

Chủ biên: Nguyễn Văn Công



G T O Á N

[@giáo sư Toán]

Bộ đề thi giữa kỳ môn

Giải tích III

Group thảo luận: CỘNG ĐỒNG SINH VIÊN 2K1

[<https://facebook.com/groups/congphieu>]

Fb:/ giaosuToanVN



ĐỀ 1 ĐỀ THI GIỮA KỲ MÔN GIẢI TÍCH 3– Học kì 20182

Khóa: K63. Nhóm ngành 1. Mã HP: MI1131.

Thời gian: 60 phút.

Chú ý: Thí sinh không được sử dụng tài liệu và giám thị phải ký xác nhận số đề vào bài thi.

Câu 1. (3 điểm) Xét sự hội tụ, phân kì của các chuỗi số sau

a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 + \sqrt{n}}{n^2 + 1}$

b) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{\sqrt{n}}}$

c) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \ln^3 n}$

Câu 2. (2 điểm) Tìm miền hội tụ của các chuỗi hàm số sau

a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^x}{2^n}$

b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2 + 2^n}$

Câu 3. (1 điểm) Khai triển hàm số $f(x) = 2 \sin 2x \cos x$ thành chuỗi Maclaurin.

Câu 4. (3 điểm) Giải các phương trình vi phân sau:

a) $y' = 2xy^2$

b) $y' + y \cos x = \sin 2x$

c) $e^y dx + (9y + 4xe^y) dy = 0, y(1) = 0$

Câu 5. (1 điểm) Tính tổng của chuỗi số $\sum_{n=1}^{+\infty} (n^2 + 2n + 3)(0,5)^n$.

-----HẾT-----

ĐỀ THI GIỮA KÌ MÔN GIẢI TÍCH 3 - Học kì 20182

Nhóm ngành 2, Khóa: 63, Thời gian: 60 phút

Chú ý: Thí sinh không được sử dụng tài liệu và giám thị phải ký xác nhận số đề vào bài thi.

✓ Câu 1. Xét sự hội tụ, phân kì của chuỗi số $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} (3^{\frac{1}{n}} - 1)$.

✓ Câu 2. Xét sự hội tụ, phân kì của chuỗi số $\sum_{n=1}^{+\infty} 2^n \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2}$.

✓ Câu 3. Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm số

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n^2 - 2} \left(\frac{2x-1}{x}\right)^{2n}$$

✓ Câu 4. Khai triển $f(x) = \frac{x}{x+4}$ thành chuỗi Taylor tại $x = 1$.

Câu 5. Giải phương trình vi phân $\sqrt{x+1}dy + y \ln^2 y dx = 0$.

✓ Câu 6. Giải phương trình vi phân $(xy' - 1) \ln x = 2y$.

✓ Câu 7. Giải phương trình vi phân

$3x^2(1+\ln y) \cdot (y^3 + x^3(1+\ln y))dy + 3x^2(1+y \ln y)dx = 0$

$\frac{\partial P}{\partial x} = 3x^2(1+y)$

Câu 8. Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln^2 n}{n^3 + 3n^2 + 1}$.

Câu 9. Khai triển thành chuỗi Fourier hàm

$$f(x) = \begin{cases} -x, & -\pi \leq x < 0 \\ 2x, & 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

tuần hoàn chu kì 2π .

Câu 10. Tính tổng $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{5^n}$.

ĐỀ THI GIỮA KÌ MÔN GIẢI TÍCH 3 - Học kì 20182

Nhóm ngành: 3. Mã môn học: MI1133. Khóa 63. Thời gian: 60 phút

Câu 1. (4,0 điểm) Xét sự hội tụ, phân kỳ của các chuỗi số sau:

(a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{6n-5}{9n+1}$;

(b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{(2n)!} \tan \frac{1}{7^n}$;

(c) $\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{n+3}{n-1} \right)^{n(n+3)}$;

(d) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\ln n + 63}{\sqrt{n^5 + n}}$.

Câu 2. (1,0 điểm) Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm số:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-7)^n}{n5^n}.$$

Câu 3. (1,0 điểm) Tính tổng của chuỗi số: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n+3}{7^n}$.

Câu 4. (1,0 điểm) Khai triển hàm số $f(x) = x^2 \ln(5+x)$ thành chuỗi Maclaurin.

Câu 5. (3,0 điểm) Giải các phương trình vi phân sau:

(a) $xydx + (1+x)dy = 0$;

(b) $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = x$;

(c) $(4xy^2 + y)dx + (4x^2y + x)dy = 0$.

Chú ý: (a) Thí sinh không được sử dụng tài liệu. (b) Giám thị phải ký xác nhận số đề vào bài thi.

ĐỀ 2 ĐỀ THI GIỮA KỲ MÔN GIẢI TÍCH 3 – Học kì 20183

Nhóm 1: Mã học phần MI1131 Thời gian: 60 phút

Chú ý: Thí sinh không được sử dụng tài liệu và giám thi phải ký xác nhận số đề vào bài thi

Câu 1: Xét sự hội tụ của các chuỗi số:

a) [1đ] $\sum_{n=1}^{\infty} \tan \frac{n+1}{2n^3+4}.$

b) [1đ] $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n+1)!}{n^2 3^n}.$

c) [1đ] $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n - (-1)^n}.$

Câu 2: [1đ] Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm số: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{3^n} \left(\frac{x+1}{1-x} \right)^n.$

Câu 3: [1đ] Tính tổng của chuỗi hàm số: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n 3^n}.$

Câu 4: Giải các phương trình vi phân sau:

a) [1đ] $y' = (y + 4x)^2$

b) [1đ] $y' + xy = x^3 y^3$

c) [1đ] $(x - y)ydx = x^2 dy$

Câu 5: [1đ] Tìm p để chuỗi số sau hội tụ: $\sum_{n=2}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{(-1)^n}{n^p} \right).$

Câu 6: [1đ] Khai triển hàm số sau thành chuỗi lũy thừa:

$$y = \frac{1}{1 - x + x^2 - x^3 + x^4}, x \in (-1, 1).$$

-----Hết-----

ĐỀ 2 ĐỀ THI GIỮA KỲ MÔN GIẢI TÍCH 3 – Học kì 20183

Nhóm ngành 2/ K63. Mã HP MI1132. Thời gian: 60 phút

Chú ý: Thí sinh không được sử dụng tài liệu và giám thị phải ký xác nhân số đề vào bài thi

Câu 1 (2 điểm). Xét sự hội tụ, phân kỳ của chuỗi số

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[4]{n^3}}$. b) $\sum_{n=1}^{\infty} (e^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1) \sin^2 \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$.

Câu 2 (2 điểm). Tìm miền hội tụ của các chuỗi hàm

a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n} (x+3)^n$. b) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n \cos x}$.

Câu 3 (3 điểm). Giải các phương trình vi phân

a) $y' = (x-2)(y^2+3)$. b) $y' = \frac{x^2+4y^2}{2xy}$.

c) $y = x(y' - x \cos x)$.

Câu 4 (1 điểm). Khai triển hàm $f(x) = \int_0^{x+1} e^{t^2} dt$ thành chuỗi lũy

thừa của $x+1$.

Câu 5 (1 điểm). Khai triển thành chuỗi Fourier của hàm số tuần hoàn với chu kỳ 2π :

$$f(x) = \begin{cases} -1 & -\pi \leq x < 0 \\ 1 & 0 \leq x < \pi \end{cases}.$$

Câu 6 (1 điểm). Tính tổng $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\pi^{2n-1}}{(2n-1)! 2^{4n-2}}$.

VIỆN TOÁN ỨNG DỤNG VÀ TIN HỌC

ĐỀ 4 ĐỀ THI GIỮA KỲ MÔN GIẢI TÍCH 3 – Học kì 20181

Nhóm ngành 2/ K63. Mã HP M1132. Thời gian: 60 phút

Chú ý: Thí sinh không được sử dụng tài liệu và giám thi phải ký xác nhân số đề vào bài thi

Câu 1 (2 điểm). Xét sự hội tụ, phân kỳ của chuỗi số

a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} \ln n}$.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n} \right)^{n^2}$.

Câu 2 (2 điểm). Tìm miền hội tụ của các chuỗi hàm

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{n^2 - n + 1}$.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{2-x^2}$.

Câu 3 (3 điểm). Giải các phương trình vi phân

a) $y' + \frac{y}{x} = x^3$.

b) $y' = \frac{-x + 2y}{x}, y(1) = 2$.

c) $(1 - ye^{-x})dx + e^{-x}dy = 0$.

Câu 4 (1 điểm). Khai triển hàm $f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$ thành chuỗi lũy thừa của $x - 3$.

Câu 5 (1 điểm). Xét sự hội tụ đều trên \mathbb{R} của chuỗi hàm sau

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{\sqrt[3]{(n+1)^4 + x^4}}$$

Câu 6 (1 điểm). Khai triển thành chuỗi Fourier của hàm số tuần hoàn với chu kỳ 2π : $f(x) = x - 2\pi, \pi < x < 3\pi$.

VIỆN TOÁN ỨNG DỤNG VÀ TIN HỌC

ĐỀ 2 ĐỀ THI GIỮA KỲ MÔN GIẢI TÍCH 3-Học kỳ 20172

Khóa 62. Nhóm ngành 1. MÃ HP: MI1131

Thời gian: 60 phút

Chú ý: Thí sinh không được sử dụng tài liệu và giám thi phải ký xác nhận số đề vào bài thi.

Câu 1(2đ). Xét sự hội tụ, phân kỳ của các chuỗi số

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n^2+1}{(\sqrt{3})^n}$ b) $\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n+1} \ln\left(\frac{n^2+3}{n^2+1}\right)$

Câu 2(1đ). Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(n+1)}{n^2 \cdot 3^n (x+4)^n}$.

Câu 3(1đ). Khai triển $f(x) = \frac{1}{3x+2}$ thành chuỗi Maclaurin.

Câu 4(1đ). Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{4n}}{(n+1)3^n}$.

Câu 5(1đ). Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$.

Câu 6(1đ). Xét sự hội tụ đều của chuỗi hàm số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^2}{n^6+4x^4}$ trên \mathbb{R} .

Câu 7(1đ). Khai triển $f(x) = \frac{1}{(x-1)(x+3)}$ thành chuỗi lũy thừa của $x+2$.

Câu 8(1đ). Cho $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} ne^{nx}$ với $x < 0$. Tính $\int_{-\ln 4}^{-\ln 3} f(x) dx$.

Câu 9(1đ). Tính tổng của chuỗi hàm số $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n^2 x^n$ với $-1 < x < 1$.

$$= x^2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n^2 x^{n-2} =$$

Chú ý: Thí sinh không được sử dụng tài liệu và giám thi phải ký xác nhận số đề vào bài thi.

✓ Câu 1(2đ). Xét sự hội tụ, phân kỳ của các chuỗi số

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln(n+1)}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{n^2 + n - 1}$.

✓ Câu 2(1đ). Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm số $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+3}{3n+2} \right)^n \left(\frac{x+1}{3} \right)^n$.

✓ Câu 3(1đ). Xét sự hội tụ của chuỗi số $\frac{1.2}{3^2} - \frac{2.3}{4^2} + \frac{3.4}{5^2} - \frac{4.5}{6^2} + \dots$

✓ Câu 4(1đ). Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1})}$.

Câu 5(1đ). Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm số $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{3^n + 4^n}$.

Câu 6(1đ). Xét sự hội tụ đều của chuỗi hàm số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{\sin(nx) + 2n^3}$ trên \mathbb{R} .

✓ Câu 7(1đ). Khai triển $f(x) = \ln(x^2 + 4x + 8)$ thành chuỗi lũy thừa của $x + 2$, với $-4 \leq x \leq 0$.

Câu 8(1đ). Khai triển thành chuỗi Maclaurin hàm số

$$f(x) = \int_0^x \sin \sqrt[3]{t^2} dt.$$

Câu 9(1đ). Tính tổng của chuỗi số $S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^n n!}$.

Handwritten notes and calculations on the right side of the page, including a large expression $2 \left(\frac{x}{2} \right)^{2n}$ and other scribbles.

Handwritten notes at the bottom right, including $0 < x < \infty$ and $(a)^n$.

ĐỀ 6 ĐỀ THI GIỮA KỲ MÔN GIẢI TÍCH 3- Học kì 20172

Khóa: K62. Nhóm ngành 3. Mã HP: MI1133.

Thời gian: 60 phút.

Chú ý: *Thí sinh không được sử dụng tài liệu và giám thị phải ký xác nhận số đề vào bài thi.*

Câu 1. (1 điểm) Tính tổng của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{5^n}$.

Câu 2. (3 điểm) Xét sự hội tụ, phân kì của các chuỗi số sau

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{6n^2+1} \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^n (n!)^2}{n^{2^n}} \quad c) \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n} - n\pi\right).$$

Câu 3. (3 điểm) Tìm miền hội tụ của các chuỗi hàm số sau

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 (x+1)^n} \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3x}{(1+9x^2)^n} \quad c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2 + 1}{n^2}.$$

Câu 4. (1 điểm) Tính tổng của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{4^n}$.

Câu 5. (1 điểm) Khai triển hàm số $f(x) = \frac{1}{\sqrt{16-x^2}}$ thành chuỗi Maclaurin.

Câu 6. (1 điểm) Khai triển hàm số $f(x) = \left| \sin\left(\frac{x}{2}\right) \right|$ thành chuỗi Fourier.

ĐỀ 1 ĐỀ THI GIỮA KỲ MÔN GIẢI TÍCH 3 – Học kì 20162

Nhóm ngành/Lớp/Khóa: 61. Thời gian: 60 phút

Chú ý: Thí sinh không được sử dụng tài liệu và giám thị phải ký xác nhận số đề vào bài thi

Câu 1 (3 điểm). Xét sự hội tụ, phân kỳ của chuỗi số

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(2n+1)}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n^2}}{(n+1)^{n^2}}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{\sqrt{n^3+1}}$

Câu 2 (1 điểm). Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1} (x-1)^n$$

Câu 3 (2 điểm). Giải các phương trình vi phân

a) $1 + x + xy'y = 0$ b) $(x + 2y)dx - xdy = 0.$

Câu 4 (1 điểm). Khai triển $f(x) = \ln(1+2x)$ thành chuỗi Maclaurin.

Câu 5 (1 điểm). Khai triển thành chuỗi Fourier hàm

$$f(x) = \begin{cases} 1 & -\pi \leq x < 0 \\ -1 & 0 \leq x < \pi \end{cases}, \quad \text{tuần hoàn chu kỳ } 2\pi.$$

Câu 6 (1 điểm). Tính tổng $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n2^n}.$

Câu 7 (1 điểm). Giải phương trình vi phân $(e^{2x} - y^2)dx + ydy = 0.$

VIỆN TOÁN ỨNG DỤNG VÀ TIN HỌC

ĐỀ 3 ĐỀ THI GIỮA KỲ MÔN GIẢI TÍCH 3 – Học kì 20162

Nhóm ngành/Lớp/Khóa: 61. Thời gian: 60 phút

Chú ý: Thí sinh không được sử dụng tài liệu và giám thị phải ký xác nhận số đề vào bài thi

Câu 1 (3 điểm). Xét sự hội tụ, phân kỳ của chuỗi số

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + \frac{1}{n})$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cos \frac{1}{n}$.

Câu 2 (1 điểm). Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+1} (x-2)^n$$

Câu 3 (2 điểm). Giải các phương trình vi phân

a) $y' - y = e^x$ b) $\frac{y}{x} dx + (y^3 + \ln x) dy = 0$.

Câu 4 (1 điểm). Khai triển $f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$ thành chuỗi Maclaurin

Câu 5 (1 điểm). Khai triển thành chuỗi Fourier hàm

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [-\pi; \pi) \setminus \{0\} \\ 0 & x = 0 \end{cases}, \quad \text{tuần hoàn chu kỳ } 2\pi.$$

Câu 6 (1 điểm). Xét hội tụ đều trên \mathbb{R} của chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{x^2 + n + 2}$.

Câu 7 (1 điểm). Giải phương trình vi phân $y dx + \frac{3 + 2xy}{y} dy = 0$.

Đề 5 ĐỀ THI GIỮA KỲ MÔN GIẢI TÍCH 3 – Học kỳ 20162

Nhóm ngành/Lớp/Khóa: 61. Thời gian: 60 phút

Chú ý: Thí sinh không được sử dụng tài liệu và giám thị phải ký xác nhận số đề vào bài thi

Câu 1. Xét sự hội tụ, phân kỳ của chuỗi số: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{3^n}$.

Câu 2. Giải phương trình vi phân: $y' = \frac{x^2}{(1+2x^3)y}$

Câu 3. Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm số: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x+1)^n}{3n+1}$.

Câu 4. Tìm ba số hạng đầu tiên khác 0 trong khai triển Maclaurin của hàm số $f(x) = 2x \cdot e^{x^2}$.

Câu 5. Giải phương trình vi phân:

$$\cos y \, dx + (2y - x \sin y) \, dy = 0.$$

Câu 6. Sử dụng tiêu chuẩn tích phân, xét sự hội tụ, phân kỳ của chuỗi số: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{-\ln n}}{n}$.

Câu 7. Xét sự hội tụ đều trên $[0; +\infty)$ của chuỗi hàm số: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{-nx}}{4^n}$.

Câu 8. Xét sự hội tụ, phân kỳ của chuỗi số: $\sum_{n=1}^{\infty} \tan\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$.

Câu 9. Tìm miền hội tụ và tính tổng của chuỗi hàm số

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{[1 + (n-1)x][1 + nx]}.$$

Câu 10. Chứng minh rằng phương trình $y' + 2017y = P_{2017}(x)$, trong đó $P_{2017}(x)$ là đa thức bậc 2017 của x , có duy nhất một nghiệm riêng là đa thức.

Câu 1. Xét sự hội tụ, phân kì của các chuỗi số

a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1+\sqrt{n}}{n^2+1}$

Ta có $\forall n \geq 1$; $a_n = \frac{1+\sqrt{n}}{n^2+1} > 0$ nên chuỗi đã cho là chuỗi dương

Khi $n \rightarrow +\infty$; $a_n = \frac{1+\sqrt{n}}{n^2+1} \sim \frac{1}{n^{3/2}}$

Mà chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ Hội tụ ($\alpha = \frac{3}{2} > 1$) nên theo tiêu chuẩn so sánh

\Rightarrow Chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1+\sqrt{n}}{n^2+1}$ Hội tụ

Vậy ...

b) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{\sqrt{n}}}$

Chuỗi đã cho là chuỗi đan dấu với $a_n = \frac{1}{2^{\sqrt{n}}} > 0, \forall n \geq 2$

- Ta có $2^{\sqrt{n}} < 2^{\sqrt{n+1}} \quad \forall n \geq 2$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2^{\sqrt{n}}} > \frac{1}{2^{\sqrt{n+1}}} \Leftrightarrow a_n > a_{n+1}, \forall n \geq 2$

nhên dãy $\{a_n\}$ đơn điệu giảm (1)

- Mặt khác $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^{\sqrt{n}}} = 0$ (2)

Từ (1) và (2) \Rightarrow chuỗi đã cho hội tụ theo tiêu chuẩn Leibnitz

Vậy ...

c) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \cdot \ln^3 n}$

- Với $\forall n \geq 2$ $a_n = \frac{1}{n \cdot \ln^3 n} = f(n) > 0 \quad \forall n \geq 2$, nên chuỗi đã cho là chuỗi dương

- Xét hàm $f(x) = \frac{1}{x \cdot \ln^3 x}$

+ $f(x)$ liên tục, dương và giảm trên $[2; +\infty)$

+ Mặt khác $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \cdot \ln^3 x} dx = \int_2^{+\infty} \frac{d(\ln x)}{\ln^3 x} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\ln^2 x} \Big|_2^{+\infty} = \frac{1}{2 \cdot \ln^2 2}$

Nên theo tiêu chuẩn tích phân \Rightarrow chuỗi $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \cdot \ln^3 n}$ Hội tụ

Vậy ...

Câu 2: Tìm miền hội tụ của các chuỗi hàm

a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^x}{2^n}$

Đặt $u_n(x) = \frac{n^x}{2^n}$. Xét giới hạn $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right|$

$\Leftrightarrow L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \left(\frac{n+1}{n} \right)^x \cdot \frac{2^n}{2^{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \cdot \frac{1}{2} \right] = e^0 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} < 1$

nên theo tiêu chuẩn D'Alembert \Rightarrow chuỗi hội tụ

Vậy miền hội tụ của chuỗi hàm là \mathbb{R}

b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2 + 2^n}$

Đặt $u_n(x) = \frac{x^n}{n^2 + 2^n}$. Xét giới hạn $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right|$

$\Leftrightarrow L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2 + 2^{n+1}} \cdot \frac{n^2 + 2^n}{x^n} \right| = \frac{|x|}{2}$

Chuỗi Hội tụ khi $L < 1 \Leftrightarrow \frac{|x|}{2} < 1 \Leftrightarrow -2 < x < 2$

- Xét tại $x = -2$, chuỗi trở thành $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-2)^n}{n^2 + 2^n}$

Ta có $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-2)^n}{n^2 + 2^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n \neq 0$ nên theo đk cần, chuỗi pki

- Xét tại $x = 2$, chuỗi trở thành $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{n^2 + 2^n}$

Ta có $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n}{n^2 + 2^n} = 1 \neq 0$ nên theo đk cần, chuỗi pki

Vậy Miền hội tụ của chuỗi hàm là $D = (-2; 2)$

Câu 3: Khai triển hàm số $f(x) = 2\sin 2x \cdot \cos x$ thành chuỗi maclaurin

Ta có $f(x) = 2\sin 2x \cdot \cos x = \sin 3x + \sin x$

$\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

$\sin 3x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{(3x)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot 3^{2n+1} \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

$\Rightarrow f(x) = \sin x + \sin 3x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot [1 + 3^{2n+1}] \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

Vậy ...

Câu 4 Giải pt vi phân

a) $y' = 2xy^2$

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{y^2} = 2x dx \Leftrightarrow \int \frac{dy}{y^2} = \int 2x dx$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{y} = x^2 + C$$

Vậy tích phân tổng quát của pt là $-\frac{1}{y} = x^2 + C$

b) $y' + y \cos x = \sin 2x$

$$\Leftrightarrow y = e^{-\int \cos x dx} \cdot \left[C + \int \sin 2x \cdot e^{\int \cos x dx} dx \right]$$

$$= e^{-\sin x} \cdot \left[C + 2 \int \sin x \cdot \cos x \cdot e^{\sin x} dx \right]$$

$$= e^{-\sin x} \cdot \left[C + 2 \left(\sin x \cdot e^{\sin x} - \int \cos x \cdot e^{\sin x} dx \right) \right]$$

$$= e^{-\sin x} \cdot \left[C + 2(\sin x - 1) e^{\sin x} \right]$$

Vậy nghiệm t/q của pt là

$$y = e^{-\sin x} \cdot \left[C + 2(\sin x - 1) e^{\sin x} \right]$$

c) $e^y dx + (9y + 4xe^y) dy = 0$; $y(1) = 0$

$$\text{Đặt } \begin{cases} P(x; y) = e^y \\ Q(x; y) = 9y + 4xe^y \end{cases}$$

$$\text{Ta có } \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{-P} = \frac{e^y - 4e^y}{-e^y} = 3 \Rightarrow \text{hàm số t/lp } \mu(y) = e^{\int 3 dy} = e^{3y}$$

Nhân 2 vế của pt (1) với $\mu(y)$ ta được

$$(1) \Leftrightarrow e^{4y} dx + (9y \cdot e^{3y} + 4x e^{4y}) dy = 0$$

$$\Leftrightarrow d(x \cdot e^{4y} + (3y - 1) e^{3y}) = 0$$

$$\Leftrightarrow x e^{4y} + (3y - 1) e^{3y} = C$$

$$y(1) = 0 \Rightarrow 1 \cdot e^{4 \cdot 0} + (3 \cdot 0 - 1) \cdot e^{3 \cdot 0} = C \Leftrightarrow C = 0$$

Vậy t/lp riêng của pt là $x e^{4y} + (3y - 1) e^{3y} = 0$

Câu 5: Tính tổng $\sum_{n=1}^{+\infty} (n^2 + 2n + 3) \cdot (0.5)^n$

Xét $S = \sum_{n=1}^{+\infty} (n^2 + 2n + 3) \cdot x^n$ với $|x| < 1$

Ta có $S = \sum_{n=1}^{+\infty} (n^2 + 3n + 2) x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} x^n$

- Tính $S_1 = \sum_{n=1}^{+\infty} (n+2) \cdot (n+1) x^n$

$$= \left(\sum_{n=1}^{+\infty} (n+2) x^{n+1} \right)' = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} x^{n+2} \right)''$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x^{n+2} = x^2 \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} x^n = \frac{x^3}{1-x}$$

$$\Rightarrow S_1 = \left(\frac{x^3}{1-x} \right)'' = \left(\frac{x^3 - 1 + 1}{1-x} \right)'' = \left(-x^2 - x - 1 + \frac{1}{1-x} \right)'' = -2 + \frac{2}{(1-x)^3}$$

- Tính $S_2 = \sum_{n=1}^{+\infty} n \cdot x^n = x \cdot \left(\sum_{n=1}^{+\infty} x^n \right)' = x \cdot \left(\frac{x}{1-x} \right)' = \frac{x}{(1-x)^2}$

- Tính $S_3 = \sum_{n=1}^{+\infty} x^n = \frac{x}{1-x}$

$$\Rightarrow S = S_1 - S_2 + S_3 = -2 + \frac{2}{(1-x)^3} - \frac{x}{(1-x)^2} + \frac{x}{1-x}$$

Vậy tổng cần tính là $S(0.5) = -2 + 16 - 2 + 1 = 13$

Giải đề thi giữa kì GT3

Đề 1 - Nhóm 2 - 20182

Người giải

Trần Hoàng Ánh

Page: Giáo sư Toán

Câu 1. Xét sự hội tụ, phân kì của chuỗi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot (3^{\frac{1}{n}} - 1)$$

ta có $\forall n \geq 1; \frac{1}{n} > 0; a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot (3^{\frac{1}{n}} - 1) > 0$

Do đó chuỗi đã cho là chuỗi dương

$$\text{Khi } n \rightarrow +\infty; 3^{\frac{1}{n}} - 1 = e^{\frac{\ln 3}{n}} - 1 \sim \frac{\ln 3}{n}$$

$$\Rightarrow a_n \sim \frac{\ln 3}{n\sqrt{n}}$$

mà chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln 3}{n\sqrt{n}}$ Hội tụ, nên theo test, chuỗi đã cho hội tụ

Vậy...

Câu 2, xét sự hội tụ, phân kì của chuỗi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 2^n \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2}$$

với $\forall n \geq 1; a_n = 2^n \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2} > 0$ nên chuỗi đã cho là chuỗi dương
Xét Giới hạn

$$C = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 \cdot \left[\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}\right]^{-1} = 2 \cdot e^{-1} = \frac{2}{e}$$

Ta có $C < 1$ nên theo tiêu chuẩn Cauchy \Rightarrow chuỗi đã cho hội tụ

Vậy...

Câu 3. Tìm MHT của chuỗi hàm số

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n^2-2} \cdot \left(\frac{2x-1}{x}\right)^{2n}$$

Đặt $X = \left(\frac{2x-1}{x}\right)^2$, chuỗi trở thành $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n^2-2} \cdot X^n$ (1); $\forall x \geq 0$

là chuỗi lũy thừa với $a_n = \frac{n}{n^2-2}$

Xét giới hạn

$$\rho = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{n+1}{(n+1)^2-2} \cdot \frac{n^2-2}{n} \right] = 1$$

\Rightarrow Bk Hới tụ $R=1 \Rightarrow$ khoảng Hới tụ $0 < x < 1$

- Tại $x=1$; (1) trở thành $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n^2-2}$; (*)

chuỗi trên là chuỗi dương, có $a_n = \frac{n}{n^2-2} \sim \frac{1}{n}$ khi $n \rightarrow +\infty$

Mà $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ pki nên chuỗi (*) phân kì

- Tại $x=0$ (1) trở thành $\sum_{n=1}^{+\infty} 0$ Hới tụ

\Rightarrow Miền Hới tụ của chuỗi (1) là $[0; 1)$

Với $\forall x$ $0 \leq x < 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{2x-1}{x}\right)^2 \geq 0 \\ \left(\frac{2x-1}{x}\right)^2 < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2x-1}{x} < 1 \\ \frac{2x-1}{x} > -1 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{3} < x < 1$$

Vậy MHT của chuỗi hàm là $D = (\frac{1}{3}; 1)$

Câu 4: Khai triển $f(x) = \frac{x}{x+4}$ thành chuỗi Taylor tại $x=1$

$$\text{Đặt } t = x-1 \Rightarrow f(x) = g(t) = \frac{t+1}{t+5} = 1 - \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{1+\frac{t}{5}}$$

$$\text{ta có } \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{1+\frac{t}{5}} = \frac{4}{5} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \left(\frac{t}{5}\right)^n$$

Vậy khai triển Taylor cần tìm là

$$f(x) = 1 - \frac{4}{5} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \left(\frac{x-1}{5}\right)^n$$

Câu 5: Giải pt vi phân

$$\sqrt{x+1} dy + y \cdot \ln^2 y dx = 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{y \cdot \ln^2 y} dy = \frac{1}{\sqrt{x+1}} dx \Leftrightarrow -\int \frac{1}{y \ln^2 y} dy = \int \frac{1}{\sqrt{x+1}} dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\ln y} = 2\sqrt{x+1} + C$$

Vậy tích phân tổng quát của pt là $\frac{1}{\ln y} = 2\sqrt{x+1} + C$

Câu 6: Giải pt vi phân:

$$(xy' - 1) \cdot \ln x = 2y$$

$$\Leftrightarrow y' - \frac{2}{x \ln x} y = \frac{1}{x}$$

$$\Leftrightarrow y = e^{\int \frac{2}{x \ln x} dx} \cdot \left[C + \int \frac{1}{x} \cdot e^{-\int \frac{2}{x \ln x} dx} dx \right]$$

$$\Leftrightarrow y = e^{2 \ln(\ln x)} \cdot \left[C + \int \frac{1}{x \cdot \ln^2 x} dx \right]$$

$$\Leftrightarrow y = \ln^2 x \cdot \left[C - \frac{1}{\ln x} \right]$$

Vậy nghiệm t.p của pt là $y = \ln^2 x \cdot \left[C - \frac{1}{\ln x} \right]$

Câu 7: Giải pt vi phân

$$(y^3 + x^3(1 + \ln y))dy + 3x^2(1 + y \ln y)dx = 0$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} P(x; y) = 3x^2(1 + y \ln y) \\ Q(x; y) = y^3 + x^3(1 + \ln y) \end{cases}$$

$$\text{Ta có } \frac{\partial P}{\partial y} = 3x^2(1 + \ln y) = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

nên pt đã cho là pt vp toàn phần

$$\begin{aligned} \Rightarrow u(x; y) &= \int_0^x P(x; y) dx + \int_0^y Q(0; y) dy \\ &= \int_0^x 3x^2(1 + y \ln y) dx + \int_0^y y^3 dy = x^3(1 + y \ln y) + \frac{y^4}{4} \end{aligned}$$

Vậy t.p tổng quát của pt vi phân là

$$x^3(1 + y \ln y) + \frac{y^4}{4} = C$$

Câu 8: Xét sự HT của chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln^2 n}{n^3 + 3n^2 + 1}$

Với $\forall n \geq 1$, $a_n = \frac{\ln^2 n}{n^3 + 3n^2 + 1} > 0$, nên chuỗi đã cho là chuỗi dương

Dễ dàng cm được $\ln x < x \quad \forall x \geq 1$

Áp dụng với $x = \sqrt{n}$; $\forall n \geq 1 \Rightarrow \ln \sqrt{n} < \sqrt{n}$

$$\text{Ta có } a_n = \frac{\ln^2 n}{n^3 + 3n^2 + 1} = \frac{(2 \ln \sqrt{n})^2}{n^3 + 3n^2 + 1} < \frac{(2 \sqrt{n})^2}{n^3 + 3n^2 + 1} < \frac{4n}{n^3} = \frac{4}{n^2}; \quad \forall n \geq 1$$

Mà chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{n^2}$ HTu nên theo tiêu chuẩn so sánh

\Rightarrow chuỗi đã cho hội tụ

Vậy ...

Câu 9. Khai triển Hàm thành chuỗi Fourier

$$f(x) = \begin{cases} -x; & -\pi < x < 0 \\ 2x; & 0 \leq x < \pi \end{cases} \quad \text{tuần hoàn chu kỳ } 2\pi$$

Gọi khai triển Fourier của $f(x)$ là

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

trong đó, a_0, a_n, b_n được xác định

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 x dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 2x dx = \frac{3\pi}{2}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 -x \cos nx dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 2x \cos nx dx \\ &= \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\cos n\pi - 1}{n^2} + \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\cos n\pi - 1}{n^2} = \frac{3 \cdot (\cos n\pi - 1)}{\pi \cdot n^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 -x \sin nx dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 2x \sin nx dx \\ &= \frac{\cos n\pi}{n} + \frac{-2 \cdot \cos n\pi}{n} = -\frac{\cos n\pi}{n} = \frac{(-1)^{n+1}}{n} \end{aligned}$$

Vậy $f(x) = \frac{3\pi}{4} + \frac{6}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos(2n-1)x + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx$

Câu 10: Tính tổng $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{5^n}$

Đặt $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n \cdot x^n \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{5^n} = S\left(\frac{1}{5}\right) ; |x| < 1$

Ta có

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n \cdot x^n = x \sum_{n=1}^{+\infty} n \cdot x^{n-1} = x \cdot \left(\sum_{n=1}^{+\infty} x^n \right)' = x \cdot \left(\frac{x}{1-x} \right)' = \frac{x}{(1-x)^2}$$

Vậy $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{5^n} = S\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{\frac{1}{5}}{\left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{5}{16}$

Câu 1. Xét sự hội tụ, p.k của chuỗi số

a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{6n-5}{9n+1}$

Ta có $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{6n-5}{9n+1} = \frac{2}{3} \neq 0$

Nên theo điều kiện cần \Rightarrow chuỗi đã cho phân kì

Vậy ---

b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{(2n)!} \cdot \tan \frac{1}{7^n}$

Với $\forall n \geq 1$ $0 < \frac{1}{7^n} \leq \frac{1}{7}$; $\Rightarrow \tan \frac{1}{7^n} > 0 \Rightarrow \frac{n!}{(2n)!} \cdot \tan \frac{1}{7^n} > 0$

nên chuỗi đã cho là chuỗi dương

Khi $n \rightarrow +\infty$; $\frac{1}{7^n} \rightarrow 0 \Rightarrow \tan \frac{1}{7^n} \sim \frac{1}{7^n}$

$\Rightarrow a_n = \frac{n!}{(2n)!} \cdot \tan \frac{1}{7^n} \sim \frac{n!}{7^n \cdot (2n)!}$

Xét chuỗi dương $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{7^n \cdot (2n)!}$ (1)

Đặt $u_n = \frac{n!}{7^n \cdot (2n)!}$

Ta có $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!}{7^{n+1} \cdot (2n+2)!} \cdot \frac{7^n \cdot (2n)!}{n!} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{7(2n+2)(2n+1)} = 0 < 1$

nên theo tc ss \Rightarrow chuỗi (1) H.T. \Rightarrow chuỗi đã cho H.T.

Vậy ---

c) $\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{n+3}{n-1} \right)^{n(n+3)}$

ta có : $\forall n \geq 2$ $\frac{n+3}{n-1} = 1 + \frac{4}{n-1} > 1$

$\Rightarrow a_n = \left(\frac{n+3}{n-1} \right)^{n(n+3)}$

xét giới hạn

$C = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{4}{n-1} \right)^{n+2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{n-1}{4}} \right)^{\frac{n-1}{4}} \right]^{\frac{4(n+2)}{n-1}} = e^4 > 1$

nên theo tiêu chuẩn cauchy \Rightarrow chuỗi đã cho hội tụ

Vậy ---

$$d) \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\ln n + 63}{\sqrt{n^5 + n}}$$

Với $\forall n \geq 2$; $a_n = \frac{\ln n + 63}{\sqrt{n^5 + n}} > 0$ nên chuỗi đã cho là chuỗi dương
Để dàng chứng minh mình được $\ln n < n \quad \forall x \geq 2$

$$\Rightarrow \frac{\ln n + 63}{\sqrt{n^5 + n}} < \frac{n + 63}{\sqrt{n^5 + n}}$$

$$\text{Khi } n \rightarrow +\infty \quad \frac{n + 63}{\sqrt{n^5 + n}} \sim \frac{n}{n^{5/2}} = \frac{1}{n^{3/2}}$$

Mà chuỗi $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ H.Tu nên theo tc SS \Rightarrow chuỗi đã cho H.Tu

Vậy ...

Câu 2. Tìm MHT của chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-7)^n}{n \cdot 5^n}$

Đặt $X = x - 7$ chuỗi đã cho trở thành $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n \cdot 5^n} \cdot X^n$ (1)

Chuỗi (1) là chuỗi lũy thừa có $a_n = \frac{1}{n \cdot 5^n} > 0$

Xét giới hạn

$$\rho = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n \cdot 5^n}{(n+1) \cdot 5^{n+1}} = \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow \text{BK Hội tụ của chuỗi (1): } R = \frac{1}{\rho} = 5$$

$$\Rightarrow \text{Khoảng H.Tu } -5 < X < 5$$

- Xét tại $X = -5$ (1) trở thành $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$; H.Tu theo Leibnitz

- Xét tại $X = 5$ (1) trở thành $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$; PKI

Như vậy MHTu của chuỗi đã cho là

$$-5 \leq x - 7 < 5 \Leftrightarrow 2 \leq x < 12$$

$$\text{Vậy } D = [2; 12)$$

Câu 3: Tính tổng của $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n+3}{7^n}$

$$\text{Đặt } S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (2n+3)x^n \quad (|x| < 1) \Rightarrow S = S\left(\frac{1}{7}\right)$$

$$\text{Ta có } S(x) = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} n x^n + 3 \sum_{n=1}^{+\infty} x^n$$

$$= 2x \cdot \left(\sum_{n=1}^{+\infty} x^n \right)' + 3 \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} x^n = 2x \cdot \left(\frac{x}{1-x} \right)' + 3 \cdot \frac{x}{1-x} = 2 \cdot \frac{x}{(1-x)^2} + 3 \cdot \frac{x}{1-x}$$

$$\text{Vậy: } S = S\left(\frac{1}{7}\right) = 2 \cdot \frac{\frac{1}{7}}{\left(\frac{6}{7}\right)^2} + 3 \cdot \frac{\frac{1}{7}}{\frac{6}{7}} = \frac{8}{9}$$

Câu 4 khai triển $f(x) = x^2 \cdot \ln(5+x)$ thành chuỗi maclaurin

$$\text{Ta có } f(x) = x^2 \cdot \ln\left[5 \cdot \left(1 + \frac{x}{5}\right)\right] = x^2 \cdot \ln 5 + x^2 \cdot \ln\left(1 + \frac{x}{5}\right)$$

$$\ln\left(1 + \frac{x}{5}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \left(\frac{x}{5}\right)^n \cdot \frac{1}{n+1}$$

$$\Rightarrow f(x) = x^2 \cdot \ln 5 + \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{n+2}}{5^{n+1}}$$

Vậy ...

Câu 5: Giải pt vi phân

$$a) xy dx + (1+x)dy = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{x \cdot dx}{x+1} \Leftrightarrow \frac{1}{y} \cdot dy = \left(\frac{1}{x+1} - 1\right) dx$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{1}{y} dy = \int \left(\frac{1}{x+1} - 1\right) dx$$

$$\Leftrightarrow \ln|y| = \ln|x+1| - x + C$$

Vậy tích phân tổng quát của pt là

$$\ln|y| = \ln|x+1| - x + C$$

$$b) \frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = x$$

$$\Leftrightarrow y' - \frac{1}{x}y = x$$

$$\Leftrightarrow y = e^{\int \frac{1}{x} dx} \cdot \left[C + \int x \cdot e^{-\int \frac{1}{x} dx} \right]$$

$$= e^{\ln x} \cdot \left[C + \int x \cdot \frac{1}{x} dx \right] = x \cdot [C + \int dx]$$

$$\Leftrightarrow y = x \cdot [C + x]$$

Vậy NTQ của pt là $y = x \cdot [C + x]$

$$c) (4xy^2 + y)dx + (4x^2y + x)dy = 0$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} P(x,y) = 4xy^2 + y \\ Q(x,y) = 4x^2y + x \end{cases}$$

Ta có $\frac{\partial P}{\partial y} = 8xy + 1 = \frac{\partial Q}{\partial x}$ nên pt đã cho là pt vp toàn phần

$$\Rightarrow u(x,y) = \int_0^x P(x,0)dx + \int_0^y Q(x,y)dy$$

$$= \int_0^x 0 dx + \int_0^y (4x^2y + x) dy = 2x^2y^2 + xy$$

Vậy HP tổng quát của pt là $2x^2y^2 + xy = C$

Giải đề giữa kì G13

Đề 2 - Nhóm 1 - 20183

Người Giải

Trần Hoàng Ánh

Page: Giáo sư Toán

Câu 1: Xét sự hội tụ của các chuỗi số

a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \tan \frac{n+1}{2n^3+4}$

$\forall n \geq 1; 0 < \frac{n+1}{2n^3+4} < 1 \Rightarrow \tan \frac{n+1}{2n^3+4} > 0$ nên chuỗi đã cho là chuỗi dương

Khi $n \rightarrow +\infty \quad \frac{n+1}{2n^3+4} \rightarrow 0; \tan \frac{n+1}{2n^3+4} \sim \frac{n+1}{2n^3+4} \sim \frac{1}{2n^2}$

Mà chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n^2}$ Hội tụ nên theo TCSS \Rightarrow Chuỗi đã cho Hội

Vậy ...

b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(3n+1)!}{n^2 \cdot 3^n}$

Và $\forall n > 1: a_n = \frac{(3n+1)!}{n^2 \cdot 3^n} > 0$ nên chuỗi đã cho là chuỗi dương

Xét giới hạn

$$L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(3n+4)!}{(n+1)^2 \cdot 3^{n+1}} \cdot \frac{n^2 \cdot 3^n}{(3n+1)!} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(3n+4)(3n+3)(3n+2)}{3} = +\infty > 1$$

nên theo tiêu chuẩn D'Alembert \Rightarrow chuỗi đã cho phân kỳ

Vậy ...

c) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n - (-1)^n}$

Ta có
$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n - (-1)^n} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot (n + (-1)^n)}{n^2 - 1}$$
$$= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot n}{n^2 - 1} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - 1}$$

- Xét $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - 1}$; đây là chuỗi dương, có $\alpha = 2 > 1$ nên Hội tụ (1)

- Xét $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot n}{n^2 - 1}$ là chuỗi đan dấu với $a_n = \frac{n}{n^2 - 1} > 0 \quad \forall n \geq 2$

Xét hàm $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$ trên $[2; +\infty)$; $a_n = f(n)$

$$f'(x) = -\frac{x^2 + 1}{(x^2 - 1)^2} < 0 \text{ nên } f(x) \text{ nb trên } [2; +\infty)$$

$$\text{Lại có } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2 - 1} = 0$$

Do đó

$\{a_n\}$ là dãy đơn điệu giảm } \Rightarrow Chuỗi Htu theo Leibnitz (2)
 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

từ (1) và (2) \Rightarrow chuỗi đã cho Htu

Câu 2: Tìm MHT của chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{3^n} \cdot \left(\frac{x+1}{1-x}\right)^n$

Đặt $X = \frac{x+1}{1-x}$ chuỗi đã cho trở thành

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{3^n} \cdot X^n \quad (1); \quad (1) \text{ là chuỗi lũy thừa với } a_n = \frac{n^3}{3^n} > 0 \quad \forall n \geq 1$$

$$\text{Xét giới hạn } \rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n^3} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \text{BK Htu của (1)} : R = \frac{1}{\rho} = 3$$

Khoảng Htu $-3 < X < 3$

- Tại $X=3$: (1) trở thành $\sum_{n=1}^{\infty} n^3$, chuỗi này pki do $\lim_{n \rightarrow \infty} n^3 = +\infty$, \Rightarrow (1) pki tại $X=3$

- Tại $X=-3$: (1) trở thành $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^3$, chuỗi này pki do $\lim_{n \rightarrow \infty} |(-1)^n n^3| = +\infty$, \Rightarrow (1) pki tại $X=-3$

Như vậy $-3 < X < 3$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x+1}{1-x} > -3 \\ \frac{x+1}{1-x} < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2x-4}{x-1} > 0 \\ \frac{4x-2}{1-x} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x > 2 \end{cases}$$

Vậy MHT của chuỗi hàm đã cho là

$$D = (-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$$

Câu 3: Tính tổng của $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n \cdot 3^n}$

Đặt

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \quad (|x| < 1) \Rightarrow S = S\left(\frac{2}{3}\right)$$

Ta có

$$S(0) = 0; \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}$$

$$\Rightarrow S(x) = \int_0^x \frac{1}{1-t} dt = -\ln|1-t| \Big|_0^x = -\ln(1-x)$$

$$\text{Vậy } S = S\left(\frac{2}{3}\right) = -\ln\left(1 - \frac{2}{3}\right) = \ln 3$$

Câu 4 Giải các pt vi phân

a) $y' = (y+4x)^2$ (1)

Đặt $u = y+4x \Rightarrow y' = u' - 4$

(1) $\Leftrightarrow u' - 4 = u^2$

$\Leftrightarrow \frac{du}{dx} = u^2 + 4 \Leftrightarrow \frac{du}{u^2 + 4} = dx \Leftrightarrow \int \frac{du}{u^2 + 4} = \int dx$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \arctan \frac{u}{2} = x + C$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \arctan \frac{y+4x}{2} = x + C$

Vậy t/p tổng quát của pt là $\frac{1}{2} \arctan \frac{y+4x}{2} = x + C$

b) $y' + xy = x^3 y^3$ (1)

- $y=0$ là 1 nghiệm riêng của (1)

- Xét $y \neq 0$

(1) $\Leftrightarrow y^{-3} \cdot y' + x \cdot y^{-2} = x^3$ (*)

Đặt $z = y^{-2} \Rightarrow z' = -2 \cdot y' \cdot y^{-3}$, thay vào pt (*)

$z' - 2xz = -2x^3$

$\Leftrightarrow z = e^{\int 2x dx} \cdot [C + \int (-2x^3) \cdot e^{-\int 2x dx} dx]$

$= e^{x^2} \cdot [C + \int (-2x^3) e^{-x^2} dx] = e^{x^2} \cdot [C + (x^2 + 1) e^{-x^2}]$

$\Leftrightarrow \frac{1}{y^2} = e^{x^2} \cdot [C + (x^2 + 1) e^{-x^2}]$

Vậy ...

c) $(x-y)y dx = x^2 dy$ (1)

- ta có $x=0$ là 1 nghiệm riêng của (1)

- Xét $x \neq 0$

(1) $\Leftrightarrow \frac{(x-y)y}{x^2} = \frac{dy}{dx} \Leftrightarrow y' = (1 - \frac{y}{x}) \cdot \frac{y}{x}$ (*)

Đặt $u = \frac{y}{x} \Rightarrow y' = u'x + u$, thay vào (*)

$u'x + u = (1-u) \cdot u$

$\Leftrightarrow u'x = -u^2 \Leftrightarrow -\frac{du}{u^2} = \frac{dx}{x} \Leftrightarrow \int -\frac{du}{u^2} = \int \frac{dx}{x}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{u} = \ln|x| + C \Leftrightarrow \frac{x}{y} = \ln|x| + C$

Vậy t/p tổng quát của pt (*) là $\frac{x}{y} = \ln|x| + C$

Câu 5: Tìm p để chuỗi sau hội tụ $\sum_{n=2}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{(-1)^n}{n^p} \right)$ (1)

Điều kiện $1 - \frac{(-1)^n}{n^p} > 0 \Leftrightarrow 1 > \frac{(-1)^n}{n^p}; \forall n \geq 2$

- Nếu n chẵn $1 > \frac{1}{n^p}, \forall n \geq 2 \Leftrightarrow p > 0$

- Nếu n lẻ $1 > -\frac{1}{n^p}, \forall n \geq 2$, luôn đúng

\Rightarrow ĐK là $p > 0$, do đó khi $n \rightarrow +\infty; \frac{(-1)^n}{n^p} \rightarrow 0$

Áp dụng khai triển Maclaurin

$$\ln \left(1 - \frac{(-1)^n}{n^p} \right) = -\frac{(-1)^n}{n^p} - \frac{1}{2n^{2p}} + o\left(\frac{1}{n^{2p}}\right)$$

Để thấy $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}$ hội tụ theo tc Leibnitz

Do đó chuỗi (1) hội tụ khi $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2n^{2p}}$ hội tụ

$$\Leftrightarrow 2p > 1 \Leftrightarrow p > \frac{1}{2}$$

Vậy ...

Câu 6 khai triển hàm $y = \frac{1}{1-x+x^2-x^3+x^4}$ thành chuỗi lũy thừa

Ta có

$$y = \frac{x+1}{(x+1)(1-x+x^2-x^3+x^4)} = \frac{x+1}{x^5+1} = (x+1) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot (x^5)^n$$

$$\Leftrightarrow y = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot [x^{5n+1} + x^{5n}]$$

Vậy ...

Giải đề thi giữa kì GT3

Đề 2 - Nhóm 2 - 20183

Nguyễn Hải
Trần Hoàng Anh
Page: Giáo sư Toán

Câu 1: Xét sự hội tụ, p.ki của chuỗi

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4\sqrt{n^3}}$$

Chuỗi đã cho là chuỗi đan dấu và $a_n = \frac{1}{4\sqrt{n^3}} > 0 \quad \forall n \geq 1$

$$\text{ta có } 4\sqrt{n^3} < 4\sqrt{(n+1)^3} \quad \forall n \geq 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4\sqrt{n^3}} > \frac{1}{4\sqrt{(n+1)^3}}, \quad \forall n \geq 1$$

$$\Leftrightarrow a_n > a_{n+1}; \quad \forall n \geq 1$$

Do đó dãy $\{a_n\}$ đơn điệu giảm (1)

$$\text{Mặt khác } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4\sqrt{n^3}} = 0 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra chuỗi đã cho htụ theo t/c Leibnitz

Vậy ---

$$b) \sum_{n=1}^{\infty} (e^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1) \cdot \sin^2 \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$$

$$\text{Ta có, } 1 > \frac{1}{\sqrt{n}} > 0, \quad \forall n \geq 1 \Rightarrow e^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1 > e^0 - 1 = 0, \text{ do đó } a_n = (e^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1) \cdot \sin^2 \frac{1}{\sqrt[3]{n}} > 0$$

\Rightarrow chuỗi đã cho là chuỗi dương

$$\text{Khi } n \rightarrow \infty; \quad \frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 0; \quad \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \rightarrow 0$$

$$a_n = (e^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1) \cdot \sin^2 \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \sim \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{3\sqrt[3]{n^2}} = \frac{1}{n^{7/6}}$$

Mà chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{7/6}}$ htụ nên theo tiêu chuẩn ss \Rightarrow chuỗi đã cho hội tụ

Vậy ---

Câu 2: Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm

$$a) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n} \cdot (x+3)^n$$

Đặt $X = x+3$ chuỗi đã cho trở thành $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n} \cdot X^n \quad (1)$

(1) là chuỗi lũy thừa có $a_n = \frac{1}{n \cdot \ln n} > 0 \quad \forall n \geq 2$

Xét g/h

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot \ln n}{(n+1) \ln(n+1)} = 1$$

⇒ Bán kính hội tụ của (1)

$$R = \frac{1}{\rho} = 1 \Rightarrow \text{khoảng hội tụ của (1)} \quad -1 < x < 1$$

- Xét tại $x=1$, (1) trở thành $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n}$, chuỗi này p.ki theo tc tp

- Xét tại $x=-1$, (1) trở thành $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot \ln n}$, chuỗi này nt theo tc Leibnitz

⇒ MHT của (1) $-1 \leq x < 1$

$$\text{Như vậy } -1 \leq x+3 < 1 \Leftrightarrow -4 \leq x < -2$$

Vậy MHT của chuỗi đã cho là $D = [-4; 2)$

$$b) \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n \cos x}$$

$$\text{Đặt } u_n(x) = e^{-n \cos x}$$

$$\text{Xét giới hạn } L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{e^{-(n+1) \cos x}}{e^{-n \cos x}} \right| = e^{-\cos x}$$

$$\text{Chuỗi đã cho Htu khi } L < 1 \Leftrightarrow e^{-\cos x} < 1 \Leftrightarrow \cos x > 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} + k2\pi < x < \frac{\pi}{2} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Rightarrow \text{Khoảng Htu } -\frac{\pi}{2} + k2\pi < x < \frac{\pi}{2} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Xét tại $\cos x = 0$ chuỗi trở thành $\sum_{n=1}^{\infty} 1$, chuỗi này p.ki

Vậy, MHT của chuỗi hàm đã cho là $D = (-\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi) \quad k \in \mathbb{Z}$

Câu 3: Giải pt vi phân

$$a) y' = (x-2)(y^2+3)$$

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{y^2+3} = (x-2)dx \Leftrightarrow \int \frac{dy}{y^2+3} = \int (x-2)dx \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{y}{\sqrt{3}} = \frac{x^2}{2} - 2x + C$$

Vậy ...

$$b) y' = \frac{x^2+4y^2}{2xy}$$

$$\Leftrightarrow y' = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x}{y} + 4 \cdot \frac{y}{x} \right) \quad (1)$$

$$\text{Đặt } u = \frac{y}{x} \Rightarrow y' = u'x + u$$

$$(1) \Leftrightarrow u'x + u = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{u} + 4u \right)$$

$$\Leftrightarrow u'x = \frac{u^2 + \frac{1}{2}}{u} \Leftrightarrow \frac{u}{u^2 + \frac{1}{2}} du = \frac{dx}{x} \Leftrightarrow \int \frac{u}{u^2 + \frac{1}{2}} du = \int \frac{dx}{x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot \ln |u^2 + \frac{1}{2}| = \ln |x| + C$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot \ln \left(\frac{y^2}{x^2} + \frac{1}{2} \right) = \ln |x| + C$$

Vậy ...

$$c) y = x \cdot (y' - x \cos x) \quad (1)$$

Ta có $x=0$ không là nghiệm của pt (1) nên

$$(1) \Leftrightarrow y' - \frac{1}{x} \cdot y = x \cdot \cos x$$

$$\Leftrightarrow y = e^{\int \frac{1}{x} dx} \cdot [C + \int x \cdot \cos x \cdot e^{-\frac{1}{x} dx} \cdot dx]$$

$$\Leftrightarrow y = e^{\ln x} \cdot [C + \int x \cdot \cos x \cdot \frac{1}{x} dx]$$

$$= x \cdot [C + \int \cos x dx]$$

$$\Leftrightarrow y = x \cdot [C + \sin x]$$

Vậy ...

Câu 4: khai triển $f(x) = \int_0^{x+1} e^{t^2} dt$ thành chuỗi lũy thừa của $x+1$

Đặt $u = x+1 \Rightarrow f(x) = g(u) = \int_0^u e^{t^2} dt$; ta có $g(0) = 0$

$$g'(u) = e^{u^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^{2n}}{n!}$$

$$\Rightarrow g(u) = \int_0^u \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^{2n}}{n!} du = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^u \frac{u^{2n}}{n!} du = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^{2n+1}}{n! \cdot (2n+1)}$$

Vậy

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x+1)^{2n+1}}{n! \cdot (2n+1)}$$

Câu 5: khai triển thành chuỗi Fourier tuần hoàn với chu kỳ 2π

$$f(x) = \begin{cases} -1; & -\pi \leq x < 0 \\ 1; & 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

Đặt $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$, trong đó a_0, a_n, b_n được xác định

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^0 -dx + \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} dx = 0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^0 -\cos nx dx + \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} \cos nx dx = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^0 -\sin nx dx + \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} \sin nx dx$$

$$\Rightarrow b_n = \frac{1 + \cos n\pi}{n\pi} + \frac{1 - \cos n\pi}{n\pi} = \frac{2}{n\pi}$$

$$\Rightarrow f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n\pi} \cdot \sin nx = \frac{2}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$$

Câu 6 Tính tổng $S = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\pi^{2n-1}}{(2n-1)! 2^{4n-2}}$

Đặt $S(x) = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} = \sin x - x$

$$\Rightarrow S = S\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sin \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Vậy....

Câu 1 Xét sự htu, pki của chuỗi

$$a) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} \cdot \ln n}$$

Ta có chuỗi đã cho là chuỗi đan dấu với $a_n = \frac{1}{\sqrt{n} \cdot \ln n} > 0, \forall n \geq 2$

$$\text{và } \forall n \geq 2 \quad \sqrt{n+1} \cdot \ln(n+1) > \sqrt{n} \cdot \ln n$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{n+1} \cdot \ln(n+1)} < \frac{1}{\sqrt{n} \cdot \ln n}$$

\Rightarrow dãy $\{a_n\}$ đơn điệu giảm (1)

$$\text{Mặt khác } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n} \cdot \ln n} = 0 \quad (2)$$

Từ (1) & (2) \Rightarrow chuỗi đã cho Htu theo t/c Leibnitz

Vậy...

$$b) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2}$$

Ta có $0 < \frac{1}{n} < 1, \forall n \geq 1, \frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n} > 0 \Rightarrow a_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2} > 0$ nên chuỗi đã cho là chuỗi dương

$$\text{Xét g/hạn } C = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{1}{-n}\right]^{-1} = e^{-1} < 1$$

nên theo t/c Cauchy, chuỗi đã cho Htu

Vậy...

Câu 2: Tìm MHT của chuỗi hàm

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{n^2 - n + 1}$$

$$\text{Đặt } X = (x-1)^2; \quad X \geq 0$$

$$\text{Chuỗi đã cho trở thành } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - n + 1} \cdot X^n \quad (1)$$

(1) là chuỗi lũy thừa với $a_n = \frac{1}{n^2 - n + 1} > 0, \forall n \geq 1$

$$\text{Xét g/h } \rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - n + 1}{(n+1)^2 - (n+1) + 1} = 1$$

$$\Rightarrow \text{BK Hội tụ của (1) là } R = \frac{1}{\rho} = 1$$

⇒ Khoảng hội tụ của (1) : $0 < x < 1$

- Tại $x=0$, (1) trở thành $\sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0$ nên hội tụ ⇒ (1) Htụ tại $x=0$

- Tại $x=1$, (1) trở thành $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-n+1}$, chuỗi này htụ ⇒ (1) Htụ tại $x=1$

⇒ MHT của (1) : $0 \leq x \leq 1$

Do đó,
$$\begin{cases} (x-1)^2 \geq 0 \\ (x-1)^2 \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \leq 1 \\ x-1 \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 2$$

Vậy. Miền Htụ của chuỗi đã cho là $D = [0; 2]$

b) $\sum_{n=1}^{+\infty} n^{2-x^2}$

Ta có $\sum_{n=1}^{+\infty} n^{2-x^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{x^2-2}}$

Chuỗi đã cho Htụ $\Leftrightarrow x^2 - 2 > 1 \Leftrightarrow x^2 > 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -\sqrt{3} \\ x > \sqrt{3} \end{cases}$

Vậy MHT của chuỗi đã cho là

$$D = (-\infty; -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; +\infty)$$

Câu 3 Giải các pt vp

a) $y' + \frac{y}{x} = x^3$

$$\Leftrightarrow y = e^{\int -\frac{dx}{x}} \cdot [C + \int x^3 \cdot e^{\frac{dx}{x}} dx]$$
$$= e^{-\ln x} \cdot [C + \int x^4 dx]$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{1}{x} \cdot [C + \frac{x^5}{5}]$$

Vậy ...

b) $y' = \frac{-x+2y}{x}$; $y(1) = 2$

pt $\Leftrightarrow y' = \frac{2}{x} \cdot y = -1$

$$\Leftrightarrow y = e^{\int \frac{2}{x} dx} \cdot [C + \int -e^{-\frac{2}{x}} dx]$$
$$= e^{2\ln x} \cdot [C + \int -\frac{1}{x^2} dx]$$

$$\Leftrightarrow y = x^2 \cdot [C + \frac{1}{x}] ; y(1) = 2 \Rightarrow C + 1 = 2 \Rightarrow C = 1$$

Vậy nghiệm riêng của pt là $y = x^2 + x$

$$c) (1 - ye^{-x}) dx + e^{-x} dy = 0$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} P(x; y) = 1 - ye^{-x} \\ Q(x; y) = e^{-x} \end{cases}$$

Ta có $\frac{\partial P}{\partial y} = -e^{-x} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ nên pt đã cho là pt vi phân toàn phần

$$\Rightarrow u(x; y) = \int_0^x P(x; 0) dx + \int_0^y Q(x; y) dy \\ = \int_0^x dx + \int_0^y e^{-x} dy = x + ye^{-x}$$

Vậy Típ tổng quát của pt là $x + ye^{-x} = C$

Câu 4

Khai triển $f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$ thành chuỗi lũy thừa của $x - 3$

$$\text{Ta có } f(x) = \frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}$$

$$\text{Đặt } t = x - 3 \Rightarrow f(x) = g(t) = \frac{1}{t+1} - \frac{1}{t+2}$$

Ta có trong lân cận điểm $t_0 = 0$

$$\frac{1}{t+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^n$$

$$\frac{1}{t+2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{t}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{t^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{t^n}{2^{n+1}}$$

$$\Rightarrow g(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^n \left[1 - \frac{1}{2^{n+1}} \right] = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{2^{n+1} - 1}{2^{n+1}} \cdot t^n$$

$$\text{Vậy } f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{2^{n+1} - 1}{2^{n+1}} \cdot (x-3)^n$$

Câu 5: Xét sự hội tụ đều của chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{\sqrt[3]{(n+1)^4} + x^4}$

$$\text{Đặt } u_n(x) = \frac{\sin(nx)}{\sqrt[3]{(n+1)^4} + x^4}$$

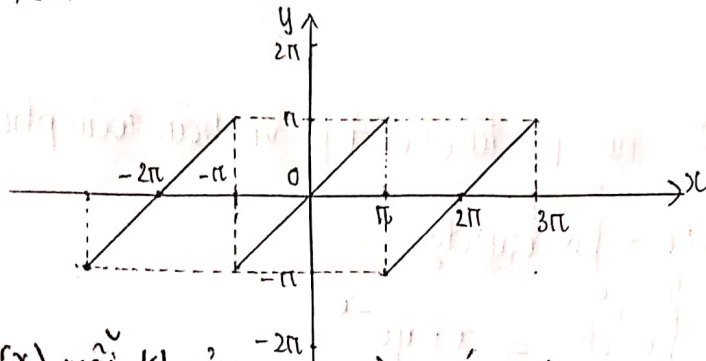
$$\text{Ta có } |u_n(x)| = \frac{|\sin(nx)|}{\sqrt[3]{(n+1)^4} + x^4} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{(n+1)^4} + x^4} < \frac{1}{n^{4/3}}, \forall n \geq 1; x \in \mathbb{R}$$

Mà $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{4/3}}$ là chuỗi dương và hội tụ

Nên theo t/c Weierstrass, chuỗi đã cho hội tụ đều trên \mathbb{R}

Vậy....

Câu 6 khai triển thành chuỗi Fourier của hàm số tuần hoàn với kỳ 2π
 $f(x) = x - 2\pi$; $\pi < x < 3\pi$



Tính trên $f(x)$ mỗi khoảng 2π về 2 phía của trục x , ta thu được đồ thị thác triển $f(x)$
 Như vậy trong $(-\pi; \pi)$: $f(x) = F(x) = x$

$$\text{Đặt } f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cdot \cos nx + b_n \cdot \sin nx)$$

Để thấy trong khoảng $(-\pi; \pi)$, $f(x)$ là hàm lẻ nên

$$a_0 = a_n = 0$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} f(x) \cdot \sin nx \, dx = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} x \cdot \sin nx \, dx = \frac{2 \cdot (-1)^{n+1}}{n}$$

$$\text{Vậy } f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2 \cdot (-1)^{n+1}}{n} \cdot \sin nx$$

Giải đề thi giữa kì GT3

Nhóm 1 - Đề 2 - 2017-2

Người giải
Trần Hoàng Ánh

Page: Giáo sư Toán

Câu 1. Xét sự htụ, phân kì

a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3n^2+1}{(\sqrt{3})^n}$

Với $\forall n \geq 1$; $a_n = \frac{3n^2+1}{(\sqrt{3})^n} > 0$ nên chuỗi đã cho là chuỗi dương

Xét giới hạn $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3(n+1)^2+1}{(\sqrt{3})^{n+1}} \cdot \frac{(\sqrt{3})^n}{3n^2+1} = \frac{1}{\sqrt{3}} < 1$

Nên theo tiêu chuẩn Cauchy \Rightarrow chuỗi đã cho htụ

Vậy...

b) $\sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{n+1} \cdot \ln\left(\frac{n^2+3}{n^2+1}\right)$

Ta có $\frac{n^2+3}{n^2+1} = 1 + \frac{2}{n^2+1} > 1 \Rightarrow a_n = \sqrt{n+1} \cdot \ln\left(1 + \frac{2}{n^2+1}\right) > 0$, nên chuỗi đã cho là chuỗi dương

Khi $n \rightarrow +\infty$; $\sqrt{n+1} \ln\left(1 + \frac{2}{n^2+1}\right) \sim \sqrt{n+1} \cdot \frac{2}{n^2+1} \sim \frac{2}{n^{3/2}}$

Mà chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n^{3/2}}$ htụ nên theo tiêu chuẩn ss

\Rightarrow chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ htụ

Ta có $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n + \ln 3 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ htụ

Vậy...

Câu 2: Tìm MHT của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} (n+1)}{n^2 \cdot 3^n (x+4)^n}$

Đặt $X = \frac{1}{x+4}$; $X \neq 0$

Chuỗi đã cho trở thành $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} (n+1)}{n^2 \cdot 3^n} \cdot X^n$ (1)

(1) là chuỗi lũy thừa với $a_n = \frac{(-1)^{n-1} (n+1)}{n^2 \cdot 3^n}$

Xét giới hạn

$$\rho = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+2}{(n+1)^2 \cdot 3^{n+1}} \cdot \frac{n^2 \cdot 3^n}{n+1} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \text{BK htụ của (1)} : R = \frac{1}{\rho} = 3$$

$$\Rightarrow \text{Khoảng htụ của (1)} : -3 < X < 3 \text{ \& } X \neq 0$$

- Xét tại $x = -3$: (1) trở thành $-\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{n^2}$, chuỗi này pki \Rightarrow (1) pki tại $x = -3$
- Xét tại $x = 3$: (1) trở thành $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{n+1}{n^2}$, chuỗi này Htu theo Leibniz
 \Rightarrow (1) Htu tại $x = 3$

\Rightarrow MHT của (1) $-3 < x \leq 3$ & $x \neq 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{x+4} > -3 \\ \frac{1}{x+4} < 3 \\ x \neq -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -\frac{13}{3} \\ x > -\frac{11}{3} \end{cases}$$

Vậy MHT của chuỗi đã cho là $D = (-\infty; -\frac{13}{3}) \cup (-\frac{11}{3}; +\infty)$

Câu 3: Khai triển Maclaurin của $f(x) = \frac{1}{3x+2}$

Ta có: trong lân cận $x_0 = 0$

$$f(x) = \frac{1}{3x+2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{3x}{2}} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \left(\frac{3x}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{3^n}{2^{n+1}} \cdot x^n$$

$$\text{Vậy } f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{3^n}{2^{n+1}} \cdot x^n$$

Câu 4, tìm MHT của $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n \cdot x^{4n}}{(n+1) \cdot 3^n}$

Đặt $X = x^4 \Rightarrow x \geq 0$: Dễ thấy chuỗi đã cho Htu tại $x = 0$ hay $X = 0$

Chuỗi đã cho trở thành $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+1) \cdot 3^n} \cdot X^n$ (1)

(1) là chuỗi lũy thừa có $a_n = \frac{n}{(n+1) \cdot 3^n} > 0 \forall n \geq 1$

Xét giới hạn

$$\rho = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{(n+2) \cdot 3^{n+1}} \cdot \frac{(n+1) \cdot 3^n}{n} = \frac{1}{3}$$

\Rightarrow BKHtu của (1) $R = \frac{1}{\rho} = 3$

\Rightarrow KHtu của (1) $0 \leq x < 3$

- Tại $x = 3$; (1) trở thành $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n+1}$; chuỗi này pki do $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \neq 0$

\Rightarrow (1) pki tại $x = 3$

Tóm lại ta có mhtu của (1): $0 \leq x < 3$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^4 \geq 0 \\ x^4 < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \sqrt[4]{3} \\ x < -\sqrt[4]{3} \end{cases}$$

Vậy MHTu của chuỗi đã cho là

$$D = (-\infty; -\sqrt[4]{3}) \cup (\sqrt[4]{3}; +\infty)$$

Câu 5: Xét sự Htu của chuỗi $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$

Đặt $a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$

Ta có $\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} 1; n=4k \\ 0; n=4k+1; n=4k+3 \\ -1; n=4k+2 \end{cases}$

\Rightarrow chuỗi đã cho trở thành

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{(4k)^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{(4k+2)^2+1}} \right) \quad (*)$$

ta có $\frac{1}{\sqrt{(4k)^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{(4k+2)^2+1}} = \frac{\sqrt{(4k+2)^2+1} - \sqrt{(4k)^2+1}}{\sqrt{[(4k)^2+1][(4k+2)^2+1]}}$

$$= \frac{2 \cdot (8k+2)}{\sqrt{[(4k)^2+1][(4k+2)^2+1]}} \cdot \frac{1}{\sqrt{(4k)^2+1} + \sqrt{(4k+2)^2+1}} \quad (**)$$

Rõ ràng $(**) > 0 \forall k \geq 0$ và khi $k \rightarrow +\infty \quad (**) \sim \frac{1}{8k^2}$

Mà $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{8k^2}$ HT nên theo t/c ss \Rightarrow chuỗi đã cho HT.

Vậy ...

Câu 6 Xét sự Htu đều của $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx^2}{n^6+4x^4}$ trên \mathbb{R}

Đặt $u_n(x) = \frac{nx^2}{n^6+4x^4}$

Ta có $|u_n(x)| = \frac{nx^2}{n^6+4x^4} \leq \frac{nx^2}{2 \cdot \sqrt{n^6 \cdot 4x^4}} = \frac{1}{2n^2}; \forall x \in \mathbb{R}$

Mà chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n^2}$ HT nên theo t/c Weierstrass

\Rightarrow chuỗi đã cho Htu đều trên \mathbb{R}

Vậy ...

Câu 7 Khai triển $f(x) = \frac{1}{(x-1)(x+3)}$ thành chuỗi lũy thừa của $x+2$

Đặt $t = x+2 \Rightarrow f(x) = g(t) = \frac{1}{(t-3)(t+1)} = \frac{1}{4} \left[-\frac{1}{3-t} - \frac{1}{1+t} \right]$

trong lân cận $t_0 = 0$ ta có

$$\frac{1}{3-t} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{t}{3}} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{t}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{3^{n+1}}$$

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^n$$

$$\Rightarrow g(t) = \frac{1}{4} \cdot \left[-\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{3^{n+1}} - \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot t^n \right] = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{+\infty} \left[(-1)^{n+1} - \frac{1}{3^{n+1}} \right] \cdot t^n$$

Vậy trong lân cận $x_0 = -2$

$$f(x) = \frac{1}{4} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \left[(-1)^{n+1} - \frac{1}{3^{n+1}} \right] \cdot (x+2)^n$$

Câu 8: Cho $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n \cdot e^{nx}$ với $x < 0$. Tính $\int_{-\ln 4}^{-\ln 3} f(x) dx$

Ta có

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\ln 4}^{-\ln 3} f(x) dx = \int_{-\ln 4}^{-\ln 3} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} n \cdot e^{nx} \right) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{-\ln 4}^{-\ln 3} n \cdot e^{nx} dx \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(e^{nx} \Big|_{-\ln 4}^{-\ln 3} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{3^n} - \frac{1}{4^n} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4^n} \\ &= \left(\frac{1}{1-\frac{1}{3}} - 1 \right) - \left(\frac{1}{1-\frac{1}{4}} - 1 \right) = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Câu 9: Tính tổng của $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \cdot n^2 \cdot x^n$ $-1 < x < 1$

Ta có $S = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \cdot n^2 \cdot x^n = x \left(\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \cdot n x^n \right)' = x \cdot S_1'$

$$S_1 = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \cdot n \cdot x^n = x \cdot \left(\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} x^n \right)' = x \cdot \left(\frac{x}{x+1} \right)' = \frac{x}{(x+1)^2}$$

$$\Rightarrow S = x \cdot S_1' = x \cdot \left(\frac{x}{(x+1)^2} \right)' = x \cdot \frac{1-x}{(x+1)^3} = \frac{x-x^2}{(x+1)^3}$$

Vậy $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \cdot n^2 \cdot x^n = \frac{x-x^2}{(x+1)^3}$

Giải đề giữa kì GT3

Nhóm 1 - Đề 3 - 20172

Người Giải

Trần Hoàng Anh

Page: Giáo sư Toán

Câu 1: Xét sự hội tụ, phân kì

$$a) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln(n+1)}$$

Chuỗi đã cho là chuỗi đan dấu với $a_n = \frac{1}{n \ln(n+1)} > 0, \forall n \geq 1$

Với $\forall n \geq 1$ $0 < n \ln(n+1) < (n+1) \ln(n+2)$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n \ln(n+1)} > \frac{1}{(n+1) \ln(n+2)} > 0$$

$$\Leftrightarrow a_n > a_{n+1}$$

\rightarrow dãy $\{a_n\}$ đơn điệu giảm (1)

$$\text{Mặt khác: } \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n \ln(n+1)} = 0 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra chuỗi đã cho hội tụ theo tiêu chuẩn Leibnitz

Vậy ...

$$b) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{n^2+n-1}$$

với $\forall n \geq 1 : a_n = \frac{\sqrt{n+1}}{n^2+n-1} > 0$ nên chuỗi đã cho là chuỗi dương

$$\text{Khi } n \rightarrow +\infty \quad a_n = \frac{\sqrt{n+1}}{n^2+n-1} \sim \frac{1}{n^{3/2}}$$

Mà $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ H.T. nên theo tcss \Rightarrow chuỗi đã cho hội tụ

Vậy ...

$$\text{Câu 2: Tìm H.T của H.Số } \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n+3}{3n+2}\right)^n \left(\frac{x+1}{3}\right)^n$$

$$\text{Đặt } X = \frac{x+1}{3} \Rightarrow \text{Chuỗi trở thành } \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n+3}{3n+2}\right)^n \cdot X^n \quad (1)$$

(1) là chuỗi lũy thừa với $a_n = \left(\frac{n+3}{3n+2}\right)^n > 0, \forall n \geq 1$

Xét giới hạn

$$\rho = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+3}{3n+2} = \frac{1}{3}$$

\Rightarrow B.K Hội tụ của (1) : $R = \frac{1}{\rho} = 3$

\Rightarrow Khoảng H.T của (1); $-3 < X < 3$

- Xét tại $X=3$: (1) trở thành $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n+3}{3n+2}\right)^n \cdot 3^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{7}{3n+2}\right)^n$

Ta có $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{7}{3n+2}\right)^n = e^{\frac{7}{3}} \neq 0$ nên theo đk cần, chuỗi trên pki

\Rightarrow (1) pki tại $X=3$

- Xét tại $X=-3$: (1) trở thành $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \cdot \left(1 + \frac{7}{3n+2}\right)^n$

Ta có $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left|(-1)^n \cdot \left(1 + \frac{7}{3n+2}\right)^n\right| = e^{\frac{7}{3}} \neq 0$ nên theo đk cần, chuỗi trên pki

\Rightarrow (1) pki tại $X=-3$

\Rightarrow MHT của (1) $-3 < X < 3$

$$\text{Do đó ta có } \begin{cases} \frac{x+1}{3} > -3 \\ \frac{x+1}{3} < 3 \end{cases} \Leftrightarrow -10 < x < 8$$

Vậy MHT của chuỗi đã cho là $D = (-10; 8)$

Câu 3: Xét sự htụ của chuỗi $\frac{1 \cdot 2}{3^2} - \frac{2 \cdot 3}{4^2} + \frac{3 \cdot 4}{5^2} - \frac{4 \cdot 5}{6^2} + \dots$

$$\text{Đặt } S = \frac{1 \cdot 2}{3^2} - \frac{2 \cdot 3}{4^2} + \frac{3 \cdot 4}{5^2} - \frac{4 \cdot 5}{6^2} + \dots$$

$$\Rightarrow S = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{(n+2)^2}$$

Ta có $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left|(-1)^{n-1} \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{(n+2)^2}\right| = 1 \neq 0$ nên theo đk cần \Rightarrow chuỗi pki

Vậy....

Câu 4 xét sự htụ của $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1})}$

Với $\forall n \geq 1$: $a_n = \frac{1}{n^2(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1})} = \frac{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}}{n^2} > 0$ nên chuỗi đã cho là chuỗi dương

$$\text{Khi } n \rightarrow +\infty \quad a_n = \frac{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}}{n^2} \sim \frac{2}{n^{3/2}}$$

Mà chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n^{3/2}}$ htụ nên theo tcss \Rightarrow chuỗi đã cho htụ

Vậy....

Câu 5: Tìm miền htụ của $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{3^n + 4^n}$

$$\text{Đặt } \frac{x^{2n+1}}{3^n + 4^n} = u_n(x)$$

Xét giới hạn

$$L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|x^{2n+3}|}{3 \cdot 3^n + 4 \cdot 4^n} \cdot \frac{3^n + 4^n}{|x^{2n+1}|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n + 1}{3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n + 4} \cdot x^2$$
$$= \frac{x^2}{4}$$

Chuỗi đã cho Htu khi $\frac{x^2}{4} < 1 \Leftrightarrow -2 < x < 2$

- Xét tại $x=2$ chuỗi đã cho trở thành $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{2n+1}}{3^n + 4^n}$

Ta có $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^{2n+1}}{3^n + 4^n} = 2 \neq 0 \Rightarrow$ chuỗi trên pk, và pk tại $x=2$

- Xét tại $x=-2$ chuỗi đã cho trở thành $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{2 \cdot 4^n}{3^n + 4^n}$

Ta có $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| (-1)^n \frac{2 \cdot 4^n}{3^n + 4^n} \right| = 2 \neq 0 \Rightarrow$ chuỗi trên pk và pk tại $x=-2$

Vậy MHT của chuỗi đã cho là $D = (-2, 2)$

Câu 6. Xét sự Htu đều của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{\sin(nx) + 2n^3}$ trên \mathbb{R}

Đặt $u_n(x) = \frac{2n+1}{\sin(nx) + 2n^3}$;

Và $\forall n \geq 1; \forall x \in \mathbb{R}; u_n(x) > 0; \sin(nx) \geq -1$

Do đó $|u_n(x)| = \frac{2n+1}{\sin(nx) + 2n^3} \leq \frac{2n+1}{2n^3 - 1}$

Khi $n \rightarrow +\infty; \frac{2n+1}{2n^3 - 1} \sim \frac{1}{n^2}$

Mà $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ Htu, nên theo t/c Weierstrass \Rightarrow chuỗi Htu đều trên \mathbb{R}

Vậy ...

Câu 7: khai triển $f(x) = \ln(x^2 + 4x + 8)$ thành chuỗi lũy thừa của $x+2$ với $-4 \leq x \leq 0$

Đặt $t = x+2 \Rightarrow -2 \leq t \leq 2$

$$f(x) = \ln(x^2 + 4x + 8) = \ln((x+2)^2 + 4) = \ln 4 + \ln\left(1 + \frac{(x+2)^2}{4}\right)$$

$$\Rightarrow f(x) = g(t) = \ln 4 + \ln\left(1 + \frac{t^2}{4}\right)$$

trong lân cận của $t_0 = 0$

$$\ln\left(1 + \frac{t^2}{4}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{t^2}{4}\right)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \cdot \left(\frac{t}{2}\right)^{2n}$$

$$\Rightarrow f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \cdot 4^n} \cdot (x+2)^{2n}$$

Vậy ...

Câu 8: Khai triển chuỗi maclaurin hàm số

$$f(x) = \int_0^x \sin^3 \sqrt{t^2} dt$$

ta có $f(0) = 0$

$$f'(x) = \sin x^2$$

trong lân cận điểm $x_0 = 0$

$$\sin x^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{4n+2}}{(2n+1)!}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{4n+2}}{(2n+1)!}$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \int_0^x f'(t) dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{4n+2}}{(2n+1)!} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x (-1)^n \frac{t^{4n+2}}{(2n+1)!} dt$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!(4n+3)} x^{4n+3}$$

Vậy ...

Câu 9: Tính tổng $S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{2^n \cdot n!}$

$$\text{Đặt } S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{n!} x^n; \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow S = S\left(\frac{1}{2}\right)$$

Ta có

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{n!} x^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n!} \right)' \\ &= \left(x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \right)' = (x \cdot e^x)' = (1+x)e^x \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } S = S\left(\frac{1}{2}\right) = \left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot e^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{e}$$

Câu 1:
Tính tổng của $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{5^n}$

Đặt $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} 4 \cdot x^n$ ($|x| < 1$) $\Rightarrow S = S\left(\frac{1}{5}\right)$

Ta có $\sum_{n=1}^{+\infty} 4x^n = 4 \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} x^n = 4 \cdot \left(\frac{1}{1-x} - 1\right) = \frac{4x}{1-x}$

$\Rightarrow S(x) = \frac{4x}{1-x}$

Vậy $S = S\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{\frac{4}{5}}{1 - \frac{1}{5}} = 1$

Câu 2, Xét sự hội, phân kỳ của chuỗi

a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+2}{6n^2+1}$

Với $\forall n \geq 1$; $a_n = \frac{n+2}{6n^2+1} > 0$ nên chuỗi đã cho là chuỗi dương

Khi $n \rightarrow +\infty$; $\frac{n+2}{6n^2+1} \sim \frac{1}{6n}$

Mà chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{6n}$ phân kỳ nên theo test \Rightarrow chuỗi đã cho phân kỳ

Vậy

b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{8^n \cdot (n!)^2}{n^{2n}}$

Với $\forall n \geq 1$, $a_n = \frac{8^n \cdot (n!)^2}{n^{2n}} > 0$ nên chuỗi đã cho là chuỗi dương

Xét giới hạn $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{8^{n+1} \cdot ((n+1)!)^2}{(n+1)^{2n+2}} \cdot \frac{n^{2n}}{8^n \cdot (n!)^2}$
 $= \lim_{n \rightarrow +\infty} 8 \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^{2n} = 8 \cdot e^{-2} > 1$

theo tiêu chuẩn D'Alembert \Rightarrow chuỗi đã cho phân kỳ

Vậy

c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{n} - n\pi\right)$

Ta có $\sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{n} - n\pi\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ (*)

(*) là chuỗi đan dấu có $a_n = \sin\left(\frac{1}{n}\right)$

$\forall n \geq 1$; $0 < \frac{1}{n} \leq 1 \Rightarrow 0 < \sin\left(\frac{1}{n}\right) \leq \sin 1$ nên $a_n > 0$

Ta có $\forall n \geq 1$ $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} \Rightarrow \sin \frac{1}{n} > \sin \frac{1}{n+1}$

$\Leftrightarrow a_n > a_{n+1}$; $\forall n \geq 1$

→ Dãy $\{a_n\}$ đơn điệu giảm (1)

Lại có, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sin \frac{1}{n} = 0$ (2)

Từ (1) & (2) \Rightarrow chuỗi đã cho HT theo H.C. Leibnitz

Vậy ...

Câu 3: Tìm MHT của các chuỗi hàm

a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2(x+1)^n}$ (1)

Đặt $u_n(x) = \frac{1}{n^2(x+1)^n}$

xét g/h $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{n^2(x+1)^n}{(n+1)^2(x+1)^{n+1}} \right| = \frac{1}{|x+1|}$

chuỗi hội tụ khi $L < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{|x+1|} < 1 \Leftrightarrow |x+1| > 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < -2 \end{cases}$

\Rightarrow khoảng HT $\begin{cases} x > 0 \\ x < -2 \end{cases}$

- Xét tại $x=0$, chuỗi (1) trở thành $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$, chuỗi này HT \Rightarrow (1) HT tại $x=0$

- Xét tại $x=-2$, chuỗi (1) trở thành $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$, chuỗi này HT theo Leibnitz \Rightarrow (1) HT tại $x=-2$

Vậy MHT của chuỗi $D = (-\infty; -2] \cup [0; +\infty)$

b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3x}{(1+9x^2)^n}$

Đặt $u_n(x) = \frac{3x}{(1+9x^2)^n}$

xét g/h $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{3x}{(1+9x^2)^{n+1}} \cdot \frac{(1+9x^2)^n}{3x} \right| = \frac{1}{1+9x^2}$

chuỗi HT khi $L < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{1+9x^2} < 1 \Leftrightarrow 9x^2 + 1 > 1 \Leftrightarrow 9x^2 > 0$ (Đúng)

\Rightarrow chuỗi đã cho HT với $\forall x \in \mathbb{R}$

Vậy MHT cần tìm là $D = \mathbb{R}$

c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cdot n^x + 1}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^{2-x}} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = S_1 + S_2$

Để thấy S_2 HT, khi đó chuỗi đã cho HT $\Leftrightarrow S_1$ HT

$S_1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^{2-x}}$ HT khi $2-x > 0 \Leftrightarrow x < 2$

Vậy MHT của chuỗi là $D = (-\infty; 2)$

Câu 4 tính tổng $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{4^n}$

Đặt $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 \cdot x^n$ với $|x| < 1$; $\Rightarrow S = S\left(\frac{1}{4}\right)$

Ta có $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 \cdot x^n = x \cdot \left(\sum_{n=1}^{+\infty} n \cdot x^n \right)' = x \cdot S_1'$

Với $S_1 = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^n = x \left(\sum_{n=1}^{+\infty} x^n \right)' = x \cdot \left(\frac{x}{1-x} \right)' = \frac{x}{(1-x)^2}$

$\Rightarrow S(x) = x \cdot S_1' = x \cdot \left(\frac{x}{(1-x)^2} \right)' = \frac{x^2 + x}{(1-x)^3}$

Vậy $S = S\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{20}{27}$

Câu 5: Khai triển $f(x) = \frac{1}{\sqrt{16-x^2}}$ thành chuỗi MacLaurin

ta có $f(x) = \frac{1}{4 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{x}{4}\right)^2}}$

trong lân cận của $x_0 = 0$ ta có

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{4}\right)^2}} = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{4}\right)^2 + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2!} \left(\frac{x}{4}\right)^4 - \frac{3 \cdot 5}{8} \cdot \frac{1}{3!} \left(\frac{x}{4}\right)^6 + \dots$$

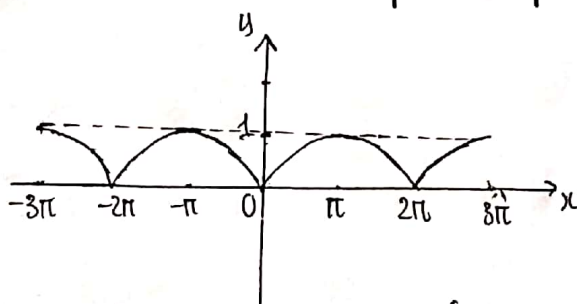
$$= 2 + \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{n! \cdot 2^n} \cdot \left(\frac{x^2}{16}\right)^n$$

$$= 2 + \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{n! \cdot 2^{5n}} \cdot x^{2n}$$

Vậy $f(x) = 2 + \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{n! \cdot 2^{5n}} \cdot x^{2n}$

Câu 6

Khai triển hàm số $f(x) = \left| \sin\left(\frac{x}{2}\right) \right|$ thành chuỗi Fourier



Ta có đồ thị của $f(x)$. Nhận thấy $f(x)$ tuần hoàn với chu kỳ 2π và là hàm chẵn

Gọi khai triển Fourier của $f(x)$ là

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cdot \cos nx + b_n \cdot \sin nx)$$

Vì $f(x)$ là hàm chẵn nên $b_n = 0$

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin \frac{x}{2} dx = \frac{4}{\pi}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cdot \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin \frac{x}{2} \cdot \cos nx dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left[\sin \left(\frac{2n+1}{2} x \right) - \sin \left(\frac{2n-1}{2} x \right) \right] dx \\ &= \frac{2}{\pi \cdot (2n+1)} - \frac{2}{\pi \cdot (2n-1)} = \frac{-4}{\pi \cdot (4n^2-1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Vậy } f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cdot \cos nx \\ &= \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos nx}{4n^2-1} \end{aligned}$$

Câu 1. xét sự hội tụ, phân kỳ của chuỗi

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(2n+1)}$

Với $\forall n \geq 1$; $\ln(2n+1) > 0 \Leftrightarrow a_n = \frac{1}{\ln(2n+1)} > 0$ nên chuỗi đã cho là chuỗi dương

Để dùng CN được $\ln x < x$, $\forall x > 1$

$\Rightarrow \ln(2n+1) < 2n+1 \quad \forall n \geq 1$
 $\Rightarrow a_n = \frac{1}{\ln(2n+1)} > \frac{1}{2n+1}$; khi $n \rightarrow +\infty$: $\frac{1}{2n+1} \rightarrow \frac{1}{2n}$

Mà $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ phân kỳ nên theo tcSS \Rightarrow chuỗi đã cho phân kỳ

Vậy...

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n+1)^{n^2}}$

Với $\forall n \geq 1$: $a_n = \frac{n^2}{(n+1)^{n^2}} > 0$ nên chuỗi đã cho là chuỗi dương

Xét giới hạn

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{(n+1)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n} \right)^{-n} \right]^{\frac{1}{n}} = e^{-1} < 1$

Nên theo tc Cauchy \Rightarrow chuỗi đã cho Hội tụ

Vậy...

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{\sqrt{n^3+1}}$

Đặt $a_n = \frac{\cos n}{\sqrt{n^3+1}}$. Xét chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos n|}{\sqrt{n^3+1}}$ (1)

Với $\forall n \geq 1$; $\frac{|\cos n|}{\sqrt{n^3+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^3+1}}$; khi $n \rightarrow +\infty$ $\frac{1}{\sqrt{n^3+1}} \sim \frac{1}{n^{3/2}}$

Mà $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ Htụ nên theo tcSS \Rightarrow chuỗi (1) Htụ

\Rightarrow chuỗi đã cho HTĐ nên hội tụ

Vậy...

Câu 2: Tìm MHT của

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1} (x-1)^n$

$$\text{Đặt } u_n(x) = \frac{1}{2n+1} \cdot (x-1)^n$$

$$\text{Xét giới hạn } L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(x-1)^{n+1}}{2n+3} \cdot \frac{2n+1}{(x-1)^n} \right| = |x-1|$$

chuỗi đã cho Htu khi $L < 1$

$$\Leftrightarrow |x-1| < 1 \Leftrightarrow -1 < x-1 < 1 \Leftrightarrow 0 < x < 2$$

\Rightarrow khoảng Htu $0 < x < 2$

- Xét tại $x=0$, chuỗi đã cho trở thành $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$. chuỗi này Htu theo Leibnitz

\Rightarrow chuỗi đã cho Htu tại $x=0$

- Xét tại $x=2$, chuỗi đã cho trở thành $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n+1}$, chuỗi này phân kì

\Rightarrow chuỗi đã cho pk tại $x=2$

Vậy MHT của chuỗi hàm là $D = [0; 2)$

Câu 3: Giải ptvp

$$a) 1+x+xy \cdot y' = 0 \quad (1)$$

ta có $x=0$ k^o là nghiệm nên

$$(1) \Leftrightarrow yy' = -\frac{1+x}{x}$$

$$\Leftrightarrow ydy = -\left(1+\frac{1}{x}\right)dx \Leftrightarrow \int ydy = -\int \left(1+\frac{1}{x}\right)dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{y^2}{2} = -x - \ln|x| + C$$

Vậy T/p Tq của pt là $\frac{y^2}{2} = -x - \ln|x| + C$

$$b) (x+2y)dx - xdy = 0 \quad (1)$$

ta có $x=0$ là 1 nghiệm riêng của pt(1)

- xét $x \neq 0$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = 1 + \frac{2}{x}y$$

$$\Leftrightarrow y' - \frac{2}{x} \cdot y = 1$$

$$\Leftrightarrow y = e^{\int \frac{2}{x} dx} \left[C + \int e^{-\frac{2}{x} dx} dx \right]$$

$$= e^{2\ln x} \left[C + \int \frac{1}{x^2} dx \right]$$

$$\Leftrightarrow y = x^2 \cdot \left[C - \frac{1}{x} \right]$$

Vậy NTK của pt là $y = x^2 \cdot \left[C - \frac{1}{x} \right]$ và có 1 ng riêng là $x=0$

Câu 4: Khai triển $f(x) = \ln(1+2x)$ thành chuỗi Maclaurin

Trong lân cận $x_0 = 0$ ta có

$$\ln(1+2x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{(2x)^n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{2^n}{n} \cdot x^n$$

Vậy

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{2^n}{n} \cdot x^n$$

Câu 5:

Gọi khai triển Fourier của $f(x) = \begin{cases} 1, & -\pi \leq x < 0 \\ -1 & 0 \leq x < \pi \end{cases}$ là

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cdot \cos nx + b_n \cdot \sin nx)$$

a_0, a_n, b_n được xác định

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} -dx = 0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 \cos nx dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} -\cos nx dx = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 \sin nx dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} -\sin nx dx$$

$$= \frac{(-1)^n - 1}{n\pi} + \frac{(-1)^n - 1}{n\pi} = 2 \cdot \frac{(-1)^n - 1}{n\pi} = \begin{cases} 0; & n = 2k \\ -\frac{4}{(2k+1)\pi}; & n = 2k+1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} -\frac{4}{(2k+1)\pi} \cdot \sin(2k+1)x$$

$$\text{Vậy } f(x) = -\frac{4}{\pi} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}$$

Câu 6: tính tổng $S = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \cdot 2^n}$

$$\text{Đặt } S(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n}; (|x| < 1) \Rightarrow S = S\left(\frac{1}{2}\right); S(0) = 0$$

$$\text{Ta có } S'(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^{n-1} \cdot x^{n-1} = -\frac{x}{x+1} = \frac{1}{x+1} - 1$$

$$\Rightarrow S(x) = \int_0^x S'(t) dt = \int_0^x \left(\frac{1}{t+1} - 1\right) dt = \ln|x+1| - x$$

$$\text{Vậy } S = S\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\left(1+\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} = \ln\frac{3}{2} - \frac{1}{2}$$

Câu 7: Giải pt vp: $(e^{2x} - y^2)dx + ydy = 0$

$$\text{Đặt } \begin{cases} P(x; y) = e^{2x} - y^2 \\ Q(x; y) = y \end{cases}$$

$$\text{ta có } \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{-2y - 0}{y} = -2$$

$$\Rightarrow \text{Thừa số t/p } \mu(x) = e^{\int -2 dx} = e^{-2x}$$

Nhân 2 vế của pt đã cho với $\mu(x)$ ta đc

$$(1 - e^{-2x} \cdot y^2)dx + e^{-2x} \cdot y dy = 0 \quad (1)$$

$$\text{Ta có } \frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = -2y \cdot e^{-2x} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x} \text{ nên (1) là pt vp toàn phần}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow u(x; y) &= \int_0^x P(x; 0)dx + \int_0^y Q(x; y)dy \\ &= \int_0^x dx + \int_0^y e^{-2x} \cdot y dy = x + \frac{y^2}{2} \cdot e^{-2x} \end{aligned}$$

Vậy Tích phân tổng quát của pt là $x + \frac{y^2}{2} \cdot e^{-2x} = C$

Câu 1: Xét sự Htu, pki

$$a) \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

Với $\forall n \geq 1$: $1 + \frac{1}{n} > 1 \Rightarrow a_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) > 0$ nên chuỗi đã cho là chuỗi dương

khí $n \rightarrow +\infty$; $\frac{1}{n} \rightarrow 0$, $\Rightarrow \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$

Mà $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ pki nên theo tcss \Rightarrow chuỗi đã cho pki

Vậy --

$$b) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)!}$$

Với $\forall n \geq 1$, $a_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$ nên chuỗi đã cho là chuỗi dương

$$\text{Xét giới hạn } L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)!}{(n+2)!} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+2} = 0$$

Ta có $L < 1$ nên theo tc chuẩn D'Alembert, chuỗi đã cho Htu

Vậy --

$$c) \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \cos \frac{1}{n}$$

$$\text{Đặt } a_n = (-1)^{n-1} \cdot \cos \frac{1}{n}$$

$$\text{Ta có } \lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \cos \frac{1}{n} = 1 \neq 0$$

nên theo điều kiện cần \Rightarrow chuỗi đã cho phân kì

Vậy --

Câu 2: Tìm miền Htu của

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2n+1} (x-2)^n$$

$$\text{Đặt } u_n(x) = \frac{n}{2n+1} \cdot (x-2)^n$$

$$\text{Xét giới hạn } L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{n+1}{2n+3} \cdot (x-2)^{n+1} \cdot \frac{2n+1}{n(x-2)^n} \right| = |x-2|$$

chuỗi đã cho Htu khi $L < 1$

$$\Leftrightarrow |x-2| < 1 \Leftrightarrow -1 < x-2 < 1 \Leftrightarrow 1 < x < 3$$

⇒ Khoảng Htu $1 < x < 3$

- Xét tại $x=1$. chuỗi đã cho trở thành $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{n}{2n+1}$

Có $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| (-1)^n \cdot \frac{n}{2n+1} \right| = \frac{1}{2} \neq 0$ nên theo đk cần, chuỗi trên pki

⇒ chuỗi đã cho pki tại $x=1$

- Xét tại $x=3$. chuỗi đã cho trở thành $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+1}$

Có $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} \neq 0$ nên theo đk cần, chuỗi trên pki

⇒ chuỗi đã cho pki tại $x=3$

Vậy MHT của chuỗi đã cho là $D=(1;3)$

Câu 3: Giải ptvp

a) $y' - y = e^x$

$$\Rightarrow y = e^{\int dx} \cdot [C + \int e^x \cdot e^{-\int dx} dx]$$

$$= e^x \cdot [C + \int dx]$$

$$\Rightarrow y = e^x \cdot [C + x]$$

vậy ...

b) $\frac{y}{x} dx + (y^3 + \ln x) dy = 0$

$$\text{Đặt } \begin{cases} P(x;y) = \frac{y}{x} \\ Q(x;y) = y^3 + \ln x \end{cases}$$

Ta có $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{x} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ nên pt đã cho là pt trình vptp

$$\Rightarrow u(x;y) = \int_0^y P(x;0) dx + \int_0^y Q(x;y) dy \\ = \int_0^x 0 dx + \int_0^y (y^3 + \ln x) dy = \frac{y^4}{4} + y \cdot \ln x$$

vậy ttp tổng quát của pt là $\frac{y^4}{4} + y \cdot \ln x = C$

Câu 4: Khai triển

$f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$ thành chuỗi Maclaurin

$$\text{Ta có } f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 2} = \frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1} = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-\frac{x}{2}}$$

Trong lân cận của $x_0 = 0$ ta có

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{x}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2^{n+1}}$$

Vậy $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}} \cdot x^n$

Câu 5

Gọi khai triển Fourier của $f(x)$ là

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$f(x)$ là hàm chẵn nên $b_n = 0$

a_0, a_n được xác định

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} 1 dx = 2$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{n} \sin nx \Big|_0^{\pi} = 0$$

$$\Rightarrow f(x) = 1$$

Câu 6. Xét hội tụ đều trên \mathbb{R} của chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{x^2+n^2}$ (*)

Ta có chuỗi (*) là chuỗi đan dấu, hội tụ $\forall x \in \mathbb{R}$ theo t/c Leibniz

Giả sử (*) hội tụ đều đến hàm $S(x)$

Xét chuỗi dư

$$R_n(x) = S(x) - S_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{x^2+k^2}$$

$$\Rightarrow |R_n(x)| = |S(x) - S_n(x)| < \frac{1}{x^2+n+3} < \frac{1}{n} < \varepsilon, \forall \varepsilon > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

từ $\frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$. Chọn $n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon} \right]$ khi đó với $\forall n \geq n_0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$|S(x) - S_n(x)| < \varepsilon$$

Theo định nghĩa, chuỗi hàm đã cho hội tụ đều trên \mathbb{R}

Câu 7 Giải pt vp

$$y dx - \frac{3+2xy}{y} dy = 0 \quad (1)$$

ĐK: $y \neq 0$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{3+2xy}{y^2}$$

$$\Leftrightarrow x' - \frac{2}{y} \cdot x = \frac{3}{y^2}$$

$$\Leftrightarrow x = e^{\int \frac{2}{y} dy} \left[C + \int \frac{3}{y^2} \cdot e^{-\int \frac{2}{y} dy} dy \right]$$

$$= e^{2 \ln y} \cdot \left[C + \int \frac{3}{y^4} dy \right]$$

$$\Leftrightarrow x = y^2 \cdot \left[C - \frac{1}{y^3} \right]$$

Vậy

Giải đề thi gk gk3

Đề 5 - 20162 - K61

Câu 1

Xét sự hội tụ phân kỳ của $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3}{3^n}$

Với $\forall n \geq 1$: $a_n = \frac{n^3}{3^n} > 0$ nên chuỗi đã cho là chuỗi dương

$$\text{Xét giới hạn } L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)^3}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n^3} = \frac{1}{3}$$

Ta có $L < 1$ nên theo tiêu chuẩn D'Alembert \Rightarrow chuỗi đã cho HTT

Vậy....

Câu 2: Giải ptvp $y' = \frac{x^2}{(1+2x^3)y}$

$$pt \Leftrightarrow y dy = \frac{x^2}{1+2x^3} dx \Leftrightarrow \int y dy = \int \frac{x^2}{1+2x^3} dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{y^2}{2} = \frac{1}{6} \cdot \ln|1+2x^3| + C$$

Vậy....

Câu 3: Tìm MHT của $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x+1)^n}{3n+1}$ (1)

$$\text{Đặt } u_n(x) = \frac{(2x+1)^n}{3n+1}$$

$$\text{Xét g/hạn } L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{(2x+1)^{n+1}}{3n+4} \cdot \frac{3n+1}{(2x+1)^n} \right| = |2x+1|$$

Chuỗi (1) HTT khi $L < 1$

$$\Leftrightarrow |2x+1| < 1 \Leftrightarrow -1 < 2x+1 < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 0$$

\Rightarrow Khoảng HTT của (1): $-1 < x < 0$

- Xét tại $x = 0$; (1) trở thành $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3n+1}$, chuỗi này pki \Rightarrow (1) pki tại $x = 0$

- Xét tại $x = -1$; (1) trở thành $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$, chuỗi này HTT theo Leibnitz

\Rightarrow (1) HTT tại $x = -1$

Vậy MHT của chuỗi hàm là

$$D = [-1; 0)$$

Câu 4. Tìm 3 số hạng đầu $\neq 0$ trong khai triển Maclaurin của $f(x) = 2x \cdot e^{x^2}$

Trong lân cận của $x_0 = 0$ ta có

$$e^{x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n!}$$

$$\Rightarrow f(x) = 2x \cdot e^{x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2 \cdot x^{2n+1}}{n!}$$

3 số hạng đầu khai triển của $f(x)$ là

$$f(x) = 2x + 2x^3 + x^5 + \dots$$

$$C_2: f(x) = (e^{x^2})' = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n!} \right)' = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2 \cdot x^{2n-1}}{(n-1)!}$$

Câu 5. Giải ptvp: $\cos y dx + (2y - x \sin y) dy = 0$

$$\text{Đặt } \begin{cases} P(x; y) = \cos y \\ Q(x; y) = 2y - x \sin y \end{cases}$$

ta có $\frac{\partial P}{\partial y} = -\sin y = \frac{\partial Q}{\partial x}$ nên pt đã cho là ptvp toàn phần

$$\begin{aligned} \Rightarrow u(x; y) &= \int_0^x P(x; y) dx + \int_0^y Q(0; y) dy \\ &= \int_0^x \cos y dx + \int_0^y 2y dy = x \cos y + y^2 \end{aligned}$$

Vậy t.p t.q của pt là: $x \cdot \cos y + y^2 = C$

Câu 6: Sử dụng tiêu chuẩn t.p, xét h.t.u, p.k.i của $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{-\ln n}}{n}$

$$\text{Đặt } f(x) = \frac{2^{-\ln x}}{x} = \frac{1}{x 2^{\ln x}}; x \geq 1; \Rightarrow a_n = f(n)$$

ta có $f(x)$ tục, dương và giảm trên $[1; +\infty)$

$$\text{xét t.p } \int_1^{+\infty} f(x) dx = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x \cdot 2^{\ln x}} = \int_1^{+\infty} \frac{d(\ln x)}{2^{\ln x}} = -\frac{1}{\ln 2} \cdot 2^{-\ln x} \Big|_1^{+\infty} = \frac{1}{\ln 2}$$

$\Rightarrow \int_1^{+\infty} f(x) dx$ hội tụ, nên theo h.c t.p \Rightarrow chuỗi đã cho hội tụ

Vậy ...

Câu 7: Xét sự htu đều trên $[0; +\infty)$ của chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^{-nx}}{4^n}$

$$\text{Đặt } u_n(x) = \frac{3^{-nx}}{4^n}$$

$$\text{Ta có } |u_n(x)| = \left| \frac{3^{-nx}}{4^n} \right| \leq \frac{1}{4^n} ; \forall n \in \mathbb{N}^*; \forall x \geq 0$$

Mà chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4^n}$ htu nên theo t/c Weierstrass, chuỗi htu đều trên $[0; +\infty)$

Vậy ...

Câu 8: Xét sự htu, pki của chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} \tan(\pi \sqrt{n^2+1})$

ta có

$$\tan(\pi \sqrt{n^2+1}) = \tan[\pi \sqrt{n^2+1} - n\pi] = \tan[\pi(\sqrt{n^2+1} - n)] = \tan \frac{\pi}{\sqrt{n^2+1} + n}$$

với $\forall n \geq 1; 0 < \frac{\pi}{\sqrt{n^2+1} + n} \leq \frac{\pi}{3} \Rightarrow a_n = \tan \frac{\pi}{\sqrt{n^2+1} + n} > 0$ nên chuỗi đã cho

là chuỗi dương

$$\text{Khi } n \rightarrow +\infty; \frac{\pi}{\sqrt{n^2+1} + n} \rightarrow 0; \Rightarrow a_n \sim \frac{\pi}{\sqrt{n^2+1} + n} \sim \frac{\pi}{2n}$$

Mà chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\pi}{2n}$ pki nên theo tcSS \Rightarrow chuỗi đã cho pki

Vậy ...

Câu 9: Tìm MHT và tính tổng của $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{[1+(n-1)x][1+nx]} = S(x)$

Xét tổng riêng thứ k

$$S_k = \sum_{n=1}^k \frac{x}{[1+(n-1)x][1+nx]}$$

$$\text{TXĐ: } x \neq -\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}^*$$

$$S_k = \sum_{n=1}^k \left(\frac{1}{1+(n-1)x} - \frac{1}{1+nx} \right) = 1 - \frac{1}{1+kx}$$

$$\Rightarrow S(x) = \lim_{k \rightarrow +\infty} S_k = \lim_{k \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{1+kx} \right) = \begin{cases} 1; & x \neq 0 \\ 0; & x = 0 \end{cases}$$

Và MHT của $S(x)$ là $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{n}\} \quad n \in \mathbb{N}^*$

Câu 10. OHP, trình $y' + 2017y = P_{2017}(x)$, có duy nhất 1 nghiệm
rằng đa thức, trong đó $P_{2017}(x)$ là đa thức bậc 2017 của x ,
ta có

$$y' + 2017y = P_{2017}(x)$$
$$\Rightarrow y = e^{\int -2017 dx} \cdot \left[C + \int P_{2017}(x) \cdot e^{\int 2017 dx} dx \right]$$

$$= e^{-2017x} \cdot \left[C + \int P_{2017}(x) \cdot e^{2017x} dx \right]$$

$$= e^{-2017x} \left[C + Q_{2017}(x) \cdot e^{2017x} \right]$$

$$\Rightarrow y = C \cdot e^{-2017x} + Q_{2017}(x)$$

pt có duy nhất là $y = Q_{2017}(x)$ khi $C=0$