $F(s)G(s)$ | $(f*g)(t)$ |
| $\frac{f(t)}{t}$ | $\int_s^\infty F(\tau)d\tau$ | $F(s)$ | $t\mathcal{L}^{-1}\left\{\int_s^\infty F(\tau)d\tau\right\}(t)$ |
| $\int_0^t f(\tau)d\tau$ | $\frac{1}{s}F(s)$ | $\frac{F(s)}{s}$ | $\int_0^t \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(\tau)d\tau$ |
| $f^{(n)}(t)$ | $s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$ | | |

Bảng tổng hợp các công thức phép biến đổi Laplace và Laplace ngược

# PHỤ LỤC A

# TIÊU CHUẨN SO SÁNH CHO CHUỖI SỐ BẤT KÌ

Trong hầu hết các sách, tài liệu, bài giảng cho sinh viên đại học, tiêu chuẩn so sánh thường chỉ được phát biểu cho chuỗi số dương. Hardy, thậm chí, trong [2, trang 376] còn viết rằng ". . . there are no comparison tests for convergence of conditionally convergent series." Mục đích của phần phụ lục này là khảo sát một số tiêu chuẩn so sánh cho các chuỗi số với số hạng có dấu bất kì và các vấn đề liên quan.

Trước hết, tiêu chuẩn so sánh cho chuỗi số dương được phát biểu như sau.

**Định lý 0.1 (Định lý so sánh 2).** *Cho hai chuỗi số dương* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *và* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *thỏa mãn*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = c > 0.$$

*Khi đó* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *và* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *có cùng tính chất hội tụ hoặc phân kỳ.*

Điều kiện vô cùng quan trọng trong Định lý trên là $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ và $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ phải là các chuỗi số dương. Nếu điều kiện này không được thỏa mãn thì định lý trên không còn đúng nữa. Chẳng hạn như (cf.[1]), nếu

$$a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} = (-1)^n \left( \frac{1}{\sqrt{n}} + (-1)^n \frac{1}{n} \right), \quad b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}},$$

thì $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$ nhưng chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ hội tụ theo tiêu chuẩn Leibniz, còn chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ phân kì. Như vậy, đây là một ví dụ về hai chuỗi đan dấu, có $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$ nhưng chúng không có cùng tính chất hội tụ hoặc phân kì.

**Ví dụ 0.1.** *Xét sự hội tụ hay phân kì của chuỗi đan dấu sau* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{1+\sqrt{n^3}+\sqrt{n^5}+n^3}$.

[Lời giải sai] Do

- $\frac{n}{1+\sqrt{n^3}+\sqrt{n^5}+n^3} \sim \frac{1}{n^2}$ khi $n \to \infty$,
- chuỗi $(-1)^n \frac{1}{n^2}$ hội tụ theo tiêu chuẩn Leibniz

nên chuỗi đã cho cũng hội tụ. Trong tình huống này, có lẽ việc kiểm tra các điều kiện của tiêu chuẩn Leibniz đối với chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{1+\sqrt{n^3}+\sqrt{n^5}+n^3}$ (đặc biệt là việc kiểm tra $\left\{\frac{n}{1+\sqrt{n^3}+\sqrt{n^5}+n^3}\right\}$ là một dãy số giảm) là khó hơn nhiều so với chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2}$ nên nhiều người đã đưa ra lời giải như vậy. Tuy nhiên, đây lại là một lập luận sai. Muốn sử dụng tiêu chuẩn Leibniz ở đây, chúng ta không có cách nào khác ngoài việc chứng minh trực tiếp $\left\{\frac{n}{1+\sqrt{n^3}+\sqrt{n^5}+n^3}\right\}$ là một dãy số giảm.

Vậy liệu có tiêu chuẩn so sánh cho chuỗi với số hạng có dấu bất kì hay không? Sau đây là một tiêu chuẩn so sánh, được đề xuất bởi Nguyen S.Hoang trong [3].

**Định lý 0.2.** *Cho $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ và $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ là các chuỗi số thỏa mãn:*

*a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = c \in \mathbb{R}$,*

*b) Dãy số $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}_{n=n_0}^{+\infty}$ là đơn điệu (nghĩa là không tăng hoặc là không giảm) với $n_0 \geq 1$ nào đó.*

*Khi đó,*

*i) Nếu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ hội tụ thì $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ cũng hội tụ.*

*ii) Nếu $c \neq 0$ thì các chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ và $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ hoặc là cùng phân kì, hoặc là cùng bán hội tụ, hoặc là cùng hội tụ tuyệt đối.*

**Chú ý 1.1.** *a) Điều kiện dãy số $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}_{n=n_0}^{+\infty}$ là đơn điệu với $n_0 \geq 1$ nào đó là cần thiết. Chẳng hạn như hai dãy số sau đây đã được biết là không có cùng tính chất hội tụ*

$$a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} = (-1)^n \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + (-1)^n \frac{1}{n}\right), \quad b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.$$

*Trong tình huống này, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ nên $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}_{n=n_0}^{+\infty}$ không là dãy số đơn điệu với mọi $n_0 \geq 1$.*

*b) Kết quả của Định lý trên tuy không thực sự đặc sắc lắm, vì nó chỉ là hệ quả của Định lý Abel. Tuy nhiên, nó được phát biểu dưới dạng tiêu chuẩn so sánh nên thuận tiện cho việc kiểm tra tính hội tụ của chuỗi số.*

**Ví dụ 0.1.** *Quay trở lại ví dụ đã nêu trên, muốn sử dụng tiêu chuẩn so sánh giữa hai chuỗi*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2} \text{ và } \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{1+\sqrt{n^3}+\sqrt{n^5}+n^3}$$

*chúng ta cần phải chứng minh thêm*

$$f(n) := \frac{1}{n^2} : \frac{n}{1+\sqrt{n^3}+\sqrt{n^5}+n^3} = \frac{1+\sqrt{n^3}+\sqrt{n^5}+n^3}{n^3} = \frac{1}{n^3}+\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}+\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}+1$$

*là một dãy số đơn điệu. Chứng minh điều này không khó, vì* $\left\{\frac{1}{n^3}\right\}, \left\{\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right\}, \left\{\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}\right\}$ *đều là các dãy số đơn điệu giảm.*

Một cách tổng quát ta có kết quả sau.

**Ví dụ 0.2 (Xem [3]).** *Chứng minh rằng chuỗi số*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^\alpha}f(n)$$

*i) là bán hội tụ nếu* $0 < \alpha \leq 1$*,*

*ii) là hội tụ tuyệt đối nếu* $\alpha > 1$

*với mọi* $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ *là hàm phân thức hữu tỉ sao cho* $\lim_{x\to\infty} f(x) = c \neq 0$.

*Chứng minh.* Ta có

$$f'(x) = \frac{P'(x)Q(x) - P(x)Q'(x)}{Q^2(x)}.$$

Do $P'(x)Q(x) - P(x)Q'(x)$ là một đa thức có bậc hữu hạn, nên nó chỉ có hữu hạn nghiệm. Điều đó có nghĩa là với $x$ đủ lớn thì $f'(x)$ không đổi dấu nữa. Hệ quả là $\{f(n)\}_{n=n_0}^{+\infty}$ là một dãy số đơn điệu với $n_0 \geq 1$ nào đó. Áp dụng tiêu chuẩn so sánh mở rộng với hai chuỗi số

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^\alpha}f(n) \text{ và } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^\alpha}$$

ta có điều phải chứng minh. ■

**Bài tập 0.1.** Chứng minh rằng chuỗi số

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \sin\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)f(n), \quad 0 < \alpha < 1$$

là bán hội tụ với mọi $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ là hàm phân thức hữu tỉ sao cho $\lim_{x\to\infty} f(x) = c \neq 0$.

Ngoài ra, tiêu chuẩn so sánh có thể được mở rộng theo hướng sau đây.

**Định lý 0.3 (Tiêu chuẩn kẹp).** *Cho $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ là các chuỗi số thỏa mãn*

$$a_n \leq b_n \leq c_n \text{ với mọi } n \geq n_0 \text{ nào đó}.$$

*Khi đó*

*i) Nếu các chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ và $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ là hội tụ thì chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ cũng hội tụ.*

*ii) Nếu chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ phân kì và có tổng $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$ thì chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ cũng phân kì và có tổng $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = +\infty$.*

*iii) Nếu chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ phân kì và có tổng $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n = -\infty$ thì chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ cũng phân kì và có tổng $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = -\infty$.*

**Ví dụ 0.1.** *(Xem [4, Example 1, p.206]) Xét sự hội tụ hay phân kì của chuỗi đan dấu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, ở đó*

$$b_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\gamma}\right)$$

*phụ thuộc vào tham số $\gamma > 0$.*

[Lời giải] Thông thường, khi gặp chuỗi đan dấu ta thường nghĩa đến tiêu chuẩn Leibniz, nói rằng chuỗi đan dấu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ hội tụ nếu $\{|b_n|\}$ là dãy số giảm và $\lim\limits_{n\to+\infty} |b_n| = 0$. Tuy nhiên, trong ví dụ này, tiêu chuẩn Leibniz chỉ áp dụng được nếu $\gamma \geq 1$. Thật vậy,

- Nếu $n$ chẵn,

$$\left|\ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\gamma}\right)\right| = \ln\left(1 + \frac{1}{n^\gamma}\right) = \ln\left(1 + \frac{2}{2n^\gamma - 1 + (-1)^n}\right)$$

- Nếu $n$ lẻ,

$$\left|\ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\gamma}\right)\right| = -\ln\left(1 - \frac{1}{n^\gamma}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{n^\gamma - 1}\right) = \ln\left(1 + \frac{2}{2n^\gamma - 1 + (-1)^n}\right)$$

Do đó, $|b_n| = \ln\left(1 + \frac{2}{2n^\gamma - 1 + (-1)^n}\right)$ với mọi $n$ và

$$|b_n| \geq |b_{n+1}| \Leftrightarrow n^\gamma \leq (n+1)^\gamma + (-1)^{n+1}. \tag{1.1}$$

Ta lại xét các trường hợp sau.

- Nếu $\gamma > 1$, thì bất đẳng thức (1.1) luôn thỏa mãn với $n \geq n_0$ nào đó, vì

$$\lim_{n\to+\infty}[(n+1)^\gamma - n^\gamma] = +\infty.$$

  Như vậy, nếu $\gamma > 1$ thì theo tiêu chuẩn Leibniz, chuỗi đã cho hội tụ. Thậm chí, nó còn hội tụ tuyệt đối. Thật vậy, từ bất đẳng thức $|\ln(1+x)| \leq 2|x|$ với $x$ đủ nhỏ ta có

$$0 < \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\gamma}\right) < \frac{2}{n^\gamma}.$$

  Theo tiêu chuẩn so sánh thông thường, chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ là hội tụ tuyệt đối.

- Nếu $\gamma = 1$ thì bất đẳng thức (1.1) trở thành

$$n \leq n + 1 + (-1)^{n+1} \Leftrightarrow -1 \leq (-1)^{n+1}$$

  và nó luôn đúng với mọi $n$. Theo tiêu chuẩn Leibniz, chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ hội tụ.

- Nếu $0 < \gamma < 1$, bất đẳng thức (1.1) không còn đúng khi $n$ chẵn và đủ lớn, vì nó trở thành

$$n^\gamma \leq (n+1)^\gamma - 1 \Leftrightarrow 1 \leq (n+1)^\gamma - n^\gamma.$$

  Tuy nhiên,

$$\lim_{n\to+\infty}[(n+1)^\gamma - n^\gamma] = \lim_{n\to+\infty} n^\gamma \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^\gamma - 1\right] = \lim_{n\to+\infty} n^\gamma.\frac{\gamma}{n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^{1-\gamma}} = 0.$$

Tóm lại, không thể sử dụng tiêu chuẩn Leibniz để xét sự hội tụ của chuỗi đan dấu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ trong trường hợp $0 < \gamma < 1$. Vậy phải xử lý thế nào trong trường hợp này? Từ khai triển Maclaurin của hàm số $\ln(1+x)$ ta có

$$x - \frac{3x^2}{4} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{4}$$

với $x$ trong một lân cận đủ nhỏ của $0$. Vì vậy, với $x = \frac{(-1)^n}{n^\gamma}$ ta có

$$\underbrace{\frac{(-1)^n}{n^\gamma} - \frac{3}{4n^{2\gamma}}}_{a_n} \leq \underbrace{\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^\gamma}\right)}_{b_n} \leq \underbrace{\frac{(-1)^n}{n^\gamma} - \frac{1}{4n^{2\gamma}}}_{c_n}$$

với $n$ đủ lớn.

- Nếu $\frac{1}{2} < \gamma < 1$ thì các chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ và $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ đều hội tụ nên chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ cũng hội tụ.

- Nếu $0 < \gamma \leq \frac{1}{2}$ thì do chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ phân kì và có tổng $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n = -\infty$ nên chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ cũng phân kì và có tổng $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = -\infty$.

**Định lý 0.4.** *(Xem [4, p.207]) Cho $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ là một chuỗi số hội tụ và $f(x)$ là một hàm số nhận giá trị thực sao cho trong lân cận của $0$,*

$$f(x) = \alpha x + \beta x^{2k} + o(x^{2k}), \quad \beta \neq 0, k \in \mathbb{N}.$$

*Khi đó chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(a_n)$ hội tụ khi và chỉ khi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n)^{2k}$ hội tụ.*

**Chú ý 1.1.** *Trường hợp khai triển Maclaurin của hàm số $f(x)$ kết thúc với lũy thừa lẻ của $x$, nghĩa là,*

$$f(x) = \alpha x + \beta x^{2k+1} + o(x^{2k+1}), \quad \beta \neq 0, k \in \mathbb{N},$$

*thì kết quả của định lý trên không còn đúng. Cụ thể,*

*i)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n)^{2k+1}$ *hội tụ* $\not\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} f(a_n)$ *hội tụ.*

*ii)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(a_n)$ *hội tụ* $\not\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n)^{2k+1}$ *hội tụ.*

*iii)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(a_n)$ *hội tụ* $\not\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|^{2k+1}$ *hội tụ.*

**Ví dụ 0.1.** *(Phản ví dụ cho Chú ý 1.1 phần i), Xem [4, Example 4, p.209])*
*Xét chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, ở đó $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt[4]{n}}$ và $f(x) = x + x^3 + x^4$. Khi đó, $k = 1$ và*

- *chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n)^{2k+1} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[4]{n^3}}$ hội tụ theo tiêu chuẩn Leibniz, nhưng*

- *Chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(a_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[4]{n}} + \frac{(-1)^n}{\sqrt[4]{n^3}} + \frac{(-1)^n}{n}$ là phân kì.*

**Ví dụ 0.2.** *(Phản ví dụ cho Chú ý 1.1 phần ii), Xem [4, Example 5, p.209])*
*Xét chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, ở đó*

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k}{\sqrt[4]{2k}} + \frac{1}{\sqrt[3]{2k}}, \quad a_{2k+1} = -\frac{1}{\sqrt[3]{2k}},$$

*và hàm số $f(x) = x + x^3 - x^4$. Khi đó, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ và $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(a_n)$ đều hội tụ, nhưng $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^3$ và $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^4$ phân kì.*

**Ví dụ 0.3.** *(Phản ví dụ cho Chú ý 1.1 phần iii), Xem [4, Example 6, p.210])*
*Xét chuỗi số* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$*, ở đó* $a_n = \frac{(-1)^n}{\ln n}$ *và hàm số*

$$f(x) = \sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

*Khi đó* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{(-1)^n}{\ln n}\right)$ *hội tụ theo tiêu chuẩn Leibniz, nhưng* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{\ln n}\right|^3 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^3 n}$ *là phân kì.*

Tuy rằng Định lý 0.4 không thể mở rộng cho trường hợp hàm $f(x)$ có khai triển Maclaurin kết thúc với lũy thừa lẻ của $x$, nhưng ta vẫn có kết quả sau đây.

**Định lý 0.5.** *(Xem [4, p.208]) Cho* $f(x)$ *là một hàm số nhận giá trị thực sao cho trong lân cận của* $0$*,*

$$f(x) = \alpha x + \beta x^{2k+1} + o(x^{2k+1}), \quad \beta \neq 0, k \in \mathbb{N}.$$

*Khi đó, nếu* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|^{2k+1}$ *hội tụ thì* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(a_n)$ *hội tụ.*

Như vậy, Định lý 0.4 và Định lý 0.5 cho chúng ta điều kiện đủ để kiểm tra sự hội tụ của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(a_n)$ dựa vào khai triển Maclaurin của hàm số $f(x)$.

**Ví dụ 0.1.** *(Xem [4, p.208]) Xét sự hội tụ của chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{(-1)^n}{\sqrt[4]{n}}$*.*

Trong tình huống này, nếu

- chỉ khai triển Maclaurin hàm $f(x) = \arctan x$ đến bậc ba,

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3),$$

  thì chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|^{2k+1} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n^3}}$ là phân kì, vì vậy chúng ta không thể kết luận gì về sự hội tụ của chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \arctan\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt[4]{n}}\right)$.

- khai triển Maclaurin hàm số $f(X) = \arctan x$ đến bậc năm,

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + o(x^5),$$

  thì do chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|^{2k+1} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n^5}}$ là hội tụ, nên chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \arctan\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt[4]{n}}\right)$ cũng hội tụ.

**Ví dụ 0.2.** *Xét sự hội tụ của chuỗi số* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$*, ở đó*

$$b_n = e^{\frac{\sin \alpha n}{n^\gamma}} - 1, \quad \gamma > 0.$$

Nếu $\alpha = k\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$ nào đó thì chuỗi đã cho có tổng bằng $0$. Nếu $\alpha \neq k\pi$ với mọi $k \in \mathbb{Z}$ thì xét khai triển Maclaurin của $e^x - 1$:

$$e^x - 1 = x + \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

Ta có

- Chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \alpha n}{n^\gamma}$ là hội tụ với mọi $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}, \gamma > 0$ theo tiêu chuẩn Dirichlet.
- Chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \alpha n}{n^{2\gamma}}$ hội tụ nếu và chỉ nếu $\gamma > \frac{1}{2}$.

Do đó, theo Định lý 0.1 và Định lý 0.4 ta có

- chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ hội tụ nếu $\gamma > \frac{1}{2}$,
- Chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ phân kì và có tổng $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = +\infty$ nếu $0 < \gamma \leq \frac{1}{2}$.

# PHỤ LỤC B

# MỘT SỐ TIÊU CHUẨN HỘI TỤ HAY - ĐỘC ĐÁO - DỄ CHỨNG MINH

**Định lý 0.1 (Tiêu chuẩn so sánh kết hợp d'Alambert).** *Cho $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ và $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ là các chuỗi số dương và thỏa mãn $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}, \forall n \geq K$ nào đó. Khi đó*

*a) Nếu chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ hội tụ thì chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ cũng hội tụ.*

*b) Nếu chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ phân kì thì chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ cũng phân kì.*

*Chứng minh.* a) Từ bất đẳng thức $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$ lấy logarit cơ số $e$ hai vế:

$$\ln a_{n+1} - \ln a_n \leq \ln b_{n+1} - \ln b_n, \forall n \geq K.$$

Lấy tổng $n$ chạy từ $K$ đến $N$ ta được

$$\sum_{n=K}^{N} (\ln a_{n+1} - \ln a_n) \leq \sum_{n=K}^{N} (\ln b_{n+1} - \ln b_n),$$

hay

$$\begin{aligned} &\ln a_{N+1} - \ln a_K \leq \ln b_{N+1} - \ln b_K \\ \Leftrightarrow &\ln a_{N+1} \leq \ln \left( \frac{a_K}{b_K} b_{N+1} \right) \\ \Leftrightarrow &a_{N+1} \leq \frac{a_K}{b_K} b_{N+1}, \forall N \geq K. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Vì chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ hội tụ , theo tiêu chuẩn so sánh, chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ.

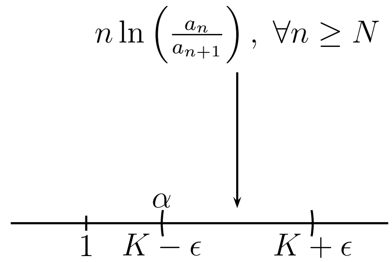
b) Chứng minh tương tự. ■

**Định lý 0.2.** *Cho chuỗi số dương* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *và giả thiết rằng* $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right) = K$. *Chứng minh rằng*

*a) Nếu* $K > 1$ *thì chuỗi hội tụ.*

*b) Nếu* $K < 1$ *thì chuỗi phân kì.*

*Chứng minh.* a) Định lý này cũng được chứng minh một cách *rất đơn giản* chỉ dựa vào định nghĩa của giới hạn. Hình dung rằng $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right) = K$ nghĩa là với mọi $\epsilon > 0$ thì từ một lúc nào đó toàn bộ số hạng của dãy $\left\{n\ln\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)\right\}$ sẽ chui vào trong khoảng $(K-\epsilon, K+\epsilon)$.




Hình 0.2

Nếu $K > 1$ ta chọn số $\alpha = K - \epsilon$ ($\epsilon > 0$) nằm giữa 1 và $K$. Do $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right) = K$, tồn tại số $N$ sao cho

$$n\ln\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right) > \alpha,\ \forall n \geq N.$$

Suy ra

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq e^{-\frac{\alpha}{n}},\ \forall n \geq N.$$

Vì $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e, \forall n$ nên

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq e^{-\frac{\alpha}{n}} \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-\alpha} = \frac{\frac{1}{(n+1)^\alpha}}{\frac{1}{n^\alpha}}.$$

Áp dụng tiêu chuẩn so sánh kết hợp d'Alambert (Định lý 0.1) với hai chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ và $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ với $b_n = \frac{1}{n^\alpha}$ ta có chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ hội tụ ($\alpha > 1$) nên $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ cũng hội tụ.

b) Trường hợp $K = \lim\limits_{n\to+\infty} n\ln\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right) < 1$ ta có

$$n\ln\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right) < 1,\ \forall n \geq N \text{ nào đó}.$$

Suy ra

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq e^{-\frac{1}{n}} > \frac{n-1}{n},\ \forall n \geq N \text{ nào đó } \left(\text{vì } e < \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n\right).$$

Vậy $\{na_{n+1}\}$ là một dãy số tăng kể từ $n = N$ trở đi, nghĩa là

$$na_{n+1} \geq Na_N,\ \forall n \geq N.$$

Suy ra

$$a_{n+1} \geq Na_N.\frac{1}{n},\ \forall n \geq N.$$

Theo tiêu chuẩn so sánh, chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ phân kì. ■

**Định lý 0.3.** *Chứng minh rằng*

*a) Nếu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ và $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n^2$ là các chuỗi số hội tụ thì chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_nb_n$ hội tụ tuyệt đối.*

*b) Áp dụng câu a), chứng minh rằng nếu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ hội tụ thì $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ hội tụ tuyệt đối.*

[Gợi ý]

a) Dựa vào bất đẳng thức $0 \leq |a_nb_n| \leq \frac{1}{2}(a_n^2 + b_n^2)$.

b) Áp dụng câu a) với $b_n = \frac{1}{n^2}$.

# PHỤ LỤC C

# MỘT SỐ TIÊU CHUẨN HỘI TỤ MẠNH HƠN D'ALEMBERT VÀ CAUCHY

## §1. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ VÀ CÁC TIÊU CHUẨN MẠNH HƠN TIÊU CHUẨN D'ALEMBERT

Tiêu chuẩn Kummer sau đây được ông chứng minh vào năm 1835. Đây là một tiêu chuẩn rất mạnh để kiểm tra sự hội tụ của một chuỗi số dương.

**Định lý 1.1 (Định lý Kummer).** *Cho* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *là một chuỗi số dương và* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} d_n$ *là một chuỗi số dương phân kì bất kì nào đó. Giả thiết*

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{d_n}.\frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{1}{d_{n+1}}\right) = K.$$

*Khi đó*

*a) Nếu* $K > 0$ *thì chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *hội tụ.*

*b) Nếu* $K < 0$ *thì chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *phân kì.*

Chọn $d_n = 1$ với mọi $n$ ta có $\sum\limits_{n=1}^{\infty} d_n$ là một chuỗi số dương phân kì. Khi đó

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{d_n}.\frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{1}{d_{n+1}}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = K,$$

do đó

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{K+1}.$$

Định lý Kummer trở thành

**Định lý 1.2 (Tiêu chuẩn d'Alambert).**

*a) Nếu* $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{K+1} < 1$ *(tức* $K > 0$*) thì chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *hội tụ.*

*b) Nếu* $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{K+1} > 1$ *(tức* $K < 0$*) thì chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *phân kì.*

Chọn $d_n = \frac{1}{n}$ ta có $\sum\limits_{n=1}^{\infty} d_n$ là một chuỗi số dương phân kì. Khi đó

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{d_n}.\frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{1}{d_{n+1}}\right) = \lim_{n\to+\infty} \left(n.\frac{a_n}{a_{n+1}} - (n+1)\right) = K.$$

Do đó

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = K + 1.$$

Tiêu chuẩn Kummer trở thành

**Định lý 1.3 (Tiêu chuẩn Raabe).** *Cho chuỗi số dương* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *và giả thiết* $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = R$*. Khi đó*

*a) Nếu* $R > 1$ *(tức* $K > 0$*) thì chuỗi số hội tụ.*

*b) Nếu* $R < 1$ *(tức* $K < 0$*) thì chuỗi số phân kì.*

Chọn $d_n = \frac{1}{n\ln n}$ thì $\sum\limits_{n=1}^{\infty} d_n$ là một chuỗi số dương phân kì. Thay vào tiêu chuẩn Kummer ta có tiêu chuẩn Bertrand sau.

**Định lý 1.4 (Tiêu chuẩn Bertrand).** *Cho chuỗi số dương* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *và giả thiết*

$$\lim_{n\to+\infty} \ln n \left[n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) - 1\right] = B.$$

*Khi đó*

*a) Nếu* $B > 1$ *thì chuỗi số hội tụ.*

*b) Nếu* $B < 1$ *thì chuỗi số phân kì.*

**Chú ý 3.1.** *1. Tiêu chuẩn Raabe mạnh hơn tiêu chuẩn d'Alambert, người ta thường sử dụng tiêu chuẩn Raabe khi tiêu chuẩn d'Alambert không có hiệu quả.*

*2. Tiêu chuẩn Bertrand mạnh hơn tiêu chuẩn Raabe, người ta thường sử dụng tiêu chuẩn Bertrand khi tiêu chuẩn Raabe không có hiệu quả.*

**Ví dụ 1.1.** *[Dùng tiêu chuẩn Raabe] Xét sự hội tụ của chuỗi số* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^n$.

[Lời giải] Ta thấy

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) = \lim_{n\to+\infty} n\left[\frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}-1\right] = \frac{1}{2},$$

vì theo quy tắc L'Hospital

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left[\frac{e}{(1+x)^{\frac{1}{x}}}-1\right] = \frac{1}{2}.$$

Theo tiêu chuẩn Raabe, chuỗi đã cho phân kì. Chú ý rằng trong trường hợp này không dùng tiêu chuẩn d'Alambert hoặc Cauchy được vì

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n} = 1.$$

**Ví dụ 1.2 (Dùng tiêu chuẩn Bertrand).** *Xét sự hội tụ của chuỗi số* $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-\sqrt{n})\ln^2 n}$.

Ta có

$$\lim_{n\to+\infty}\ln n\left[n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)-1\right] = 2-\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 2 > 1.$$

Theo tiêu chuẩn Bertrand, chuỗi số đã cho hội tụ. Chú ý rằng trong trường hợp này không dùng được tiêu chuẩn Raabe vì

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) = 1-\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} = 1.$$

**Ví dụ 1.3.** *Chứng minh rằng nếu dùng tiêu chuẩn Bertrand với chuỗi số* $\sum\limits_{n=2}^{\infty} e^{-\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}\right)}$ *thì tính được*

$$\lim_{n\to+\infty}\ln n\left[n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)-1\right] = 0$$

*nên chuỗi đã cho là phân kì. Tuy nhiên không sử dụng tiêu chuẩn Raabe trong trường hợp này được vì*

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) = \lim_{n\to+\infty} n\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right) = 1.$$

## §2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$ VÀ CÁC TIÊU CHUẨN MẠNH HƠN TIÊU CHUẨN CAUCHY

**Định lý 2.1 (Tiêu chuẩn A).** *Cho chuỗi số dương* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *và giả thiết*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\ln n}(1 - \sqrt[n]{a_n}) = A.$$

*Khi đó,*

1. *Nếu* $A > 1$ *thì chuỗi hội tụ.*

2. *Nếu* $A < 1$ *thì chuỗi phân kì.*

**Định lý 2.2 (Tiêu chuẩn B).** *Cho chuỗi số dương* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *và giả thiết*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{\ln(\ln n)} \left[\frac{n}{\ln n}(1 - \sqrt[n]{a_n}) - 1\right] = B.$$

*Khi đó,*

1. *Nếu* $B > 1$ *thì chuỗi hội tụ.*

2. *Nếu* $B < 1$ *thì chuỗi phân kì.*

# TÀI LIỆU THAM KHẢO


[1] J.M.Ash, The Limit Comparison Test Needs Positivity, *Math. Mag.,* **85** (2012), 374–375.

[2] G. H. Hardy, *A Course of Pure Mathematics*, 10th ed., Cambridge Univ. Press, London, 1960.

[3] Nguyen S.Hoang, A Limit Comparison Test for General Series, *The American Mathematical Monthly,* **122**, No. 9 (2015), 893–896.

[4] M. Longo and V. Valori, The Comparison Test-Not Just for Nonnegative Series, *Mathematics Magazine,* **79**, No. 3 (2006), 205–210.

[5] James Stewart, Calculus, Early Transcendentals, 7th. ed. Brooks Cole Cengage Learning, 2012.