

**BÀI TẬP GIẢI TÍCH III (Phương trình vi phân và chuỗi). Nhóm 1: Mã MI1131.**

**Áp dụng từ 06-2018**

Kiểm tra giữa kì: Tự luận

Kiểm tra cuối kì: Tự luận

**I) CHUỖI**

1. Tính tổng của các chuỗi số sau:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} \quad \text{b) } \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \dots + \frac{9}{10^n} + \dots \quad \text{c) } \sum_{n=1}^{+\infty} \arctan \left( \frac{1}{1+n+n^2} \right)$$

2. Xét sự hội tụ, phân kì của các chuỗi số sau:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n+3}{4n+5} \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{+\infty} \cos \left( \frac{1}{n^2} \right) \quad \text{c) } \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{n+1}{n+2} \right)^n$$

$$\text{d) } \sum_{n=1}^{+\infty} \sin \left( \frac{1}{n^2} \right) \quad \text{e) } \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt[n]{e} - 1 \quad \text{f) } \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2}{\ln n}$$

$$\text{g) } \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^2} \quad \text{h) } \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n} \right) \quad \text{i) } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{10}}{2^n}$$

$$\text{j) } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(3n+1)!}{n^2 8^n} \quad \text{k) } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n (n!)^2}{(2n)!} \quad \text{l) } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{5^n} \left( 1 - \frac{1}{n} \right)^{n^2}$$

$$\text{m) } \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{n+1}{n+2} \right)^{n^2} \quad \text{l*) } \sum_{n=1}^{+\infty} \sin \left[ \pi \sqrt{2 + \sqrt{3}}^n \right] \quad \text{o) } \sum_{n=2}^{+\infty} \left( \cos \frac{1}{n} \right)^{n^3}$$

$$\text{p) } \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \ln^2 n} \quad \text{q) } \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\ln n!} \quad \text{r) } \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{e^n \cdot n!}{n^n}$$

$$\text{s) } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n^2} \quad \text{t) } \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2 + 1} \quad \text{u) } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n} \sin \frac{\pi n}{2}$$

$$\text{v) } \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n} \quad \text{w) } \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^2 + \sqrt[3]{(-1)^n n^4}}} \quad \text{x) } \sum_{n=1}^{+\infty} \left( n^{\frac{1}{n^2+1}} - 1 \right)$$

$$\text{y) } \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\ln^2 n} \cos \frac{\pi n^2}{n+1} \quad \text{z) } \sum_{n=5}^{+\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln \ln n}} \quad \text{z') } \sum_{n=1}^{+\infty} \sin \pi \sqrt{n^2 + 1}$$

3. Tìm miền hội tụ của các chuỗi hàm số sau:

a)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{x^2 + 1}^n$

b)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{e^{nx}}$

c)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}$

d)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x^n + 1}$

e)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{x^{2n} + 1}$

f)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^x + (-1)^n}{n}$

g)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(x + \frac{1}{n}\right)^n$

h)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x-e}} \ln^n \left(x + \frac{1}{n}\right)$

i)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(x^n + \frac{1}{2^n x^n}\right)$

j)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+2)x^n}{n^2 + 1}$

k)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^n$

l)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n+1}{2n+3}\right)^n x^n$

m)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx^{2n+3}}{2^n + 1}$

n)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$

o)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{2^n + 3^n}$

p)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n!)^3}{(3n)!} x^n$

q)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n^2}}{n^3}$

r)  $\sum_{n=1}^{+\infty} (\sin n)x^n$

4. Xét sự hội tụ đều của chuỗi hàm số trên các tập tương ứng:

a)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{(x^2 + 1)^n}, x \in \mathbb{R}$

b)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^n, x \in [-1;1]$

c)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2 + x^2}, x \in \mathbb{R}$

d)  $\sum_{n=1}^{+\infty} (1-x)x^n, x \in (0;1]$

e)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}, x \in \mathbb{R}$

f)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n + x^2}, x \in \mathbb{R}$

5. Tính tổng của các chuỗi số, chuỗi hàm số sau:

a)  $\sum_{n=1}^{+\infty} nx^n, x \in (-1;1)$

b)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)3^n}$

c)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}, x \in (-1;1)$

d)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{4n-3}}{4n-3}, x \in (-1;1)$

e)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!!}$

f)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2n+1}{n^2 + n}\right) x^n, x \in (-1;1)$

g)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!}, x \in \mathbb{R}$

h)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3n-2}$

i)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx^{n+1}}{n+1}, x \in (-1;1)$

6. Khai triển các hàm số sau thành chuỗi Maclaurin:

$$\text{a) } y = \frac{2x + 4}{x^2 - 3x + 2}$$

$$\text{b) } y = x \sin^2 x$$

$$\text{c) } y = \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}}$$

$$\text{d) } y = \frac{1}{x^2 + x + 1}$$

$$\text{e) } y = \ln(1 + x - 2x^2)$$

$$\text{f) } y = \arcsin x$$

7. Khai triển các hàm số sau thành chuỗi Taylor (trong lân cận điểm  $x_0$  tương ứng):

$$\text{a) } y = \frac{1}{2x + 3}, x_0 = 4$$

$$\text{b) } y = \sin \frac{\pi x}{3}, x_0 = 1$$

$$\text{c) } y = \sqrt{x}, x_0 = 4$$

8. Khai triển các hàm số sau thành chuỗi Fourier:

$$\text{a) } y = x, x \in [-\pi; \pi]$$

$$\text{b) } y = |x|, x \in [-\pi; \pi]$$

$$\text{c) } y = x^2, x \in [-\pi; \pi]$$

$$\text{d) } y = 10 - x, x \in (5; 15)$$

$$\text{e) } y = |\sin x|$$

$$\text{f) } y = x(\pi - x), x \in (0; \pi)$$

## II) PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

9. Giải các phương trình vi phân sau:

$$\text{a) } y' = 1 + x + y + xy$$

$$\text{b) } y' = (x + y)^2$$

$$\text{c) } 2y(x^2 + 4)dy = (y^2 + 1)dx$$

$$\text{d) } y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{y} + 1$$

$$\text{e) } xy' = x \sin \frac{y}{x} + y$$

$$\text{f) } y' = \frac{x + y - 2}{x - y + 4}$$

$$\text{g) } y' - \frac{4}{x}y = 4x^7$$

$$\text{h) } (x^2 + 1)y' + xy = 1$$

$$\text{i) } (2xy + 3)dy = y^2 dx$$

$$\text{j) } y' + \frac{y}{x} = x^2 y^4, y(1) = 2$$

$$\text{k) } (x^2 y^2 - x)dy = y dx$$

$$\text{l) } 3xy^2 y' - y^3 = x, y(1) = 3.$$

$$\text{m) } (x^2 + y)dx = (2y - x)dy$$

$$\text{n) } e^y dx = (xe^y - 2y)dy$$

$$\text{o) } (2xy^2 - 3y^3)dx = (3xy^2 - y)dy$$

$$\text{p) } y = xy' + y' - y' \ln y'$$

10. Giải các phương trình vi phân sau:

$$\text{a) } (1 - x^2)y'' - xy' = 2, \\ y(0) = 0, y'(0) = 0.$$

$$\text{b) } (1 + x)y'' + x y'^2 = y', \\ y(0) = 1, y'(0) = 2.$$

$$\text{c) } 2yy' = y'^2 + 1$$

$$\text{d) } y'' - \frac{2xy'}{x^2 + 1} + \frac{2y}{x^2 + 1} = 0, (y_1 = x)$$

$$\text{e) } y'' - 3y' + 2y = 0$$

$$\text{f) } y'' - 2y' + y = 0$$

g)  $y'' - 4y' + 13y = 0$

h)  $y'' - y = \frac{e^x}{e^x + 1}$

i)  $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$

j)  $y'' - 4y' + 3y = (15x + 37)e^{-2x}$

k)  $y'' - y = 4x + 1 e^x$ .

l)  $y'' - 2y' + y = (12x + 4)e^x$

m)  $y'' + 2y' + 2y = 8 \cos x - \sin x$ .

n)  $y'' + 3y' - 4y = 200 \sin^2 x$ .

o)  $y'' + y = 2 \cos x \cos 2x$

p)  $x^2 y'' - 3xy' + 4y = x^3, y(1) = 1, y'(1) = 2$

q)  $y'' - \frac{y'}{x} + \frac{y}{x^2} = \frac{2}{x}$

r)  $(2x - x^2)y'' + 2(x - 1)y' - 2y = -2$  biết nó có hai nghiệm riêng  $y_1 = 1, y_2 = x$ .

s)  $\frac{y''}{y'^3} + \frac{2}{y'} - x + y = e^y \cos y,$   
(coi  $x = x(y)$ )

t)  $(x^2 + 1)y'' + 2xy' + \frac{4y}{x^2 + 1} = \frac{2x}{(x^2 + 1)^2}$

Với phép đổi biến  $x = \tan t, (|t| < \frac{\pi}{2})$

11. Giải các hệ phương trình vi phân sau:

a)  $\begin{cases} \frac{dy}{dx} = 5y + 4z \\ \frac{dz}{dx} = 4y + 5z \end{cases}$

b)  $\begin{cases} \frac{dy}{dx} = y + 5z \\ \frac{dz}{dx} = -y - 3z \end{cases}$

c)  $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{y}{x - y} \\ \frac{dy}{dt} = \frac{x}{x - y} \end{cases}$

d)  $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -x + \frac{1}{\cos t} \end{cases}$

### III) PHƯƠNG PHÁP TOÁN TỬ LAPLACE

12. Sử dụng định nghĩa, tìm trực tiếp biến đổi Laplace của các hàm số sau:

a)  $f(t) = t$    b)  $f(t) = e^{3t+1}$    c)  $f(t) = \sinh(kt)$    d)  $f(t) = \sin^2 t$

13. Tìm biến đổi Laplace của các hàm số sau:

a)  $f(t) = \sqrt{t} + 3t$

b)  $f(t) = t - 2e^{3t}$

c)  $f(t) = 1 + \cosh(5t)$

d)  $f(t) = \cos^2(2t)$

e)  $f(t) = (t + 1)^3$

f)  $f(t) = 2 \sin \left( x + \frac{\pi}{3} \right)$

g)  $f(t) = 2 \sin 3t \cos 5t$

h)  $f(t) = \sinh^2 3t$

i)  $f(t) = t^4 e^{\pi t}$

$$\begin{array}{lll}
\text{j)} f(t) = e^{-2t} \sin 3t & \text{k)} f(t) = e^t \sin \left( t + \frac{\pi}{4} \right) & \text{l)} f(t) = (t + \sin t)^2 \\
\text{m)} f(t) = (t - e^{2t})^2 & \text{n)} f(t) = te^{2t} \sin 3t & \text{o)} f(t) = \frac{\sin t}{t} \\
\text{p)} f(t) = \frac{e^{2t} - 1}{t} & \text{q)} f(t) = \frac{\sinh t}{t} & \text{r)} f(t) = \frac{1 - \cos 2t}{t}
\end{array}$$

14. Tìm biến đổi Laplace ngược của các hàm số sau:

$$\begin{array}{lll}
\text{a)} F(s) = \frac{3}{s^4} & \text{b)} F(s) = \frac{1}{s} - \frac{2}{s^{\frac{5}{2}}} & \text{c)} F(s) = \frac{3}{s-4} \\
\text{d)} F(s) = \frac{5-3s}{s^2+9} & \text{e)} F(s) = \frac{10s-3}{25-s^2} & \text{f)} F(s) = \frac{2e^{-3s}}{s} \\
\text{g)} F(s) = \frac{1}{s^2-3s} & \text{h)} F(s) = \frac{1}{s(s^2+4)} & \text{i)} F(s) = \frac{1}{s^2(s^2+1)} \\
\text{j)} F(s) = \frac{1}{s^2(s^2-1)} & \text{k)} F(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)} & \text{l)} F(s) = \frac{3}{2s-4} \\
\text{m)} F(s) = \frac{1}{s^2+4s+4} & \text{n)} F(s) = \frac{3s+5}{s^2-6s+25} & \text{o)} F(s) = \frac{1}{s^2-4} \\
\text{p)} F(s) = \frac{5-2s}{s^2+7s+10} & \text{q)} F(s) = \frac{1}{s^3-5s^2} & \text{r)} F(s) = \frac{1}{s^3-1} \\
\text{s)} F(s) = \frac{1}{s^4-16} & \text{t)} F(s) = \frac{s^2-2s}{s^4+5s^2+4} & \text{u)} F(s) = \frac{s^2+3}{(s^2+2s+2)^2} \\
\text{v)} F(s) = \arctan \frac{1}{s} & \text{w)} F(s) = \ln \frac{s^2+1}{s^2+4} & \text{x)} F(s) = \frac{2s}{(s^2-1)^2}
\end{array}$$

15. Giải các phương trình, hệ phương trình vi phân sau với các điều kiện ban đầu:

$$\begin{array}{ll}
\text{a)} \begin{cases} x^{(3)} - x'' - x' + x = e^{2t}, \\ x(0) = x'(0) = x''(0) = 0. \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} x^{(3)} - 6x'' + 11x' - 6x = 0, \\ x(0) = x'(0) = 0, x''(0) = 2. \end{cases} \\
\text{c)} \begin{cases} x^{(4)} - 16x = 240 \cos t, \\ x(0) = x'(0) = x''(0) = x^{(3)}(0) = 0. \end{cases} & \text{d)} \begin{cases} x^{(4)} + 8x'' + 16x = 0, \\ x(0) = x'(0) = x''(0) = 0, x^{(3)}(0) = 1. \end{cases} \\
\text{e)} \begin{cases} x^{(3)} - 2x' - 4x = e^t, \\ x(0) = x'(0) = x''(0) = 0. \end{cases} & \text{f)} \begin{cases} tx'' + (t-2)x' + x = 0, \\ x(0) = 0. \end{cases}
\end{array}$$

$$g) \quad tx'' - (4t + 1)x' + 2(2t + 1)x = 0, \\ x(0) = 0.$$

$$h) \quad tx'' + (4t - 2)x' + (13t - 4)x = 0, \\ x(0) = 0.$$

$$i) \quad \begin{cases} x' = 2x + y, x(0) = 2 \\ y' = 6x + 3y, y(0) = 3 \end{cases}$$

$$j) \quad \begin{cases} x' + 2y' + x = 0, x(0) = 1 \\ x' - y' + y = 0, y(0) = 3 \end{cases}$$

$$k) \quad \begin{cases} x'' + x' + y' + 2x - y = 0, \\ y'' + x' + y' + 4x - 2y = 0, \\ x(0) = y(0) = 1, \\ x'(0) = y'(0) = 3. \end{cases}$$

$$l) \quad \begin{cases} x'' + 2x - 4y = 0 = 0, \\ y'' - x + 2y = 0, \\ x(0) = y(0) = 0, \\ x'(0) = 1, y'(0) = -1. \end{cases}$$

$$m) \quad x'' + x = f(t), x(0) = x'(0) = 0, \text{ với}$$

$$n) \quad x'' + 4x = f(t), x(0) = x'(0) = 0, \text{ với}$$

$$f(t) = \begin{cases} \cos t, 0 \leq t < 2\pi \\ 0, & t \geq 2\pi. \end{cases}$$

$$f(t) = \begin{cases} 1, 0 \leq t < \pi \\ 0, & t \geq \pi. \end{cases}$$

$$o) \quad x'' + 4x' + 4x = f(t), x(0) = 0,$$

$$p) \quad x'' + 4x' + 5x = f(t), x(0) = 0,$$

$$x'(0) = 0, \text{ với } f(t) = \begin{cases} t, 0 \leq t < 2 \\ 0, & t \geq 2. \end{cases}$$

$$x'(0) = 0, \text{ với } f(t) = \begin{cases} 1, 0 \leq t < 2 \\ 0, & t \geq 2. \end{cases}$$

### NHÓM PHỤ TRÁCH BIÊN SOẠN ĐỀ CƯƠNG

### BỘ MÔN TOÁN CƠ BẢN

### VIỆN TOÁN ỨNG DỤNG VÀ TIN HỌC